

Prom. Nr. 3497

I. Freie Weglängen für die elektrische und die
thermische Leitfähigkeit

II. Freie Weglängen im supraleitenden Zustand,
im normalen Zustand und im Zwischenzustand

Von der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften
genehmigte

PROMOTIONSARBEIT

vorgelegt von

PETER RUDOLF WYDER

Dipl. Phys. ETH
von Riggisberg (Bern)

Referent: Herr Prof. Dr. J. L. Olsen
Korreferent: Herr Prof. Dr. J. Müller

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York
1965

Sonderdruck

aus „Physik der kondensierten Materie“ Bd. 3, S. 263–304 (1965)

Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York

Meinen Eltern
Maria

Inhaltsverzeichnis

	Seite
<i>I. Freie Weglängen für die elektrische und die thermische Leitfähigkeit</i>	
1. Einleitung	263
2. Experimentelle Methoden	266
2.1. Elektrische Messungen	266
2.2. Thermische Messungen	266
2.2.1. Experimentelle Anordnung	266
2.2.2. Temperaturmessung	267
2.3. Proben	271
3. Elektrische und thermische Leitfähigkeit dünner Drähte bei tiefen Temperaturen	274
3.1. Lösung der Boltzmann-Gleichung für dünne Drähte mit verschiedenen Relaxationszeiten für die elektrische und die thermische Leitfähigkeit	274
3.2. Bestimmung der freien Weglängen für die elektrische und die thermische Leitfähigkeit. Vergleich mit Lorenz-Zahl	278
3.3. Temperaturabhängigkeit der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit dünner Drähte. Matthiessen-Regel	281
4. Magnetische Widerstandsänderung	284
4.1. Magnetische Widerstandsänderung des Materials ohne „Freie-Weglängen-Effekt“. Lorenz-Zahl im Magnetfeld	284
4.2. Magnetische Widerstandsänderung dünner Drähte	287
<i>II. Freie Weglängen im supraleitenden Zustand, im normalen Zustand und im Zwischenzustand</i>	
1. Einleitung	292
2. Bestimmung der freien Weglängen im normalen und im supraleitenden Zustand	294
3. Streuung der Anregungen an den Phasengrenzen des Zwischenzustandes	297

Aus dem Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik
der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich, Schweiz

Freie Weglängen für die elektrische und die thermische Leitfähigkeit

Von

PETER WYDER

Mit 20 Figuren

(Eingegangen am 6. August 1964)

Mit Hilfe von „Freie-Weglängen-Effekt“-Messungen wird an dünnen Indiumdrähten die freie Weglänge der Elektronen für die elektrische und für die thermische Leitfähigkeit bestimmt. Im untersuchten Temperaturgebiet ($0^\circ < T < \Theta/20$, Θ : Debye-Temperatur), in dem die Elektron-Phonon-Stöße unelastisch sind, erweisen sich die beiden freien Weglängen als voneinander verschieden; es besteht jedoch ein einfacher, experimentell leicht nachweisbarer Zusammenhang zwischen den beiden freien Weglängen und der Lorenz-Zahl. Die Ungleichheit der beiden freien Weglängen kann ebenfalls durch „Freie-Weglängen-Effekt“-Messungen in starken longitudinalen Magnetfeldern nachgewiesen werden. Die Magnetfeldabhängigkeit der Lorenz-Zahl wird gemessen.

Le libre parcours des électrons, pour la conductibilité électrique et pour la conductibilité thermique, sera déterminé dans le cas de fils d'indium minces, à l'aide de mesures de l'effet de dimension. Pour l'intervalle de température étudié ($0^\circ < T < \Theta/20$, Θ : température de Debye), dans lequel les chocs électron-phonon sont inélastique, il apparaît que les deux libres parcours sont différents les uns des autres; il existe néanmoins une relation, facilement vérifiable expérimentalement, entre le libre parcours et le nombre de Lorenz. L'inégalité des deux libres parcours peut être également vérifiée par des mesures de l'effet de dimension dans le cas de champs magnétiques longitudinaux forts. La dépendance magnétique du nombre de Lorenz sera mesurée.

The electronic mean free path for the electrical and thermal conductivity of indium has been determined using size effect measurements on thin wires. In the temperature range investigated ($0^\circ < T < \Theta/20$, Θ : Debye-temperature) where the electron-phonon collisions are inelastic, the two mean free paths are different. There exists a simple relation between the mean free paths and the Lorenz-number which can be observed experimentally. The difference in the two mean free paths can also be seen using size effect measurements in strong longitudinal magnetic fields. The magnetic field dependence of the Lorenz-number has been measured.

1. Einleitung

Nachdem die modernen, quantenmechanisch exakten Theorien der Transportphänomene [1, 2, 3] in Metallen die übliche, halbklassische Behandlung mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung bis auf einige Grenzfälle rechtfertigen, ist es erneut von Interesse, die für die elektronischen Transportphänomene charakteristischen Größen wie Lebensdauer von Anregungen, Relaxationszeiten oder freie Weglänge experimentell zu bestimmen. Heute ist es nun möglich, Metalle von solcher Reinheit herzustellen, daß die freien Weglängen bei den Temperaturen des flüssigen

Heliums von der Größenordnung von Millimetern werden. Damit wird die freie Weglänge mit der Probengeometrie vergleichbar, und so läßt sich zum Beispiel der Einfluß des Probendurchmessers auf die Transportphänomene untersuchen. Dadurch kann man Rückschlüsse auf die freie Weglänge ziehen. Diese „Freie-Weglängen-Effekte“ sind seit langem bekannt [4] und sowohl theoretisch wie auch experimentell untersucht worden [5, 6]. Aber erst seit etwa zehn Jahren gelingt es, so reine Materialien herzustellen, daß man mit Proben von vernünftigen Dimensionen experimentieren kann.

Üblicherweise wird bei der Diskussion von Experimenten und Rechnungen dieser Art der spezifische Widerstand gemessen oder berechnet, obwohl es eine solche Größe in einem scharf definierten Sinne nicht mehr gibt. Man macht Messungen an homogenen Stäben mit konstantem Querschnitt, dividiert die totale Leitfähigkeit durch die Fläche des Querschnittes und multipliziert mit der Länge des Stabes. Der dadurch erhaltene „spezifische“ Widerstand kann dann immer noch vom Durchmesser des Querschnittes abhängen; falls man jedoch keine Diffusions- oder Leitfähigkeitsgleichungen für das Innere des Metalls aufschreibt, so führt dieses Vorgehen zu keinen Widersprüchen.

Qualitativ läßt sich nach NORDHEIM [7] der Einfluß der Probengeometrie auf die Transportphänomene sehr einfach beschreiben. Nimmt man an, die Elektronen werden an der Probenoberfläche wie an Verunreinigungen gestreut, so gilt eine Matthiessen-Regel [8]. In freien Weglängen geschrieben heißt das

$$\frac{1}{l_{\text{eff}}} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l_w}. \quad (1.1)$$

l_{eff} bedeutet die effektive, für das Transportphänomenen wirksame freie Weglänge, l die freie Weglänge im unendlich ausgedehnten Material und l_w die von den Wandstreuungen herrührende freie Weglänge. l_w ist im wesentlichen der mittlere Abstand zwischen zwei Wandpunkten; für einen unendlich langen Zylinder des Durchmessers d läßt sich diese Mittelwertbildung ausführen [9] und man erhält $l_w = d$. Setzt man die spezifische Leitfähigkeit als proportional zur freien Weglänge voraus, so erhält man für den spezifischen Widerstand $R(d)$ eines Zylinders vom Durchmesser d die Formel von NORDHEIM [7]

$$R(d) = R_\infty(1 + l/d). \quad (1.2)$$

Dabei bedeutet R_∞ den spezifischen Widerstand des unendlich ausgedehnten Materials. Durch Messen des Widerstandes verschieden dicker Drähte läßt sich somit die freie Weglänge mit Hilfe von (1.2) bestimmen.

Legt man nun noch zusätzlich ein longitudinales Magnetfeld an, so werden die Elektronen auf Spiralbahnen gezwungen. Für genügend starke Felder wird der Durchmesser der Spiralbahn mit dem Drahtdurchmesser vergleichbar und der größte Teil der Elektronen erreicht die Drahtoberfläche nicht mehr, wird also dort nicht mehr gestreut und man erhält eine Änderung des Widerstandes im Magnetfeld. Im Gegensatz zur gewöhnlichen magnetischen Widerstandsänderung des unendlich ausgedehnten Materials ist dies ein rein geometrischer Effekt und erlaubt, aus bekanntem Drahtdurchmesser und bekanntem Radius der Spiralbahn, die freie Weglänge zu berechnen.

Gewöhnlich werden Untersuchungen dieser Art nur für den spezifischen elektrischen Widerstand ausgeführt; für R lassen sich in (1.2) jedoch sowohl der elek-

trische Widerstand ρ wie auch der thermische Widerstand W einsetzen. Bis dahin haben einzig WHITE und WOODS [10] durch Messungen an einem dünnen Natriumzylinder im longitudinalen Magnetfeld nachgewiesen, daß der „Freie-Weglängen-Effekt“ auch für die thermische Leitfähigkeit existiert, und JUSTI, KOHLER und LAUTZ [11] zeigen an sehr dünnen aufgedampften Filmen, daß sich ebenfalls die Thermospannung verändert, wenn die freie Weglänge mit der Probendicke vergleichbar wird. Messungen, die einen Vergleich der für die thermische und der für die elektrische Leitfähigkeit charakteristischen freien Weglängen gestatten, gibt es jedoch noch nicht. Es schien daher von Interesse, diese Größen an den gleichen Proben direkt zu bestimmen, und zwar insbesondere in dem Temperaturbereich, in welchem die Stöße der Elektronen mit den Phononen nicht elastisch sind und man nicht ohne weiteres eine Relaxationszeit definieren kann. In diesem Temperaturbereich besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen den freien Weglängen einerseits und der Lorenz-Zahl andererseits, der sich durch Messen der drei Größen experimentell leicht prüfen läßt. Nach der einfachen kinetischen Theorie der Transportphänomene lassen sich der spezifische elektrische Widerstand ρ und der spezifische Wärmewiderstand W angeben [12] zu

$$\rho = \frac{m v_F}{e^2 n l_{el}} \quad (1.3 a)$$

$$W = \frac{3}{v_F c_v l_{th}}. \quad (1.3 b)$$

(m : Masse des Elektrons; v_F : Fermi-Geschwindigkeit; n : Zahl der Elektronen pro Volumeneinheit; e : Ladung des Elektrons; c_v : spezifische Wärme des Elektronengases pro Volumeneinheit.) Damit die Formeln (1.3) auch im Temperaturbereich $0^\circ < T < \Theta$ (Θ : Debye-Temperatur) gültig sind, müssen die beiden freien Weglängen l_{el} und l_{th} als ungleich angenommen werden. Benützt man den Sommerfeld-Wert für die spezifische Wärme des Elektronengases, so ergibt sich für die Lorenz-Zahl

$$L = \frac{\rho}{WT} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 \frac{l_{th}}{l_{el}}. \quad (1.4)$$

(k_B : Boltzmann-Konstante). — Im Abschnitt 3. dieser Arbeit wird durch Lösen der Boltzmann-Gleichung mit Randbedingungen exakt gezeigt, daß die Beziehung (1.2) auch für Temperaturen, für welche keine einheitliche Relaxationszeit definiert werden kann, richtig ist. Es werden die freien Weglängen l_{th} und l_{el} gemessen und es wird bewiesen, daß die Beziehung (1.4) experimentell erfüllt ist. Im Abschnitt 4. werden Messungen der magnetischen Widerstandsänderung für den elektrischen und den thermischen Widerstand dünner Drähte beschrieben. Einmal kann mit Hilfe eines longitudinalen Magnetfeldes die verschiedene Länge der beiden freien Weglängen nachgewiesen werden; dann ist aber auch die Feldabhängigkeit der Lorenz-Zahl des unendlich ausgedehnten Materials von einigem Interesse, da nur sehr selten sowohl der elektrische wie auch der thermische Widerstand an der gleichen Probe im Magnetfeld gemessen wurde.

Im Abschnitt 2. werden die experimentellen Methoden beschrieben. Die Messungen wurden an hochreinem, polykristallinem Indium ausgeführt; dieses Metall eignet sich ganz besonders für Untersuchungen dieser Art und wurde daher in letzter Zeit häufig für „Freie-Weglängen-Effekte“-Messungen in der elektrischen

Leitfähigkeit benützt [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. Indium läßt sich leicht durch Zonenschmelzen reinigen; infolge seiner großen Duktilität kann es sehr einfach in die Form von dünnen Drähten gebracht werden. Ferner hat Indium eine verhältnismäßig tiefe Debye-Temperatur, womit schon im experimentell leicht zugänglichen Temperaturgebiet von 1,5°K bis 4,2°K die Elektron-Phonon-Streuung eine wesentliche Rolle spielt. Wegen der großen Reinheit des Materials kann bei allen Wärmeleitfähigkeitsmessungen der von der Phononenleitfähigkeit herrührende, verschwindend kleine Beitrag vernachlässigt werden.

2. Experimentelle Methoden

2.1. Elektrische Messungen

Der elektrische Widerstand wurde durch eine einfache Strom-Spannungs-Messung bestimmt; zur Spannungsmessung diente entweder ein MacDonald-Galvanometerverstärker oder ein Milli-Mikrovoltmeter der Firma Keithley vom Typ 149. Wegen der großen Empfindlichkeit dieser Instrumente betrug der Meß-Strom auch bei den dicksten Proben nie mehr als 3 Amp. Um keine zusätzlichen Geometriemessungen machen zu müssen, wurde stets das Verhältnis des Widerstandes bei Heliumtemperatur zum Widerstand bei Zimmertemperatur gemessen; die Absolutwerte wurden dann mit Hilfe des Tabellenwertes [20] ($\rho_{293} = 8,82 \times 10^{-6} \Omega \text{ cm}$) berechnet, die Genauigkeit liegt etwa bei 3%. Bei Messungen in Magnetfeldern wurden die üblichen Feld- und Strom-Umkehrungen zur Elimination der Hall-Spannungen ausgeführt; bei den dicksten Proben betrug diese etwa 2% des gewöhnlichen Spannungsabfalles entlang der Probe. — Die dickeren Proben konnten elektrisch direkt im Wärmewiderstands-Meßtopf gemessen werden; dabei wurde auch der Vakuumraum mit flüssigem Helium gefüllt. Dünne Proben werden wegen der Lorentz-Kraft in transversalen Magnetfeldern zerrissen oder wenigstens gestreckt; für die elektrischen Messungen mußten sie daher sehr sorgfältig aus dem Wärmeleitfähigkeitskryostaten herausgenommen und zwischen zwei mit einer Vertiefung versehenen Platten eingebettet werden. Dabei konnte den Proben für die elektrische Messung nur auf etwa 5° genau die gleiche Orientierung im Magnetfeld gegeben werden, die sie bei den thermischen Messungen hatten.

Für die Messung im transversalen Feld diente ein Eisenkern-Elektromagnet, der etwa 8000 Oersted liefert. Die Messungen im longitudinalen Feld erfolgten in einem durch flüssige Luft gekühlten Solenoid mit welchem Felder bis zu 10000 Oersted erreicht werden konnten.

2.2. Thermische Messungen

2.2.1. Experimentelle Anordnung: Zur Messung des Wärmewiderstandes bei Temperaturen des flüssigen Heliums wurde die klassische Methode eines stationären Wärmestromes angewendet. Heizt man das eine Ende einer Probe konstanten Querschnittes mit einer bekannten Leistung L während sich das andere Ende in gutem thermischen Kontakt mit einem Kältebad befindet, so erhält man einen Temperaturgradienten dT/dz . Nach Abwarten des stationären Zustandes läßt sich somit durch Messen der Temperaturdifferenz $\Delta T = T_2 - T_1$ zwischen zwei Punkten 1 und 2 im Abstand Δz bei bekannter Querschnittsfläche F der spezifische Wärmewiderstand W berechnen durch

$$W = (F/\Delta z) \cdot (\Delta T/L). \quad (2.1)$$

Für Absolutmessungen muß der Geometriefaktor $(F/\Delta z)$ bestimmt werden. Dies geschah sowohl durch direktes Messen mit Schublehre und Mikrometer, wie durch Wägen der Proben und unter Benützung des Tabellenwertes für das spezifische Gewicht, als auch durch Messen des elektrischen Widerstandes zwischen den beiden Punkten 1 und 2 bei Zimmertemperatur und unter Benützung des Tabellenwertes für den spezifischen Widerstand. Die Genauigkeit in der Bestimmung des Geometriefaktors betrug etwa 5%. — Die Leistung wurde durch elektrische Widerstandsheizung zugeführt, als Heizelement diente ein 10-k Ω -Radiowiderstand von $1/10$ Watt Nominalleistung der Firma Philips. Diese Radiowiderstände haben den großen Vorteil, daß sich ihr Widerstand innerhalb sehr großer Temperaturbereiche nicht verändert. — Als Zuführungen zur Heizung und zu den Thermometern kamen 0,2 mm dicke Konstantan-Drähte zur Anwendung. Nullversuche haben gezeigt, daß der Wärmestromverlust durch

Zuführdrähte, Probenhalterung und Strahlung etwa 2% des totalen durch die Probe geschickten Wärmestromes betrug.

Die benützten Temperaturdifferenzen ΔT liegen zwischen $0,2^\circ \text{K}$ und $0,4^\circ \text{K}$. Diese Größenordnung ist durch die Temperaturabhängigkeit des Wärmewiderstandes $W(T)$ gegeben; die linearisierte Gleichung (2.1) darf nur dann benützt werden, wenn der für Korrekturen erster Ordnung maßgebende Ausdruck $(dW/dT) \cdot (\Delta T/W)$ klein ist. Im schlimmsten Fall betrug dieser Ausdruck mit den angegebenen Temperaturdifferenzen etwa 1% und kann somit vernachlässigt werden.

Die experimentelle Anordnung ist in der Fig. 1 dargestellt. Messungen in Magnetfeldern erfordern einen sehr dünnen Meßtopf; die Meßanordnung muß daher gedrängt sein und hatte einen Durchmesser von 12 mm. — Um einen möglichst guten Wärmekontakt mit dem Bad zu haben, wurde die Probe an einem Kupferblock angelötet. Da die Steifigkeit besonders der ganz dünnen Proben nicht mehr genügt, um auch nur das Eigengewicht der Probe zu tragen, mußte parallel zur Probe eine Probenhalterung aus Plexiglas aufgestellt werden. Daran konnten die Radiowiderstands-Thermometer, in einem Abstand Δz von etwa 4 cm, und die Heizung befestigt werden. Die Kontaktdrähte dieser drei Radiowiderstände wurden an dünne Indiumdrähte angelötet, die ihrerseits durch Anpressen oder Anlöten an der Probe befestigt wurden. Als Träger für die Konstantan-Zuführdrähte diente ein Kupfergestell. Der Vakuummantel aus Messing wurde durch Zulöten mit dem tiefschmelzenden Woods-Metall geschlossen; da die Woodsche Legierung supraleitend wird, mußten zur Vermeidung magnetischer Streufelder in der Nähe der Probe die Lötstellen etwas von dieser entfernt angebracht werden. Die Zuführdrähte wurden durch Kovar-Glasdurchführungen der Jenaer Glaswerke aus dem Vakuumraum ins Heliumbad geführt; diese Durchführungen erwiesen sich im allgemeinen als dicht, nur falls sehr oft abgekühlt und wieder aufgewärmt wurde, zeigten sich im Glas kleine Risse, die zu Undichtigkeiten führten.

Die Evakuierung erfolgte mit einer während der Messung laufenden Öl-Diffusionspumpe; bei Zimmertemperatur war das Vakuum stets besser als 10^{-6} Torr.

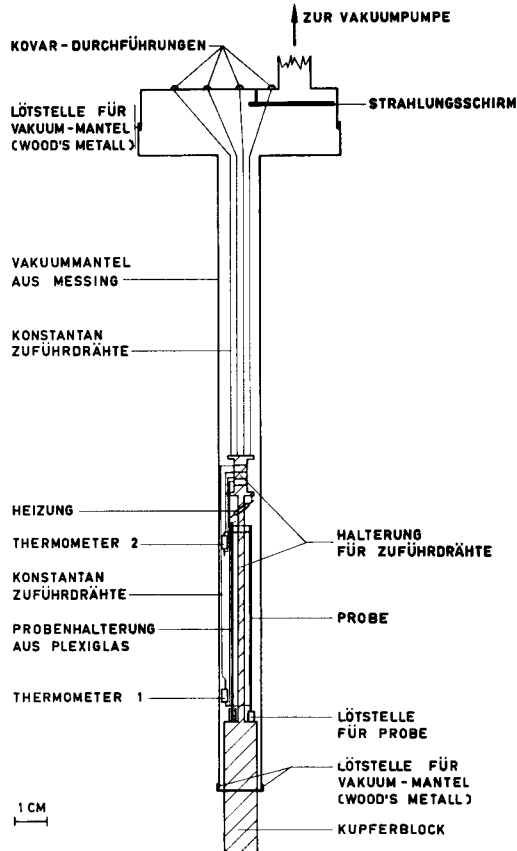


Fig. 1. Experimentelle Anordnung zur Messung des Wärmewiderstandes bei tiefen Temperaturen in Magnetfeldern

2.2.2. Temperaturmessung: Zur Temperaturmessung wurden gewöhnliche Radiowiderstände aus Kohleschichten von $\frac{1}{10}$ Watt Leistung und 100Ω Widerstand bei Zimmertemperatur der Allen-Bradley Company, Wisconsin, verwendet [21]. Wegen ihrer Kleinheit sind diese Widerstände für die vorliegende experimentelle Anordnung sehr geeignet; in dem untersuchten Temperaturintervall von 5°K bis $1,5^\circ \text{K}$ ändert sich ihr Widerstand von etwa 1800Ω auf 25000Ω , was eine recht genaue Temperaturmessung ermöglicht. Unangenehmerweise sind diese Widerstände nicht ideal reproduzierbar; beim Aufwärmen auf Zimmertemperatur und erneutem Abkühlen kann sich die Temperatur-Widerstands-Charakteristik bis zu 5% ändern.

Tabelle 1. *FORTRAN-Programm zur Auswertung von Wärmeleitfähigkeitsexperimenten mit Hilfe eines IBM-Rechenautomaten*

```

C      AUSWERTUNG VON WAERMELEITFAEHIGKEITSEXPERIMENTEN.

1      FORMAT (10X,20H
2      FORMAT (4F10.6)
3      F.ORMAT (F10.4,2F12.2)
4      FORMAT (/)
5      FORMAT (2F10.7)
6      FORMAT (4F12.5)
7      FORMAT (3F10.6)
8      FORMAT (6F12.7)
9      DIMENSION A(2,4), RA(2),B(2,2),EB(2,2),EC(2,2),T(2), DT(2)
10     DIMENSION DTA(2), JBOOL(2),X(2,30),Y(2,30),XQ(2),YQ(2)
11     PRINT 5

C      AUSGLEICHSRECHNUNG FUER EICHUNG.

      PRINT 5
      READ 1
      PRINT 1
      PRINT 5
      DO 10 I=1,4
      A(1,I)=0.
10     A(2,I) = 0
      DO 15 K=1,30

C      EICHWERTE.
      READ 2, TA,RA(1),RA(2)
      IF (TA) 19,20,19
19     DO14 I=1,2
      IF(RA(I))12,13,12
12     X(I,K) = LOG(RA(I))
      Y(I,K) = SQRT(X(I,K)/TA)
      A(1,I)=A(1,I)+1.
      A(1,2)=A(1,2)+X(I,K)
      A(1,3)=A(1,3)+Y(I,K)
      A(1,4) = A(1,4)+X(I,K)*X(I,K)
14     JBOOL(I) = 1
      PRINT 3,TA,RA(1),RA(2)
15     CONTINUE
13     PRINT 3,TA,RA(1)
      JBOOL(I)=0
      GO TO 15
20     PRINT 5

C      AUSGLEICHSRECHNUNG.STATISTISCHE FEHLER.
      K=K-1
      DO 22 I=1,2
      IF (JBOOL(I))21,22,21
21     XQ(I) = A(1,2)/A(1,1)
      YQ(I) = A(1,3)/A(1,1)
      F = XQ(I)/YQ(I)
      D = 0.
      B(1,1) = 0.
      B(1,2) = 0.
      DO 211 J=1,K
      B(1,1) = B(1,1) +(X(I,J)-XQ(I))*(X(I,J)-F*Y(I,J))
      D = D + (X(I,J)-XQ(I))*(X(I,J)-XQ(I))
211    B(1,2) = B(1,2) + (X(I,J)-XQ(I))*(Y(I,J) - YQ(I))
      B(1,1) = B(1,1)*YQ(I)/D
      B(1,2) = B(1,2)/D
      E = 0.
      DO 210 J=1,K
      F = B(1,1)+B(1,2)*X(I,J ) - Y(I,J )

```

Tabelle 1 (Fortsetzung).

```

210  E = E+F*F
      E = E/(A(1,1)-2.)
      DO 23 J=1,2
      L=-3*J+7
      EB(1,J)=SQRT(E*A(1,L)/ (D*A(1,1)))
      EC(1,J)=EB(1,J)/B(1,J)
23   PRINT 9,B(1,J),EB(1,J),EC(1,J)

C     BERECHNUNG DER WAERMELEITFAEHIGKEIT.

22   PRINT 5
      IF(JBOOL(2))220,29,220

C     PROBENGEOMETRIE.
220  READ 6,D,DELTA
      PRINT 6,D,DELTA
      PRINT 5
      F=3.14156*(D/2.)*(D/2.)
      AL=F/DELTA

C     MESSWERTE.
29   READ 2,RA(1),RA(2),U,V
      PRINT 5
      IF(U)30,31,3
30   UA=U
31   IF(V)32,39,32
32   VA=V*0.0001
39   IF(RA(1))33,111,33
33   DO 34 I=1,2
      IF(JBOOL(I))37,45,37
37   ANR=LOG(RA(I))
      D=1.0/(B(1,1)+B(1,2)*ANR)
      T(I)=ANR*D*D
      DT(I)=2.*(EB(1,1)+EB(1,2)*ANR)*D
34   DTA(1)=DT(I)*T(I)
      PRINT 8, RA(1), RA(2)
      PRINT 8, UA,VA
      Z1=T(2)-T(1)
      Z2=(T(2)+T(1))/2.
      Z3=AL*Z1/(UA*VA)
      Z4= 1./Z3
      ZZ1 = SQRT(DTA(1)*DTA(1))+SQRT(DTA(2)*DTA(2))
      ZZ2 = ZZ1/Z1
      PRINT 50,Z1,Z2,Z3,Z4,T(1),T(2)

C     DRUCKEN DER STATISTISCHEN FEHLER FUER KONTROLLEN.
42   IF(SENSE SWITCH 1)42,43
43   PRINT 8 ,DTA(1),DTA(2),ZZ1,ZZ2
44   GO TO 29
45   PRINT 8, RA(1), RA(2)
      PRINT 8 ,T(1),DT(1),DTA(1)
      GO TO 29
      END

```

Eine wesentliche Verbesserung der Reproduzierbarkeit kann dadurch erreicht werden, daß man sie in vakuumdichte, mit reinem Heliumgas gefüllte Messinghülsen einpackt. Trotzdem wurden die Thermometer bei jedem Experiment neu geeicht. Die thermische Verbindung mit der Probe erfolgte direkt mit Hilfe der Zuführdrähte; bei sehr tiefen Temperaturen verlängerte

Tabelle 2. Beispiel einer Auswertung eines Wärmeleitfähigkeitsexperimentes.
Bei der Auswertung der zweiten Messung wurde der Schalter 1 ausgeschaltet.

IN 1, 27, 3, 1963, LONG.		TITEL	
		EICHUNG	
T	R_1	R_1	
4.1020	2398.00	2356.00	
3.9950	2549.00	2504.00	
3.8960	2703.00	2653.00	
3.7780	2909.00	2853.00	
3.6830	3095.00	3033.00	
$-1.669699 = a$	$.002319 = da$	$-.001389 = \frac{da}{a}$	R_1
$.391528 = b$	$.000293 = db$	$.000749 = \frac{db}{b}$	
$-1.687345 = a$	$.004815 = da$	$-.002854 = \frac{da}{a}$	R_2
$.394481 = b$	$.000610 = db$	$.001547 = \frac{db}{b}$	
$d = .1488000$	$4.8520000 = \Delta Z$		
$R_1 = 2223.00000$	$R_2 = 1932.00000$		
$U = 21.00000$	$J = .00190$		
$\Delta T = .2516000$	$T = 4.3690788$	$W = .0225999$	$\lambda = 44.2478160$
$dT_1 = .02884$	$dT_2 = .06536$	$d(\Delta T) = .09421$	$\frac{dW}{W} = .37445$
$R_1 = 2350.00000$	$R_2 = 2042.00000$		$T_2 = 4.4948788$
$U = 21.00000$	$J = .00190$		
$\Delta T = .2399066$	$T = 4.2591240$	$W = .0215496$	$\lambda = 46.4045210$
			$T_1 = 4.1391707$
			$T_3 = 4.3790773$

sich dadurch wegen der sehr kleinen Wärmeleitfähigkeit der Kohleschichten [22] die Zeit, die verstreicht, bis sich der thermisch stationäre Zustand einstellt. Diese Relaxationszeit blieb jedoch stets in der Größenordnung von Sekunden.

Für diese Kohleschichten gibt es keinen analytischen Zusammenhang zwischen Widerstand und Temperatur. In dem untersuchten Temperaturintervall läßt sich jedoch das

Verhalten recht genau durch eine zweikonstantige, semiempirische Formel beschreiben [23]:

$$T(R) = (a + b \cdot \ln R)^{-2} \cdot \ln R. \quad (2.2)$$

Dabei bedeuten T die Temperatur und R den Widerstand; a und b sind anzupassende, nahezu temperaturunabhängige Konstanten. Wie man aus der Formel (2.2) erkennt, ist die Auswertung außerordentlich mühsam und zeitraubend. Macht man sehr viele Wärmeleitfähigkeitsexperimente, so müssen stets die gleichen Rechnungen wiederholt werden und es lohnt sich die Anwendung eines elektronischen Rechenautomaten [24]. Die Auswertung der Experimente wurde daher für einen IBM-1620-Rechenautomaten programmiert*, eine Verbesserung der von WYDER [24] beschriebenen Methode.

Dem Automaten wurden die Eich- und Meßwerte, die geometrischen Abmessungen der Probe und die zugeführte Heizleistung eingegeben, während er direkt die Werte für den Widerstand herausdruckte. Durch eine Ausgleichsrechnung wurden aus etwa 5 Eichmessungen die Konstanten $a_{1,2}$ und $b_{1,2}$ der Formel (2.2) für beide Thermometer bestimmt. Diese Konstanten wurden dann benützt, um $\Delta T = T_2(R_2) - T_1(R_1)$ und $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ der eigentlichen Messung zu berechnen. Für die Ausgleichsrechnung wird die Fehlergleichung

$$a + b \ln R_j - (\ln R_j/T_j)^{1/2} = r_j \quad (2.3)$$

verwendet; der Index j numeriert die einzelnen Eichwerte, r_j bedeutet das Residuum. Dies ist nicht ganz richtig, da R_j und T_j die unabhängigen Variablen sind; (2.3) ist jedoch ein sinnvoller und einfacher Ansatz für die Fehlergleichung. Zu Kontrollzwecken wurden die statistischen Fehler für jede auftretende Größe berechnet. Da im allgemeinen nur wenige Eichpunkte benützt wurden, ist der statistische Fehler recht groß, der wahrscheinliche Fehler betrug etwa 30% vom statistischen Fehler. Um den Schreibprozeß nicht zu überlasten, konnte das Herausdrucken der relativen statistischen Fehler mit Hilfe eines Schalters während der Rechnung abgestellt werden.

Das Programm in der für IBM-Maschinen üblichen FORTRAN-Sprache ist in der Tabelle 1 aufgeschrieben. Da für einige Berechnungen die übliche achtstellige Genauigkeit der Maschine nicht genügte, mußten einige, in dem Programm ersichtliche Kunstgriffe angewendet werden. Ein Beispiel für eine ausgeführte Rechnung ist in der Tabelle 2 aufgeführt.

Die hier beschriebene Methode zur Auswertung hat gegenüber der von CHALLIS [25] angegebenen Methode — er benützt eine differenzierte Form der Gleichung (2.2) und nur ein Thermometer zur Eichung — den Vorteil, daß die beiden Thermometer nicht aneinander angepaßt werden müssen und daß die Temperaturdifferenzen beliebig groß sein können. —

Die Allen-Bradley Radiowiderstände zeigen in Feldern von 10000 Oersted eine kleine Widerstandsänderung von etwa 3%. In der ΔT -Bestimmung braucht dies jedoch nicht berücksichtigt zu werden, da sie herausfällt.

Die Widerstände wurden einzeln mit einer Wheatstoneschen Brücke gemessen, die es gestattet, mit Hilfe einer Blindschleife den Widerstand der Zufuhrdrähte zu kompensieren. Die benötigte Meßleistung betrug stets weniger als 1% der Heizleistung. —

Die Temperatur zur Eichung der Thermometer wurde mit Hilfe der 1958-He⁴-Temperaturskala des *National Bureau of Standards* bestimmt, der hydrostatische Druck wurde nicht berücksichtigt. Die Genauigkeit in der Bestimmung von ΔT beträgt etwa $\pm 2 \cdot 10^{-3}$ °K und in der Bestimmung von T etwa $\pm 1 \cdot 10^{-2}$ °K. Der Wärmewiderstand kann somit absolut mit einer Genauigkeit von etwa 10% gemessen werden, die Genauigkeit für relative Wärmewiderstandsmessungen beträgt etwa 2%.

2.3. Proben

Gemessen wurden polykristalline zylindrische Proben verschiedener Dicken aus Indium der Consolidated Mining and Smelting Co. of Canada (Tadanac Brand).

Die große Schwierigkeit bei der Bestimmung der freien Weglänge aus der Durchmesserabhängigkeit des spezifischen Widerstandes verschieden dicker Proben liegt in der Probenherstellung. Man muß sicher sein, daß das Material durch die Herstellung des Drahtes nicht verunreinigt wird und daß die freie Weglänge des dicken Materials auch im dünnen Draht die

* Ich danke Herrn PETER STRAUB vom Laboratorium für organische Chemie an der ETH für seine Hilfe bei der Benützung der IBM-1620.

gleiche bleibt. Aus diesem Grund wurde der Probenherstellung sehr große Aufmerksamkeit geschenkt. Es hat sich gezeigt, daß das Pressen durch Saphir-Düsen in gut gereinigten Plexiglasröhrchen mit einem Stempel aus Teflon diesen Anforderungen genügt; dabei wurde das Ausgangsmaterial für die Herstellung aller Probendicken in die gleiche Form von Zylindern vom Durchmesser der Plexiglasröhrchen gebracht. — Um Gitterdefekte und Fehlstellen möglichst zum Verschwinden zu bringen, wurden die Proben mehrere Wochen lang bei Zimmertemperatur getempert. —

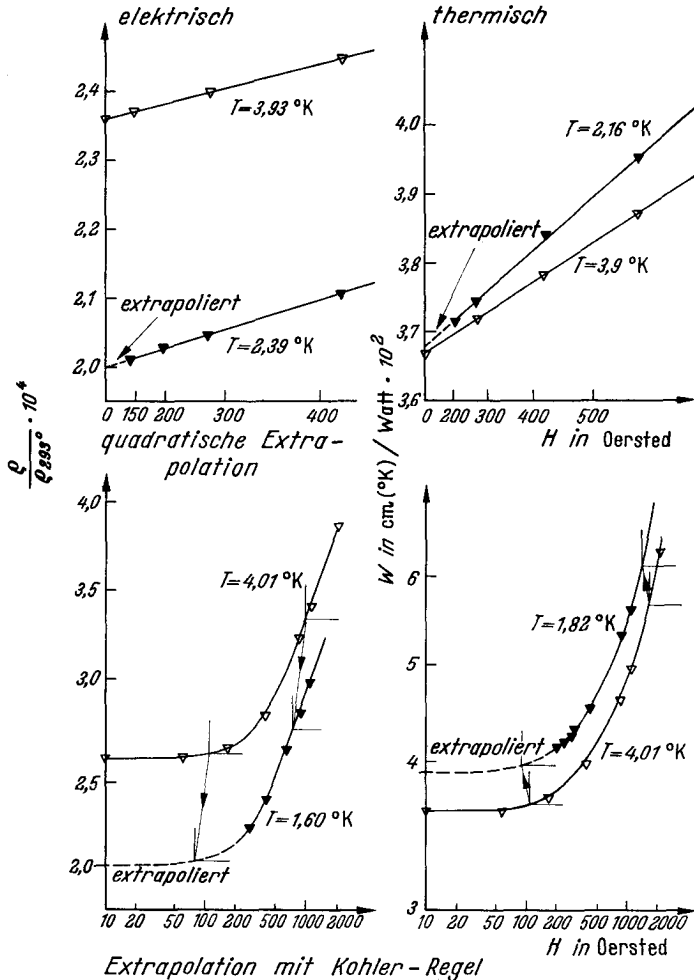


Fig. 2. Beispiele für die Extrapolation zur Bestimmung von Widerstandswerten für Temperaturen unterhalb der kritischen Temperatur T_c .

Eine Möglichkeit zur Kontrolle, ob das Material durch den Preßvorgang beschädigt wird, besteht darin, daß man einen einmal gepreßten Draht durch Schmelzen in die ursprüngliche dicke Form zurückbringt und dann wiederum den Widerstand mißt. Die wegen der Streuung der Elektronen an der Probenoberfläche hervorgerufene Erhöhung des spezifischen Widerstandes muß dann verschwinden und man sollte den Wert des ursprünglichen Materials erhalten. Das ist auch bis auf etwa 5% genau gelungen. — Eine andere Möglichkeit zur Kontrolle besteht darin, daß man den aus der Durchmesserabhängigkeit des spezifischen Widerstandes ermittelten Wert von ρl mit dem nach anderen Methoden bestimmten Wert vergleicht. Nach dem Sommerfeld-Modell ist ρl gegeben durch (1.3a) und ist eine von der

Reinheit unabhängige Konstante des Materials. Aus den hier durchgeführten Messungen erhält man

$$\rho l = 1,25 \cdot 10^{-11} \Omega \text{ cm}^2.$$

COTTI [15] hat kürzlich eine Methode entwickelt, die es gestattet, mit Hilfe der Abklingzeit von Wirbelströmen in dünnen Platten ρl an einer einzigen Probe zu bestimmen. Sein Wert von $\rho l = 1,27 \cdot 10^{-11} \Omega \text{ cm}^2$ stimmt recht genau mit dem hier gegebenen Wert überein, was wiederum bedeutet, daß die Proben durch den Herstellungsprozeß nicht wesentlich unreinigt wurden.

Indium wird bei einer kritischen Temperatur von $T_c = 3,406 \text{ }^\circ\text{K}$ supraleitend. Um auch unterhalb T_c Werte für die Widerstände im normaleitenden Zustand zu erhalten, wurde die Supraleitung mit Hilfe eines Magnetfeldes unterdrückt. Die dabei auftretende magnetische Widerstandsänderung von einigen Prozenten kann bei höheren Temperaturen mit einer für kleine Felder gültigen, quadratisch mit dem Feld verlaufenden Extrapolation korrigiert werden. Bei tieferen Temperaturen kann man zur Extrapolation die Kohler-Regel [26] in der Form

$$\frac{R(H)}{R_0} = A \left(\frac{H}{a(R_0)} \right) \tag{2.4}$$

benützen; dabei bedeutet $R(H)$ entweder den thermischen oder den elektrischen Widerstand als Funktion des Magnetfeldes H , R_0 den Widerstand ohne Feld, $A(x)$ eine nicht explizite von der Temperatur abhängige Funktion und $a(R_0)$ eine Funktion des Widerstandes R_0 (im einfachsten Falle ist $a \equiv R_0$). Zur Extrapolation mißt man R als Funktion des Magnetfeldes H oberhalb der kritischen Temperatur T_c und trägt die Resultate in logarithmischem Maßstab auf. Für Temperaturen unterhalb T_c trägt man die in überkritischen Magnetfeldern erhaltenen Werte auf; gemäß der Gleichung (2.4) läßt sich dann die Kurve für die überkritische Temperatur durch zu den Koordinatenachsen paralleles Verschieben auf die Meßpunkte für die unterkritische Temperatur bringen und damit kann für gegen Null gehende Felder extrapoliert werden. — Beispiele für diese Extrapolationen sind in der Fig. 2 aufgetragen; der damit verbundene Fehler dürfte etwa 3% betragen. Bei sehr tiefen Temperaturen muß man allerdings bei der Anwendung der Kohler-Regel etwas vorsichtig sein (siehe Abschnitt 4.).

Tabelle 3. Proben. (Alle Proben aus Indium der Consolidated Mining and Smelting Co. of Canada, Tadanc Brand.)

Probe	Durchmesser in mm	$\rho_{4,2/e_{293}} \cdot 10^4$	$\rho_0/e_{293} \cdot 10^4$	$\rho_0 \cdot 10^9$ in $\Omega \text{ cm}$	$(WT)_{T=0} \cdot 10^2$ in $\text{cm } (^\circ\text{K})/\text{Watt}$	$L(0) = (\rho/W T)_{T=0} \cdot 10^8$ in $\text{Watt } \Omega/(\text{ }^\circ\text{K})^2$
In 1	1,48	1,05	0,58	0,51	2,2	2,3
In 2	0,485	1,23	0,79	0,69	3,4	2,2
In 3	0,282	1,50	0,98	0,86	4,0	2,1
In 4	0,186	1,96	1,47	1,30	4,7	2,8
In 5	0,094	2,52	1,98	1,75	6,9	2,5

Die charakteristischen Werte der untersuchten Proben sind in der Tabelle 3 zusammengestellt. Ebenfalls angegeben ist die für $T = 0$ extrapolierte Lorenz-Zahl, allgemein definiert durch

$$L(T) = \frac{\rho}{WT}. \tag{2.5}$$

Dies ist eine absolute Größe und ihre Bestimmung ist daher mit einem Fehler von etwa 13% behaftet; berücksichtigt man noch die zusätzliche Ungenauigkeit bei der Extrapolation für $T = 0$, so beträgt der Fehler etwa 15%. Im Rahmen dieser Fehler stimmen daher die experimentell gefundenen Werte mit dem theoretischen Wert

$$L_0 \equiv \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = 2,44 \cdot 10^{-8} \text{ Watt } \Omega/(\text{ }^\circ\text{K})^2 \tag{2.6}$$

überein. Damit ist auch für ein Material mit durchmesserabhängiger Leitfähigkeit das Wiedemann-Franz-Gesetz für $T = 0$ mit einer Genauigkeit von etwa 15% experimentell nachgewiesen.

3. Elektrische und thermische Leitfähigkeit dünner Drähte bei tiefen Temperaturen

3.1. Lösung der Boltzmann-Gleichung für dünne Drähte mit verschiedenen Relaxationszeiten für die elektrische und die thermische Leitfähigkeit

Eine exakte Behandlung des Problems der Streuung der Elektronen an der Probenoberfläche verlangt eine genaue Untersuchung der Oberflächenzustände und ist damit außerordentlich schwierig; zur Lösung sind nur Ansätze vorhanden [27]. Üblicherweise macht man eine der geometrischen Optik analoge Näherung indem man die Bloch-Elektronen als Wellen betrachtet, die an der Probenoberfläche reflektiert werden [9]. In einer sehr groben Art kann man dann verschiedenartige Oberflächen dadurch berücksichtigen, daß man einen Parameter p in die Theorie einführt; nimmt man an, daß die auf die Probenoberfläche auftreffenden Elektronen entweder gespiegelt oder diffus reflektiert werden, so soll dieses p die Wahrscheinlichkeit einer Spiegelstreuung darstellen. Das ganze Problem ist somit auf das Lösen der Boltzmann-Gleichung mit Randbedingungen zurückgeführt; die erste Untersuchung dieser Art stammt von FUCHS [28]. Eine Zusammenstellung von Arbeiten über dieses Gebiet findet man bei SONDHEIMER [5], eine modernere Zusammenfassung bei OLSEN [6]. — Läßt sich der Stoßterm in der Boltzmann-Gleichung mit einer einfachen Relaxationszeit τ beschreiben — also für Temperaturen in einem Gebiet, in dem die Stöße der Elektronen als elastisch angenommen werden können ($T = 0$ oder $T \gg \Theta$, Θ : Debyetemperatur des Körpers), — so findet DINGLE [29] durch Lösen der Boltzmann-Gleichung mit Randbedingungen für den spezifischen elektrischen Widerstand $\varrho(d)$ eines zylindrischen Drahtes der Dicke d

$$\varrho(d) = \varrho_{\infty} \cdot \Phi(p, l/d). \quad (3.1a)$$

Hier ist ϱ_{∞} der spezifische elektrische Widerstand des unendlich ausgedehnten Materials, $\Phi(p, l/d)$ eine von DINGLE tabellierte Funktion und l die freie Weglänge, definiert durch

$$l = v_F \cdot \tau. \quad (3.2)$$

(v_F : Fermi-Geschwindigkeit). Es ist bemerkenswert, daß die exakte Formel (3.1) für $p = 0$ bis auf 5% genau mit der qualitativen Beziehung (1.2) von NORDHEIM [7] übereinstimmt.

Im Temperaturbereich elastischer Elektronenstöße läßt sich das Wiedemann-Franz-Gesetz unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Relaxationszeit herleiten. Definiert man insbesondere mit Hilfe von (3.1) eine effektive mittlere Relaxationszeit τ' der Art

$$(\tau')^{-1} = \tau^{-1} \cdot \Phi(p, l/d), \quad (3.3)$$

so erhält man damit

$$\frac{\varrho(d)}{W(d) \cdot T} = L_0. \quad (3.4)$$

$W(d)$ ist der spezifische Wärmewiderstand eines zylindrischen Drahtes der Dicke d und L_0 ist die durch (2.6) gegebene Lorenz-Zahl. Dies ergibt eine zu (3.1a) analoge Beziehung für den Wärmewiderstand:

$$W(d) = W_{\infty} \cdot \Phi(p, l/d). \quad (3.1b)$$

W_∞ stellt den spezifischen Wärmewiderstand eines unendlich dicken Drahtes dar. — Explizite Lösungen der Boltzmann-Gleichung mit Randbedingungen [30, 31] ergeben für den spezifischen Wärmewiderstand eines dünnen Drahtes ebenfalls die Formel (3.1 b). —

Alle diese bis heute ausgeführten Betrachtungen sind an die Existenz einer einzigen Relaxationszeit τ gebunden. Sie lassen sich aber, wie im folgenden gezeigt wird, auch auf das hier experimentell untersuchte Temperaturgebiet $0 < T < \Theta$ ausdehnen, in dem die Elektron-Phonon-Stöße unelastisch sind und keine einheitliche Relaxationszeit mehr definiert werden kann.

Legt man ein elektrisches Feld F und einen Temperaturgradienten dT/dz längs der z -Achse eines unendlich langen Drahtes, so erhält man für ein Sommerfeld-Modell die Boltzmann-Gleichung in der Form

$$\frac{\hbar}{m} k_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\hbar}{m} k_y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\hbar}{m} k_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{eF}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial k_z} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{st.}} \quad (3.5)$$

(\hbar : Plancksche Konstante dividiert durch 2π ; m : Masse des Elektrons; $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$: Wellenvektor des Elektrons; $f \equiv f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, T)$: Verteilungsfunktion; $(\partial f/\partial t)_{\text{st.}}$: Stoßterm.)

Der Stoßterm läßt sich schreiben als

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{st.}} = A_{\text{op}}(f) - \frac{f - f_0}{\tau_1} \quad (3.6)$$

wobei A_{op} ein von der Elektron-Phonon-Wechselwirkung abhängiger linearer Integraloperator ist. Die Elektron-Verunreinigung-Wechselwirkung ist elastisch und läßt sich somit mit einer Relaxationszeit τ_1 beschreiben. $f_0 \equiv f_0(E, \zeta, T)$ ist die von der Energie E , Fermi-Grenz-Energie ζ und Temperatur T abhängige, ungestörte Fermi-Verteilungsfunktion. Die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, T)$ ist einerseits wegen des Temperaturgradienten dT/dz und andererseits wegen der räumlichen Begrenzung des Drahtes vom Orte \mathbf{r} abhängig.

Mit dem üblichen Ansatz zur Linearisierung [32]

$$f = f_0 + f_1 \quad (3.7)$$

$$f_1 = -\chi(\mathbf{k}, x, y) df_0/dE \quad (3.8)$$

und der Zerlegung der zu bestimmenden Funktion $\chi(\mathbf{k}, x, y)$ in zwei unbekannt Funktionen $\varphi_1(\mathbf{k}, x, y)$ und $\varphi_2(\mathbf{k}, x, y)$,

$$\chi(\mathbf{k}, x, y) = \frac{\hbar}{m} \left[\left(eF - \frac{d\zeta}{dz} \right) \varphi_1 - \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} \varphi_2 \right], \quad (3.9)$$

erhält man die nun nur noch wegen der Oberfläche des Drahtes ortsabhängigen Bloch-Gleichungen

$$\begin{aligned} -k_z \frac{df_0}{dE} + \frac{\hbar k_x}{m} \frac{df_0}{dE} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\hbar k_y}{m} \frac{df_0}{dE} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= A_{\text{op}}(\varphi_1) - \frac{df_0}{dE} \frac{1}{\tau_1} \varphi_1 \\ -k_z(E - \zeta) \frac{df_0}{dE} + \frac{\hbar k_x}{m} \frac{df_0}{dE} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\hbar k_y}{m} \frac{df_0}{dE} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} &= A_{\text{op}}(\varphi_2) - \frac{df_0}{dE} \frac{1}{\tau_1} \varphi_2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Zur Lösung von (3.10) kann das Kohlersche Variationsprinzip [34] verwendet werden; nach der thermodynamischen Formulierung von ZIMAN [35] im Zusammenhang mit dem Entropiestrom muß dieses Prinzip auch bei dünnen Proben gültig sein.

Es ist nun nicht nur $\chi(\mathbf{k}, x, y)$ sondern auch A_{op} ortsabhängig; dies hängt damit zusammen, daß die Elektron-Phonon-Wechselwirkung eine Kleinwinkel-Streuung ist. Nach einem Vorschlag von OLSEN [13] wurde diese Kleinwinkel-Streuung von BLATT und SATZ [36] und von AZBEL und GURZHI [37] analytisch, und von LÜTHI und WYDER [38] mit Hilfe einer Monte-Carlo-Methode berechnet. Man erhält eine vom Drahtdurchmesser abhängige Abweichung von der Matthies-Regel, wie sie von ALEKSANDROV [17] an Aluminium und von COCHRAN und YAQUB [39] an Gallium beobachtet wurde. Hingegen tritt bei dem hier untersuchten Indium (siehe Abschnitt 3.3.) keine solche Abweichung auf und damit darf in erster Näherung A_{op} als ortsunabhängig angenommen werden. Somit kann zur Bestimmung von $A_{\text{op}}(\varphi_j)$ wie im Falle des unendlich ausgedehnten Materials vorgegangen werden und man erhält die für tiefe Temperaturen gültigen Beziehungen [32]

$$A_{\text{op}}(\varphi_1) = -\frac{\varphi_1}{a_0} \frac{df_0}{dE}, \quad (3.11 \text{ a})$$

$$A_{\text{op}}(\varphi_2) = -\frac{\varphi_2}{\frac{\pi^2}{3} \gamma^2 a_0} \frac{df_0}{dE}. \quad (3.11 \text{ b})$$

Hier sind a_0 und γ von der Elektron-Phonon-Wechselwirkung abhängige Konstanten und es gilt

$$\begin{aligned} a_0 &\propto T^{-5} \\ \gamma &\propto T. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Aus (3.11) folgt, daß sich für die Funktionen φ_1 und φ_2 je eine Relaxationszeit τ_1 und τ_2 angeben läßt, definiert durch

$$\tau_1^{-1} = \tau_{\text{el}}^{-1} \equiv a_0^{-1} + \tau_i^{-1} \quad (3.13 \text{ a})$$

$$\tau_2^{-1} = \tau_{\text{th}}^{-1} \equiv \left(\frac{\pi^2}{3} \gamma^2 a_0\right)^{-1} + \tau_i^{-1}. \quad (3.13 \text{ b})$$

Damit erhält man aus (3.10)

$$-k_z + \frac{\hbar k_x}{m} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\hbar k_y}{m} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{\varphi_1}{\tau_{\text{el}}} \quad (3.14 \text{ a})$$

$$-k_z(E - \zeta) + \frac{\hbar k_x}{m} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\hbar k_y}{m} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{\varphi_2}{\tau_{\text{th}}}. \quad (3.14 \text{ b})$$

Diese Gleichungen, zusammen mit den Randbedingungen, stimmen formal genau mit den Gleichungen von DINGLE [28] überein und lassen sich nach den dort angegebenen Methoden lösen. Im hier untersuchten Gebiete tiefer Temperaturen gilt für die über die Querschnittsfläche des Drahtes gemittelte elektrische Stromdichte j und die Wärmestromdichte q

$$j = -\frac{4}{\pi d^2} \int dx dy \frac{\hbar^2}{4\pi^3 m^2} \int d\mathbf{k} k_z \varphi_1(\mathbf{k}, x, y) \frac{df_0}{dE} eF, \quad (3.15 \text{ a})$$

$$q = \frac{4}{\pi d^2} \int dx dy \frac{\hbar^2}{4\pi^3 m^2} \int d\mathbf{k} k_z (E - \zeta) \varphi_2(\mathbf{k}, x, y) \frac{df_0}{dE} \frac{1}{T} \frac{dT}{dz}. \quad (3.15 \text{ b})$$

Definiert man wie üblich freie Weglängen als $l = v_F \cdot \tau$, also

$$l_{el} \equiv \frac{\hbar k_F}{m} \tau_{el} \tag{3.16 a}$$

$$l_{th} \equiv \frac{\hbar k_F}{m} \tau_{th} \tag{3.16 b}$$

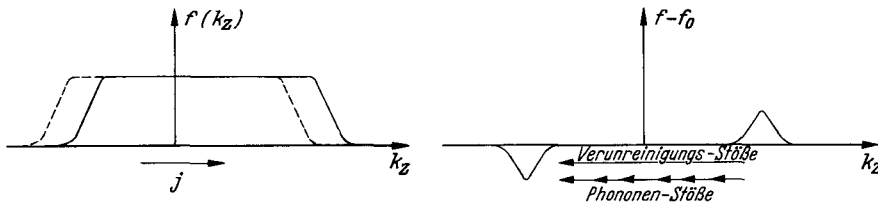
($\hbar k_F/m = v_F$: Fermi-Geschwindigkeit), so erhält man aus (3.15) für die spezifischen Widerstände dünner Drähte

$$\varrho(d) = \varrho_\infty \cdot \Phi(p, l_{el}/d) \tag{3.17 a}$$

$$W(d) = W_\infty \cdot \Phi(p, l_{th}/d). \tag{3.17 b}$$

Die Funktion Φ ist die gleiche wie in den Formeln (3.1), nur muß man hier in den beiden Fällen verschiedene freie Weglängen einsetzen, nämlich l_{el} für die elektrische Leitfähigkeit und l_{th} für die thermische Leitfähigkeit.

elektrische Leitfähigkeit



— stationäre Verteilungsfunktion f
 - - - - Gleichgew. Verteilungsfunktion f_0
 (Fermi-Funktion)

thermische Leitfähigkeit

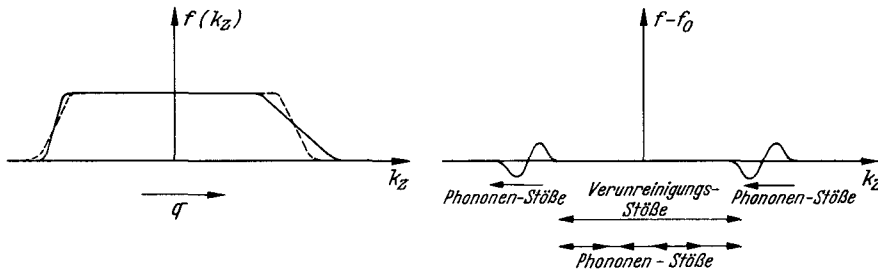


Fig. 3. Anschauliche Begründung der Verschiedenartigkeit der freien Weglängen für die elektrische und thermische Leitfähigkeit

Diese Verschiedenartigkeit der freien Weglängen oder der Relaxationszeiten für die beiden Transportgrößen hat eine anschauliche physikalische Deutung [32]. Rechnet man nämlich umgekehrt aus den Ausdrücken für den elektrischen und thermischen Widerstand die hierzu gehörenden Verteilungsfunktionen aus, so erhält man im elektrischen Fall

$$f = f_0(k_x, k_y, k_z + \delta k_z) \tag{3.18 a}$$

mit

$$\delta k_z = - \frac{em}{\hbar^2 k_F} F l_{el},$$

und im thermischen Fall

$$f = f_0(k_x, k_y, k_z + \delta k_z)$$

mit

$$\delta k_z = (k - k_F) \frac{l_{th}}{T} \frac{dT}{dz}. \quad (3.18b)$$

Diese beiden Funktionen sind in der Fig. 3 dargestellt. Um die durch Einschalten eines Feldes oder eines Temperaturgradienten gestörte Verteilungsfunktion f wieder nach f_0 zurückzubringen, genügt in beiden Fällen ein einziger Verunreinigungsstoß. Phononstöße dagegen sind bei tiefen Temperaturen Kleinwinkelprozesse, so daß sich k_z bei einem einzigen Stoß nur um einen kleinen Bruchteil ändern kann. Im thermischen Fall kann dies zur Herstellung der Gleichgewichts-Verteilungsfunktion genügen, im elektrischen Fall braucht es jedoch mehrere Phononstöße. Das bedeutet, daß die Verteilungsfunktion im thermischen Fall rascher relaxiert als im elektrischen Fall und daß damit die thermische freie Weglänge kleiner sein muß als die freie Weglänge für die elektrische Leitfähigkeit. Für die Temperatur $T = 0$, bei der die Phononen ausgestorben sind und nur noch Verunreinigungsstreuungen vorhanden sind, müssen die beiden freien Weglängen wieder gleich sein.

3.2. Bestimmung der freien Weglänge für die elektrische und die thermische Leitfähigkeit. Vergleich mit Lorenz-Zahl

Durch Messen des spezifischen elektrischen Widerstandes und des spezifischen Wärmewiderstandes verschieden dicker Drähte lassen sich die Gleichungen

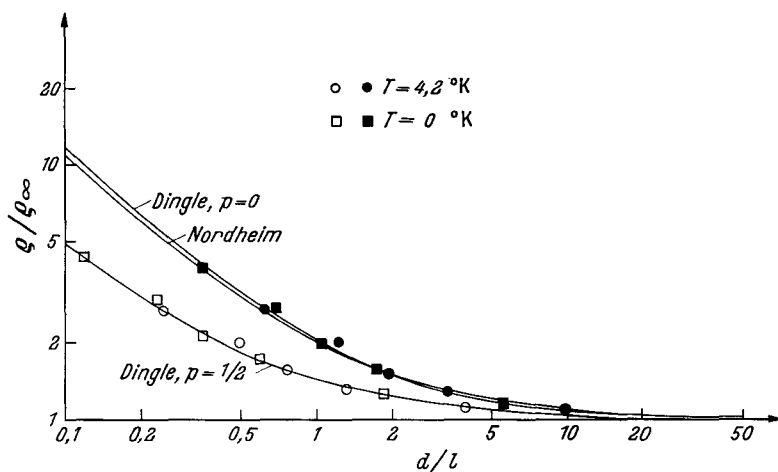


Fig. 4. Spezifischer elektrischer Widerstand als Funktion des Zylinderdurchmessers d verschieden dicker Indiumdrähte angepaßt an die theoretischen Kurven mit $p = 0$ und $p = \frac{1}{2}$ für $T = 4,2^\circ\text{K}$ und $T = 0^\circ\text{K}$

(3.17) prüfen; dabei treten die Widerstände des unendlich ausgedehnten Materials und die freien Weglängen als anzupassende Parameter auf. Dies ist in den Fig. 4 und 5 dargestellt; im thermischen Fall ist es von Vorteil, nicht $W(d)$ sondern $W(d) \cdot T$ aufzutragen, da dieser Ausdruck auch für $T = 0$ endlich bleibt. Es ist bemerkenswert, daß sich die experimentellen Daten ebensogut an die theoretische

Kurve für $p = 0$ wie auch für $p = \frac{1}{2}$ anpassen lassen — natürlich mit verschiedenen Parameterwerten ϱ_{∞} und l_{el} , oder $(WT)_{\infty}$ und l_{th} —, und dies sowohl für $T = 4,2$ °K wie auch für $T = 0$ °K. Es ist somit nicht möglich, aus an Drähten durchgeführten Experimenten dieser Art p zu bestimmen. Durch Messungen an

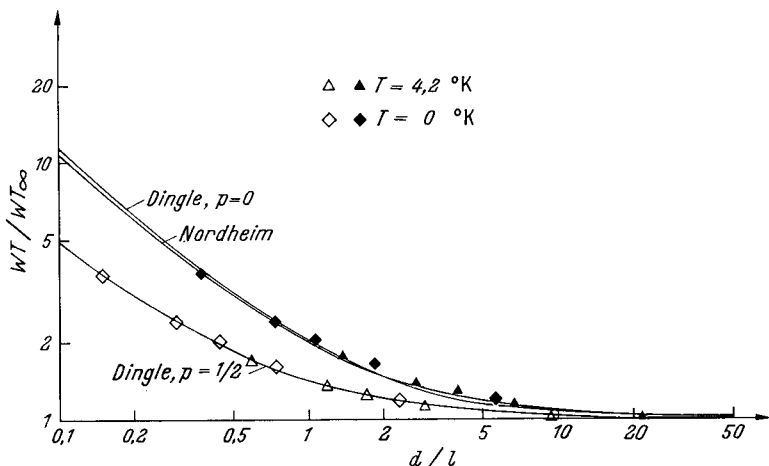


Fig. 5. Spezifischer Wärmewiderstand multipliziert mit der Temperatur als Funktion des Zylinderdurchmessers d verschieden dicker Indiumdrähte angepaßt an die theoretischen Kurven mit $p = 0$ und $p = \frac{1}{2}$ für $T = 4,2$ °K und $T = 0$ °K

Filmen konnten GAIDE und WYDER [40] zeigen, daß für $p \neq 0$ die Größe $\varrho_{\infty} l_{el}$ leicht temperaturabhängig wird; da andererseits $\varrho_{\infty} l_{el}$ ein Maß für die freie Oberfläche der Fermifläche ist und damit temperaturunabhängig sein muß, kann

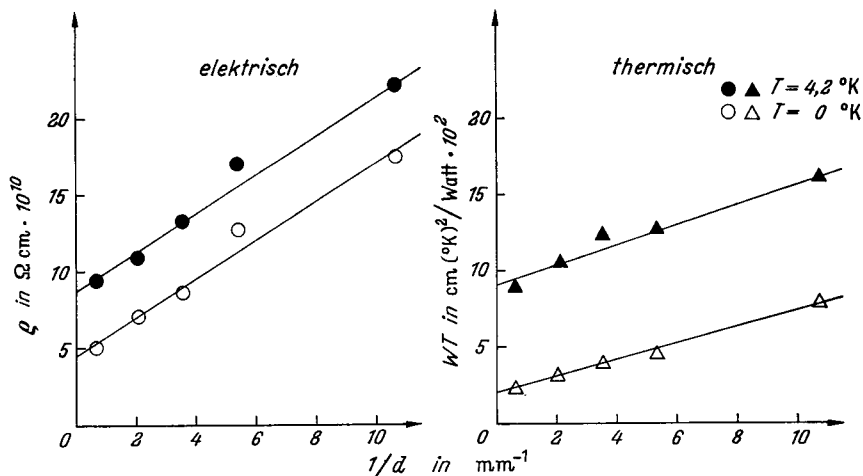


Fig. 6. Nordheim-Beziehung zur Bestimmung der freien Weglängen für die thermische und die elektrische Leitfähigkeit

man auf $p = 0$ schließen. Ferner haben PIPPARD [41] und CHAMBERS [42] gezeigt, daß man aus dem anomalen Skin-Effekt für die von ihnen untersuchten Metalle $p = 0$ erhält. — Im Gegensatz dazu lassen sich die Leitfähigkeitsexperimente von FRIEDMANN und KOENIG [43, 44] an dünnen Wismut-Filmen nur mit einem von

Null verschiedenen p erklären. Nun ist die de Broglie-Wellenlänge eines Leitungselektrons in einem normalen Metall von der Größenordnung von einigen Å, also wesentlich kleiner als die Unebenheit der Probenoberfläche, und damit ist eine diffuse Oberflächenstreuung, also $p = 0$, zu erwarten. Beim Halbmetall Wismut hingegen, mit seiner sehr kleinen Fermifläche, wird die de Broglie-Wellenlänge von der Größenordnung von 10^{-5} cm und damit wird eine Spiegelreflektion an der Probenoberfläche möglich. Das ganze Problem ist jedoch noch keineswegs geklärt [9, 44], trotzdem soll im folgenden für Indium $p = 0$ angenommen werden. Statt der unhandlichen, nur analytisch gegebenen Funktion Φ kann man somit die von NORDHEIM angegebene Formel (1.2) benutzen. Trägt man $\rho(d)$ oder $W(d)T$ gegen $1/d$ auf, so erhält man eine Gerade (Fig. 6). Für $1/d = 0$ ergibt sich der Wert für ρ_∞ und $(WT)_\infty$, und aus der Neigung der Geraden lassen sich $\rho_\infty l_{el}$ und $(WT)_\infty l_{th}$ und damit die freien Weglängen l_{el} und l_{th} bestimmen. Macht man dies für verschiedene Temperaturen, so erhält man die freien Weglängen als Funktion der Temperatur [45] (Fig. 7). Wie nach Abschnitt 3.1. zu erwarten ist,

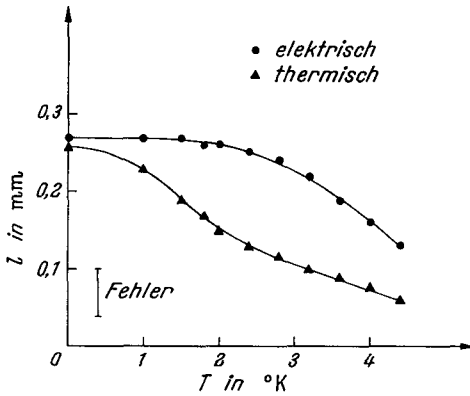


Fig. 7

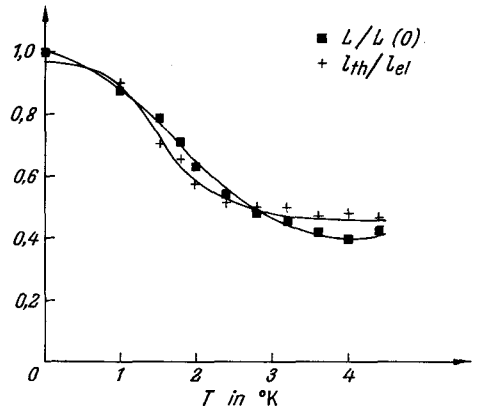


Fig. 8

Fig. 7. Freie Weglängen für die thermische und die elektrische Leitfähigkeit. Der geschätzte Fehler in der Bestimmung ist angegeben, die Werte für $T < 1,6^\circ\text{K}$ sind aus den Fig. 12 und 13 extrapoliert

Fig. 8. Verhältnis der freien Weglängen l_{th}/l_{el} und relative Lorenz-Zahl $L(T)/L(0)$ als Funktion der Temperatur

ist l_{th} für $T > 0$ wesentlich kleiner als l_{el} , nähert sich diesem aber, wenn T abnimmt. —

Das Problem der verschiedenen freien Weglängen für die thermische und die elektrische Leitfähigkeit läßt sich auch ausgehend von der Lorenz-Zahl untersuchen; wie bereits aus der im Abschnitt 1. diskutierten einfachen kinetischen Theorie der Transportphänomene hervorgeht, muß ein einfacher Zusammenhang zwischen der Lorenz-Zahl und dem Verhältnis der beiden freien Weglängen existieren.

Nach der Blochschen Theorie lassen sich die Widerstände bei tiefen Temperaturen berechnen und man erhält [32]

$$\rho_\infty(T) = \frac{m}{e^2 n} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{\tau_1} \right), \quad (3.19a)$$

$$W_\infty(T) = \frac{3m}{\pi^2 k_B^2 n} \frac{1}{T} \left(\frac{3}{\pi^2 \gamma^2 a_0} + \frac{1}{\tau_1} \right). \quad (3.19b)$$

In Übereinstimmung mit (3.13) können die Ausdrücke in den Klammern als reziproke Relaxationszeiten gedeutet werden. Für die Lorenz-Zahl ergibt sich damit

$$L_{\infty}(T) \equiv \frac{\varrho_{\infty}}{(WT)_{\infty}} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 \frac{\frac{1}{a_0} + \frac{1}{\tau_1}}{\frac{\pi^2 \gamma^2 a_0}{3} + \frac{1}{\tau_1}}. \quad (3.20)$$

Benützt man (3.14), (3.17) und den Wiedemann-Franz-Wert L_0 der Lorenz-Zahl, so erhält man

$$\frac{L_{\infty}(T)}{L_0} = \frac{l_{th}}{l_{el}}. \quad (3.21)$$

(3.21) läßt sich experimentell prüfen, da man einerseits $L(T)$ messen und andererseits l_{th}/l_{el} aus der elektrischen und der thermischen NORDHEIM-Beziehung bestimmen kann. Dies wurde für die Fig. 8 durchgeführt; im Rahmen der Meßfehler ist die Übereinstimmung erstaunlich gut.

3.3. Temperaturabhängigkeit der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit dünner Drähte. Matthiessen-Regel

Im Gegensatz zur kinetischen Theorie gibt die Blochsche Theorie auch Aufschluß über die Temperaturabhängigkeit der freien Weglängen. Aus (3.12) und (3.19) erhält man einerseits das T^5 -Gesetz von BLOCH

$$\varrho(T) = \varrho_0 + C T^5, \quad (3.22a)$$

und andererseits die Formel von MAKINSON [46]

$$W(T) = \frac{A}{T} + B T^2. \quad (3.22b)$$

ϱ_0 bedeutet den temperaturunabhängigen Restwiderstand, gegeben durch die Streuung der Elektronen an Verunreinigungen und an der Probenoberfläche. Für A erhält man aus dem für $T = 0$ gültigen Wiedemann-Franz-Gesetz $A = \varrho_0/L_0$. Die Darstellungen in den Fig. 9 und 10 zeigen, daß die Formeln (3.22) auch für dünne Drähte die Temperaturabhängigkeit der Widerstände beschreiben. Diese beiden Darstellungen dienen ferner zur Extrapolation der Werte für ϱ und WT für Temperaturen unterhalb $T = 1,6 \text{ }^\circ\text{K}$.

In Übereinstimmung mit der Betrachtungsweise vom Abschnitt 3.1. kann die Streuung der Elektronen an der Probenoberfläche für grobe quantitative Aussagen einfach als zusätzliche Verunreinigungsstreuung gedeutet werden. Nun

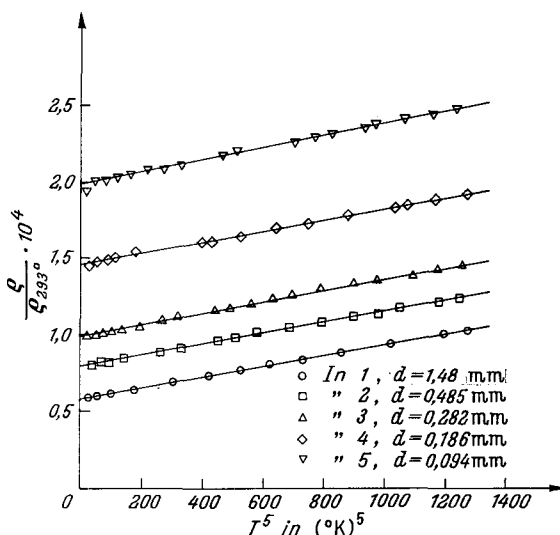


Fig. 9. $\varrho(T) = \varrho_0 + C T^5$. Formel von BLOCH für dünne Indiumdrähte

nähert sich die Lorenz-Zahl im Temperaturgebiet $0 < T < \Theta$ um so mehr dem Wiedemann-Franz-Wert, je mehr Verunreinigungen man einer Probe beifügt. Für die Durchmesserabhängigkeit der Lorenz-Zahl in dünnen Drähten bedeutet das,

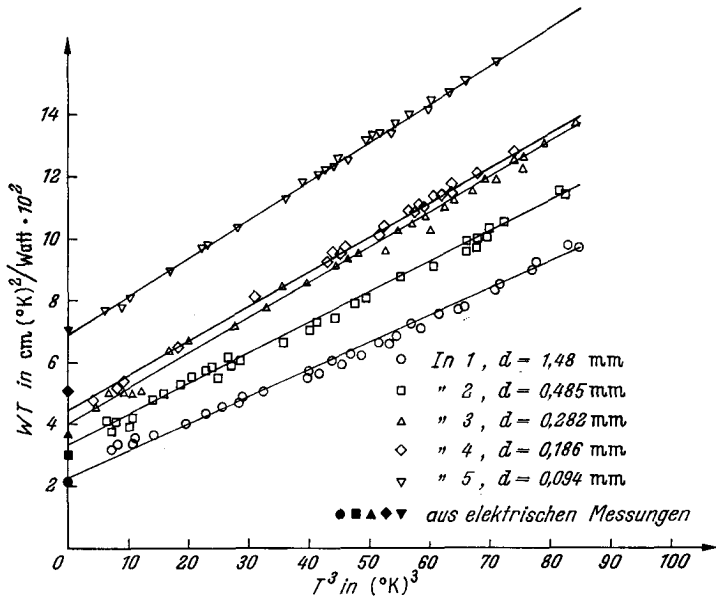


Fig. 10. $WT(T) = A + BT^3$. Formel von MAKINSON für dünne Indiumdrähte. Die aus den elektrischen Messungen bestimmten Werte für $A = \rho_0/L_0$ sind ebenfalls aufgetragen

daß in diesem Temperaturbereich für $d_1 > d_2$ für die Lorenz-Zahl $L(d_1) < L(d_2)$ sein muß. Dies läßt sich auch experimentell beobachten (Fig. 11). —

Bei der theoretischen Untersuchung über die Existenz von zwei verschiedenen freien Weglängen im Abschnitt 3.1. wurde die Annahme gemacht, daß L_{op} auch

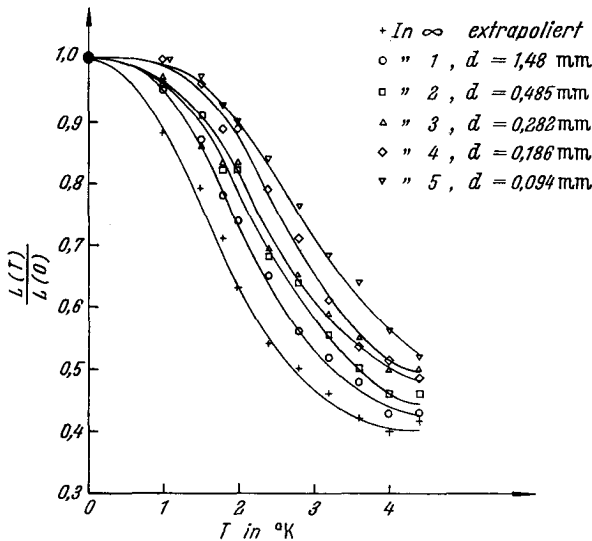


Fig. 11. Lorenz-Zahlen verschieden dicker Indiumdrähte als Funktion der Temperatur

in dünnen Drähten ortsunabhängig ist. Das bedeutet, daß für dünne Drähte eine Matthiessen-Regel [8] gelten muß:

$$(3.23)$$

$$\rho(d, T) = \rho_{ph}(T) + \rho_i + \rho_d.$$

Hier ist $\rho_{ph}(T)$ der von den Phononen, ρ_i der von den Verunreinigungen und ρ_d der von den Wandstreuungen herrührende Teil des Widerstandes. Der einzige temperaturabhängige Term ist $\rho_{ph}(T)$, der für $T = 0$ verschwindet. Damit muß

$$(3.24)$$

$$\rho(d, T) - \rho(d, 0) = \rho_{ph}(T)$$

eine von d unabhängige Funktion der Temperatur allein sein. Die Beziehung (3.24) ist in der Fig. 12 untersucht; im Rahmen der Meßgenauigkeit liegen die Punkte für verschiedene Probendicken aufeinander und damit ist die im Abschnitt 3.1. gemachte Voraussetzung gerechtfertigt.

Im Gegensatz dazu haben nun OLSEN [15] ebenfalls an dünnen Indiumdrähten und GAIDE und WYDER [40] an dünnen Indiumfilmen beträchtliche Abweichungen von der Matthiessen-

Regel (3.23) beobachtet. Ferner sind die von OLSEN und GAIDE und WYDER gemessenen Werte für $\rho_{\infty} l$ wesentlich größer als der hier bestimmte Wert. Das läßt sich nur dadurch erklären, daß beim Herstellungsprozeß der Drähte und der Filme zusätzliche Verunreinigungen hinzugefügt wurden, und zwar um so mehr, je dünner der Draht oder der Film war.

Nach einem von PIPPARD [47] ursprünglich für die Ultraschallabsorption gegebenen Argumente lassen sich dann diese Abweichungen von der Matthiessen-Regel verstehen. PIPPARD findet, daß mit abnehmender freier Weglänge der Elektronen die Elektron-Phonon-Wechselwirkung stärker werden muß.

Einen Effekt dieser Art haben einerseits LINDENFELD und PENNEBAKER [48] in der Gitterleitfähigkeit von Kupferlegierungen und andererseits LIN-

DENFELD und ROHRER [49] in der Elektronenwärmeleitfähigkeit beobachtet. Dieser Effekt sollte sich auch in der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes äußern. Für reines Indium ist das T^5 -Gesetz (3.22 a) im allgemeinen sehr gut erfüllt [50, 51], auch OLSENS dünne Drähte befolgen es innerhalb des untersuchten Temperaturbereiches von 1,6 °K bis 4,2 °K.

Der temperaturabhängige Teil

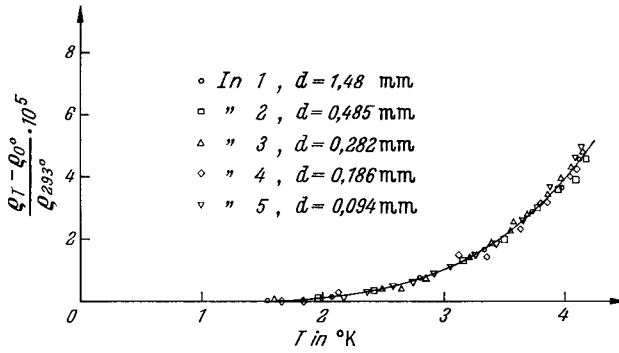


Fig. 12. $\rho(T) - \rho(0) = \rho_{ph}(T)$. Matthiessen-Regel für dünne Indiumdrähte

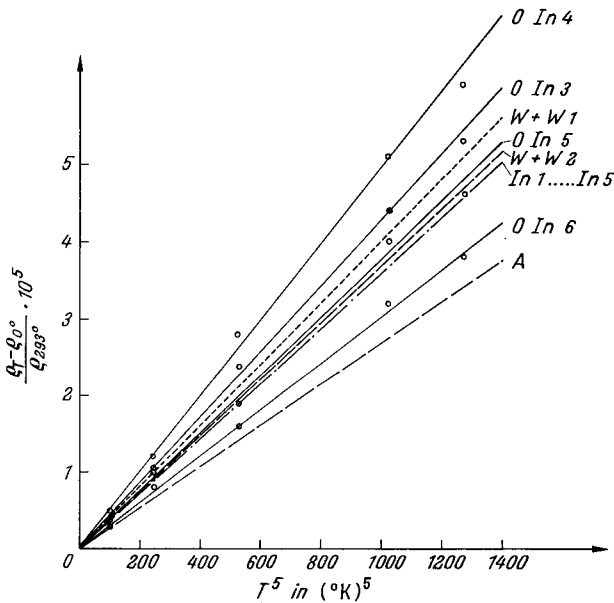


Fig. 13. $\rho(T) - \rho(0) = C(\rho) \cdot T^5$. Abweichungen von der Matthiessen-Regel, zusammengestellt aus mehreren Arbeiten über die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes von Indium. Die eingetragenen Punkte sind Messungen von OLSEN [15]. Die Daten der verschiedenen Proben sind in der Tabelle 4 eingetragen

des Widerstandes läßt sich somit darstellen als

$$\rho(T) - \rho(0) = C \cdot T^5. \quad (3.25)$$

Nach PIPPARD muß nun die Konstante C eine Funktion des Restwiderstandes ρ_1 sein, und zwar muß für $\rho_{11} > \rho_{12}$ auch $C_1 > C_2$ gelten. Dies läßt sich in der Fig. 13, in der die Temperaturabhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes von Indium aus verschiedenen Arbeiten zusammengestellt ist, feststellen. Die Daten der einzelnen für die Fig. 13 benützten Proben sind in der Tabelle 4 eingetragen.

Tabelle 4. Abweichungen von der Matthiessen-Regel. Zusammenstellung der Daten für die in der Fig. 13 benützten Proben

Symbol	Autor	d in mm	$\rho_0/\rho_{293^\circ} \cdot 10^4$	$C/\rho_{293^\circ} \cdot 10^8$ in $(^\circ\text{K})^{-5}$
W + W 1	WHITE und WOODS [50]	ca. 0,5	1,82	4,0
W + W 2	WHITE und WOODS [50]	ca. 0,5	1,57	3,7
A	ALEKSANDROV und D'YAKOV [51]	3,0	0,33	2,94
0 In 4	OLSEN [13]	0,0855	3,06	4,9
0 In 3	OLSEN [13]	0,311	1,42	4,1
0 In 5	OLSEN [13]	0,57	0,83	3,7
0 In 6	OLSEN [13]	2,54	0,54	3,1
In 1 ... In 5	diese Arbeit	1,48 ... 0,096	0,58	3,9

4. Magnetische Widerstandsänderung

4.1. Magnetische Widerstandsänderung des Materials ohne „Freie-Weglängen-Effekt“. Lorenz-Zahl im Magnetfeld

Nach den theoretischen Arbeiten von LIFSHITZ, AZBEL und KAGANOV [52] sowie den experimentellen Untersuchungen von JUSTI [53], BOROVIK [54], CHAMBERS [55], LÜTHI [56] und vor allem von ALEKSEEVSKII und GAIDUKOV [57] sind die Probleme der magnetischen Widerstandsänderung des elektrischen Widerstandes in Metallen im wesentlichen geklärt [44]. Darüber hinaus hat sich die Messung der magnetischen Widerstandsänderung an Einkristallen als außerordentlich nützliches Instrument zur Bestimmung der topologischen Struktur der Fermi-Fläche erwiesen [44]. Hingegen gibt es nur sehr wenige Messungen der Änderung des thermischen Widerstandes im Magnetfeld [58], und bis auf die Messungen von GRÜNEISEN [59], DE NOBEL [60] und ALERS [61] fehlen fast völlig gleichzeitige Messungen des elektrischen und des thermischen Widerstandes im Magnetfeld. Untersuchungen dieser Art sind daher von einigem Interesse. Üblicherweise [9] wird in Anwesenheit eines Magnetfeldes und im Temperaturbereich elastischer Verunreinigungsstreuung in gröbster Näherung die elektrische Leitfähigkeit durch Multiplikation mit $L_0 T$ in die thermische Leitfähigkeit übersetzt. Der thermische Widerstand zeigt damit prinzipiell das gleiche Verhalten wie der elektrische Widerstand; falls also der elektrische Widerstand in hohen Magnetfeldern sättigt, so muß es auch der thermische Widerstand tun. Bei der Interpretation der experimentellen Resultate muß man allerdings etwas vorsichtig sein; einerseits gibt es einen durch Oberflächenstreuung bedingten „Freie-Weglängen-Effekt“ in Magnetfeldern, der zu einer zusätzlichen Feldabhängigkeit des Widerstandes führen kann (siehe Abschnitt 4.2). Andererseits haben COTTI [19, 62] für

den elektrischen und THORN und WYDER [63, 64] für den thermischen Fall gezeigt, daß, falls der Sondenabstand nicht genügend groß gewählt wird, wegen des Hall- oder des Righi-Leduc-Effektes wesentliche Verfälschungen in der Bestimmung des Widerstandes zu erwarten sind. Bei der Probe In 1 dürfte der Einfluß dieser Effekte klein sein; die experimentellen Daten sind in den Fig. 14 und 15 in Kohler-Diagrammen dargestellt. Dabei bedeuten $\Delta\rho = \rho(H, T) - \rho(0, T)$ und $\Delta W = W(H, T) - W(0, T)$ die Änderung des Widerstandes im Magnetfeld H , und $\rho \equiv \rho(0, T)$ und $W \equiv W(0, T)$ den Widerstand ohne Feld bei der Temperatur T . Die elektrischen Messungen sind in guter Übereinstimmung mit den Resultaten von JUSTI [65] und OLSEN [15]; die thermischen Messungen zeigen im wesentlichen die gleiche Feldabhängigkeit wie die elektrischen Messungen, insbesondere ist auch der Sättigungscharakter in hohen Feldern deutlich erkennbar.

Unter der Annahme, daß eine Relaxationszeit τ existiert, tritt das Magnetfeld H in der Boltzmann-Gleichung immer nur in der Kombination $H\tau$ auf. Dies führt zur Kohler-Regel [26]

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = f\left(\frac{H}{\rho}\right) \quad (4.1a)$$

$$\frac{\Delta W}{W} = g\left(\frac{H}{WT}\right), \quad (4.1b)$$

da einerseits ρ und andererseits WT proportional zu τ^{-1} sind; f und g sind für ein bestimmtes Metall charakteristische Funktionen. Damit lassen sich Messungen bei verschiedenen Temperaturen als Funktion von H/ρ und H/WT allein darstellen. LÜTHI [56] hat gezeigt, daß die Beziehung (4.1 a) sehr allgemein erfüllt ist, und zwar nicht nur im Temperaturbereich reiner Verunreinigungsstreuung, sondern auch im Phononenstreuungsgebiet. Die Fig. 14 zeigt eine ähnlich gute Übereinstimmung bei tiefen Feldern; bei höheren Feldern ergeben sich jedoch kleine Abweichungen. — Wesentlich anders ist die Situation im thermischen Fall. Nach JONES und TOXEN [66] läßt sich die magnetische Widerstandsänderung des thermischen Widerstandes im Temperaturgebiet, in dem sowohl Verunreinigungs- wie auch Phononenstreuungen vorhanden sind, nicht durch eine Gleichung der Art (4.1 b) angeben. Ihre experimentellen Daten lassen sich jedoch beschreiben, wenn sie eine Kohler-Regel in der Form

$$\frac{\Delta W}{W} = F\left(\frac{H}{\rho}\right) \quad (4.2)$$

benützen. Allerdings ist ihre Darstellung mit Vorsicht aufzunehmen: der von JONES und TOXEN benützte elektrische Widerstand ρ wurde nicht direkt an den gleichen Proben gemessen, sondern aus der Arbeit von WHITE und WOODS [50] mit Hilfe der Matthiessen-Regel extrapoliert. Eine solche Extrapolation darf jedoch nicht ohne weiteres ausgeführt werden (siehe Abschnitt 3.3.). — Die in dieser Arbeit durchgeführten Messungen lassen sich, wie aus der Fig. 15 ersichtlich ist, wenigstens für tiefe Felder mit einer Kohler-Regel der Form

$$\frac{\Delta W}{W} = G\left(\frac{H}{W}\right) \quad (4.3)$$

darstellen. Bei höheren Feldern zeigen sich, wie im elektrischen Fall, gewisse Abweichungen. Die Übereinstimmung für die hier durchgeführten Messungen wird

etwas schlechter, wenn eine Kohler-Regel von der Form (4.2) benützt wird; die Abweichungen liegen jedoch noch innerhalb der Fehlergrenzen. Da sich einerseits

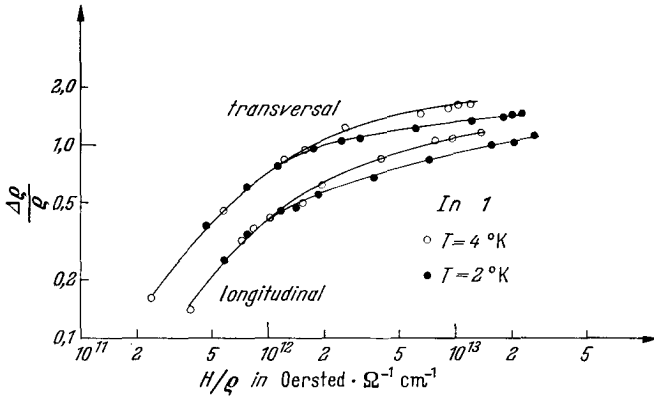


Fig. 14. Magnetische Widerstandsänderung des elektrischen Widerstandes für In 1

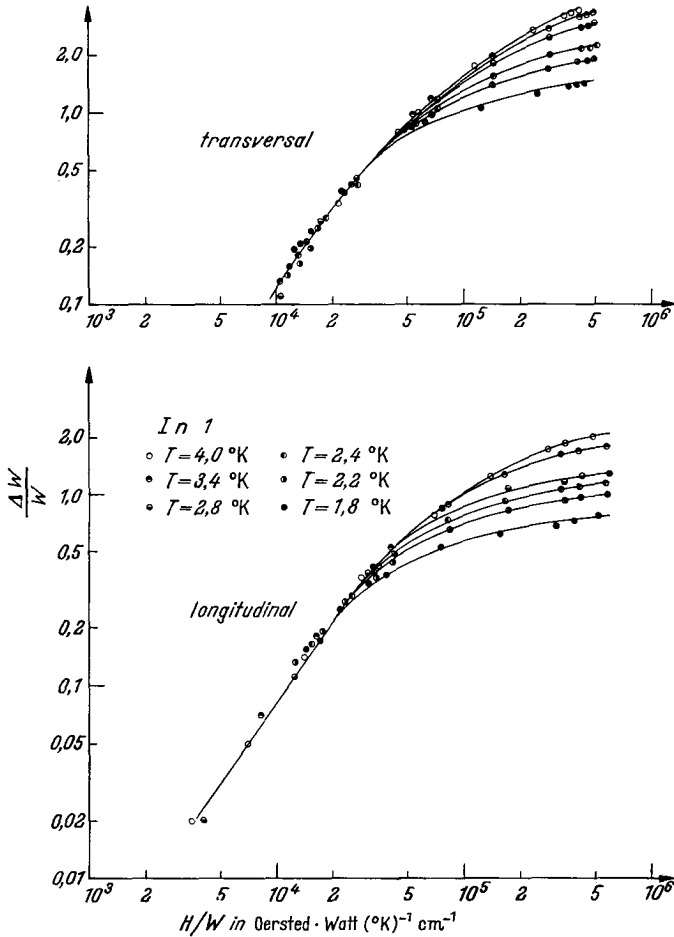


Fig. 15. Magnetische Widerstandsänderung des thermischen Widerstandes für In 1

W und andererseits das von WHITE und WOODS bestimmte ρ im Temperaturintervall zwischen 2 °K und 4 °K relativ wenig ändern, beschreiben (4.2) und (4.3) prinzipiell das gleiche Verhalten, so daß eine Übereinstimmung nicht sehr erstaunlich ist. Zur genaueren Abklärung müssen Messungen bei tieferen und bei höheren Temperaturen ausgeführt werden. —

Ein detaillierterer Vergleich der elektrischen und der thermischen Leitfähigkeit in Anwesenheit eines Magnetfeldes läßt sich mit Hilfe eines Zweibändermodells, oder, für große Felder, mit Hilfe der LIFSHTZ-Theorie [52] der galvanomagnetischen Effekte durchführen; üblicherweise wird für Diskussionen dieser Art die Lorenz-Zahl $L(H)$ als Funktion des Magnetfeldes berechnet. Für ein Zweibändermodell finden SONDHEIMER und WILSON [67, 68], daß $L(H)$ mit zunehmendem Feld zunimmt, bei Metallen, deren magnetische Widerstandsänderung sättigt, durch ein Maximum geht und bei hohen Feldern wieder den ursprünglichen Wert ohne Feld annimmt. Exakte Rechnungen [69] auf Grund der modernen Theorie bestätigen die Tatsache, daß die Lorenz-Zahl für hohe Felder wieder den Null-Feld-Wert annehmen

soll. Die experimentellen Daten (Fig. 16) zeigen im wesentlichen dieses Verhalten, wenigstens bei tieferen Temperaturen. Bei höheren Temperaturen fällt allerdings die Lorenz-Zahl bei hohen Feldern etwa um 20% unter den Wert ohne Feld, im Gegensatz zu den theoretischen Aussagen.

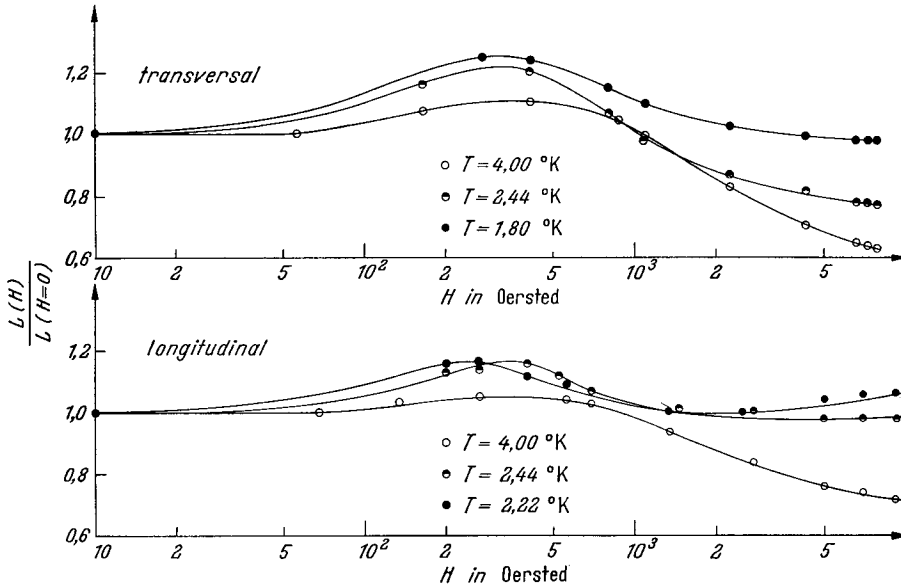


Fig. 16. Lorenz-Zahl im Magnetfeld für In 1

4.2. Magnetische Widerstandsänderung dünner Drähte

In sehr dünnen Proben kann es neben der gewöhnlichen magnetischen Widerstandsänderung des unendlich ausgedehnten Materials eine zusätzliche, durch die Probengeometrie bedingte Widerstandsänderung geben. Ein genügend großes Magnetfeld zwingt die Elektronen auf Spiralbahnen, deren Durchmesser mit den Probendimensionen vergleichbar sein kann. Ein Teil der Elektronen erreicht daher die Probenoberfläche nicht mehr und der Widerstand wird dadurch verkleinert. Im Grenzfall sehr hoher Felder kann somit der Einfluß der Wandstreuung senkrecht zum Magnetfeld ganz eliminiert werden; zum Beispiel sollte man für einen Zylinder in einem sehr großen Longitudinalfeld den Widerstand des unendlich ausgedehnten Materials erhalten. Effekte dieser Art wurden für die elektrische Leitfähigkeit erstmals an Natrium beobachtet, und zwar von MACDONALD [70] im transversalen und von CHAMBERS [71] im longitudinalen Magnetfeld; berechnet wurden diese „Freie-Weglängen-Effekte“ ohne Berücksichtigung der gewöhnlichen magnetischen Widerstandsänderung von MACDONALD und SARGINSON [72] einerseits und CHAMBERS [71] andererseits. Kürzlich haben COCHRAN und YAQUB [73] nachgewiesen, daß in hochreinen Galliumproben sogar das Eigenmagnetfeld eines durch die Probe geschickten Stromes genügen kann, um einen solchen Geometrieeffekt hervorzurufen. Ferner zeigen WHITE und WOODS [10] an Natriumzylindern, daß dieser Effekt auch für die thermische Leitfähigkeit vorhanden ist.

Im allgemeinen ist dieser „Freie-Weglängen-Effekt“ wegen der gewöhnlichen

magnetischen Widerstandsänderung des unendlich ausgedehnten Materials nur schwer zu sehen; einzig an Natrium, wo die gewöhnliche Widerstandsänderung

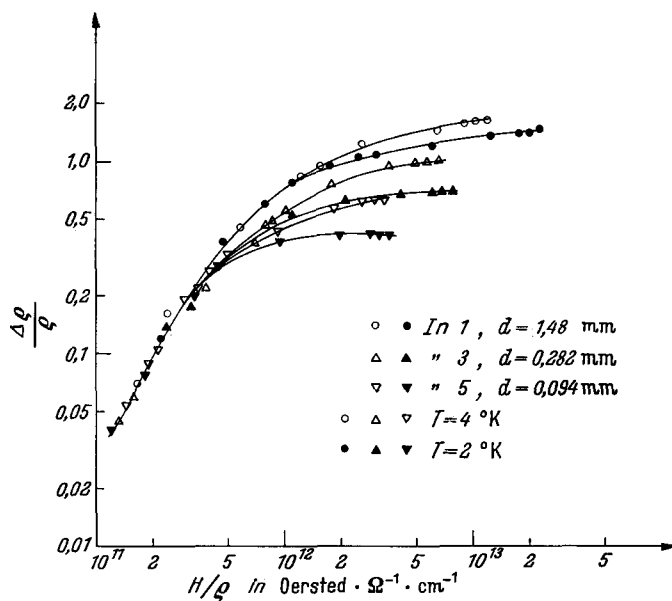


Fig. 17. Magnetische Widerstandsänderung des elektrischen Widerstandes dünner Indiumdrähte im transversalen Feld

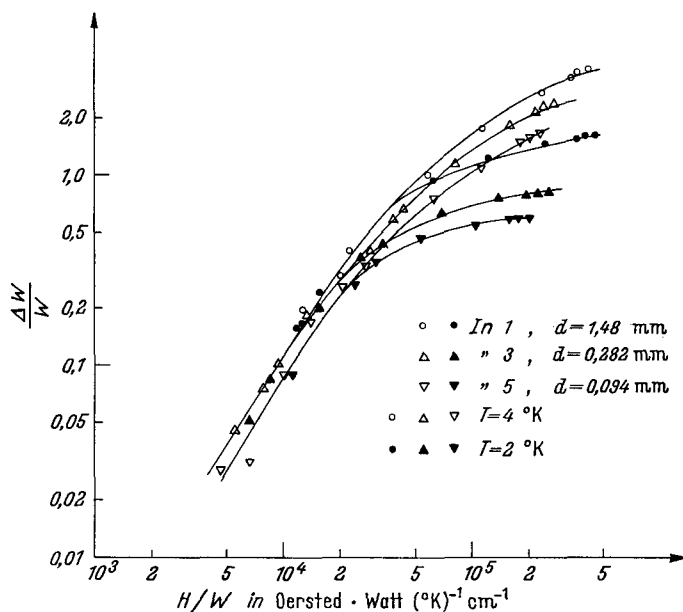


Fig. 18. Magnetische Widerstandsänderung des thermischen Widerstandes dünner Indiumdrähte im transversalen Feld

sehr klein ist, läßt er sich einfach messen. Der Effekt ist nun auch, wie OLSEN [13] gezeigt hat, in Metallen beobachtbar, wo die magnetische Widerstandsänderung sättigt, insbesondere in dem hier untersuchten Indium.

Die experimentellen Resultate für dünne Indiumdrähte sind in den Fig. 17 und 18 für den transversalen Fall und in den Fig. 19 und 20 für den longitu-

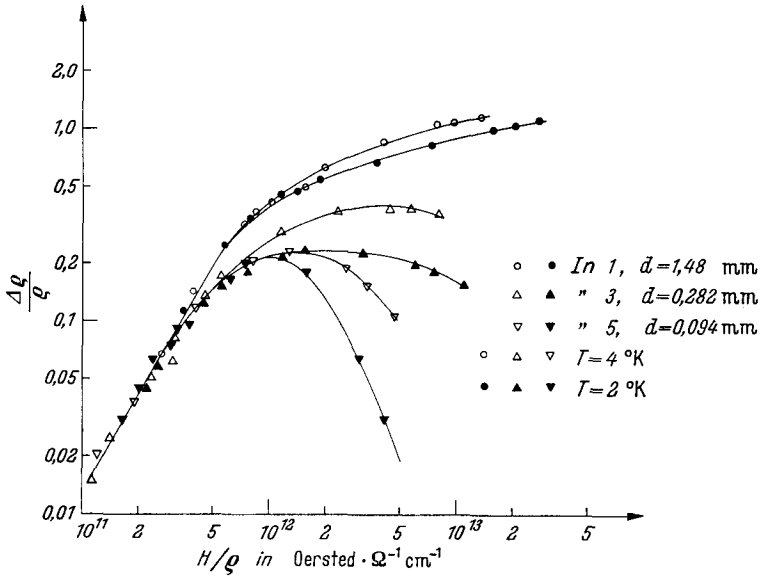


Fig. 19. Magnetische Widerstandsänderung des elektrischen Widerstandes dünner Indiumdrähte im longitudinalen Feld

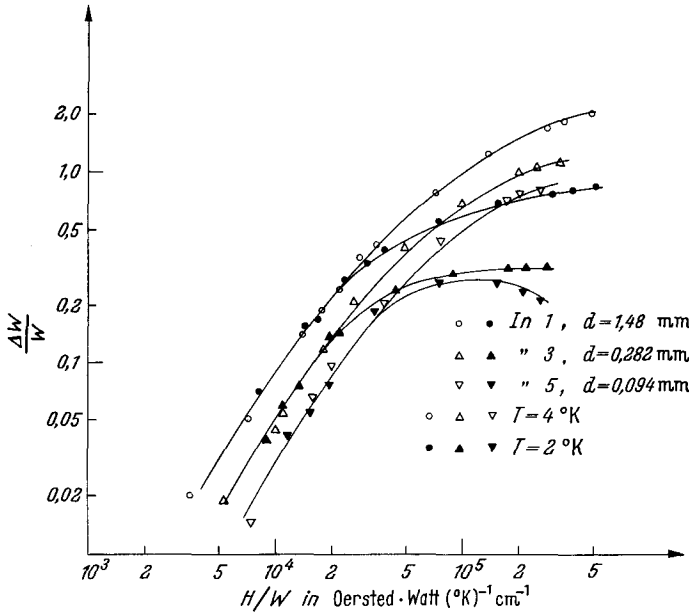


Fig. 20. Magnetische Widerstandsänderung des thermischen Widerstandes dünner Indiumdrähte im longitudinalen Feld

dinalen Fall dargestellt. Der „Freie-Weglängen-Effekt“ läßt sich für den thermischen und den elektrischen Widerstand sowohl für ein transversales wie auch für ein longitudinales Magnetfeld feststellen: je dünner die Drähte, um so kleiner ist die

Widerstandsänderung, da der „Freie-Weglängen-Effekt“ der gewöhnlichen magnetischen Widerstandsänderung entgegenwirkt. Insbesondere zeigt sich im longitudinalen Fall (Fig. 19 und 20) wiederum sehr schön der im Abschnitt 3. diskutierte Unterschied in den Größen der freien Weglängen für die thermische und die elektrische Leitfähigkeit: während die Widerstandsänderung für den elektrischen Widerstand bereits für verhältnismäßig dicke Drähte bei höheren Temperaturen in großen Feldern wegen des „Freie-Weglängen-Effektes“ wieder abnimmt, so zeigt sich diese Abnahme für den thermischen Widerstand nur bei der dünnsten Probe bei tiefen Temperaturen. Dies ist ein weiterer experimenteller Beweis für die ungleiche Größe der beiden freien Weglängen im Temperaturintervall $0 < T < \Theta$.

Eine quantitative Bestimmung der freien Weglänge aus „Freie-Weglängen-Effekt“-Messungen in Magnetfeldern ist schwierig, eine Trennung dieses Effektes von der gewöhnlichen magnetischen Widerstandsänderung ist nicht ohne weiteres möglich [74]. Zudem haben OLSEN [18, 75] und COTTI [14] gezeigt, daß für den elektrischen Widerstand von Indium auch bei sehr hohen Feldern der Einfluß der Wandstreuung nicht völlig eliminiert werden kann; das Problem der „Freie-Weglängen-Effekte“ in hohen Magnetfeldern ist somit noch keineswegs befriedigend gelöst.

Herrn Professor Dr. P. GRASSMANN, dem Vorsteher des Institutes für kalorische Apparate und Kältetechnik der ETH, möchte ich für sein wohlwollendes Interesse an dieser Arbeit herzlich danken. Vor allem liegt mir daran, Herrn Professor Dr. J. L. OLSEN, der alle diese Untersuchungen vorgeschlagen hat, für die große Hilfe, die er durch kritische Bemerkungen sowie durch Rat und Tat dieser Arbeit schenkte, meinen tiefen Dank auszusprechen. Herrn Professor Dr. W. BALTENSBERGER sowie meinen Kollegen, den Herren Dr. K. ANDRES, Dr. P. COTTI, Dr. S. GYGAX, Dr. B. LÜTHI und Dr. H. ROHRER danke ich für viele anregende Diskussionen. Diese Arbeit wurde durch ein Arbeitsbeschaffungsprojekt des Bundes unterstützt.

Literatur

- [1] KUBO, R.: *Canad. J. Phys.* **34**, 1274 (1956).
- [2] — *J. Phys. Soc. Japan* **12**, 570 (1957.)
- [3] CHESTER, G. V., and A. THELLUNG: *Proc. Phys. Soc. (London)* **73**, 745 (1959).
- [4] THOMSON, J. J.: *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **11**, 119 (1901).
- [5] SONDEHEIMER, E. H.: *Adv. in Phys.* **1**, 1 (1952).
- [6] OLSEN, J. L.: *Electron transport in metals*. New York-London: Intersci. Publishers 1962.
- [7] NORDHEIM, L.: *Act. Sci. et Ind.*, No. 131. Paris: Hermann 1938.
- [8] MATTHIESSEN, A.: *Ann. Physik* (2) **122**, 19 (1864).
- [9] PIPPAARD, A. B.: *Low-temperature physics*. New York: Gordon and Breach, Science Publishers 1962.
- [10] WHITE, G. K., and S. B. WOODS: *Phil. Mag.* **1**, 846 (1956).
- [11] JUSTI, E., M. KOHLER und G. LAUTZ: *Z. Naturforschung* **6a**, 456 (1951).
- [12] SOMMERFELD, A., u. H. BETHE: *Handbuch der Physik*, Bd. XXIV/2. Berlin: Springer 1933.
- [13] OLSEN, J. L.: *Helv. Phys. Acta* **31**, 713 (1958).
- [14] COTTI, P.: *Helv. Phys. Acta* **33**, 517 (1960).
- [15] — *Physics Letters* **4**, 115 (1963).
- [16] ALEKSANDROV, B. N.: *Soviet Phys.-JETP* **16**, 286 (1963).
- [17] BATE, R. T., B. MARTIN, and P. F. HILLE: *Phys. Rev.* **131**, 1482 (1963).
- [18] COTTI, P., J. L. OLSEN, J. G. DAUNT, and M. KREITMAN: *Cryogenics* **4**, 45 (1964).
- [19] — *Phys. kondens. Materie* **3**, 40 (1964).
- [20] *American Institute of Physics Handbook*. New York: McGraw-Hill 1957.
- [21] CLEMENT, J. R., and E. H. QUINNELL: *Nav. Res. Lab.*, Reprint No. 68—52 (1952).
- [22] PANDORF, R. C., C. Y. CHEN, and J. G. DAUNT: *Cryogenics* **2**, 239 (1962).
- [23] PEARCE, D. C., A. H. MARKHAM, and J. R. DILLINGER: *Rev. Sci. Instr.* **27**, 240 (1956).

- [24] WYDER, P.: *Z. angew. Math. Phys.* **11**, 530 (1959).
- [25] CHALLIS, L. J.: *Cryogenics* **2**, 23 (1961).
- [26] KOHLER, M.: *Ann. Phys.* (6) **6**, 18 (1949).
- [27] PRICE, P. J.: *IBM J. Research Develop.* **4**, 152 (1960).
- [28] FUCHS, K.: *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **34**, 100 (1938).
- [29] DINGLE, R. B.: *Proc. Roy. Soc. (London) A* **201**, 545 (1950).
- [30] JUSTI, E., M. KOHLER und G. LAUTZ: *Z. Naturforsch.* **6a**, 544 (1951).
- [31] KLOSE, W.: *Z. Naturforsch.* **13a**, 978 (1958).
- [32] JONES, H.: *Handbuch der Physik*, Bd. XX. Berlin. Göttingen, Heidelberg. Springer 1956.
- [33] BLOCH, F.: *Z. Phys.* **59**, 208 (1930).
- [34] KOHLER, M.: *Z. Phys.* **125**, 679 (1949).
- [35] ZIMAN, J. M.: *Electrons and Phonons*. Oxford: Clarendon Press 1960.
- [36] BLATT, F. J., und H. G. SATZ: *Helv. Phys. Acta* **33**, 1007 (1960).
- [37] AZBEL, M. YA., and R. N. GURZI: *Soviet Phys.-JETP* **15**, 1133 (1962).
- [38] LÜTHI, B., und P. WYDER: *Helv. Phys. Acta* **33**, 667 (1960).
- [39] COCHRAN, J. F., and M. YAQUB: *Physics Letters* **5**, 307 (1963).
- [40] GAIDE, A., and P. WYDER: *Electrical and magnetic properties of thin metallic layers. Koninklijke Vlaamse Academie voor Wetenschappen, Letteren en Schone Kunsten von Belgie, Brüssels, 1961.*
- [41] PIPPARD, A. B.: *Proc. Roy. Soc. (London) A* **191**, 385 (1947).
- [42] CHAMBERS, R. G.: *Proc. Roy. Soc. (London) A* **215**, 481 (1952).
- [43] FRIEDMANN, A. N., and S. H. KOENIG: *IBM J. Research Develop.* **4**, 158 (1960).
- [44] HARRISON, W. A., and M. B. WEBB, ed.: *The Fermi surface*. New York: John Wiley and Sons 1960.
- [45] OLSEN, J. L., und P. WYDER: *Helv. Phys. Acta* **32**, 311 (1959).
- [46] MAKINSON, R. E. B.: *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **34**, 474 (1938).
- [47] PIPPARD, A. B.: *Phil. Mag.* **46**, 1104 (1955).
- [48] LINDENFELD, P., and W. B. PENNEBAKER: *Phys. Rev.* **127**, 1881 (1962).
- [49] — und H. ROHRER: wird publiziert.
- [50] WHITE, G. K., and S. B. WOODS: *Rev. Sci. Instr.* **28**, 638 (1957).
- [51] ALEKSANDROV, B. N., and I. G. D'YAKOV: *Soviet Phys. — JETP* **16**, 603 (1963).
- [52] LIFSHITZ, I. M., M. IA. AZBEL, and M. I. KAGANOV: *Soviet Phys. — JETP* **4**, 41 (1957).
- [53] JUSTI, E.: *Leitfähigkeit und Leitungsmechanismus fester Stoffe*. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1948.
- [54] BOROVIK, E. S.: *Zh. Eksper. Teor. Fiz.* **27**, 355 (1954).
- [55] CHAMBERS, R. G.: *Proc. Roy. Soc. (London) A* **238**, 344 (1956).
- [56] LÜTHI, B.: *Helv. Phys. Acta* **33**, 161 (1960).
- [57] ALEKSEEVSKII, N. I., and Y. P. GAIDUKOV: *Soviet Phys. — JETP* **36**, 311 (1959).
- [58] MENDELSSOHN, K., and H. M. ROSENBERG: *Proc. Roy. Soc. (London) A* **218**, 190 (1953).
- [59] GRÜNEISEN, E., und H. D. ERFLING: *Ann. Physik* (5) **36**, 399 (1940).
- [60] NOBEL, J. DE: *Physica* **15**, 532 (1949).
- [61] ALERS, P. B.: *Phys. Rev.* **101**, 41 (1956).
- [62] COTTI, P.: *Helv. Phys. Acta* **34**, 8 (1961).
- [63] THORN, J.: *Diplomarbeit, Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik, ETH, 1963.*
- [64] —, und P. WYDER: *Physics Letters* **13**, 11 (1964).
- [65] FOROUD, A., E. JUSTI und J. KRAMER: *Physik. Z.* **41**, 113 (1940).
- [66] JONES, R. E., and A. M. TOXEN: *Phys. Rev.* **120**, 1167 (1960).
- [67] SONDHEIMER, E. H., and A. H. WILSON: *Proc. Roy. Soc. (London) A* **190**, 435 (1947).
- [68] WILSON, A. H.: *The theory of metals*. Cambridge: Cambridge University Press, 1958.
- [69] AZBEL, M. IA., M. I. KAGANOV, and I. M. LIFSHITZ: *Soviet Phys. — JETP* **5**, 967 (1957).
- [70] MACDONALD, D. K. C.: *Nature* **163**, 637 (1949).
- [71] CHAMBERS, R. G.: *Proc. Roy. Soc. (London) A* **202**, 378 (1950).
- [72] MACDONALD, D. K. C., and K. SARGINSON: *Proc. Roy. Soc. (London)* **203**, 223 (1950).
- [73] YAQUB, M., and J. F. COCHRAN: *Phys. Rev. Letters* **10**, 390 (1963).
- [74] KANER, E. A.: *Soviet Phys. — JETP* **34**, 454 (1958).
- [75] FROIDEVAUX, C., J. R. KEYSTONE, P. COTTI, J. L. OLSEN: *Proc. VII Int. Conf. Low Temp. Physics*. Toronto: North-Holland, 1960.

Aus dem Institut für kalorische Apparate und Kältetechnik
der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich, Schweiz

**Freie Weglängen im supraleitenden Zustand,
im normalen Zustand und im Zwischenzustand**

Von

PETER WYDER

Mit 14 Figuren

(Eingegangen am 6. August 1964)

Mit Hilfe des „Freie-Weglängen-Effektes“ für die thermische Leitfähigkeit in dünnen Indiumdrähten wird die freie Weglänge der Anregungen im normalen und im supraleitenden Zustand bestimmt. Im Rahmen der Genauigkeit von Messungen dieser Art stimmen die freien Weglängen in den beiden Zuständen überein. — Für den Zwischenzustand wird die Streuung der Elektronen an den Phasengrenzen sowohl experimentell wie auch theoretisch untersucht; auf Grund der BARDEEN-COOPER-SCHRIEFFER-Theorie der Supraleitung lassen sich die experimentellen Resultate erklären.

Le libre parcours des excitations sera déterminé dans le cas de fils d'indium minces à l'aide de mesures de l'effet de dimension pour la conductibilité thermique, à l'état normal et à l'état supraconducteur. Dans l'ordre de précisions de ces mesures, le libre parcours à l'état normal est égal au libre parcours à l'état supraconducteur. — Pour l'état intermédiaire, la dispersion des électrons aux limites des phases sera étudiée expérimentalement et théoriquement; les résultats expérimentaux seront interprétés à l'aide de la théorie de la supraconductivité de BARDEEN, COOPER et SCHRIEFFER.

By size-effect measurements of the thermal conductivity of thin indium wires the mean free path of the excitations has been determined in the normal and in the superconducting state. Within the accuracy of these measurements, the mean free paths in the two states are found to be equal. — For the intermediate state the electron scattering from the interphase boundaries has been investigated both experimentally and theoretically. The experimental results can be explained with the aid of the BARDEEN-COOPER-SCHRIEFFER theory of superconductivity.

1. Einleitung

Die BARDEEN-COOPER-SCHRIEFFER-Theorie [1] der Supraleitung ist außerordentlich erfolgreich bei der Erklärung der thermodynamischen Eigenschaften. Hingegen sind die Transportphänomene in Supraleitern keineswegs vollständig verstanden, insbesondere gibt es zur Frage des Dauerstromes noch keine befriedigende Antwort. Somit sind Experimente, die über Relaxationszeiten und Lebenszeiten von Anregungen Aufschluß geben und damit die Situation von der experimentellen Seite her zu klären versuchen, sehr erwünscht. Es schien daher von Interesse, die mit den Relaxationszeiten eng verknüpften, experimentell leichter zugänglichen freien Weglängen im supraleitenden Zustand direkt zu messen und sie mit den freien Weglängen im normalen Zustand zu vergleichen. Bei

der Diskussion von Experimenten zur Bestimmung der Energielücke im supraleitenden Zustand durch Ultraschallabsorption [2], bei gewissen Tunnel-Effekt-Untersuchungen [3] und bei Wärmeleitfähigkeitsmessungen an dünnen Filmen [4] und an einem Sandwich aus normalem und supraleitendem Metall [5] wird ferner üblicherweise die Annahme gemacht, daß die freien Weglängen in den beiden Zuständen gleich seien; diese Annahme wurde bis jetzt noch nie experimentell bewiesen, und sie steht im Gegensatz zur alten Heisenbergschen [6] Theorie, die die experimentellen Daten über die Wärmeleitfähigkeit [7] im supraleitenden Zustand erstaunlich gut wiedergibt.

Eine einfache Methode zur Bestimmung der freien Weglänge ist der „Freie-Weglängen-Effekt“ in der thermischen Leitfähigkeit. Falls die freie Weglänge mit den Proben dimensionen vergleichbar wird, so darf die Streuung der Elektronen an der Probenoberfläche nicht mehr vernachlässigt werden. Diese Streuung bewirkt eine zusätzliche Erhöhung des spezifischen Wärmewiderstandes, die bei bekannter Probengeometrie eine Bestimmung der freien Weglänge gestattet, und dies kann sowohl im supraleitenden wie auch im durch ein überkritisches Magnetfeld hergestellten normalen Zustand durchgeführt werden. Die Probleme dieser thermischen „Freie-Weglängen-Effekte“ wurden in einer vorausgehenden Arbeit [8] untersucht; für diese Untersuchungen hier wurden die gleichen Methoden angewendet, insbesondere wurden die gleichen Proben gemessen. — Die Experimente zeigen, daß im Rahmen der Genauigkeit solcher „Freie-Weglängen-Effekt“-Messungen die freien Weglängen im normalen und im supraleitenden Zustand gleich sind.

Prinzipiell kann jede geometrische Größe, deren Lineardimension mit der freien Weglänge vergleichbar ist und die irgend einen Einfluß auf die am Transportphänomen beteiligten Teilchen hat, dazu benützt werden, um Rückschlüsse auf die freie Weglänge zu ziehen. Eine solche geometrische Größe ist nun auch in der Lamellenstruktur des Zwischenzustandes eines Supraleiters gegeben. Die Existenz einer Streuung an den Phasengrenzen wurde bereits mehrfach angenommen, insbesondere von HULM [9] und in einer etwas anderen Form von ZAVARITSKII [10]; sie zeigt sich experimentell an sehr reinen Supraleitern in einem Maximum des Wärmewiderstandes im Zwischenzustand. Ein solches Maximum haben MENDELSSOHN und OLSEN [11] an Blei-Wismuth-Legierungen entdeckt und seither wurde es an anderen Legierungen, aber auch an sehr reinen Metallen, gefunden [10]. CORNISH und OLSEN [12] konnten zeigen, daß sich dieses Maximum ohne weiteres erklären läßt, wenn neben den Elektronen auch die Phononen am Wärmetransport teilnehmen. Im Falle sehr reiner Metalle wie dem des hier untersuchten Indiums, wo die Wärmeleitung auch im supraleitenden Zustand beinahe ausschließlich durch die Elektronen geschieht, versagt jedoch ihre Erklärung und die Streuung der Elektronen an den Phasengrenzen muß berücksichtigt werden. Eine solche Streuung läßt sich im Rahmen der BCS-Theorie berechnen [13] und sehr einfach mit den Experimenten vergleichen, indem man die Feld- und Temperaturabhängigkeit des Wärmewiderstandes im Zwischenzustand untersucht. Aus Messungen des Wärmewiderstandes im Zwischenzustand gelingt es dann, die Temperaturabhängigkeit der für die Supraleitung verantwortlichen Energielücke zu bestimmen.

Alle experimentellen Untersuchungen wurden an Indium ausgeführt. Einige Gründe für die Benützung von Indium für Experimente dieser Art wurden bereits früher [8] angegeben; Indium wird bei 3,407 °K supraleitend, somit läßt sich auch

die Wärmeleitfähigkeit im supraleitenden Zustand in dem experimentell leicht zugänglichen Temperaturgebiet messen.

2. Bestimmung der freien Weglängen im normalen und im supraleitenden Zustand

Das Problem der Definition einer freien Weglänge im supraleitenden Zustand ist ganz analog dem gleichen Problem im normalen Zustand [8]. BARDEEN, RICKAYZEN und TEWORDT [14] und GELIKMAN [15] zeigen, daß man die einfach angeregten Zustände und die Paaranregungen der BCS-Theorie in Wellenpaketen zusammenfassen kann. Damit läßt sich für diese Anregungen — die „normalen Elektronen“ im supraleitenden Zustand im Sinne des Zwei-Flüssigkeiten-Modells — eine Gruppengeschwindigkeit v definieren:

$$v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}}. \quad (1)$$

$E_{\mathbf{k}}$ ist die Energie einer durch den Wellenvektor \mathbf{k} charakterisierten Anregung, in der BCS-Näherung gegeben durch

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + \varepsilon_0^2}. \quad (2)$$

$\varepsilon_{\mathbf{k}}$ ist die Bloch-Energie eines Elektrons im normalen Zustand mit Wellenvektor \mathbf{k} und ε_0 ist die BCS-Energielücke. Damit erhält man für die Geschwindigkeiten

$$v_s = \left| \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right| \cdot v_n. \quad (3)$$

Die Indizes s und n beziehen sich auf den supraleitenden oder auf den normalleitenden Zustand.

Setzt man voraus, die Anregungen werden an einem Potential gestreut (Verunreinigungsstreuung), so läßt sich nach den üblichen Methoden eine Relaxationszeit definieren und man erhält [14, 15]

$$\tau_s^i = \left| \frac{E_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} \right| \cdot \tau_n^i. \quad (4)$$

Für die freien Weglängen ergibt sich damit

$$l \equiv v \cdot \tau = l_s^i = l_n^i. \quad (5)$$

Wesentlich schwieriger wird die Untersuchung im Falle der unelastischen Elektron-Phonon-Streuung. KADANOFF und MARTIN [16] gelang es mit Hilfe von Greenschen Funktionen auch in diesem Fall Relaxationszeiten zu definieren; sie nehmen jedoch — im Gegensatz zur Gleichung (4) — an, daß trotz des Auftretens der Energielücke die Relaxationszeiten im normalen und im supraleitenden Zustand gleich sind. Mit (3) wird damit

$$l_s^{\text{ph}} = l_n^{\text{ph}}.$$

In eleganter Weise löst TEWORDT [17, 18] die Boltzmann-Gleichung in Abwesenheit von Elektron-Phonon-Stößen; er kann ebenfalls Relaxationszeiten τ^{ph} definieren und leitet für $\tau_s^{\text{ph}} = \tau_n^{\text{ph}}$ die Resultate von KADANOFF und MARTIN her. Er zeigt jedoch direkt, daß nach der BCS-Theorie $\tau_s^{\text{ph}} \neq \tau_n^{\text{ph}}$ ist; allerdings wird der Zusammenhang nicht mehr durch die Beziehung (4) gegeben. Damit

sind ebenfalls nach dieser Untersuchung die freien Weglängen im normalen und im supraleitenden Zustand für Elektron-Phonon-Stöße ungleich.

Nachdem es auch für die Wärmeleitfähigkeit im supraleitenden Zustand möglich ist, eine freie Weglänge zu definieren, so läßt sich der Stoßterm in der Boltzmann-Gleichung mit Hilfe einer Relaxationszeit schreiben. Setzt man voraus, daß an der Probenoberfläche ein Bruchteil p der Anregungen elastisch und ein Bruchteil $(1 - p)$ diffus gestreut werden, so läßt sich die Boltzmann-Gleichung mit diesen Randbedingungen lösen [8, 19]. Man erhält für den spezifischen Wärmewiderstand $W(d)$ eines Zylinders des Durchmessers d

$$W_{n,s}(d) = W_{\infty n,s} \cdot \Phi\left(p, \frac{l_{n,s}}{d}\right). \tag{6}$$

W_{∞} bedeutet den spezifischen Wärmewiderstand des unendlich ausgedehnten Materials und $\Phi(p, l/d)$ ist eine von DINGLE [19] tabellierte Funktion. Setzt man $p = 0$, was im folgenden immer angenommen wird [3], so kann (6) durch die wesentlich einfachere Beziehung von NORDHEIM [20] ersetzt werden:

$$W_{n,s}(d) = W_{\infty n,s} \cdot \left(1 + \frac{l_{n,s}}{d}\right). \tag{7}$$

Durch Messen des Wärmewiderstandes im normalen und im supraleitenden Zustand verschieden dicker Drähte lassen sich damit die freien Weglängen in den beiden Zuständen messen [21, 22]. Für Proben aus Indium ist die Beziehung (7)

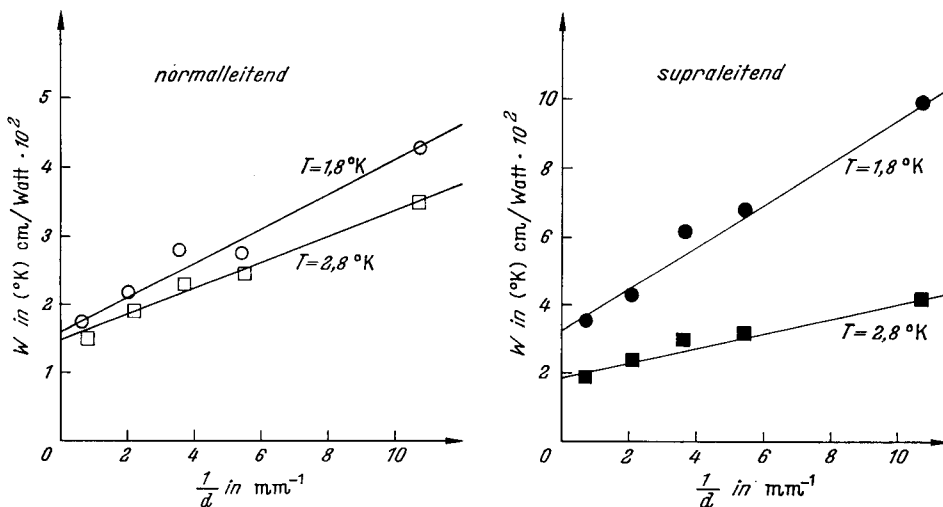


Fig. 1. NORDHEIM-Beziehung zur Bestimmung der freien Weglängen im normalen und im supraleitenden Zustand

in der Fig. 1 aufgetragen. Die hieraus bestimmten freien Weglängen als Funktion der Temperatur sind für beide Zustände in der Fig. 2 dargestellt. Die beiden freien Weglängen stimmen im Rahmen der Genauigkeit dieser Art von Messungen im ganzen untersuchten Temperaturbereich überein (Fig. 3). (Die Genauigkeit in der Bestimmung von l beträgt, wie sich aus der Fig. 1 abschätzen läßt, etwa 10%.) Es ist bemerkenswert, daß für $T = T_c$ (T_c : Sprungtemperatur der Supraleitung) bei dem hier untersuchten Indium der Beitrag zum Wärmewiderstand, herrührend

von Elektron-Phonon-Stößen, etwa 60% beträgt; die Beziehung (5) ist somit experimentell nicht nur im Gebiet der elastischen Verunreinigungsstreuung, sondern auch in Anwesenheit von unelastischen Phononstößen erfüllt.

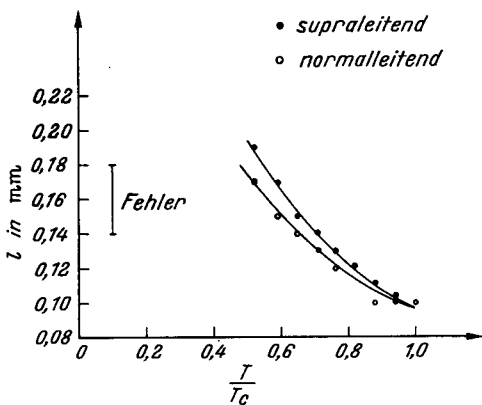


Fig. 2

Fig. 2. Freie Weglängen im normalen und im supraleitenden Zustand. Der geschätzte Fehler in der Bestimmung ist angegeben

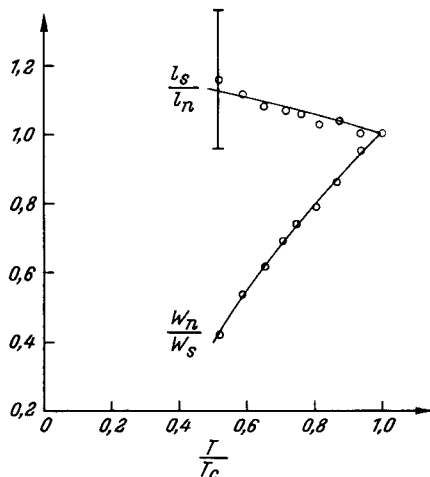


Fig. 3

Fig. 3. Vergleich der freien Weglängen und der spezifischen Widerstände im normalen und im supraleitenden Zustand

Aus der Gleichheit der beiden freien Weglängen und aus (7) folgt, daß

$$\frac{W_n(d)}{W_s(d)} = g\left(\frac{T}{T_c}\right), \quad (8)$$

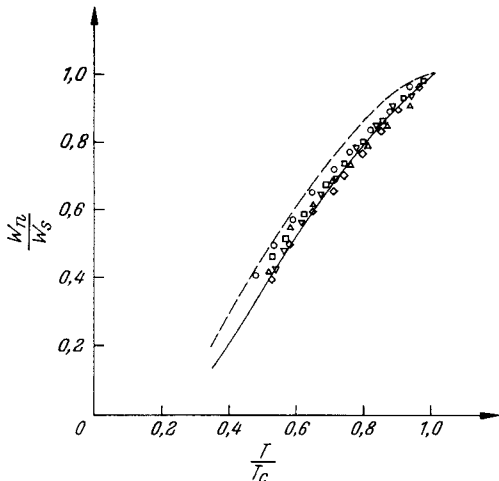


Fig. 4. Verhältnis der Widerstände im normalleitenden und im supraleitenden Zustand für dünne Indiumdrähte. Vergleich mit theoretischen Werten

- In 1. $d = 1,48$ mm
- In 2. $d = 0,485$ mm
- △ In 3. $d = 0,282$ mm
- ◇ In 4. $d = 0,186$ mm
- ▽ In 5. $d = 0,094$ mm
- Theoretisch KADANOFF und MARTIN [16], $a = 1,3$
- - - Theoretisch BARDEEN, RICKAYZEN und TEWORDT [14] (Nur Verunreinigungsstreuung)

wobei g eine Funktion von T/T_c allein, unabhängig von d , sein muß. Die experimentellen Resultate sind in der Fig. 4 aufgetragen, ebenfalls eingezeichnet sind theoretisch berechnete Kurven für $g(T/T_c)$. Die Kurve nach BARDEEN, RICKAYZEN und TEWORDT [14] wurde unter der Annahme berechnet, daß nur Verunreinigungsstreuungen vorhanden sind. Für die Kurve nach KADANOFF und MARTIN [16] berücksichtigt man auch Phononstöße; der zusätzlich in der Theorie enthaltene, anzupassende Parameter a ist definiert als das Verhältnis der Widerstände herrührend von der Phonon- und von der Verunreinigungsstreuung bei $T = T_c$. Es ist erstaunlich, daß die Theorie von KADANOFF und MARTIN eine so gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten liefert, obgleich sie von der Annahme $l_s \neq l_n$ ausgeht.

Die in der Fig. 4 dargestellten Resultate stimmen sehr gut mit den Messungen von JONES und TOXEN [23] an Indium von etwas anderer Reinheit überein; dies, zusammen mit der Tatsache, daß sich die Oberflächenstreuung im wesentlichen als Verunreinigungsstreuung auffassen läßt [8], legt die Vermutung nahe, daß $g(T/T_c)$ innerhalb gewisser Grenzen unabhängig von der Reinheit ist. Messungen von LINDENFELD und ROHRER [24] scheinen dies zu bestätigen.

3. Streuung der Anregungen an den Phasengrenzen des Zwischenzustandes

Legt man senkrecht zu einem supraleitenden Zylinder ein magnetisches Feld an, dessen Größe sehr weit weg vom Zylinder H beträgt, so erhält man an den zum Feld senkrechten Endpunkten des Zylinderdurchmessers wegen des Meißner-effektes eine Feldstärke von $2H$. Falls $2H$ das kritische Feld H_c erreicht, so spaltet ein reiner Supraleiter erster Art aus elektrodynamisch - thermodynamischen Gründen in zu der Zylinderachse senkrechte Lamellen auf, die abwechselnd normal und supraleitend sind. Dieser Zustand heißt „Zwischenzustand“. Die Schichtdicken a_n und a_s der normalleitenden und supraleitenden Lamellen hängen einerseits von x , definiert durch

$$x \equiv \left(2 \frac{H}{H_c} - 1\right); \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (9)$$

und andererseits vom Drahtdurchmesser d und dem Oberflächenenergieparameter Δ ab. LANDAU [25] erhält für sein „unverzweig-

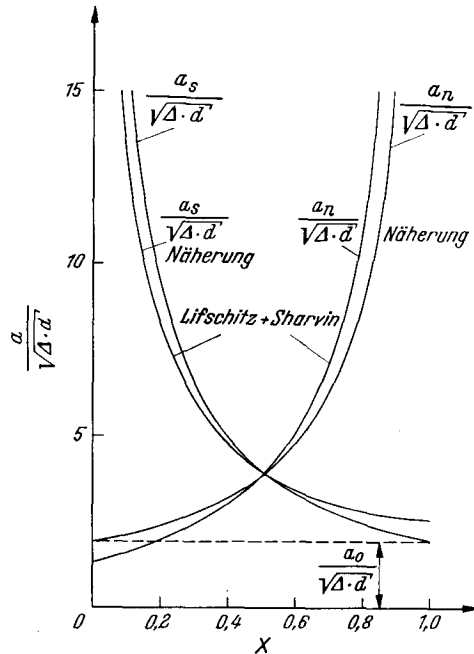


Fig. 5. Lamellenstruktur des Zwischenzustandes. Vergleich der exakten Formeln von LIFSCHITZ und SHARVIN mit einer einfachen Näherung

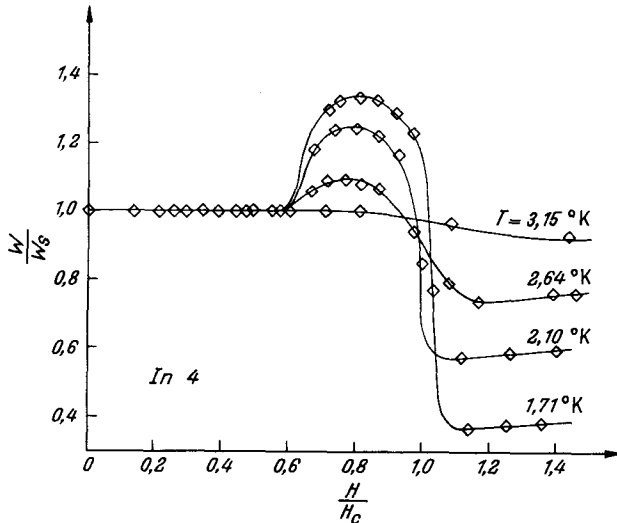


Fig. 6. Wärmewiderstand im Zwischenzustand für einen Indiumdraht ($d = 0,136$ mm)

tes“ Modell

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{\Delta \cdot \bar{d}} \cdot \varphi(x) \\ a_s &= \sqrt{\Delta \cdot \bar{d}} \cdot \psi(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind von LIFSHTZ und SHARVIN [26] tabelliert und in der Fig. 5 dargestellt. Eine recht gute Näherung für (10) wird gegeben durch

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_0}{1-x}; \quad a_s = \frac{a_0}{x}, \\ a_0 &= 2\sqrt{\Delta \cdot \bar{d}}, \end{aligned} \quad (11)$$

die ebenfalls in der Fig. 5 eingetragen ist. Indium hat einen Wert von $\Delta \simeq 3,4 \times 10^{-5}$ cm [27], was für die hier untersuchten Proben eine Lamellendicke von $a_0 \simeq 4 \cdot 10^{-3}$ cm liefert. Damit ist die Lamellenstruktur von der Größenordnung der freien Weglängen und es ist zu erwarten, daß die Phasengrenzen den Wärmetransport der Elektronen beeinflussen.

Ein Beispiel für die experimentellen Resultate an Indiumdrähten ist in der Fig. 6 dargestellt. Das durch die Streuung der Anregungen an den Phasengrenzen hervorgerufene Maximum des Wärmewiderstandes im Zwischenzustand ist deutlich erkennbar. — Oft ist auch an sehr reinen Proben eine Hysteresis beobachtet worden [10]; für zunehmendes Feld erhält man etwas andere Werte für den Wärmewiderstand im Zwischenzustand als für abnehmendes Feld. Diese Erscheinung zeigen auch einige der hier untersuchten Proben. Nun konnte PIPPARD* zeigen, daß durch langsames Rotieren des Magnetfeldes diese Hysteresis zum Verschwinden gebracht werden kann. Bei diesen hochreinen Proben ist sie also im wesentlichen experimentell bedingt und auf eine ungenaue Justierung im Magnetfeld zurückzuführen.

Nimmt man in gröbster Näherung an, sowohl die Elektronen in den normalen wie auch die Anregungen in den supraleitenden Lamellen werden an den Phasengrenzen vollkommen gestreut, so läßt sich die Feldabhängigkeit des Wärmewiderstandes im Zwischenzustand angeben. Im Sinne der Näherung von NORDHEIM [8] erhält man für die effektiven freien Weglängen l'_n und l'_s in den normalen und in den supraleitenden Lamellen

$$\frac{1}{l'_{n,s}} = \frac{1}{l} + \frac{1}{a_{n,s}}. \quad (12)$$

Die freien Weglängen $l_{n,s}$ des unendlich ausgedehnten Materials sind nach Abschnitt 2. in beiden Zuständen gleich, $l_n = l_s = l$. Zusammen mit der Näherung (11) ergibt sich damit für die Feldabhängigkeit des spezifischen Wärmewiderstandes im Zwischenzustand

$$\frac{W}{W_s} = 1 + x \left[\frac{l}{a_0} \left(\frac{W_n}{W_s} + 1 \right) + \left(\frac{W_n}{W_s} - 1 \right) \right] - x^2 \frac{l}{a_0} \left(\frac{W_n}{W_s} + 1 \right). \quad (13)$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß auch diejenigen Elektronen in den normalleitenden Lamellen, deren Energie kleiner ist als die Energielücke $\varepsilon_0(T)$, Wärme in die supraleitenden Lamellen übertragen können, obgleich es dort gar keine Anregungen mit Energien $E < \varepsilon_0(T)$ gibt. Dies ist nur möglich, wenn die niedrig energie-

* Ich danke Herrn Dr. D. SHOENBERG für diese private Mitteilung.

tischen Elektronen in den normalleitenden Lamellen ihre Wärme durch Elektron-Elektron-Wechselwirkung an höherenergetische Elektronen abgeben, die die Wärme dann in die supraleitenden Lamellen transportieren. Ohne diese Wechselwirkung erhält man bei $x = 1$ für W/W_s einen Sprung — eine beliebig dünne supraleitende Lamelle genügt, um den Wärmetransport der niedrigerenergetischen Elektronen zu unterbinden — während für $0 \leq x < 1$ gilt

$$\frac{W}{W_s} = 1 + 2 \frac{l}{a_0} x - 2 \frac{l}{a_0} x^2. \quad (14)$$

In beiden Fällen hängt somit der Wärmewiderstand im Zwischenzustandsgebiet quadratisch vom Feld ab

$$\frac{W}{W_s} = 1 + px + qx^2, \quad (15)$$

und die beiden Konstanten p und q lassen sich experimentell sehr einfach aus W_n/W_s und $(W/W_s)_{\max}$ bestimmen. In der Fig. 7 wurden auf diese Weise versucht, die Beziehungen (13) und (14) an die gemessenen Punkte anzupassen; die Übereinstimmung mit der Kurve, die ohne Elektron-Elektron-Wechselwirkung berechnet wurde, ist wesentlich besser. Das bedeutet, daß die freie Weglänge für diese Wechselwirkung bedeutend größer sein muß als die Lamellendicke; dies entspricht auch einer Abschätzung von PIRPARD [28], der eine freie Weglänge für die Elektron-Elektron-Wechselwirkung von 1 cm angibt.

Der Grenzfall sehr kleiner freier Weglängen, $l \ll a_0$, ist in (13) enthalten und man erhält in Übereinstimmung mit einer gewöhnlichen Addition der Widerstände

$$\frac{W}{W_s} = 1 + x \left(\frac{W_n}{W_s} - 1 \right). \quad (16)$$

Der Wärmewiderstand im Zwischenzustandsgebiet hängt somit für kleine freie Weglängen linear vom Feld ab; dies wurde auch von OLSEN [29] an reinem Blei beobachtet.

Um die Temperaturabhängigkeit des Wärmewiderstandes im Zwischenzustand — z. B. $(W/W_s)_{\max} = F(T/T_c)$ — zu berechnen, muß der Streuprozeß an den Phasengrenzen im einzelnen untersucht werden. Das kann im Rahmen der BCS-Theorie geschehen [13].

Nach GEILIKMAN [15] und BARDEEN, RICKAYZEN und TEWORDT [14] erhält man unter der Voraussetzung, daß nur elastische Stöße vorhanden sind, für den Beitrag zur Wärmeleitfähigkeit κ der Anregungen eines Energieintervalls von E bis $E + dE$

$$d\kappa = - [2N(\zeta) v_F/3T] l(E) E^2 (\partial f_0/\partial E) dE. \quad (17)$$

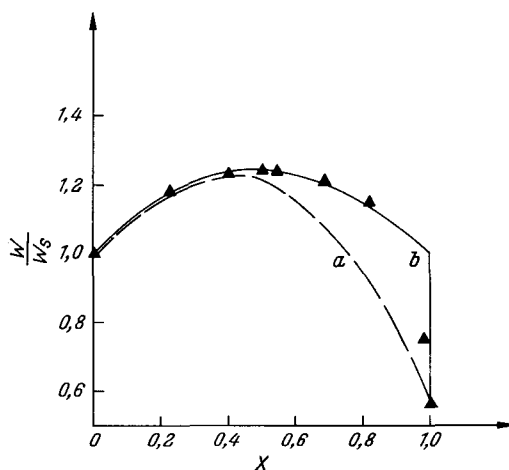


Fig. 7. Wärmewiderstand im Zwischenzustand, als Funktion des Magnetfeldes. Vergleich der experimentellen Daten mit theoretischen Kurven.

- a) mit Beitrag der kleinerenergetischen Elektronen im normalen Zustand
- b) ohne Beitrag der kleinerenergetischen Elektronen im normalen Zustand

Hier bedeutet $N(\zeta)$ die Zustandsdichte an der Fermi-Grenz-Energie ζ , v_F ist die Geschwindigkeit eines Elektrons auf der Fermifläche im normalen Metall, T die Temperatur, $l(E)$ die freie Weglänge als Funktion der relativ zur Fermi-Energie gemessenen Energie E , und f_0 die Fermi-Verteilungsfunktion. Die Beziehung (17) gilt ganz allgemein, unabhängig von der Zustandsdichte. Da ferner nach dem Abschnitt 2. $l_s = l_n$ ist, gilt damit (17) sowohl für den supraleitenden wie auch für den normalen Zustand.

In den normalen Lamellen hat man Bloch-Elektronen, die sich durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_{\mathbf{k},\sigma}^+$ und $a_{\mathbf{k},\sigma}$ (σ : Spin-Index) beschreiben lassen. Mit der üblichen Normierung für den Grundzustand $|0\rangle$ als gefüllte Fermikugel erhält man

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k},\sigma}^+ |0\rangle &= 0; & |\mathbf{k}| < k_F \\ a_{\mathbf{k},\sigma} |0\rangle &= 0; & |\mathbf{k}| > k_F. \end{aligned} \quad (18)$$

In den supraleitenden Lamellen lassen sich die Anregungen am besten durch den VALATIN [30]-BOGOLYUBOV [31]-Formalismus beschreiben. Man führt neue Quasiteilchen-Operatoren ein, definiert durch:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k}}^+ &= (1 - h_{\mathbf{k}})^{1/2} a_{\mathbf{k},\sigma}^+ - h_{\mathbf{k}}^{1/2} a_{-\mathbf{k},-\sigma}, \\ \gamma_{-\mathbf{k}}^+ &= (1 - h_{\mathbf{k}})^{1/2} a_{-\mathbf{k},-\sigma}^+ + h_{\mathbf{k}}^{1/2} a_{\mathbf{k},\sigma}. \end{aligned} \quad (19)$$

$h_{\mathbf{k}}$ ist die BCS-Wahrscheinlichkeit, daß das \mathbf{k} -te Cooper-Paar besetzt ist; die Energieabhängigkeit [32] von $h_{\mathbf{k}}$ ist in der Fig. 8 dargestellt, für kleine Energien ist $h_{\mathbf{k}} \simeq 1$ und geht bei der Fermi-Energie $\varepsilon_F \equiv \zeta$ innerhalb der Energielücke ε_0 gegen Null. Das bedeutet, daß sich die Anregungen (19) für Energien weit oberhalb und weit unterhalb der Fermi-Energie wie Elektronen oder Löcher der Art (18) benehmen.

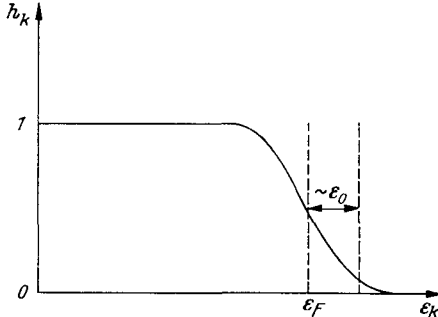


Fig. 8. Schematische Darstellung der Paarbesetzungsfunktion im BCS-Grundzustand

Trifft eine Anregung der Art (18) in einer normalen Lamelle auf die Phasengrenze, so muß sie nach dem Übergang in eine Summe von Anregungen der Art (19) zerlegt werden. Dies bedeutet aber Übergangswahrscheinlichkeiten und damit Streuprozesse. Für Übergänge ohne Phonon-Wechselwirkung muß die Energie erhalten bleiben.

Da die Anregungen (18) und (19) für hohe Energien übereinstimmen, bedeutet das, daß nur Anregungen mit Energien E im Intervall $0 \leq E \lesssim 2\varepsilon_0$ beim Übergang stark gestreut werden. — Diese gleiche Überlegung läßt sich an Hand des Energiespektrums der Anregungen für den normalen und den supraleitenden Zustand (Fig. 9) etwas anschaulicher ausführen: Normale Teilchen tragen nur kinetische Energie $\Delta_n(\text{KE})$, während sich die Energie der Anregungen im supraleitenden Zustand aus kinetischer Energie $\Delta_s(\text{KE})$ und potentieller Energie $\Delta_s(\text{PE})$ zusammensetzt [32]. Für $\Delta_s(\text{KE}) = 0$ ist $\Delta_s(\text{PE})$ gerade die BCS-Energielücke ε_0 . Wenn ein normales Teilchen auf die Phasengrenze trifft und wenn man elastische Streuung annimmt, so muß dieses für Energien $\Delta_n(\text{KE}) < \varepsilon_0$ vollkommen gestreut werden, da es auf der anderen Seite

gar keine Zustände mit diesen Energien gibt. Falls $\Delta_n(\text{KE}) > \varepsilon_0$ ist, so ist ein Übergang möglich, aber einige kinetische Energie muß in potentielle Energie verwandelt werden oder umgekehrt; somit werden auch Teilchen mit Energien $\Delta_n(\text{KE}) > \varepsilon_0$ beim Übergang gestreut. Es ist zu erwarten, daß diese Streuungen

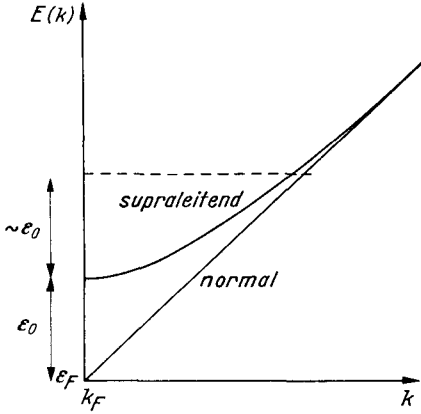


Fig. 9

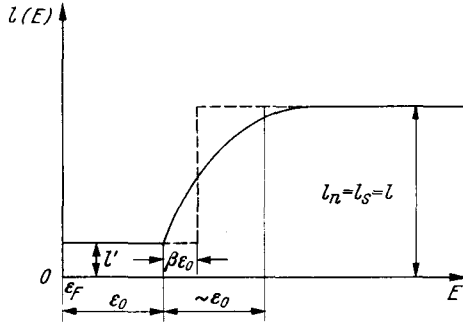


Fig. 10

Fig. 9. Energiespektrum für den normalen und den supraleitenden Zustand

Fig. 10. Energieabhängigkeit der freien Weglänge für Streuung der Elektronen an den Phasengrenzen des Zwischenzustandes

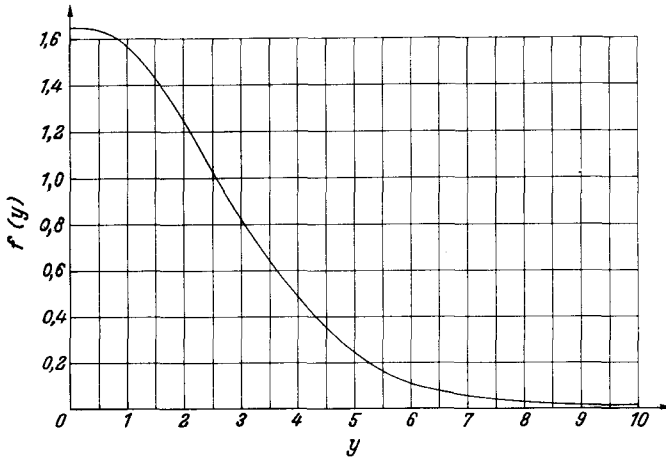


Fig. 11. $f(y) = 2F_1(-y) + 2y \cdot \ln(1 + e^{-y}) + y^2/(1 + e^y)$
 $F_1(-y) = \int_0^\infty z(1 + e^{z+y})^{-1} dz$

in dem Energiebereich stark ist, wo $\Delta_s(\text{PE})/\Delta_s(\text{KE})$ groß ist, also für Energien E im Intervall $\varepsilon_0 < E \lesssim 2\varepsilon_0$.

Damit läßt sich die Energieabhängigkeit der freien Weglänge in (17) angeben (Fig. 10):

$$\begin{aligned}
 l(E) &= l' && \text{für } 0 < E < \varepsilon_0, \\
 l' < l(E) < l && \text{für } \varepsilon_0 < E \lesssim 2\varepsilon_0, \\
 l(E) &= l_s = l_n = l && \text{für } 2\varepsilon_0 < E.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

l' ist im wesentlichen durch a_n gegeben und kann, für $x = 1/2$, mit l verglichen, vernachlässigt werden. Durch die Wahl verschiedener Testfunktionen — Exponentialfunktion, lineare Funktion, Treppenfunktion — kann gezeigt werden,

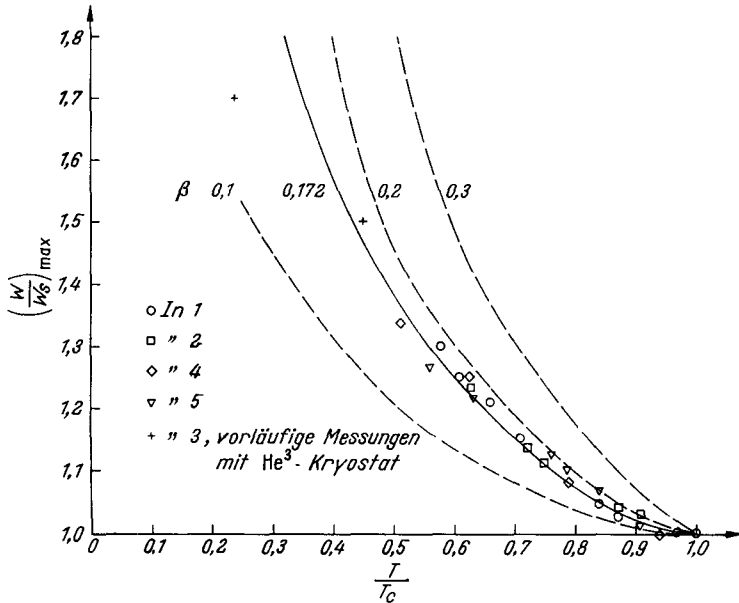


Fig. 12. Maximum des Wärmewiderstandes im Zwischenzustand als Funktion der reduzierten Temperatur. Vergleich mit theoretischen Kurven für verschiedene Werte von β

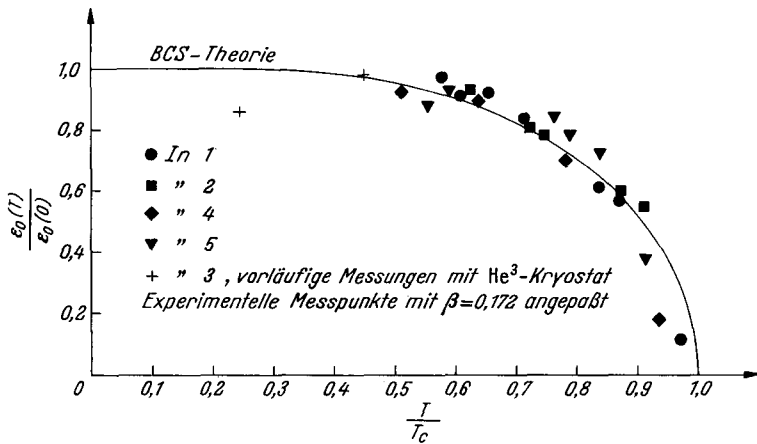


Fig. 13. Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der BCS-Energielücke aus Messungen des Maximums des Wärmewiderstandes im Zwischenzustand

daß die Schlußresultate nicht mehr wesentlich davon abhängen, wie $l(E)$ von l' nach l wächst. Daher läßt sich (20) vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
 l(E) &= 0 & \text{für} & \quad 0 < E < \epsilon_0 + \beta \epsilon_0, \\
 l(E) &= l & \text{für} & \quad \epsilon_0 + \beta \epsilon_0 < E.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Hier ist β ein temperaturunabhängiger, anzupassender Parameter. Er läßt sich nur durch eine exakte wellenmechanische Behandlung des Streuproblems berechnen, muß jedoch nach (20) zwischen 0 und 1 liegen.

Aus (17) und (21) erhält man damit

$$(W/W_s)_{\max} = \int_{\varepsilon_0}^{\infty} d\kappa / \int_{\varepsilon_0 + \beta\varepsilon_0}^{\infty} d\kappa = f(y) / f([1 + \beta] \cdot y) \tag{22}$$

mit $y = \varepsilon_0(T) / k_B T$ (k_B : Boltzmann-Konstante) und $f(y) = 2 F_1(-y) + 2 y \times \ln(1 + e^{-y}) + y^2 / (1 + e^y)$. $F_1(-y)$ ist definiert durch

$$F_1(-y) = \int_0^{\infty} z (1 + e^{z+y})^{-1} dz$$

und von RHODES [33] tabelliert. Die Funktion $f(y)$ ist in der Fig. 11 aufgetragen. Mit Hilfe dieser Darstellung und der von MÜHLSCHLEGEL [34] tabellierten Werte für die BCS-Energielücke $\varepsilon_0(T)$ läßt sich $(W/W_s)_{\max} = F(T/T_c, \beta)$ bestimmen und mit den Experimenten vergleichen (Fig. 12). Um auch bei sehr tiefen Temperaturen, wo die Energielücke temperaturunabhängig ist, experimentelle Werte zu haben, wurden einige vorläufige Messungen mit einem He³-Kryostaten* ausgeführt. Allerdings muß bei diesen tiefen Temperaturen für eine exakte Berechnung von $(W/W_s)_{\max}$ der von der Phononenleitfähigkeit herrührende Beitrag zur Wärmeleitfähigkeit im supraleitenden Gebiet berücksichtigt werden. Aus der Fig. 12 ist ersichtlich, daß man für $\beta = 0,172$ trotzdem auch für sehr tiefe Temperaturen eine recht gute Übereinstimmung zwischen den Messungen und der theoretisch berechneten Kurve erhält. Kehrt man das Vorgehen um, so läßt sich bei bekanntem β die Temperaturabhängigkeit der BCS-Energielücke aus Messungen von $(W/W_s)_{\max}$ bestimmen. Dies ist in der Fig. 13 dargestellt.

Nach der hier gegebenen Erklärung des Maximums des Widerstandes im Zwischenzustand ist für den elektrischen Widerstand kein solches Maximum zu erwarten. In den supraleitenden Lamellen wird der elektrische Strom durch den Grund-

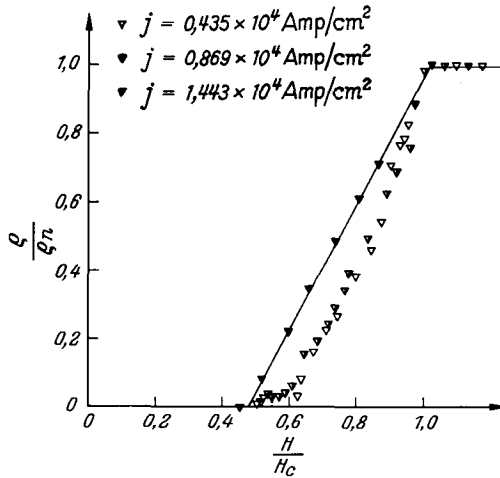


Fig. 14. Elektrischer Widerstand im Zwischenzustand für einen Indiumdraht ($d = 0,094$ mm)

zustand getragen, die Anregungen sind gar nicht nötig und ihr zusätzlicher Widerstand, herrührend von der Streuung an den Phasengrenzen, verschwindet gegenüber dem durch den Grundzustand getragenen Suprastrom. Dies wird, in Übereinstimmung mit Messungen von ZAVARITSKII [10], auch beobachtet (Fig. 14). Es ist bekannt [35], daß sich bei kleinen Stromdichten die Laminarstruktur im

* Ich danke Herrn Prof. J. L. OLSEN dafür, daß er mir seinen He³-Kryostaten für einige vorläufige Messungen zur Verfügung gestellt hat.

Zwischenzustand viel weniger exakt ausgerichtet als bei größeren Stromdichten. Für die thermische Leitfähigkeit macht das kaum etwas aus, im elektrischen Fall hingegen wirken supraleitende Längsfäden als Kurzschlüsse. Bei genügender Stromdichte erkennt man aus der Fig. 14 einen linearen Anstieg des Widerstandes mit dem Feld, was der hier dargestellten Theorie entspricht.

Herrn Professor Dr. P. GRASSMANN, dem Vorsteher des Institutes für kalorische Apparate und Kältetechnik der ETH, möchte ich für sein wohlwollendes Interesse an dieser Arbeit herzlich danken. Vor allem liegt mir daran, Herrn Professor Dr. J. L. OLSEN, der alle diese Untersuchungen vorgeschlagen hat, für die große Hilfe, die er durch kritische Bemerkungen sowie durch Rat und Tat dieser Arbeit schenkte, meinen tiefen Dank auszusprechen. Herrn Professor Dr. W. BALTFENSPERGER sowie meinen Kollegen, den Herren Dr. K. ANDRES, Dr. P. COTTI, Dr. S. GYGAX, Dr. B. LÜTHI, Dr. H. ROHRER und S. STRÄSSLER danke ich für viele anregende Diskussionen. Diese Arbeit wurde durch ein Arbeitsbeschaffungsprojekt des Bundes unterstützt.

Literatur

- [1] BARDEEN, J., L. N. COOPER und J. R. SCHRIEFFER: Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [2] LEVY, M.: Phys. Rev. **130**, 791 (1963).
- [3] SAINT-JAMES, D.: C. R. Acad. Sci. **256**, 2353 (1963).
- [4] MORRIS, D. E., und M. TINKHAM: Phys. Rev. **134**, A 1154 (1964).
- [5] CHALLIS, L. J., and J. D. N. CHEEKE: Proc. Phys. Soc. (London) **83**, 109 (1964).
- [6] HEISENBERG, W.: Z. Naturforsch. **3a**, 65 (1948).
- [7] KOPPE, H.: Ergeb. exakt. Naturw. **23**, 283 (1950).
- [8] WYDER, P.: Phys. kondens. Materie **3**, 263 (1965).
- [9] HULM, J. K.: Phys. Rev. **90**, 1116 (1953).
- [10] ZAVARITSKII, N. V.: Soviet Phys. — JETP **11**, 1207 (1960).
- [11] MENDELSSOHN, L., und J. L. OLSEN: Phys. Rev. **80**, 859 (1950).
- [12] CORNISH, F. H. J., und J. L. OLSEN: Helv. Phys. Acta **26**, 369 (1953).
- [13] STRÄSSLER, S., und P. WYDER: Phys. Rev. Letters **10**, 225 (1963).
- [14] BARDEEN, J., G. RICKAYZEN und L. TEWORDT: Phys. Rev. **113**, 982 (1959).
- [15] GEILIKMAN, B. T.: Soviet Phys. — JETP **7**, 721 (1958).
- [16] KADANOFF, L. P., und P. C. MARTIN: Phys. Rev. **124**, 670 (1961).
- [17] TEWORDT, L.: Phys. Rev. **128**, 12 (1962).
- [18] — Phys. Rev. **129**, 657 (1963).
- [19] DINGLE, R. B.: Proc. Roy. Soc. (London) A **201**, 545 (1950).
- [20] NORDHEIM, L.: Act. Sci. et Ind., No. 131, Paris: Herrmann 1938.
- [21] WYDER, P.: Physics Letters **5**, 301 (1963).
- [22] — Rev. Mod. Phys. **36**, 116 (1964).
- [23] JONES, R. E., und A. M. TOXEN: Phys. Rev. **120**, 1167 (1960).
- [24] LINDENFELD, P., und H. ROHRER: wird publiziert.
- [25] LANDAU, L.: Zh. Eksper. Teor. Fiz. **13**, 377 (1943).
- [26] LIFSHITZ, E. M., und YU. V. SHARVIN: Doklady Akademii Nauk SSSR **79**, 783 (1951).
- [27] LYNTON, E. A.: Superconductivity. London: Methuen, 1962.
- [28] PIPPARD, A. B.: Low-temperature physics. New York: Gordon and Breach Science Publishers 1962.
- [29] OLSEN, J. L.: Proc. Phys. Soc. (London) A **65**, 518 (1952).
- [30] VALATIN, J. G.: Nuovo cimento **7**, 843 (1958).
- [31] BOGOLYUBOV, N. N.: Nuovo cimento **7**, 794 (1958).
- [32] TINKHAM, M.: Low-temperature physics. New York: Gordon and Breach Science Publishers 1962.
- [33] RHODES, P.: Proc. Roy. Soc. (London) A **204**, 396 (1950).
- [34] MÜHLSCHLEGEL, B.: Z. Phys. **155**, 313 (1959).
- [35] RINDERER, L.: Helv. Phys. Acta **29**, 339 (1956).

Lebenslauf

Ich wurde am 26. Februar 1934 in Burgdorf geboren. Nach dem Besuch der Primarschule in Burgdorf trat ich ins städtische Progymnasium und später ins Gymnasium von Burgdorf ein. Im Herbst 1953 bestand ich dort die Maturitätsprüfung Typus C. Anschließend immatrikulierte ich mich an der Abteilung für Mathematik und Physik der Eidgenössischen Technischen Hochschule, wo ich im Frühjahr 1959 mein Studium nach längerem durch Militärdienst verursachtem Unterbruch mit dem Diplom eines Physikers abschloß. Seither arbeite ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Heliumlaboratorium des Instituts für kalorische Apparate und Kältetechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule unter der Leitung von Herrn Professor Dr. J. L. Olsen.

Zürich, im Januar 1964

Peter Wyder