Des Surfaces a courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et de leurs singularités

Author(s):
Amsler, Marc-Henri

Publication Date:
1955

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000089750

Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et de leurs singularités

Thèse

présentée à l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich,
pour l'obtention du grade de
Docteur ès Sciences mathématiques

par

Marc-Henri Amsler
de Schinznach-Dorf, Argovie

Rapporteur: Prof. Dr. H. Hopf
Corapporteur: Prof. Dr. B. Eckmann

1955
BRÜHLSCHE UNIVERSITÄTSDRUCKEREI
GIESSEN

Extrait des
„Mathematische Annalen", Vol. 130, Fasc. 3, 1955, p. 234—256

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg

1. Historique. Le théorème suivant, formulé et démontré par D. HILBERT représente le point de départ du présent travail:

Il n'existe pas, dans l'espace euclidien à trois dimensions, de surfaces à courbure de Gauss négative et constante sans singularités.

La démonstration donnée par HILBERT, reprise plus tard dans ses détails et sous une forme légèrement différente par L. BIEBERBACH [1] repose sur l'idée que voici: on sait que les lignes asymptotiques d'un morceau de surface à courbure négative constante $K = -1$ de l'espace ordinaire forme un réseau de TCHÉBYCHEFF, c. à. d. un réseau dans lequel deux côtés opposés d'une «maille» du réseau sont de même longueur. Au cas où il existerait dans l'espace une surface $K = -1$ sans singularité, on montre sans difficulté que sa surface de recouvrement serait image isométrique du plan hyperbolique pris dans son ensemble. Il serait ainsi possible de recouvrir le plan hyperbolique entier par un réseau de TCHÉBYCHEFF. Or ce dernier fait se trouve être en contradiction avec une propriété connue des réseaux de TCHÉBYCHEFF, à savoir la propriété exprimée par la formule de HAZZIDAKIS disant que la courbure totale du domaine délimité par une maille du réseau ne peut excéder, en valeur absolue, la valeur 2π. Pour pouvoir appliquer la formule de HAZZIDAKIS, il est néanmoins nécessaire de faire intervenir dans la démonstration des considérations assez compliquées de nature topologique.

Peu de temps après, E. HOLMGREN [8] donna du théorème de HILBERT une démonstration plus concise. Elle s'appuie, elle aussi, et sur la propriété du réseau des lignes asymptotiques de former un réseau de TCHÉBYCHEFF, et sur la formule de HAZZIDAKIS; elle a cependant l'avantage d'éviter toute considération topologique [2].

Dernièrement HARTMANN et WINTNER [5] firent une étude critique des conditions de régularité auxquelles doit satisfaire la surface pour que l'on puisse utiliser les méthodes de démonstrations proposées par HILBERT et HOLMGREN. Ils montrèrent que le théorème de HILBERT sur la non-existence des surfaces en question est valable pour les surfaces dérivables deux fois de façon continue.

2. Aspect des singularités connues. Les raisonnements imaginés par HILBERT et HOLMGREN ont malheureusement l'inconvénient majeur d'être menés par l'absurde, c. à. d. d'être basés sur des objets qui, en fin de démonstration, se révèlent être inexistants. Leurs méthodes ne sont par conséquent pas à même de fournir des renseignements constructifs en particulier sur la nature et le nombre de ces singularités. Il serait pourtant intéressant de savoir s'il existe par exemple une surface n'ayant qu'une seule singularité. Pour autant que nous avons pu nous en rendre compte, cette question est restée jusqu'ici sans réponse. Le but général de ce travail est d'essayer dans la mesure du possible de combler cette lacune.

Qu'entend-on tout d'abord par *singularité* d'une surface plongée dans l'espace? Une singularité S d'une surface F' (F' étant elle-même définie comme application localement topologique d'une surface in abstracto F dans l'espace ambiant, cf. § 3, no 1) doit être premièrement point d'accumulation de points $P_1, P_2, \ldots$ de F', sans appartenir toutefois à F'; secondement, il faut que la valeur minimum des longueurs des arcs reliant, sur F', un point fixe P_0 de la surface au point P_i de la suite considérée (distance $P_0 P_i$) reste bornée quel que soit i; enfin il ne doit pas exister d'extension $\overline{F'}$ de F' contenant S à son intérieur. Cette dernière restriction a pour but d'exclure de l'ensemble des singularités les points de l'espace, qui tout en étant situés sur la bordure de la surface, ne représentent pas un point où cette dernière perd effectivement sa régularité. Nous appellerons une surface F' ne possédant pas d'extension $\overline{F'}$ de cette sorte une surface *non prolongeable.* Nous faisons remarquer en passant que tout morceau de surface à courbure négative constante peut être englobé dans une surface — à courbure négative constante également — non prolongeable au sens donné ci-dessus; cette propriété est démontrable par exemple à l'aide du lemme de ZORN. Nous ne désirons cependant pas approfondir ce point.

Afin de nous faire une idée des propriétés de ces singularités, passons en revue les surfaces connues. La liste en est courte: d'une part les surfaces de rotation, classifiées pour la première fois par MINDING [12] et dont F. KLEIN [11] a donné des représentations intuitives, d'autre part les surfaces hélicoïdales, découvertes par MINDING également [12]. Ces surfaces possèdent toutes, entre autres, des singularités accumulées sur une courbe spatiale, en l'occurrence sur un cercle ou une hélice. Il nous vient naturellement à l'idée de supposer que la présence de telles *courbes* est une caractéristique de la bordure des surfaces $K = -1$. Cette supposition n'est cependant pas évidente du fait de l'existence également — sur les surfaces de rotation de type conique — de singularités *isolées.*

3. Les surfaces analytiques. Le résultat principal de ce travail confirme la supposition énoncée ci-dessus pour la classe des surfaces analytiques. Nous démontrerons le théorème suivant:

Toute surface $K = -1$ analytique et non prolongeable possède, en bordure, au moins une courbe formée exclusivement de singularités.

La démonstration du théorème principal fournira encore les propositions complémentaires que voici:

Parmi les courbes situées en bordure d'une surface $K = -1$, il en existe toujours une qui est dérivable autant de fois que l'on veut et le long de laquelle — bien que ses points soient singularités pour la surface — la limite de la normale à la surface est régulière, en particulier continue.

Le caractère singulier de la surface sur une telle courbe de singularités peut être de deux types. Pour les différencier, utilisons un système de coordonnées cartésien rectangulaire x, y, z, le plan des x, y étant le plan tangent limite de la surface en un point S de ladite courbe. La fonction $z(x, y)$ représentant la surface au voisinage de S est analytique. Dire que la courbe étudiée est singulière pour la surface, c'est dire que la fonction $z(x, y)$ n'est plus analytique sur la portion Γ de cette courbe située dans le voisinage de S. En chaque point de la surface, les deux directions asymptotiques délimitent un angle d'ouverture ω qui, ainsi que nous le verrons par la suite, est déterminant pour le comportement de la surface et de ses singularités. Dans le voisinage de S, cet angle ω peut être considéré comme fonction des paramètres x et y. La courbe de singularités dont fait état le théorème est alors de l'un des deux types suivants:

a) *en chaque point de l'arc étudié Γ, la fonction $\omega(x, y)$ cesse d'être analytique; l'arc Γ est la courbe limite d'une famille d'asymptotiques; il est dérivable autant de fois que l'on veut. Dans certains cas et à condition d'abaisser l'ordre de dérivation de la surface, il est possible de prolonger la surface au delà d'un arc singulier de ce type (premier type).*

b) en chaque point de l'arc Γ, la fonction $\omega(x, y)$ reste analytique; Γ est enveloppe de chacune des deux familles de lignes asymptotiques; Γ est analytique; sur Γ la courbure moyenne de la surface devient infinie et la fonction $\sin\omega$ s'annule. Le prolongement de la surface au delà de Γ est impossible, même en abaissant l'ordre de dérivation de la surface (deuxième type).

La double nature de ces courbes de singularités fait ressortir en particulier que si les exemples mentionnés ci-dessus ont pu nous faire pressentir l'existence de courbes singulières pour la surface, le caractère singulier de cette dernière n'est pas nécessairement du type supputé. Les courbes singulières des surfaces hélicoïdales et de rotation appartiennent en effet toutes à une seule des deux espèces possibles, à savoir la deuxième; nous donnerons un exemple de surface où toutes les courbes singulières seront du premier type (exemple 1).

4. Les surfaces non analytiques. Il ne nous a malheureusement pas été possible de déterminer si les théorèmes ci-dessus — en particulier l'existence de courbes singulières — sont aussi valables pour les surfaces non analytiques, c. à. d. pour les surfaces dérivables au sens habituel. La raison en est que les surfaces non analytiques peuvent admettre des singularités d'un type nouveau, singularités que nous avons appelées *ramifications* (cf. la définition exacte dans le corps du travail) et qui perturbent la méthode d'investigation utilisée. Sur les surfaces non analytiques, le théorème énoncé plus haut n'est valable qu'en éliminant ce genre de singularités:

Toute surface $K = -1$ à dérivées continues des trois premiers ordres, non prolongeable et sans ramifications possède, en bordure, au moins une courbe formée exclusivement de singularités.

Les propriétés complémentaires énoncées pour les surfaces analytiques sont encore valables dans ce cas.

Il peut être intéressant de noter que des singularités du genre ramifications sont possibles sur les surfaces à courbure identiquement nulle: une feuille de papier dans laquelle on a pratiqué une entaille fournit, en écartant les bords de l'entaille, un exemple intuitif d'une telle singularité.

5. Les réseaux de TCHÉBYCHEFF *du plan hyperbolique.* Dans l'établissement des propriétés de la bordure des surfaces $K = -1$, nous avons abondamment fait usage de la propriété des réseaux des lignes asymptotiques de former des réseaux de TCHÉBYCHEFF. Les singularités des surfaces étudiées apparaissent, au cours des démonstrations, comme étant des particularités de ces réseaux spéciaux de TCHÉBYCHEFF. Si l'on se rappelle maintenant que tout morceau suffisamment petit de surface $K = -1$ peut être appliqué isométriquement sur un domaine du plan hyperbolique, les particularités du réseau des lignes asymptotiques se transforment, par cette application, en propriétés des réseaux de TCHÉBYCHEFF du plan hyperbolique. Nous avons développé les résultats essentiels auxquels nous a conduit cette analogie. Cette dernière fournit le théorème suivant:

Dans le plan hyperbolique, la bordure du domaine de définition d'un réseau de TCHÉBYCHEFF *analytique et non prolongeable comprend au moins un arc de courbe.*

Nous montrons ainsi en particulier qu'il n'existe pas dans le plan hyperbolique de réseau de TCHÉBYCHEFF analytique recouvrant tout le plan à l'exception d'un seul point, c. à. d. un réseau n'ayant qu'une seule singularité.

6. Exemples. Nous donnons deux exemples nouveaux de surfaces $K = -1$ non prolongeables. Le premier, mentionné plus haut, est celui d'une surface analytique finie dont chaque singularité est singularité de la fonction ω (premier type). Le prolongement de la surface au delà de ces singularités est impossible, même dans le cadre des surfaces trois fois différentiables.

En second lieu, nous avons traité le cas des surfaces soustendues par deux droites concourantes dans l'espace. La bordure de chacune de ces surfaces consiste en quatre courbes analytiques du second type ($\sin\omega = 0$). Parmi ces surfaces, nous avons montré qu'il y en avait une et une seule possédant des quadrilatères asymptotiques d'aire maximum 2π. Cette propriété est intéressante du fait que nous savions, par la formule de HAZZIDAKIS mentionnée au début de cette introduction, que tout quadrilatère asymptotique possédait une aire au plus égale à 2π; nous ne connaissions pas d'exemples pour lesquels cette valeur maximum pouvait effectivement être atteinte.

§ 1. Réseaux asymptotiques et réseaux de Tchébycheff.

Voici, résumées, les propriétés locales des surfaces à courbure négative constante dont nous ferons usage dans ce travail.

1. Soit F' un morceau de surface à courbure K négative constante égale à -1 plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions; supposons F' représentable par un vecteur $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ dérivable q fois de façon continue ($q \geqq 3$) — nous parlerons dans ce cas d'une surface de classe C^q ou de classe C^Ω si $\mathfrak{x}(u^1 u^2)$ est analytique —, il existe alors au voisinage de tout point de F'