Prom. Nr. 2193

Winkel und Winkelsumme im n-dimensionalen euklidischen Simplex

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES

DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

Walter Höhn

von Richterswil

Referent: Herr Prof. Dr. H. Hopf

Korreferent: Herr Prof. Dr. B. Eckmann

ZÜRICH 1953

DISSERTATIONSDRUCKEREI LEEMANN AG.

Einleitung

In der Abhandlung „Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie" (Comptes rendus 1905, I) hat H. Poincaré die bekannten Sätze über die Winkelsummen im ebenen und sphärischen Dreieck

$$\begin{array}{ll} \text{ebenes Dreieck:} & \alpha+\beta+\gamma=\pi \\ \text{sphärisches Dreieck:} & \alpha+\beta+\gamma=\pi+\epsilon\text{ [1]} \end{array}$$

auf n-dimensionale Simplexe verallgemeinert. Das Ergebnis kann in der Form

$$s_0 - s_1 + s_2 - + \cdots + (-1)^n s_n = \begin{cases} 0 & \text{für ein euklid. Simplex} \\ [1+(-1)^n]\Omega & \text{für ein sphär. Simplex} \end{cases}$$

geschrieben werden, wobei $s_0 = 1$, $s_1 = \frac{n+1}{2}$ zu setzen ist und $s_k\,(k \geqq 2)$ die Summe der Winkel an allen $(n-k)$-dimensionalen Randsimplexen bedeutet, gemessen in einem Winkelmaß, in dem der volle Winkel gleich eins gesetzt ist. Ω bezeichnet den durch die Kugeloberfläche dividierten Inhalt des sphärischen Simplexes. Für $n = 3$ erhält man im euklidischen Fall aus der obigen Beziehung die wenig bekannte, obwohl schon im Jahre 1783 von *de Gua* [2] bewiesene Relation zwischen den Winkeln eines Tetraeders

$$2\,\Sigma\,\alpha_{ij} - \Sigma\,\alpha_{ijk} = 4\,\pi\text{ [3]}$$

Den Anstoß zu der vorliegenden Arbeit gab die folgende Feststellung, die Frau S. Eisner-Billo in ihrer Diplomarbeit (ETH, Zürich 1943, unveröffentlicht) gemacht hatte: Für das n-dimensionale euklidische Simplex gilt neben der Poincaréschen Formel

---

[1] ϵ bezeichnet den sphärischen Exzeß, d. h. den durch das Quadrat des Kugelradius dividierten Inhalt des sphärischen Dreiecks.

[2] Vgl. *de Gua:* Propositions neuves, et non moins utiles que curieuses, sur le Tétraèdre. Hist. Acad. R. des Sc., Paris 1783.

[3] Die α_{ij} bedeuten die 6 Winkel zwischen je zwei Seitenflächen, die α_{ijk} die 4 Raumwinkel in den Ecken des Tetraeders; der volle Raumwinkel beträgt in dem zu Grunde gelegten Winkelmaß $4\,\pi$.

noch eine ähnliche, für $n \geqq 4$ von der Poincaréschen unabhängige Formel, nämlich

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu} \nu s_{\nu} + s_n = 0.$$

Es lag nun nahe, überhaupt einmal nach der Gesamtheit der für ein n-dimensionales Simplex gültigen linearen Winkelsummenformeln zu fragen. Unter einer linearen Winkelsummenformel ist dabei stets eine Beziehung der Form

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu} s_{\nu} = a$$

zu verstehen, wobei a_{ν} und a für alle Simplexe dieselben Konstanten sind. Die Aufstellung dieser Formeln und die sich daran anschließenden Untersuchungen machen den Hauptteil der vorliegenden Arbeit aus. Die Hauptergebnisse lauten:

I. Das gesamte Formelsystem läßt sich, sowohl für $n = 2m$ als auch für $n = 2m + 1$, durch m linear unabhängige Relationen repräsentieren.

II. Die Poincarésche Formel ist die einzige lineare Winkelsummenformel, die für alle konvexen Polyeder gilt.

Ferner ergaben sich folgende Nebenresultate:

III. (Ein Analogon zu II.) Die Eulersche Polyederformel ist die einzige Relation der Form

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{\nu} k_{\nu} = c$$

(γ_{ν} und c sind Konstanten, k_{ν} bedeutet die Anzahl der ν-dimensionalen Zellen der Oberfläche des Polyeders), die für alle konvexen Polyeder des R^n gilt.

IV. Die Winkelsummen s_k ($k \geqq 2$) genügen der folgenden Ungleichung

$$\frac{1}{2}\left\{\binom{\frac{n}{2}}{k} + \binom{\frac{n}{2}+1}{k}\right\} \leqq s_k \leqq \frac{1}{2}\binom{n}{k} \quad \text{für gerades } n$$

$$\binom{\frac{n+1}{2}}{k} \leqq s_k \leqq \frac{1}{2}\binom{n}{k} \quad \text{für ungerades } n$$

Die Gleichheitszeichen gelten im Falle $n > 2$ nur bei Ausartung. Diese Ungleichungen stellen eine weitere Verallgemeinerung des

Satzes von der Winkelsumme im ebenen Dreieck dar (der in der obigen Ungleichung mit $n=k=2$ enthalten ist).

V. Zwei ebene Dreiecke, die in zwei Winkeln übereinstimmen, sind ähnlich. Für das n-dimensionale euklidische Simplex S^n gilt ein analoger Satz. Bezeichnet man die $\binom{n+1}{2}$ Winkel an den $(n-2)$-dimensionalen Randsimplexen eines S^n mit α_{ik}, so lautet er: Zwei Simplexe S^n und $\bar{S}^n$ sind ähnlich, wenn für $\binom{n+1}{2}-1$ Indexkombinationen (i,k) $\alpha_{ik}=\bar{\alpha}_{ik}$ gilt.

§ 1. Definition der Winkel und Winkelsummen

1. Vorbereitungen. Es sei S^n ein n-dimensionales Simplex des n-dimensionalen euklidischen Raumes R^n; dann bezeichnen wir mit

$P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ seine $n+1$ Eckpunkte,

F_i die $(n-1)$-dimensionale Seitenfläche, die der Ecke P_i gegenüberliegt,

h_i die $(n-1)$-dimensionale Hyperebene, die F_i enthält.

Durch eine einzelne Ebene h_i wird der R^n in zwei Halbräume zerlegt, die sich dadurch unterscheiden lassen, daß der eine das Simplex S^n enthält, der andere nicht. Wir bezeichnen nun mit f_i die charakteristische Funktion (im Sinne der Mengenlehre) des Halbraumes, der S^n enthält; ihre Werte sind definiert durch die Vorschrift

$f_i=1$ für alle Punkte, die auf derselben Seite von h_i liegen wie das Simplex S^n,

$f_i=0$ für alle übrigen Punkte.

Die charakteristische Funktion des Halbraumes, der S^n nicht enthält, ist $1-f_i$.

Den Durchschnitt von k dieser Halbräume wollen wir eine *Zelle k-ter Ordnung* nennen. Die charakteristische Funktion einer Zelle ist gleich dem Produkt der charakteristischen Funktionen der Halbräume, denen sie angehört, besitzt also die Form

$$f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_l} (1-f_{j_{l+1}})(1-f_{j_{l+2}}) \ldots (1-f_{j_k})$$