Evaluations par défaut de l'énergie potentielle et des valeurs propres pour certains problèmes relatifs aux plaques élastiques

Doctoral Thesis

Author(s):
Philippin, Gérard

Publication date:
1974

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000090082

Thèse no 4974

EVALUATIONS PAR DEFAUT DE L'ENERGIE POTENTIELLE ET DES VALEURS PROPRES POUR CERTAINS PROBLEMES RELATIFS AUX PLAQUES ELASTIQUES

Thèse présentée

A L'ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE, ZURICH

pour l'obtention du grade de Docteur

des sciences mathématiques

par

GERARD PHILIPPIN

physicien dipl. EPFZ

né le 11 juillet 1943

de Corcelles-Cormondrèche (Neuchâtel)

acceptée sur proposition

du Professeur Dr. J. Hersch, rapporteur

du Professeur Dr. P. Henrici, corapporteur

ok Zurich, 1974

Résultats

à l'aide de (58)		selon la méthode de Weinstein [25,24]		selon la méthode de Ritz [26]
$834\ a^{-4}$	$<$	$1295\ a^{-4}$	$< \Omega_1 <$	$1304\ a^{-4}$
$3044\ a^{-4}$	$<$	$4910\ a^{-4}$	$< \Omega_{2,3} <$	$5438\ a^{-4}$

5. Evaluations par défaut pour les valeurs propres supérieures du flambage d'une plaque

5.1 Considérons le problème (39) . La $n^{\text{ième}}$ valeur propre Λ_n est caractérisée par le Minimum de $R[v]$ (voir (38)), où $v(x,y)$ $(\in C)$ doit satisfaire aux (n-1) conditions d'orthogonalité supplémentaires:

(59) $$\iint_G \operatorname{grad} v \operatorname{grad}(u_k)\, dA = 0 \quad , \quad k = 1,2,\ldots,n-1 \quad .$$

u_k désigne la $k^{\text{ième}}$ fonction propre de (39) .

5.2 Problèmes auxiliaires anisotropes (I et II)

I. (60a) $$\Psi^I_{xxxx} + \Psi^I_{yyyy} + \lambda^I(\Psi^I_{xx} + \Psi^I_{yy}) = 0 \quad \text{dans } G$$

(60b) $$\Psi^I = \frac{\partial}{\partial n}\Psi^I = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

(60c) $$\Psi^I = a_I(s)\frac{\partial}{\partial n}\Psi^I + \Psi^I_{xx}x_n^2 + \Psi^I_{yy}y_n^2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad .$$

Avec $a_I(s)$ non négatif , (60) est un problème aux valeurs propres self-adjoint défini positif. On peut caractériser la $n^{\text{ième}}$ valeur propre de (60) par le principe de Rayleigh:

(61) $$\lambda_n^I = \underset{\varphi\in C}{\mathrm{Min}}\ R_I[\varphi] \quad \text{avec}$$

(62) $$R_I[\varphi] = \frac{\iint_G(\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2)\, dA + \oint_{\Gamma_2} a_I(s)\,\varphi_n^2\, ds}{D(\varphi)}$$

où $\varphi(x,y)$ doit satisfaire aux (n-1) conditions d'orthogonalité:

(63) $$\iint_G \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}(\psi_k^I)\, dA = 0 \quad , \quad k = 1,2,\dots,n-1 \quad .$$

ψ_k^I désigne la $k^{\text{ième}}$ fonction propre de (60) .

II. On choisit le même problème auxiliaire (60 - 63) , mais rapporté à un système d'axes $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ bissecteurs de $\vec{x}$, $\vec{y}$. On désignera par un indice II les grandeurs qui se rapportent à ce problème. Un raisonnement analogue à celui du § 4 conduit aux résultats suivants: Choisissons des fonctions $a_i(s)$ non négatives ($i = I, II$) de telle sorte que la condition:

(64) $$k(s) - \frac{2}{3}(a_I + a_{II}) + \frac{3\sigma-1}{3}\varkappa(s) \geqslant 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

soit satisfaite. Alors:

(65) $$\Lambda_{p+q+1} \geqslant \frac{2}{3}(\lambda^I_{p+1} + \lambda^{II}_{q+1})$$

6. Evaluations par défaut pour les valeurs propres supérieures d'un problème du type de Stekloff du quatrième ordre

6.1 Nous allons déterminer des bornes inférieures pour la $n^{\text{ième}}$ valeur propre ν_n du problème suivant (voir la bibliographie dans [14]) :

(66a) $$\Delta\Delta u = 0 \quad \text{dans } G \quad ,$$

(66b) $$u = \Delta u - \nu \frac{1}{p(s)} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad .$$

p(s) est une fonction non négative donnée. On peut caractériser ν_n à l'aide du principe de Rayleigh:

(67) $$\nu_n = \operatorname*{Min}_{v=0 \text{ sur } \Gamma} \frac{\iint_G (\Delta v)^2\, dA}{\oint_\Gamma \frac{1}{p(s)} \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 ds}$$

où les fonctions d'essai v(x,y) (suffisamment régulières) doivent satisfaire aux (n-1) conditions d'orthogonalité:

(68) $$\oint_\Gamma \frac{1}{p(s)} \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial u_k}{\partial n}\, ds = 0 \quad , \quad k = 1,2,\dots,n-1 \quad .$$

u_k désigne la $k^{\text{ième}}$ fonction propre de (66) .

6.2 Problèmes auxiliaires anisotropes (I et II)

I. (69a) $\quad \Psi^{I}_{xxxx} + \Psi^{I}_{yyyy} = 0 \quad$ dans G

(69b) $\quad \Psi^{I} = \Psi^{I}_{xx} x_n^2 + \Psi^{I}_{yy} y_n^2 + (a_I(s) - \nu^I \frac{1}{p(s)}) \Psi^{I}_n = 0 \quad$ sur Γ.

Avec $a_I(s)$ non négatif, (69) est un problème aux valeurs propres self-adjoint défini positif. On peut caractériser la $n^{\text{ième}}$ valeur propre de (69) par le principe de Rayleigh:

$$(70) \qquad \nu^I_n = \underset{\varphi=0 \text{ sur } \Gamma}{\text{Min}} R_I[\varphi] \qquad \text{avec}$$

$$(71) \qquad R_I[\varphi] = \frac{\iint_G (\varphi^2_{xx} + \varphi^2_{yy})\, dA + \oint_\Gamma a_I(s)\, \varphi_n^2\, ds}{\oint_\Gamma \frac{1}{p(s)} \varphi_n^2\, ds}$$

où $\varphi(x,y)$ (suffisamment régulière) doit satisfaire aux (n-1) conditions d'orthogonalité:

$$(72) \qquad \oint_\Gamma \frac{1}{p(s)} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n} \Psi^I_k\, ds = 0 \quad , \; k = 1, 2, \ldots, n-1 \; .$$

Ψ^I_k désigne la $k^{\text{ième}}$ fonction propre de (69).

II. On choisit le même problème auxiliaire (69 - 72), mais rapporté à un système d'axes $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ bissecteurs de $\vec{x}, \vec{y}$. On désignera par un indice II les grandeurs qui se rapportent à ce problème. Un raisonnement analogue à celui du § 4 conduit aux résultats suivants:
Choisissons des fonctions $a_I(s)$ et $a_{II}(s)$ non négatives, de telle sorte que la condition:

$$(73) \qquad a_I(s) + a_{II}(s) \leqslant \varkappa(s) \qquad \text{sur } \Gamma$$

soit satisfaite. Alors:

$$(74) \qquad \nu_{p+q+1} \geqslant \frac{2}{3} (\nu^I_{p+1} + \nu^{II}_{q+1})$$

Remarque. Les formules (58), (65), (74) sont d'application facile si l'un des problèmes auxiliaires se laisse résoudre exactement. C'est le cas si G est un rectangle.