Diss. Nr. 4150

Schnittflächen komplexer Stiefel-Mannigfaltigkeiten

ABHANDLUNG

zur Erlangung der Würde eines Doktors der Mathematik

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

ULRICH SUTER

dipl. Math. ETH

geboren am 11. Oktober 1935

von Affoltern a./A. (Kt. Zürich)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. B. Eckmann, Referent

Prof. Dr. K. Voss, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich

1968

SCHNITTFLAECHEN KOMPLEXER STIEFEL-MANNIGFALTIGKEITEN.

Einleitung.

Unter der komplexen Stiefel-Mannigfaltigkeit $U_{n,r}$ versteht man die Mannigfaltigkeit aller orthonormierten Systeme von r Vektoren im komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$. Die Abbildung

$$p : U_{n,m+1} \longrightarrow U_{n,m} ,$$

welche darin besteht, dass man in jedem $(m+l)$-System von $U_{n,m+l}$ die letzten l Vektoren weglässt, ist eine lokaltriviale Faserung. Eine Schnittfläche dieser Faserung ist eine stetige Abbildung $s : U_{n,m} \longrightarrow U_{n,m+l}$, die mit p zusammengesetzt die Identität von $U_{n,m}$ ergibt, d.h. mit Hilfe einer Schnittfläche von p können alle m-Systeme von $U_{n,m}$ durch l Vektoren in stetiger Weise zu orthonormierten $(m+l)$-Systemen ergänzt werden.

Schnittflächen der Faserungen p sind in verschiedener Hinsicht von Interesse. Zum Beispiel liefert eine Schnittfläche von $p : U_{n,1+l} \longrightarrow U_{n,1} = S^{2n-1}$ ein "tangentiales komplexes l-Feld" auf der Sphäre S^{2n-1}; aus einem Schnitt der Faserung $p : U_{n,3} \longrightarrow U_{n,2}$ erhält man leicht ein stetiges Vektorprodukt von zwei Vektoren im $\mathbb{C}^n$. (Für weitere Zusammenhänge siehe Eckmann [14]).

Wir befassen uns in der vorliegenden Arbeit mit der Frage:
<u>Für welche Tripel (n,m,l) besitzt die Faserung $p : U_{n,m+l} \longrightarrow U_{n,m}$</u>

eine Schnittfläche? Unsere Frage ist für $m = 1$, d.h. für die Faserungen $p : U_{n,1+1} \longrightarrow S^{2n-1}$, von Eckmann [10], Borel und Serre [8] teilweise und dann von Atiyah und Todd [6], Adams und Walker [3] vollständig beantwortet worden. Wir betrachten deshalb nur Faserungen mit $m > 2$.

Wir untersuchen unser Problem mit drei verschiedenen Methoden. Zuerst wird kurz die Methode beschrieben, mit der Borel und Serre [8], mit Hilfe der gewöhnlichen Kohomologietheorie und der Stennrod-Potenzen, notwendige Bedingungen für die Existenz von Schnittflächen erhalten haben. Wir werten die Ergebnisse von [8] für die uns interessierenden Fälle, $m > 2$, aus und beweisen zum Beispiel, dass p höchstens dann einen Schnitt zulässt, wenn $n-m \equiv 1 \pmod{12}$.

Bei der zweiten Methode benützen wir die Kohomologietheorie von Atiyah und Hirzebruch [5] und die Adams'schen ψ-Operationen [1]. Zunächst werden die Ringe $K^*(U_{n,r})$ und der Homomorphismus $p^* : K^*(U_{n,m}) \longrightarrow K^*(U_{n,m+1})$ bestimmt. Dazu verwenden wir die von Yokata [13] hergeleiteten Beziehungen zwischen dem $(n-1)$-dimensionalen, komplexen projektiven Raum P_{n-1} und der speziellen unitären Gruppe $SU(n) = U_{n,n-1}$, sowie die bekannte K-Theorie der Räume P_{n-1} . Mit denselben Hilfsmitteln berechnen wir die Operationen ψ^k für gewisse Elemente aus $K^*(U_{n,r})$. Wir bestimmen sodann den durch eine Schnittfläche $s : U_{n,m} \longrightarrow U_{n,m+1}$ induzierten Homomorphismus $s^* : K^*(U_{n,m+1}) \longrightarrow K^*(U_{n,m})$ mit Hilfe der Natürlichkeit der ψ-Operationen, d.h. mit der Relation $\psi^k \circ s^* = s^* \circ \psi^k$. Durch gewisse Ganzzahligkeitsbetrachtungen erhalten wir zuletzt notwendige Bedingungen für die Existenz von Schnitten der Faserung p.

Unsere zweite Methode ist derjenigen von Borel und Serre [8] verwandt. Man erhält mit ihr Verschärfungen der Ergebnisse von [8]; wir beweisen zum Beispiel, dass für $m > 2$ höchstens dann eine Schnittfläche existiert, wenn $n-m \equiv 1 \pmod{24}$. Unsere Bedingungen sind aber nicht hinreichend, wie man in Analogie zu den Verhältnissen bei den Faserungen mit $m = 1$ vermuten könnte. (Siehe Schluss von Abschnitt 3).

Wir zeigen dies mit einer dritten Methode. Eine Schnittfläche der Faserung $p : U_{n,3} \longrightarrow U_{n,2}$ liefert ein stetiges Vektorprodukt von zwei Vektoren im Vektorraum $\mathbb{C}^n$. Wir geben eine Konstruktion an, mit der man aus einem Vektorprodukt im $\mathbb{C}^n$ eine stetige Multiplikation mit Eins und Normenproduktregel im $\mathbb{R}^{2n+2}$ erhält. Aus einem Satz von Adams [2] über die Existenz solcher Multiplikationen folgt damit, dass die Faserung $p : U_{n,3} \longrightarrow U_{n,2}$ höchstens für $n = 3$ einen Schnitt besitzt. Auf Grund eines elementaren Hilfssatzes, den wir im ersten Abschnitt beweisen, erhalten wir, dass für $m > 2$ nur die Faserungen $p : U_{n,n} \longrightarrow U_{n,n-1}$ Schnitte zulassen. Für diese Faserungen sind aber explizite Schnittflächen bekannt, und somit ist unsere Eingangs gestellte Frage, für die bis jetzt noch unbekannten Fälle, $m > 2$, vollständig beantwortet. Man erhält mit analogen Ueberlegungen, dass die quaternionischen Stiefelfaserungen $p : H_{n,m+1} \longrightarrow H_{n,m}$ für alle $m > 2$ keine Schnittflächen besitzen.

Der Satz von Adams [2] über die Existenz von stetigen Multiplikationen im $\mathbb{R}^k$, den wir für unsere dritte Methode benützt haben wird am einfachsten mit Hilfe der K-Theorie und der ψ-Operationen bewiesen. Beim Vergleich unserer zweiten mit der dritten Methode ist es daher erstaunlich, dass die zweite Methode nur schwächere Ergebnisse liefert. Dies dürfte aber den folgenden Grund haben: Im Beweis des Satzes von Adams werden die K-Theorie und der Chern'sche Charakter auf die pseudo-projektive Ebene angewandt, die zu der aus einem stetigen Vektorprodukt im $\mathbb{C}^n$ hergeleiteten stetigen Multiplikation im $\mathbb{R}^{2n+2}$ gehört; bei der zweiten Methode dagegen betrachten wir die K-Theorie und die Adams-Operationen nur für die gewöhnlichen komplexen projektiven Räume.

Herrn Professor Dr. B. Eckmann danke ich an dieser Stelle für sein förderndes Interesse, welches er dieser Arbeit entgegen gebracht hat.

1. PROBLEMSTELLUNG.

1.1. Es sei C der Körper der komplexen Zahlen und C^n der Vektorraum der n-Tupel komplexer Zahlen. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sei die ausgezeichnete Basis in C^n, $\varepsilon_j = (0,\dots,0,\underset{j}{1},0,\dots,0)$. Für α, β aus C^n sei $\{\alpha,\beta\}$ das klassische unitäre Skalarprodukt, d.h. für $\alpha = (a_1,a_2,\dots,a_n)$, $\beta = (b_1,b_2,\dots,b_n)$ ist $\{\alpha,\beta\} = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i$.

Unter einem m - S y s t e m $u_{n,m}$ i n C^n, $1<m<n$, verstehen wir ein Tupel von m paarweise unitärorthogonalen, normierten Vektoren aus C^n,

$$u_{n,m} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m \rangle, \quad \text{wobei } \alpha_i \in C^n \text{ und } \{\alpha_i, \alpha_j\} = \delta_{ij},$$
$$i,j = 1,2,\dots,m . \quad (\delta_{ij} \text{ Kronecker-Symbol})$$

Die Menge aller m-Systeme in C^n, versehen mit der üblichen Metrik, ist die k o m p l e x e S t i e f e l - M a n n i g f a l t i g k e i t $U_{n,m}$. Wir zeichnen in $U_{n,m}$ das m-System $e_{n,m} = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m \rangle$ als Basispunkt aus.

Es sei $U(n)$ die Gruppe der unitären Transformationen von C^n. $U(n)$ operiert transitiv auf $U_{n,m}$ durch Multiplikation von links. Wir identifizieren $U(n-m)$ mit denjenigen Transformationen aus $U(n)$, welche den Basispunkt $\langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \rangle$ invariant lassen. Es ist dann leicht, einen Homöomorphismus des Faktorraumes $U(n)/U(n-m)$ auf die Mannigfaltigkeit $U_{n,m}$ anzugeben ([12,§7]). Die Gruppe der speziellen unitären Transformationen, $SU(n)$, operiert für $m<n-1$ transitiv auf $U_{n,m}$ und es ist, analog wie für $U(n)$, der Faktorraum $SU(n)/SU(n-m)$ homöomorph zu $U_{n,m}$, $m<n-1$.

Beispiele von komplexen Stiefel'schen Mannigfaltigkeiten sind die Sphären S^{2n-1}, die unitären Gruppen $U(n)$ und die speziellen unitären Gruppen $SU(n)$; es ist

$$U_{n,1} = S^{2n-1}\ ,\quad U_{n,n} = U(n)\ ,\quad U_{n,n-1} = SU(n)\ .$$

Wir betrachten die naheliegende Abbildung

$$p : U_{n,m+1} \longrightarrow U_{n,m} \qquad (m+l<n, 0<l)$$

die darin besteht, dass man im $(m+l)$ - System $\langle\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_{m+l}\rangle$ die letzten l Vektoren weglässt. p ist epimorph. Das Urbild des Basispunktes von $U_{n,m}$, $p^{-1}(\langle\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m\rangle)$, besteht aus allen $(m+l)$-Systemen der Form $\langle\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_l\rangle$ und ist somit homöomorph zur Mannigfaltigkeit $U_{n-m,l}$. Nach [12,§7] ist p eine l o k a l t r i v i a l e F a s e r u n g mit Faser $U_{n-m,l}$.

Unter einer Schnittfläche s der Faserung $p : U_{n,m+l} \to U_{n,m}$ verstehen wir eine Abbildung

$s : U_{n,m} \to U_{n,m+1}$ mit der Eigenschaft

$$p \circ s = Id(U_{n,m}) = \text{Identität von } U_{n,m} .$$

Eine Schnittfläche ordnet also stetig jedem m-System $\langle\alpha_1,\dots,\alpha_m\rangle$ ein $(m+1)$-System der Form $\langle\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,\beta_1,\dots,\beta_1\rangle$ zu, d.h. mit Hilfe von s können die m-Systeme in C^n stetig zu $(m+1)$-Systemen ergänzt werden.

Im Falle $m = 1$, wenn also die Basis der Faserung eine Sphäre S^{2n-1} ist, kann eine Schnittfläche als ein stetiges "komplexes 1-Feld" auf der S^{2n-1} aufgefasst werden. Für $m = 2$, $1 = 1$, d.h. für $p : U_{n,3} \to U_{n,2}$, bedeutet eine Schnittfläche ein stetiges Vektorprodukt von zwei Vektoren in C^n. (Dieses Vektorprodukt ist durch s zunächst nur für orthogonale und normierte Paare von Vektoren definiert, kann aber mit bekannter Konstruktion für beliebige Paare erklärt werden; siehe Abschnitt 4 dieser Arbeit.)

Wir wollen uns nun in dieser Arbeit mit der Frage beschäftigen: Für welche Tripel $(n,m,1)$ besitzt die Faserung $p : U_{n,m+1} \to U_{n,m}$ eine Schnittfläche?

1.2. Der folgende, einfach zu beweisende Hilfssatz ist ein erster Schritt zur Lösung unseres Problems.

<u>Hilfssatz 1.1.</u> (a) Hat die Faserung $p' : U_{n,m+1+1} \to U_{n,m}$ eine Schnittfläche, so auch die Faserung $p : U_{n,m+1} \to U_{n,m}$.

b) Hat die Faserung $p_1 : U_{n+1,m+1+1} \to U_{n+1,m+1}$ eine

Schnittfläche, so auch die Faserung $p : U_{n,m+1} \to U_{n,m}$.

Beweis: Es sei p'' die Faserung $U_{n,m+1+1} \xrightarrow{p''} U_{n,m+1}$. Offensichtlich gilt

(1.0) $$p' = p \circ p''$$

Ist t eine Schnittfläche von p' , dann ist $p'' \circ t$ ein Schnitt von p .

Es bleibt (b) zu beweisen. Sei $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ ein m-System in C^n , $\alpha_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i)$, $i = 1,2,\dots,m$. Unter α_i' verstehen wir den Vektor $(0, a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i) \in C^{n+1}$, $i = 1,2,\dots,m$. Wir betten nun $U_{n,m}$ in $U_{n+1,m+1}$ ein, $i : U_{n,m} \subset U_{n+1,m+1}$, indem wir dem m-System $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ das (m+1)-System $\langle \varepsilon_1, \alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_m' \rangle \in U_{n+1,m+1}$ zuordnen $(\varepsilon_1 = (1,0,\dots,0) \in C^{n+1})$. Analog betten wir $U_{n,m+1}$ in $U_{n+1,m+1+1}$ ein, $i_1 : U_{n,m+1} \subset U_{n+1,m+1+1}$. Das Bild von i_1 besteht aus allen Systemen der Form $\langle \varepsilon_1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m+1} \rangle$. Die Inklusionen i und i_1 sind mit den Faserungen p und p_1 verträglich, d.h.

(1.1) $$i \circ p = p_1 \circ i_1 .$$

Es sei jetzt t eine Schnittfläche von p_1 , d.h. $p_1 \circ t = \mathrm{Id}(U_{n+1,m+1})$. Für ein Element $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle \in U_{n,m}$ gilt

$ti(\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle) = \langle \varepsilon_1, \alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_m', \beta_1, \dots, \beta_1 \rangle$, d.h. aber: $ti(U_{n,m}) \subset i_1(U_{n,m+1})$. Wir definieren nun

$$s = i_1^{-1} \circ t \circ i$$

und erhalten mit (1.1) : $p \circ s = p \circ i_1^{-1} \circ t \circ i = i^{-1} \circ p_1 \circ t \circ i = Id(U_{n,m})$.

Hilfssatz 1.2. (a) Hat die Faserung $p : U_{n,m+1} \to U_{n,m}$ k e i n e Schnittfläche, so gilt dasselbe für alle Faserungen

$p_j' : U_{n,m+1+j} \to U_{n,m}$, $0 < j < n-m-1$.

(b) Hat die Faserung $p : U_{n,m+1} \to U_{n,m}$ k e i n e Schnittfläche, so gilt dasselbe für alle Faserungen

$p_k : U_{n+k,m+1+k} \to U_{n+k,m+k}$, $k = 1,2,\ldots.$

Beweis: Dieser Hilfssatz folgt durch Kontraposition und Induktion direkt aus Hilfssatz 1.1.

Wir werden im folgenden vor allem Hilfssatz 1.2 benützen; denn gelingt es, für eine gewisse Faserung $p : U_{n,m+1} \to U_{n,m}$ zu zeigen, dass sie k e i n e n Schnitt besitzt, so folgt aus diesem Hilfssatz die Nichtexistenz von Schnittflächen für sehr viele Faserungen, nämlich für alle

$p' : U_{n',m'+1'} \to U_{n',m'}$, mit $1' > 1$, $m' > m$ und $n'-m' = n-m$.

Von besonderem Interesse ist es in dieser Hinsicht, Faserungen mit kleinem m und kleinem 1 zu finden, die keine Schnitte zulassen. Für $m = 1$, d.h. für die Faserungen $p : U_{n,1+1} \to U_{n,1} = S^{2n-1}$ ist unsere Frage von AtiYah und Todd [6] , Adams und Walker [3] vollständig beantwortet worden. (Problem der "komplexen 1-Felder" auf S^{2n-1}). Im weitern werden wir also in dieser Arbeit nur noch Faserungen mit $m > 2$

betrachten und hier vor allem den Fall

$$p : U_{n,3} \to U_{n,2}$$

untersuchen (Existenz von stetigen Vektorprodukten in C^n) .

2. GEWOEHNLICHE KOHOMOLOGIETHEORIE. STEENROD-POTENZEN

Borel und Serre haben in [8] mit Hilfe der gewöhnlichen Kohomologietheorie notwendige Bedingungen für die Existenz von Schnittflächen der Faserungen $p : U_{n,m+1} \to U_{n,m}$ angegeben. Wir wollen in diesem Abschnitt ihre Methode kurz skizzieren und für die uns interessierenden Fälle, $m>2$, auswerten.

3.1. Es sei Z_p der Primkörper mit Charakteristik p . $H^q(U_{n,r};Z_p)$ bzw. $H^*(U_{n,r};Z_p)$ sei die q-te Kohomologiegruppe bzw. der Kohomologiering von $U_{n,r}$ mit Koeffizienten in Z_p . Nach [7] oder [13] ist $H^*(U_{n,r};Z_p)$ eine Grassmann'sche Algebra über Z_p mit Erzeugenden

$$h^{(r)}_{n-r+1}, h^{(r)}_{n-r+2}, \dots, h^{(r)}_{n}, \quad \text{wobei} \quad h^{(r)}_i \in H^{2i-1}(U_{n,r};Z_p) .$$

Die Steenrod-Potenzen $P^k_p : H^q(U_{n,r};Z_p) \to H^{q+2k(p-1)}(U_{n,r};Z_p)$ sind von Yokata [13] auf einfache Weise bestimmt worden. Es ist

$$
\begin{aligned}
P^k_p(h^{(r)}_i) &= \binom{i-1}{k} h^{(r)}_{i+k(p-1)} , &&\text{für } n-r+1<i<n-k(p-1) \\
\text{(2.1)} \qquad &= 0 , &&\text{für } i>n-k(p-1)
\end{aligned}
$$

$$\left(\binom{i-1}{n} \text{ Binomialkoeffizient mod } p \right)$$

Wir betrachten nun die Faserung $p : U_{n,m+1} \to U_{n,m}$. Der durch p induzierte Homomorphismus

$$p^* : H^*(U_{n,m};Z_p) \longrightarrow H^*(U_{n,m+1};Z_p)$$

ist nach [7,13] gegeben durch

$$(2.2) \quad p^*(h_i^{(m)}) = h_i^{(m+1)} \quad , \quad i = n-m+1,\dots,n$$
$$= 0 \quad , \quad i = n-m-1+1,\dots,n-m$$

Es sei jetzt $s : U_{n,m} \to U_{n,m+1}$ eine Schnittfläche von p, d.h. $p \circ s = Id(U_{n,m})$. Es ist

$$(p \circ s)^* = s^* \circ p^* = Id(H^*(U_{n,m};Z_p))$$

Daraus folgt für s^* mit (2.2) :

$$(2.3) \quad s^*(h_i^{(m+1)}) = h_i^{(m)} \quad , \quad i = n-m+1,\dots,n \, .$$

Selbstverständlich ist

$$(2.4) \quad s^*(h_i^{(m+1)}) = 0 \quad , \quad i = n-m-1+1,\dots,n-m \, .$$

Die Beziehung (Natürlichkeit von P_p^k) :

$$(2.5) \quad P_p^k s^* = s^* P_p^k$$

liefert nun notwendige Bedingungen für die Existenz von Schnitten der Faserung p .

<u>Satz</u> (Borel-Serre) Die Faserung $p : U_{n,m+1} \to U_{n,m}$ hat höchstens dann eine Schnittfläche, wenn

$$\binom{j-1}{k} \equiv 0 \pmod{p}, \text{ für alle } j,p,k,$$

welche die beiden folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$n-m-l+1<j<n-m\ ,\quad n-m+1<j+k(p-1)<n$$

<u>Beweis</u>: Die Elemente $h^{(m+1)}_{m-m-l+1},\ldots,h^{(m+1)}_{n-m}$ aus $H^*(U_{n,m+1};Z_p)$ werden nach (2,4) unter s^* auf Null abgebildet, also ist

$$P^k_p s^*(h^{(m+1)}_j) = 0\ ,\quad n-m-l+1<j<n-m\ .$$

Daraus folgt mit (2.5), (2.1) und (2.3) für diese Elemente:

$$0 = s^*P^k_p(h^{(m+1)}_j) = s^*\ \binom{j-1}{k}h^{(m+1)}_{j+k(p-1)} = \binom{j-1}{k}h^{(m)}_{j+k(p-1)}\ ,$$

$$n-m+1<j+k(p-1)<n\ .$$

Das heisst aber:

$$\binom{j-1}{k} \equiv 0 \pmod{p}\ ,\quad \text{für alle } j,p,k \text{ mit}$$

$n-m-l+1<j<n-m$ und $n-m<j+k(p-1)<n$.

2.2. Es soll hier noch auf drei einfache Folgerungen dieses Satzes hingewiesen werden.

<u>Korollar 2.1</u>: Ist $m>2$, so besitzt die Faserung $p : U_{n,m+l} \to U_{n,m}$ für $l>2$ keine Schnittfläche; d.h. die m-Systeme mit $m>2$ können höchstens durch einen Vektor stetig ergänzt werden.

Beweis: Auf Grund von Hilfssatz 1.2 genügt es, dieses Korollar für $m = 2$ und $l = 2$ zu beweisen. Für die Existenz einer Schnittfläche der Faserung $p : U_{n,4} \to U_{n,2}$ erhält man aber aus dem Satz von Borel-Serre die widersprüchlichen Bedingungen $(n-3) \equiv 0 \pmod 3$ und $(n-2) \equiv 0 \pmod 3$.

Korollar 2.2: Es gibt höchstens für $n \equiv 3 \pmod{12}$ ein stetiges Vektorprodukt von zwei Vektoren im komplexen Vektorraum C^n .

Beweis: Ein stetiges Vektorprodukt von zwei Vektoren im C^n ist eine Schnittfläche s der Faserung $p : U_{n,3} \to U_{n,2}$ (siehe Abschnitt 4 dieser Arbeit).

Der Satz von Borel-Serre liefert die folgenden notwendigen Bedingungen

$k=1,\ p=2 : (n-3) \equiv 0 \pmod 2;\ k=1,\ p=3 : (n-3) \equiv 0 \pmod 3$

$k=2,\ p=2 : \frac{(n-3)(n-4)}{2} \equiv 0 \pmod 2$

Die ersten beiden Bedingungen ergeben: $n-3 = 6r$, $r \in Z$.

Somit ist $\frac{(n-3)(n-4)}{2} = (3r)(6r-1) \equiv 0 \pmod 2$,

d.h. $r = 2s$, $s \in Z$. Also ist $n-3 = 12s$, $s \in Z$.

Korollar 2.3: Die Faserung $p : U_{n,m+1} \to U_{n,m}$ hat für $m > 2$ höchstens dann eine Schnittfläche, wenn $n-m \equiv 1 \pmod{12}$.

Beweis: Wir schreiben $p : U_{n,m+1} \to U_{n,m}$ in der Form

$p : U_{(n-m+2)+(m-2),3+(m-2)} \to U_{(n-m+2)+(m-2),2+(m-2)}$

und erhalten mit Hilfssatz 1.2 und Korollar 2.2

$n-m+2 \equiv 3 \pmod{12}$.

3. K-THEORIE. ADAMS'SCHE ψ-OPERATIONEN

3.1. In diesem Abschnitt werden wir die uns interessierenden Definitionen und Sätze aus [5] und [1] zusammenstellen.

Es sei X ein zusammenhängender, endlichdimensionaler CW-Komplex mit Basispunkt x_0. (Für unsere Zwecke genügt es, diese Räume zu betrachten). Unter $K^0(X)$ verstehen wir den Ring der Isomorphieklassen von komplexen Vektorbündeln über X. $K^0(X)$ ist ein kovarianter Funktor von X, eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Ringhomomorphismus

$$f^! : K^0(Y) \longrightarrow K^0(X).$$

Für einen einpunktigen Raum $\{pt\}$ gilt: $K^0(\{pt\}) \cong Z$.
Die Einbettung $i : \{x_0\} \to X$ induziert einen Homomorphismus

$$i^! : K^0(X) \longrightarrow Z$$

Man definiert

$$\tilde{K}^0(X) = \text{Kern } i^!$$

und erhält eine kanonische Zerlegung

$$K^0(X) \cong \tilde{K}^0(X) \oplus Z .$$

Es ist $\tilde{K}^0(X)$ wiederum ein kovarianter Funktor von X.

Sei $\Sigma^2 X$ die zweifache Suspension von X . Es gibt einen n a t ü r l i c h e n G r u p p e n i s o m o r p h i s m u s , den Bott'schen Isomorphismus

$$(3.1) \qquad \beta : \tilde{K}^0(X) \cong \tilde{K}^0(\Sigma^2 X) \ ,$$

Für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ gilt also die Beziehung

$$(3.2) \qquad \beta \circ f^! = (\Sigma^2 f)^! \circ \beta$$

Es sei ΣX die Suspension von X . Wir definieren:

$$K^1(X) = \tilde{K}^0(\Sigma X) \ .$$

(In [5] wird definiert: $K^1(X) = \tilde{K}^0(\Sigma X^+)$; dabei ist X^+ die topologische Summe von X mit einem Extrapunkt, welcher als Basispunkt von X^+ ausgezeichnet wird. $\tilde{K}^0(\Sigma X^+)$ ist aber in natürlichser Weise isomorph zu $\tilde{K}^0(\Sigma X)$, siehe [5 ;1.4]. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Homomorphismus

$$(\Sigma f)^! : K^1(Y) \to K^1(X) \ .$$

Man definiert nun

$$K^*(X) = K^0(X) \oplus K^1(X)$$

Die Ringstruktur von $K^0(X)$ lässt sich so auf $K^*(X)$ ausdehnen, dass $K^*(X)$ ein Z_2-graduierter Ring wird, d.h.

$$K^0(X) \cdot K^1(X) \subset K^1(X) \, , \; K^1(X) \cdot K^0(X) \subset K^1(X) \, , \; K^1(X) \cdot K^1(X) \subset K^0(X) \ .$$

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Ringhomomorphismus

$$f_K^* = f^! \oplus (\Sigma f)^! : K^*(Y) \longrightarrow K^*(X) ,$$

(Wir verwenden den Index K , um f_K^* von $f_H^* : H^*(Y; \ ) \to H^*(X; \ )$ zu unterscheiden). Für zwei homotope Abbildungen, $f \sim g$, gilt: $f_K^* = g_K^*$.

Es sei $H^r(X;Q)$ die r-te rationale Kohomologiegruppe. Es gibt einen n a t ü r l i c h e n Ringhhomomorphismus, den Chern'schen Charakter

$$ch : K^0(X) \longrightarrow H^{ev}(X;Q) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} H^{2q}(X;Q) ,$$

welcher mit der Zerlegung $K^0(X) \cong \tilde{K}^0(X) \oplus Z$ verträglich ist. D.h. ch induziert einen Ringhomomorphismus

$$\tilde{ch} : \tilde{K}^0(X) \longrightarrow \tilde{H}^{ev}(X;Q) = \bigoplus_{q=1}^{\infty} H^{2q}(X;Q)$$

Das folgende Diagramm von abelschen Gruppen ist kommutativ:

(3.3)
$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}^0(X) & \xrightarrow{\beta} & \tilde{K}^0(\Sigma^2 X) \\ \downarrow \tilde{ch} & & \downarrow \tilde{ch} \\ \tilde{H}^{ev}(X;Q) & \xrightarrow{\sigma^2} & \tilde{H}^{ev}(\Sigma^2 X;Q) \end{array}$$

β = Bott'scher Isomorphismus

σ^2 = Suspensionsisomorphismus

Der Ringhomomorphismus ch lässt sich auf $K^*(X)$ ausdehnen, mit andern Worten: Es gibt einen n a t ü r l i c h e n Ringhomomorphismus

$$ch^* : K^*(X) \longrightarrow H^*(X;Q) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} H^r(X;Q)$$

mit

$$ch^*|K^0(X) = ch : K^0(X) \longrightarrow H^{ev}(X;Q)$$
$$ch^*|K^1(X) = ch_1 : K^1(X) \longrightarrow H^{od}(X;Q) = \bigoplus_{q=1}^{\infty} H^{2q-1}(X;Q)$$

Man definiert ch_1 , indem man fordert, dass das folgende Diagramm kommutativ sein soll:

(3.4)
$$\begin{tikzcd} K^1(X) = \tilde{K}^0(\Sigma X) \arrow[d, "ch_1"'] \arrow[dr, "\widetilde{ch}"] & \\ H^{od}(X;Q) & \tilde{H}^{ev}(\Sigma X;Q) \arrow[l, "\sigma^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Atiyah und Hirzebruch beweisen mit Hilfe von Spektralreihen den folgenden Satz:

<u>Satz 3.1.</u> (Atiyah-Hirzebruch) Es sei X ein endlicher CW - Komplex, dessen ganzzahlige Kohomologie keine Torsion habe. Dann ist $ch^* : K^*(X) \to H^*(X;Q)$ monomorph. $H^*(X;Z)$ und $K^*(X) \cong ch^*(K^*(X))$ sind Unterringe von $H^*(X;Q)$. Diese beiden Unterringe stehen in folgender Beziehung

a) Ist $\xi \in K^*(X)$, dann gehört die erste nicht verschwindende Komponente der rationalen Kohomologieklasse $ch^*(\xi)$ zu $H^*(X;Z)$.

b) Zu jedem $x \in H^r(X;Z)$, r beliebig, gibt es ein Element $\xi \in K^*(X)$, mit $ch^*(\xi) = x$+höhere Terme.

c) Sei B eine Untergruppe von $K^*(X)$. Wenn es zu jedem $x \in H^r(X;Z), r>0$, ein Element $\xi \in B$ gibt mit $ch^*(\xi) = x +$ höhere Terme, dann ist $B = K^*(X)$.

Als einfache Folgerung aus diesem Satz beweisen wir das

<u>Korollar 3.2</u>: Es seien X und Y endliche CW-Komplexe, deren ganzzahlige Kohomologie keine Torsion habe. Sei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung, und seien $f_H^*: H^*(Y;Q) \to H^*(X;Q)$, $f_K^*: K^*(Y) \to K^*(X)$ die durch f induzierten Homomorphismen. Dann gilt:

a) Wenn f_H^* monomorph ist, so ist auch f_K^* monomorph.

b) Wenn f_H^* epimorph ist, so ist auch f_K^* epimorph.

<u>Beweis</u>: Wir betrachten das kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccc} K^*(Y) & \xrightarrow{f^*_K} & K^*(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle ch^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle ch^*} \\ H^*(Y;Q) & \xrightarrow[f^*_H]{} & H^*(X;Q) \end{array}$$

in dem die Vertikalen nach Satz 3.1 Monomorphismen sind; d.h. falls f_H^* monomorph ist, so auch f_K^* .

Es sei nun f_H^* epimorph, und sei $x \in H^*(X;Z) \subset H^*(X;Q)$ ein beliebiges Element. Weil f_H^* epimorph ist, gibt es ein $y \in H^*(Y;Z) \subset H^*(Y;Q)$ so, dass $f_H^*(y) = x$. Nach Satz 3.1 (b) existiert dann ein Element $\eta \in K^*(Y)$ mit $ch^*(\eta) = y +$ höhere Terme; d.h. aber

$$ch^* f_K^*(\eta) = f_H^* ch^*(\eta) = f_H^*(y + \text{höhere Terme}) = x + \text{höhere Terme}$$

Die Untergruppe $f_K^*(K^*(Y))$ erfüllt somit die Voraussetzung von Satz 3.1 (c), also $f_K^*(K^*(Y)) = K^*(X)$, q.e.d.

Wir betrachten das topologische Produkt $X \times Y$. (X,Y endliche CW-Komplexe). Es gibt einen natürlichen Isomorphismus ([11])

$$\tau_H : H^*(X \times Y; Q) = H^*(X;Q) \otimes H^*(Y;Q) .$$

Wenn $H^*(X;Z)$ keine Torsion besitzt, so existiert nach [4;2.7] ein natürlicher Isomorphismus

$$(3.5) \quad \tau_K : K^*(X \times Y) \cong K^*(X) \otimes K^*(Y)$$

und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^*(X \times Y) & \cong & K^*(X) \otimes K^*(Y) \\ \downarrow ch^* & & \downarrow ch^* \otimes ch^* \\ H^*(X \times Y;Q) & \cong & H^*(X;Q) \otimes H^*(Y;Q) \end{array}$$

ist kommutativ. Unter "$\otimes$" ist dabei in beiden Fällen das Tensorprodukt von Z_2-graduierten Ringen zu verstehen. ((3.5) und (3.6) lassen sich, für den Fall wo auch $H^*(Y;Z)$ torsionsfrei ist, ohne [4] auf einfache Weise mit Hilfe von Satz 3.1 beweisen).

Die Adams'schen Operationen $\psi^k, k \in Z$, sind Ringhomomorphismen von $K^o(X)$ in $K^o(X)$. Wir werden die folgenden Eigenschaften von ψ^k benützen:

Lemma 3.3 (Adams). (a) Die Operationen ψ^k sind natürlich.

(b) Die ψ^k sind mit der Zerlegung $K^o(X) = \tilde{K}^o(X) \oplus Z$ verträglich, d.h. ψ^k induziert einen natürlichen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\psi}^k : \tilde{K}^o(X) \longrightarrow \tilde{K}^o(X) .$$

(c) Es gilt die Relation: $\tilde{\psi}^k \circ \beta = k . \beta \circ \tilde{\psi}^k$

(β Bott'scher Isomorphismus)

(d) Sei $\xi \in K^o(X)$; und sei $ch^{2q}(\xi) \in H^{2q}(X;Q)$ die 2q-te Komponente von $ch(\xi)$. Es gilt:

$$\psi^k(\xi) = \sum_{q=o}^{\infty} k^q . ch^{2q}(\xi) .$$

Nach Definition ist $K^1(X) = \tilde{K}^o(\Sigma X)$. Die ψ-Operationen sind also auch für $K^1(X)$ erklärt; ist $\xi^1 \in K^1(X) = \tilde{K}^o(\Sigma X)$, so definiert man

$$\psi_1^k(\xi^1) = \tilde{\psi}^k(\xi^1) .$$

Für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ gilt dann auf Grund von Lemma 3.3 (a)

$$\psi_1^k \circ (\Sigma f)^! = (\Sigma f)^! \circ \psi_1^k . \tag{3.7}$$

Bemerkung: Die Operation $\psi^{k*} = \psi^k \oplus \psi_1^k : K^*(X) \to K^*(X)$ ist ein natürlicher Gruppenisomorphismus, im allgemeinen aber k e i n Ringhomomorphismus.

3.2. Wir bestimmen nun die Ringe $K^*(U_{n,m})$ und den Charakter $ch^* : K^*(U_{n,m}) \to H^*(U_{n,m};Q)$ mit Hilfe der schon bekannten K-Theorie der komplexen projektiven Räume und gewisser Beziehungen zwischen der Suspension dieser Räume und den Mannigfaltigkeiten $SU(n)$.

Im folgenden sei $R = Z$ oder Q. Unter P_r verstehen wir den komplexen, r-dimensionalen projektiven Raum. P_r ist ein CW-Komplex der Dimension $2r$. Der Kohomologiering $H^*(P_r;R)$ wird über R erzeugt durch ein Element $x \in H^2(P_r;R)$, mit $x^{r+1} = 0$, d.h.

$$H^{ev}(P_r;R) = R[x](\mathrm{mod}\ x^{r+1}), H^{od}(P_r;R) = 0 .$$

Für die Suspension ΣP_r von P_r ergibt sich damit: $H^*(\Sigma P_r;R)$ ist ein freier R-Modul mit den Erzeugenden

(3.8) $1, y_1, y_2, \ldots, y_r;$ $\qquad y_j = \sigma(x^j) \in H^{2j+1}(\Sigma P_r;R)$.

Die Multiplikation in $H^*(\Sigma P_r;R)$ ist selbstverständlich bestimmt durch

(3.9) $y_i \cdot y_j = 0;$ $\qquad i,j = 1,2,\ldots,r$.

Atiyah und Todd haben in [6] gezeigt, dass der Ring $K^0(P_r)$ durch ein Element μ, mit $\mu^{r+1} = 0$, erzeugt wird, d.h.

(3.10) $$K^0(P_r) = Z[\mu](\mathrm{mod}\mu^{r+1}) .$$

Dabei gilt

$$(3.11) \qquad ch(\mu^j) = (e^x-1)^j (\mathrm{mod}\ x^{r+1}) \ , \qquad j = 1,2,\ldots,r \ .$$

Aus $H^{od}(P_r;Q) = 0$ und Satz 3.1 folgt: $K^1(P_r) = 0$.

Die rationalen Zahlen $a_q^j, j = 0,1,2,\ldots, \ q = j,j+1,j+2,\ldots$ seien definiert durch

$$(3.12) \qquad (e^z-1)^j = \sum_{q=j}^{\infty} a_q^j z^q$$

<u>Hilfssatz 3.4.</u> (a) Es ist $\tilde{K}^0(\Sigma P_r) = 0$, d.h. $K^0(\Sigma P_r) \cong Z$.

(b) In $K^1(\Sigma P_r)$ gibt es Elemente $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_r$ welche die abelsche Gruppe $K^1(\Sigma P_r)$ frei erzeugen und für welche gilt

$$ch^*(\eta_i) = \sum_{q=i}^{r} a_q^i y_q \in H^{od}(\Sigma P_r;Q) \ , \quad i = 1,2,\ldots,r \ .$$

(c) Es ist $\eta_i \cdot \eta_j = 0$, $i,j = 1,2,\ldots,r$.

<u>Beweis</u>: Es ist $\tilde{K}^0(\Sigma P_r) = K^1(P_r) = 0$.

Wir beweisen (b). Mit (3.1) erhalten wir $\beta : \tilde{K}^0(P_r) \cong \tilde{K}^0(\Sigma^2 P_r) = K^1(\Sigma P_r)$. Auf Grund von (3.10) wird also die abelsche Gruppe $K^1(\Sigma P_r)$ frei erzeugt durch die Elemente

$$\eta_i = \beta(\mu^i) \ , \quad i = 1,2,\ldots,r \ .$$

Für den Charakter $ch^*(\eta_i)$ berechnen wir mit (3.4),(3.3),(3.11) und (3.8):

$$ch^*(\eta_i) = ch_1(\eta_i) = \sigma^{-1} ch\beta(\mu^i) = \sigma^{-1}\sigma^2 ch(\mu^i) = \sigma\sum_{q=i}^{r} a_q^i x^q = \sum_{p=i}^{r} a_q^i y_q \ .$$

Aussage (c) folgt mit Satz 3.1 direkt aus (3.9).

Die folgenden Beziehungen zwischen ΣP_{n-1} und der speziellen unitären Gruppe $SU(n)$ finden sich bei Yokata in [13]. Yokata definiert eine Inklusion

$$f : \Sigma P_{n-1} \longrightarrow SU(n) \ , \quad n > 2 \ .$$

Für $n = 2$ ist f topologisch,

$$(3.13) \qquad f : \Sigma P_1 \simeq SU(2) \ .$$

In $H^*(SU(n);R)$ gibt es Elemente $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, h_j \in H^{2j+1}(SU(n);R)$, mit den Eigenschaften:

(3.14)

(a) $f^*_H(h_j) = y_j \in H^{2j+1}(\Sigma P_{n-1};R)$, $j = 1,2,\ldots,n-1$.

(b) $H^*(SU(n);R)$ ist eine Grassmann'sche Algebra über R mit den Erzeugenden $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$.

Wir identifizieren die Erzeugenden von $H^*(SU(n);Z)$ mit den Erzeugenden von $H^*(SU(n);Q)$, mit Hilfe des durch $Z \subset Q$ induzierten Koeffizientenhomomorphismus.

Es sei $i : SU(n-1) \subset SU(n)$ die kanonische Einbettung, und seien $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_{n-2}$ die Erzeugenden von $SU(n-1)$. Der Homomorphismus i^*_H ist bestimmt durch:

$$(3.15) \qquad i^*_H(h_j) = \bar{h}_j \ , \quad j = 1,2,\ldots,n-2 \ , \quad i^*_H(h_{n-1}) = 0 \ .$$

Wir betrachten das topologische Produkt $SU(n-1) \times \Sigma P_{n-1}$.

Es ist $H^*(SU(n-1)\times\Sigma P_{n-1};R) \cong H^*(SU(n-1);R) \otimes H^*(\Sigma P_{n-1};R)$; denn $H^*(SU(n-1);Z)$, $H^*(\Sigma P_{n-1};Z)$ sind torsionsfrei ([11]). Die Abbildung

$$g : SU(n-1) \times \Sigma P_{n-1} \longrightarrow SU(n)$$

sei definiert durch

$$g(A,z) = i(A)\cdot f(z) \ , \quad A \in SU(n-1) \ , \quad z \in \Sigma P_{n-1}$$

("$\cdot$" Multiplikation in $SU(n)$) .

Der Homomorphismums g_H^* ist injektiv und bestimmt durch ([13])

$$(3.16) \qquad \begin{aligned} g_H^*(h_j) &= \bar{h}_j \otimes 1 + 1 \otimes y_j \ , \quad j = 1,2,\dots,n-2 \\ g_H^*(h_{n-1}) &= 1 \otimes y_{n-1} \ , \qquad (y_j \in H^*(\Sigma P_{n-1};R)) \ . \end{aligned}$$

Soweit die für uns interessanten Zusammenhänge zwischen $SU(n)$ und ΣP_{n-1} .

<u>Satz 3.5</u>. (a) In $K^1(SU(n))$, $n > 2$, gibt es Elemente $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1}$ mit $ch^*(\lambda_j) = \sum_{q=j}^{n-1} a_q^j h_q \in H^{od}(SU(n);Q)$.

(b) $K^*(SU(n))$, $n > 2$, ist eine Grassmann'sche Algebra über Z mit den Erzeugenden $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1}$.

<u>Beweis</u>: Für alle j ist $a_j^j = 1$, siehe (3.12) . Die Aussage (b) unseres Satzes folgt also direkt aus der Aussage (a) mit Hilfe von Satz 3.1 (c) und der Tatsache, dass $H^*(SU(n);Q)$ eine

Grassmann'sche Algebra mit den ganzzahligen Erzeugenden $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ ist.

Wir beweisen (a) mit Induktion nach n. Für $n=2$ folgt Satz 3.5 aus (3.13) und Hilfssatz 3.4. Es sei jetzt $n>2$. Wir unterteilen den Induktionsbeweis in vier Abschnitte.

1) Es seien $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_{n-2}$ die nach Induktionsvoraussetzung existierenden Erzeugenden von $K^*(SU(n-1))$, mit $ch^*(\overline{\lambda}_j) = \sum_{q=j}^{n-2} a_q^j \overline{h}_q$. Die Inklusion $i : SU(n-1) \subset SU(n)$ induziert nach (3.15) einen Epimorphismus i_H^*. Aus Korollar 3.2 folgt somit, dass auch $i_K^* : K^*(SU(n)) \to K^*(SU(n-1)$ epimorph ist. Es gibt also in $K^1(SU(n))$ Elemente $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_{n-2}'$ mit

$$i_K^*(\lambda_j') = \overline{\lambda}_j \quad , \qquad j = 1,2,\ldots,n-2 .$$

Für diese Elemente erhält man:

$$i_H^* ch^*(\lambda_j') = ch^* i_K^*(\lambda_j') = ch^*(\overline{\lambda}_j) = \sum_{q=j}^{n-2} a_q^j \overline{h}_q$$

Der Kern von i_H^* wird nach (3.15) erzeugt durch h_{n-1}, d.h.

$$(3.17) \quad ch^*(\lambda_j') = \sum_{q=j}^{n-1} a_q^j h_q + h^{(j)} \cdot h_{n-1} , \qquad j = 1,2,\ldots,n-2 ,$$

wobei $h^{(j)}$ ein gewisses Element aus $H^*(SU(n);Q)$ ist.

2) Wir betrachten nun die vorhin definierte Abbildung $g : SU(n-1) \times \Sigma P_{n-1} \to SU(n)$. Nach (3.5) und (3.6) induziert g ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
K^*(SU(n)) & \xrightarrow{g_K^*} & K^*(SU(n-1)) \otimes K^*(\Sigma P_{n-1}) \\
{\scriptstyle ch^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle ch^* \otimes ch^*} \\
H^*(SU(n);Q) & \xrightarrow{g_H^*} & H^*(SU(n-1);Q) \otimes H^*(\Sigma P_{n-1};Q)
\end{array}$$

Mit (3.17),(3.16), der Induktionsvoraussetzung und Hilfssatz 3.4 erhält man für $\lambda_1',\lambda_2',\dots,\lambda_{n-2}'$

$$ch^* \otimes ch^* g_K^*(\lambda_j') = g_H^*\, ch^*(\lambda_j') = ch^* \otimes ch^*(\overline{\lambda}_j \otimes 1+1 \otimes \eta_j)+$$
$$+\, g_H^*(h^{(j)})\cdot(1\otimes y_{n-1}) \ .$$

Die Elemente

$$\overline{h}^{(j)}\otimes y_{n-1} = g_H^*(h^{(j)})\cdot(1\otimes y_{n-1}) \ , \quad j = 1,2,\dots,n-2,$$

gehören also zum Bild von $ch^*\otimes ch^*$. D.h. es gibt in $K^*(SU(n-1))\otimes K^*(\Sigma P_{n-1})$ Elemente

$$(3.18)\quad \overline{\lambda}^{(j)}\otimes\eta_{n-1} \ , \quad \text{mit} \quad \overline{\lambda}^{(j)} = b^{(j)} + \sum_{1<i_1<\dots<i_l<n-2} b^{(j)}_{i_1 i_2\dots i_l}\overline{\lambda}_{i_1}\overline{\lambda}_{i_2}\cdots\overline{\lambda}_{i_l}$$

für welche gilt

$$ch^*\otimes ch^*(\overline{\lambda}^{(j)}\otimes\eta_{n-1}) = \overline{h}^{(j)}\otimes y_{n-1} \ , \quad j = 1,2,\dots,n-2 \ .$$

(Durch $ch^*\otimes ch^*$ werden nur Elemente der Form $\overline{\lambda}\otimes\eta_{n-1}$ auf Elemente der Form $\overline{h}\otimes y_{n-1}$ abgebildet).
Es gilt somit: $ch^*\otimes ch^* g_K^*(\lambda_j') = ch^*\otimes ch^*(\overline{\lambda}_j\otimes 1+1\otimes\eta_j+\overline{\lambda}^{(j)}\otimes\eta_{n-1})$
und, weil $ch^*\otimes ch^*$ monomorph ist,

$$(3.19)\quad g_K^*(\lambda_j') = \overline{\lambda}_j\otimes 1+1\otimes\eta_j+\overline{\lambda}^{(j)}\otimes\eta_{n-1} \ , \quad j = 1,2,\dots,n-2 \ .$$

3) Wir betrachten jetzt die Faserung $p : SU(n) \to S^{2n-1}$.
Sei h das erzeugende Element von $H^{2n-1}(S^{2n-1};\mathbb{Q})$.

Es ist $p_H^*(h) = h_{n-1}$ (siehe [13]). Nach Bott [9] wird $K^1(S^{2n-1})$ von einem Element ν frei erzeugt; dabei gilt $ch^*(\nu) = h$.
Wir definieren

$$\lambda_{n-1} = p_K^*(\nu) \in K^*(SU(n))$$

und erhalten mit Hilfe der Natürlichkeit von ch^*

(3.20) $ch^*(\lambda_{n-1}) = ch^* p_K^*(\nu) = p_H^* ch^*(\nu) = h_{n-1}$

Daraus ergibt sich

$$ch^* \otimes ch^* g_K^*(\lambda_{n-1}) = g_H^* ch^*(\lambda_{n-1}) = 1 \otimes y_{n-1} = ch^* \otimes ch^*(1 \otimes \eta_{n-1}) ,$$

also

(3.21) $$g_K^*(\lambda_{n-1}) = 1 \otimes \eta_{n-1} .$$

4) Für die Elemente

$$\lambda'_{i_1} \lambda'_{i_2} \ldots \lambda'_{i_l} \lambda_{n-1} , \quad 1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_l < n-2 ,$$

aus $K^*(SU(n))$, folgt mit (3.19),(3.20) und der Multiplikationsregel in $K^*(SU(n-1)) \otimes K^*(\Sigma P_{n-1})$

(3.22) $g_K^*(\lambda'_{i_1} \lambda'_{i_2} \ldots \lambda'_{i_l} \lambda_{n-1}) = (\overline{\lambda}_{i_1} \overline{\lambda}_{i_2} \ldots \overline{\lambda}_{i_l}) \otimes \eta_{n-1}$

(Multiplikationsregel in $K^*(X) \otimes K^*(Y)$: Wenn $\xi' \in K^p(X)$, $\eta \in K^q(Y)$, $p,q \in Z_2$, dann ist $(\xi \otimes \eta) \cdot (\xi' \otimes \eta') = (-1)^{q \cdot p}(\xi\xi' \otimes \eta\eta')$)

Man erhält (3.22) auf einfache Weise, indem man von rechts mit $g_K^*(\lambda_{n-1}) = 1\otimes\eta_{n-1}$ zu multiplizieren beginnt.

Im Blick auf (3.18) betrachten wir die Elemente

$$\lambda^{(j)} = (b^{(j)} + \sum_{1<i_1<\ldots<i_l<n-2} b^{(j)}_{i_1 i_2 \ldots i_l} \lambda'_{i_1} \lambda'_{i_2} \ldots \lambda'_{i_l})\lambda_{n-1} ,$$
$$j = 1,2,\ldots,n-2 ,$$

und erhalten mit (3.22)

$$g_K^*(\lambda^{(j)}) = \bar{\lambda}^{(j)}\otimes\eta_{n-1} , \qquad j = 1,2,\ldots,n-2 .$$

Wir definieren nun

$$\lambda_j = \lambda'_j - \lambda^{(j)} , \qquad j = 1,2,\ldots,n-2 .$$

Es ist $g_K^*(\lambda_j) = \bar{\lambda}_j\otimes 1 + 1\otimes\eta_j$ und somit nach (3.16)

$$g_H^* ch^*(\lambda_j) = ch^*\otimes ch^* g_K^*(\lambda_j) = ch^*\lambda_j\otimes 1 + 1\otimes ch^*\eta_j$$
$$= \sum_{q=j}^{n-2} a^j_q \bar{h}_q \otimes 1 + 1\otimes \sum_{q=j}^{n-1} a^j_q y_q = g_H^*(\sum_{q=j}^{n-1} a^j_q h_q .$$

Weil g_H^* monomorph ist, (siehe (3.16)), folgt

$$(3.23) \qquad ch^*(\lambda_j) = \sum_{q=j}^{n-1} a^j_q h_q , \quad j = 1,2,\ldots,n-2 .$$

Mit (3.20) und (3.23) ist Satz 3.5 bewiesen.

<u>Korollar 3.6</u>. Sei f die Inklusion $\Sigma P_{n-1} \subset SU(n)$, und seien $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$ die Erzeugenden von $K^*(SU(n))$, $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-1}$ die Erzeugenden von $K^*(\Sigma P_{n-1})$.
Es gilt $f_K^*(\lambda_j) = \eta_j$, $j = 1,2,\ldots,n-1$.

<u>Beweis:</u> Aus Satz 3.5, (3.14) und Hilfssatz 3.4 folgt

$$ch^* f_K^*(\lambda_j) = f_H^* ch^*(\lambda_j) = f_H^*\Big(\sum_{q=j}^{n-1} a_q^j h_q\Big) = \sum_{q=j}^{n-1} a_q^j y_q = ch^*(\eta_j) \; .$$

Weil ch^* in unserem Falle monomorph ist, folgt

$$f_K^*(\lambda_j) = \eta_j \; .$$

<u>Satz 3.7.</u> Die Faserung $p : SU(n) = U_{n,n-1} \to U_{n,r}$, $n>2$, $r<n-1$, induziert einen M o n o m o r p h i s m u s

$$p_K^* : K^*(U_{n,r}) \longrightarrow K^*(SU(n)) \; .$$

Das Bild $p_K^*(K^*(U_{n,r}))$ ist die durch $\lambda_{n-r}, \lambda_{n-r+1}, \ldots, \lambda_{n-1}$ erzeugte Teilalgebra A .

<u>Beweis</u>: Sei G die durch $h_{n-r}, h_{n-r+1}, \ldots, h_{n-1}$ erzeugte Teilalgebra von $H^*(SU(n);Q)$. Nach [13] ist $p_H^* : H^*(U_{n,r};Q) \to H^*(SU(n);Q)$ ein Monomorphismus auf G . Mit Korollar 3.2 folgt daraus zunächst, dass auch p_K^* monomorph ist. Aus Satz 3.5 erhalten wir $ch^{*-1}(G) = A$ und somit, weil ch^* monomorph ist,

$$(3.24) \quad p_K^*(K^*(U_{n,r})) = ch^{*-1} p_H^* ch^*(K^*(U_{n,r})) \subset A \; .$$

Es bleibt $p_K^*(K^*(U_{n,r})) \supset A$ zu zeigen. Auf Grund von Satz 3.1 (b) gibt es in $K^*(U_{n,r})$ Elemente $\nu'_{n-r}, \nu'_{n-r+1}, \ldots, \nu'_{n-1}$ mit
$ch^*(\nu'_j) = p_H^{*-1}(h_j)$ + höhere Terme , d.h.
$p_H^* ch^*(\nu'_j) = h_j$ + höhere Terme $\in G$, also

$$ch^* p_K^*(\nu'_j) = h_j + \text{höhere Terme} \in G \; , \quad j = n-r, \ldots n-1 \; .$$

Aus (3.24), Satz 3.1 (a),(b) und Satz 3.5 folgt damit leicht, dass die Elemente $p_K^*(\nu_j')$, $j = n-r,\dots,n-1$ die Teilalgebra A additiv und multiplikativ erzeugen, d.h. $A \subset p_K^*(K^*(U_{n,r}))$.

Bemerkung: Die Sätze 3.5 und 3.7 sind in anderer Form ohne Beweis in [6] enthalten. Die Darstellung in [6] lässt vermuten, dass wir in dieser Arbeit eine von [6] verschiedene Beweismethode verwenden.

Es seien p, p', p'' die Faserungen $U_{n,m+1} \xrightarrow{p} U_{n,m}$, $SU(n) \xrightarrow{p'} U_{n,m+1}$, $SU(n) \xrightarrow{p''} U_{n,m}$. Seien $\nu_j = (p_K'^*)^{-1}(\lambda_j)$, $j = n-m-1,\dots,n-1$, die Erzeugenden von $K^*(U_{n,m+1})$ und $\bar{\nu}_i = (p_K''^*)^{-1}(\lambda_i)$ $i = n-m,\dots,n-1$, die Erzeugenden von $K^*(U_{n,m})$.

Korollar 3.8. Der Homomorphismus $p_K^* : K^*(U_{n,m}) \to K^*(U_{n,m+1})$ ist bestimmt durch $p_K^*(\bar{\nu}_i) = \nu_i$, $i = n-m,\dots,n-1$.

Beweis: Nach (1.0) ist $p_K''^* = p_K'^* \circ p_K^*$, d.h.

$$p_K'^* p_K^*(\bar{\nu}_i) = p_K''^*(\bar{\nu}_i) = \lambda_i = p_K'^*(\nu_i) \ , \quad i = n-m,\dots,n-1 \ .$$

Weil $p_K'^*$ nach Satz 3.7 monomorph ist, ergibt sich daraus Korollar 3.8.

3.3. Nach Definition ist $K^1(SU(n)) = \tilde{K}^0(\Sigma SU(n))$. Wir fassen also die in $K^1(SU(n))$ liegenden Erzeugenden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ von $K^*(SU(n))$ als Elemente von $\tilde{K}^0(\Sigma SU(n))$ auf und werden nun die Operationen $\Psi^k : \tilde{K}^0(\Sigma SU(n)) \to \tilde{K}^0(\Sigma SU(n))$ für diese Elemente bestimmen. (Siehe Schluss von Abschnitt 3.1).

Die ganzen Zahlen $c_q^{k,j}$, $k \in Z, j = 1,2,3,\dots,$ $q = j,j+1,j+2,\dots,$ seien definiert durch

$$
\begin{aligned}
((x+1)^k-1)^j &= \sum_{q=j}^{\infty} c_q^{k,j}\cdot x^q \\
(3.25) \qquad &= k^j\cdot x^j + k^j(k-1)\frac{j}{2}\cdot x^{j+1} \\
&\quad + k^j(k-1)\frac{j(3jk-3j+k-5)}{24}x^{j+2},\dots
\end{aligned}
$$

<u>Satz 3.9</u>. Für die Elemente $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1} \in \tilde{K}^0(\Sigma SU(n))$ gilt:

$$\tilde{\psi}^k(\lambda_j) = k\cdot\sum_{q=j}^{n-1} c_q^{k,j}\lambda_q \;, \quad j = 1,2,\dots,n-1 \;.$$

<u>Beweis</u>: Adams [1] hat für die komplexen projektiven Räume P_{n-1} gezeigt:

$$\tilde{\psi}^k(\mu^j) = \sum_{q=j}^{n-1} c_q^{k,j}\mu^q \;, \quad j = 1,2,\dots,n-1.$$

Mit Hilfe der Beziehung $\tilde{\psi}^k\circ\beta = k\cdot\beta\circ\tilde{\psi}^k$ (siehe Lemma 3.3), erhalten wir daraus für die Elemente $\eta_j = \beta(\mu^j) \in \tilde{K}^0(\Sigma^2 P_{n-1}) = K^1(\Sigma P_{n-1})$:

$$\tilde{\psi}^k(\eta_j) = k\cdot\sum_{q=j}^{n-1} c_q^{k,j}\eta_q \;, \quad j = 1,2,\dots,n-1 \;.$$

Nach Korollar 3.6 ist $(\Sigma f)^!(\lambda_j) = \eta_j$. Aus der Natürlichkeit von $\tilde{\psi}^k$ folgt somit

$$(3.26) \qquad (\Sigma f)^!\tilde{\psi}^k(\lambda_j) = (\Sigma f)^!(k\cdot\sum_{q=j}^{n-1} c_q^{k,j}\lambda_q)$$

Auf Grund von Korollar 3.6 bildet der Homomorphismus $(\Sigma f)^!$ die von $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_{n-1}$ additiv erzeugte Untergruppe A isomorph auf $K^1(\Sigma P_{n-1})$ ab. Satz 3.9 folgt also aus (3.26), wenn wir zeigen können, dass $\tilde{\psi}^k(\lambda_j) \in A$. Mit Satz 3.5 und der Beziehung $\widetilde{ch}\cdot\tilde{\psi}^k = \sum_{q=1}^{\infty} k^q \widetilde{ch}^{2q}$ erhält man, unter Berücksichtigung von (3.4),

$$\tilde{\psi}^k(\lambda_j) = ch_1^{-1}\Big(\sum_{q=j}^{n-1} k^{q+1} a_q^j h_q\Big) \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n-1 \ ,$$

d.h. aber, wiederum mit Satz 3.5, $\tilde{\psi}^k(\lambda_j) \in A$, $j = 1,2,\ldots,n-1$.

<u>Satz 3.10</u>. Für die Elemente $\nu_{n-r},\ldots,\nu_{n-1} \in \tilde{K}^0(\Sigma U_{n,r}) = K^1(U_{n,r})$ gilt:

$$\tilde{\psi}^k(\nu_j) = k\cdot \sum_{q=j}^{n-1} c_q^{k,j} \nu_q \quad , \quad j = n-r,\ldots,n-1 \ .$$

<u>Beweis</u>: Sei p die Faserung $SU(n) \xrightarrow{p} U_{n,r}$. Es ist $(\Sigma p)^!(\nu_j) = \lambda_j$, $j = n-r,\ldots,n-1$. Aus der Natürlichkeit von $\tilde{\psi}^k$ und Satz 3.9 folgt:

$$(\Sigma p)^!\tilde{\psi}^k(\nu_j) = \tilde{\psi}^k(\lambda_j) = (\Sigma p)^!\Big(k\cdot \sum_{q=j}^{n-1} c_q^{k,j}\nu_q\Big) \ .$$

Nach Satz 3.7 ist aber $(\Sigma p)^!$ monomorph, d.h.

$$\tilde{\psi}^k(\nu_j) = k\cdot \sum_{q=j}^{n-1} c_q^{k,j}\nu_q \ .$$

3.4. Wir betrachten nun speziell die Faserung $p : U_{n,3} \longrightarrow U_{n,2}$ und nehmen an, dass p eine Schnittfläche $s : U_{n,2} \longrightarrow U_{n,3}$ besitzt.

Es seien $\nu_{n-3}, \nu_{n-2}, \nu_{n-1}$ die Erzeugenden von $K^*(U_{n,3})$ und $\bar{\nu}_{n-2}, \bar{\nu}_{n-1}$ die Erzeugenden von $K^*(U_{n,2})$. Aus Korollar 3.8 und $p \circ s = Id(U_{n,2})$ folgt:

(3.27) $\quad s_K^*(\nu_j) = s_K^* p_K^*(\bar{\nu}_j) = \bar{\nu}_j \,, \quad j = n-2,\ n-1 \,.$

Das Bildelement $s_K^*(\nu_{n-3})$ ist eine ganzzahlige Linearkombination von $\bar{\nu}_{n-2}, \bar{\nu}_{n-1}$,

(3.28) $\quad s_K^*(\nu_{n-3}) = u \cdot \bar{\nu}_{n-2} + v \cdot \bar{\nu}_{n-1} \,, \quad u \in Z \,, \quad v \in Z \,;$

denn $K^1(U_{n,2})$ wird frei erzeugt durch $\bar{\nu}_{n-2}, \bar{\nu}_{n-1}$.

Wir bestimmen nun die Zahlen u und v mit Hilfe der Relation $\tilde{\psi}^k \circ (\Sigma s)^! = (\Sigma s) \circ \tilde{\psi}^k$.

<u>Lemma 3.11</u>. Es sei $s : U_{n,2} \longrightarrow U_{n,3}$ eine Schnittfläche der Faserung $p : U_{n,3} \longrightarrow U_{n,2}$. Dann gilt für das Element $\nu_{n-3} \in K^1(U_{n,3})$:

$$s_K^*(\nu_{n-3}) = \frac{n-3}{2} \cdot \bar{\nu}_{n-2} - \frac{(n-3)(3n-4)}{24} \cdot \bar{\nu}_{n-1} \,.$$

<u>Beweis</u>: Mit Satz 3.9, (3.27) und (3.28) erhalten wir

$$(\Sigma s)^! \tilde{\psi}^k(\nu_{n-3}) = [k^{n-2} u + k^{n-2}(k-1)\frac{n-3}{2}] \cdot \bar{\nu}_{n-2}$$
$$+ [k^{n-2} v + k^{n-2}(k-1)(3nk-3n-8k+4)\frac{n-3}{24}] \cdot \bar{\nu}_{n-1} \,.$$

$$\tilde{\psi}^k (\Sigma s)^! (\nu_{n-3}) = k^{n-1} u \cdot \bar{\nu}_{n-2} + [k^{n-1}(k-1)\frac{n-2}{2} u + k^n \cdot v] \cdot \bar{\nu}_{n-1} \,.$$

Aus $(\Sigma s)^{!}\tilde{\psi}^{k}(\nu_{n-3}) = \tilde{\psi}^{k}(\Sigma s)^{!}(\nu_{n-3})$ folgt

$$u + (k-1)\frac{n-3}{2} = k\cdot u$$

$$v + (k-1)(3nk-3n-8k+4)\,\frac{n-3}{24} = k(k-1)\,\frac{n-2}{2}\,u + k^2 v \quad .$$

Als Lösungen dieses Gleichungssystems für die Unbekannten u und v erhalten wir

$$u = \frac{n-3}{2}\,, \qquad v = -\,\frac{(n-3)(3n-4)}{24} \quad .$$

<u>Satz 3.12</u>. Die Faserung $p : U_{n,m+1} \longrightarrow U_{n,m}$, $m > 2$, hat höchstens dann eine Schnittfläche, wenn $n-m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 24)$.

<u>Beweis</u>: Auf Grund von Hilfssatz 1.2 genügt es, diesen Satz für $p : U_{n,3} \longrightarrow U_{n,2}$ zu beweisen. (Siehe Beweis von Korollar 2.3.) Besitzt diese Faserung einen Schnitt, so müssen nach dem obigen Lemma $\frac{n-3}{2}$ und $\frac{(n-3)(3n-4)}{24}$ ganze Zahlen sein. Die erste Bedingung ergibt $n-3 = 2q$, $q \in Z$. Damit geht die zweite Bedingung über in: $\frac{(n-3)(3n-4)}{24} = \frac{q(6q+5)}{12} \in Z$. Der Ausdruck $6q+5$ ist weder durch 2 noch durch 3 teilbar, also ist $q = 12r$, $r \in Z$, d.h. aber

$$n-3 = 2q = 24r \;, \quad r \in Z \;,$$

und somit ist $n-2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 24)$.

Bemerkungen:

1) Für Faserungen $U_{n,m_o+1} \xrightarrow{p} U_{n,m_o}$, $m_o > 2$, erhält man mit unserer Methode Verschärfungen von Satz 3.12 für $m > m_o$.

2) Die Operationen ψ^k sind für einen CW-Komplex, dessen ganzzahlige Kohomologie keine Torsion besitzt, bestimmt durch den Chern'schen Charakter; in diesem Fall ist nämlich ch monomorph, und die Beziehung

$$\mathrm{ch}\ \psi^k(\xi) = \sum_{q=0}^{\infty} k^q \cdot \mathrm{ch}^{2q}(\xi)$$

legt somit $\psi^k(\xi)$ eindeutig fest. Satz 3.12 kann also auch mit dem Chern'schen Charakter bewiesen werden, mit einer Methode, welche der in [6] durchgeführten verwandt ist. (Die Relation $\mathrm{ch}^* \circ s_K^* = s_H^* \circ \mathrm{ch}^*$ ermöglicht es, die Zahlen u und v von Lemma 3.11 zu berechnen.)

Die notwendigen Bedingungen für die Existenz einer Schnittfläche, die man mit dieser Methode erhält ([6]), sind für die Faserungen $U_{n,1+1} \xrightarrow{p} U_{n,1}$, wie Adams und Walker [3] gezeigt haben, auch hinreichend. Wir zeigen im folgenden Abschnitt, dass dies für die Faserungen $U_{n,m+1} \xrightarrow{p} U_{n,m}$, $m > 2$, nicht zutrifft.

4. Stetiges Vektorprodukt und stetige Multiplikation.

Unter einem stetigen Vektorprodukt von zwei Vektoren im C^n verstehen wir eine stetige Abbildung $\varphi : C^n \times C^n \longrightarrow C^n$ mit den Eigenschaften:

(4.1) (a) $\{\varphi(\alpha,\beta),\alpha\} = \{\varphi(\alpha,\beta),\beta\} = 0 \ , \quad \forall\alpha,\forall\beta \ .$

(b) $\{\varphi(\alpha,\beta),\varphi(\alpha,\beta)\} = \{\alpha,\alpha\}\cdot\{\beta,\beta\} - \{\alpha,\beta\}\cdot\{\beta,\alpha\} \ , \quad \forall\alpha,\forall\beta.$

($\{\ ,\ \}$ Skalarprodukt in C^n)

Die Eigenschaft (b) bedeutet, dass $\varphi(\alpha,\beta)$ genau dann der Nullvektor ist, wenn α und β linearabhängig sind. Ein Beispiel eines solchen Vektorprodukts ist das klassische Vektorprodukt im C^3 .

Es ist leicht zu sehen, dass man aus einem stetigen Vektorprodukt von zwei Vektoren im C^n eine Schnittfläche s der Faserung $p : U_{n,3} \longrightarrow U_{n,2}$ erhält, und dass man umgekehrt aus einem Schnitt dieser Faserung ein stetiges Vektorprodukt herleiten kann. (Mit Hilfe eines festen Orthogonalisierungsverfahrens ordne man jedem linearunabhängigen Paar (α,β) das orthonormierte Paar $\langle\alpha',\beta'\rangle$ zu und definiere:
$\varphi(\alpha,\beta) = [\{\alpha,\alpha\}\cdot\{\beta,\beta\} - \{\alpha,\beta\}\cdot\{\beta,\alpha\}]^{\frac{1}{2}}\cdot\sigma(\alpha',\beta')$; dabei sei $\sigma(\alpha',\beta')$ erklärt durch $s(\langle\alpha',\beta'\rangle) = \langle\alpha',\beta',\sigma(\alpha',\beta')\rangle$. Für linearabhängige Paare (α,β) definiere man $\varphi(\alpha,\beta) = 0$.)

Eine stetige Multiplikation mit Eins und Normenproduktregel (NPR) in C^k ist eine stetige Abbildung $m : C^k \times C^k \longrightarrow C^k$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Es gibt ein Element $E \in C^k$ mit $m(A,E) = m(E,A) = A$, für alle A aus C^k.

(b) $\{m(A,B), m(A,B)\} = \{A,A\}\cdot\{B,B\}$, $\forall A, \forall B$.

Eine solche Multiplikation kann offensichtlich aufgefasst werden als stetige Multiplikation mit Eins und NPR im R^{2k}.

Wir konstruieren nun aus einem stetigen Vektorprodukt $\varphi : C^n \times C^n \longrightarrow C^n$ eine stetige Multiplikation im C^{n+1}. Dazu fassen wir ein Element $A = (a_o, a_1, \ldots, a_n) \in C^{n+1}$ auf als Paar

$$\langle a_o, \alpha \rangle , \quad \text{mit} \quad \alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in C^n ,$$

und definieren

$$(4.2) \qquad m(A,B) = \langle a_o b_o - \{\alpha,\beta\}, a_o\beta + \bar{b}_o\alpha + \varphi(\alpha,\beta) \rangle .$$

Mit Hilfe von (4.1) rechnet man leicht nach, dass $\{m(A,B), m(A,B)\} = \{A,A\}\cdot\{B,B\}$ und $m(A,(1,0,\ldots,0)) = m((1,0,\ldots,0),A) = A$ für alle $A,B \in C^{n+1}$.

Man erhält also mit der Konstruktion (4.2) eine stetige Multiplikation mit Eins und NPR im C^{n+1}, d.h. eine stetige Multiplikation mit Eins und NPR im R^{2n+2}. Nach einem Satz von Adams [2] gibt es eine solche Multiplikation im R^{2n+2} nur für $n = 0,1$ oder 3. Aus unseren Betrachtungen ergibt sich somit:

Lemma 4.1. Es gibt nur im Falle $n = 3$ ein stetiges Vektorprodukt von zwei Vektoren im komplexen Vektorraum C^n ; d.h. die Faserung $p : U_{n,3} \longrightarrow U_{n,2}$ hat nur für $n = 3$ eine Schnittfläche.

Wir sind nun in der Lage unsere eingangs gestellte Frage für die Faserungen mit $m > 2$ vollständig zu beantworten.

Satz 4.2. Die Faserung $p : U_{n,m+1} \longrightarrow U_{n,m}$, $m > 2$, hat nur für $m = n-1$ eine Schnittfläche.

Beweis: Aus Hilfssatz 1.2 und Lemma 4.1 folgt, dass p für $2 < m < n-2$ keine Schnittfläche besitzt. (Siehe Beweis von Korollar 2.3.) Für die Faserungen $p : U_{n,n} \longrightarrow U_{n,n-1}$ sind explizite Schnittflächen bekannt. Man zeigt z.B. in der linearen Algebra, dass $n-1$ orthonormierte Zeilenvektoren auf genau eine Weise durch eine Zeile zu einer unitären Matrix mit Determinante $+1$ ergänzt werden können.

Bemerkung: Mit Hilfe der Konstruktion (4.2) erhält man aus einem stetigen Vektorprodukt im quaternionischen Vektorraum H^n eine stetige, nullteilerfreie Multiplikation mit Eins im H^{n+1} und somit durch Normieren eine stetige Multiplikation mit Eins und NPR im H^{n+1} . Diese können wir wiederum auffassen als Multiplikation im R^{4n+4} . Aus dem Satz von Adams [2] folgt dann analog wie vorhin, dass die quaternionischen Faserungen

$p : H_{n,m+1} \longrightarrow H_{n,m}$ für $m > 2$ <u>keine</u> Schnittflächen zulassen. Insbesondere gibt es also für alle n kein stetiges Vektorprodukt von zwei Vektoren im H^n .

L I T E R A T U R

[1] J.F. Adams, Vector fields on spheres. Ann. of math. 75, No. 3 (1962), 603-632.

[2] J.F. Adams, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. of math. 72, No. 2 (1960).

[3] J.F. Adams and G. Walker, On complex Stiefel manifolds. Proc.Camb.Phil.Soc. 61, (1965), 81-103.

[4] M.F. Atiyah K-Theory. Notes by D.W. Anderson, Harvard University, Fall 1964.

[5] M.F. Atiyah und F. Hirzenbruch, Vector bundles and homogeneous spaces. Proc. of Symposia in pure math., Vol. III, Am. Math. Soc. (1961), 7-38.

[6] M.F. Atiyah und J.A. Todd, On complex Stiefel manifolds. Proc.Camb.Phil.Soc. 56, (1960).

[7] A. Borel, Sur la cohomologie des variétés de Stiefel et certain groupes de Lie. Comptes rendus, 232 (1951) 1628-1630.

[8] A. Borel et J.P. Serre, Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod. Am. Journal of Math. LXXV, No. 3 (1953), 409-448.

[9] R. Bott, The stable homotopy of the classical groups. Ann. of math. 70, (1959), 313-337.

[10] B. Eckmann, Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen. Comm. math. helv. 15 (1942), 1-26.

[11] E.H. Spanier, Algebraic Topology. McGraw-Hill, 1965.

[12] N. Steenrod, The Topology of fibre bundles. Princeton University Press, 1951.

[13] I. Yokata, On the celluar decompositions of unitary groups. Jour. Inst. Poly. Osaka 7, No. 1-2, Series A (1956), 39-49.

[14] B. Eckmann, Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme. Comm. math. helv. 15 (1942), 318-339.

Curriculum vitae

Am 11. Okt. 1935 wurde ich in Zürich geboren. Nach dem Besuch der Elementar- und Sekundarschule absolvierte ich eine vier Jahre dauernde Lehre als Maschinenschlosser bei der Firma Gebrüder Bühler in Uzwil. Im Frühling 1956 trat ich ins Technikum Winterthur ein und habe die Ausbildung an dieser Schule im Jahre 1959 mit dem Maschinentechniker-Diplom abgeschlossen.

Von 1959 bis 1963 studierte ich an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Mathematik und Physik und habe im Herbst 1963 das Diplom als Mathematiker erhalten. Während der folgenden Semester war ich als Assistent am Mathematischen Seminar bei den Herren Professoren Dr. B. Eckmann, Dr. H. Hopf, Dr. A. Pfluger und Dr. E. Specker tätig. In dieser Zeit habe ich mich auch mit der vorliegenden Arbeit beschäftigt.

Zürich, Januar 1968

Seite Leer /
Blank leaf