



Doctoral Thesis

Longueurs extrémales et théorie des fonctions

Author(s):

Hersch, Joseph

Publication Date:

1955

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000090221> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Prom. No. 2294

LONGUEURS EXTRÊMALES ET THÉORIE DES FONCTIONS

THÈSE

PRÉSENTÉE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE, ZURICH
POUR L'OBTENTION DU GRADE DE
DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

JOSEPH HERSCH

DE CHÊNE-BOUGERIES (GENÈVE)

RAPPORTEUR: M. LE PROFESSEUR DR A. PFLUGER

CORAPPORTEUR: M. LE PROFESSEUR DR M. PLANCHEREL

1955

ORELL FÜSSLER ARTS GRAPHIQUES S. A.
ZURICH

Longueurs extrémales et théorie des fonctions

par JOSEPH HERSCH, Zurich

Introduction

Le but essentiel du présent travail est de mettre en lumière un champ d'applications de la *méthode des longueurs extrémales*, due notamment à Ahlfors et Beurling. Cette méthode est appliquée sous une forme modifiée présentant certains avantages. La longueur extrémale est un invariant conforme.

On peut caractériser par des longueurs extrémales les autres invariants conformes que sont le *module* d'un quadrilatère ou d'un domaine doublement connexe (cette propriété est connue), et, pour un domaine de Jordan, la *mesure harmonique* d'un arc-frontière en un point et la *distance hyperbolique* de deux points.

En même temps que des formules exactes, nos méthodes de variation fournissent d'utiles évaluations de théorie des fonctions : les unes précisent, parfois de façon essentielle, des inégalités connues (de Nevanlinna, Ostrowski, Sario, Strebel) ; les autres concernent des problèmes nouveaux.

Nous dirons toujours „courbe fermée“ pour *courbe de Jordan*, „arc“ pour *arc de Jordan* et „courbe“ pour *courbe ou arc de Jordan* ; une „coupure“ d'un domaine sera un arc de Jordan à extrémités sur la frontière. Tous les domaines considérés seront supposés définis dans le plan complexe ou sur une surface de Riemann.

Les principaux résultats de ce travail ont été annoncés dans trois Notes aux *Comptes rendus* [7], [8], [12]. Une publication ultérieure [10] donnera des applications des méthodes développées ici aux fonctions pseudo-analytiques et aux transformations quasi-conformes, ainsi qu'à une classe plus générale de fonctions ; la plupart de ces résultats ont été sommairement annoncés dans une autre Note aux *Comptes rendus* [11].

J'exprime ici ma vive reconnaissance au Prof. A. Pfluger : il m'a fourni l'essentiel de ma formation en théorie des fonctions, et c'est à lui que je dois d'avoir étudié la méthode des longueurs extrémales ; je lui sais particulièrement gré de ses conseils précieux et de sa bienveillance constante. Je remercie aussi vivement le Prof. B. Eckmann, dont je suis depuis

longtemps l'assistant et qui m'a toujours encouragé dans mon travail ; ainsi que le Prof. *M. Plancherel*, corapporteur de ma thèse, pour toute l'attention qu'il lui a consacrée. — D'autre part, on verra au Chapitre III que bien des applications m'ont été suggérées par le livre si riche de contenu „Eindeutige analytische Funktionen“ de *R. Nevanlinna*.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	301
Chapitre I. La longueur extrémale	
§ 1. Figures et configurations. Quadrilatères et leurs modules . . .	303
§ 2. La longueur extrémale d'une famille de courbes	303
§ 3. Longueurs extrémales et modules. Propriétés des modules . . .	307
Appendice du Chapitre I. Les familles numériques	311
Chapitre II. Mesure harmonique et distance hyperbolique	
§ 1. La fonction $\nu(r)$	316
§ 2. Mesure harmonique et longueur extrémale	319
§ 3. Distance hyperbolique et longueur extrémale	321
Chapitre III. Applications	
§ 1. Variation de la distance hyperbolique par une déformation du domaine	322
§ 2. Variation de la mesure harmonique par une déformation du domaine	323
§ 3. Applications. Théorème général de Phragmén-Lindelöf . . .	325
§ 4. Variation d'une fonction harmonique dans des domaines simplement connexes emboîtés	329
§ 5. Evaluation par défaut de la distance hyperbolique	330
§ 6. Rayon intérieur, mesure harmonique et modules	333
§ 7. Remarque sur les théorèmes de Koebe et d'Ahlfors	335
Bibliographie	336