Doctoral Thesis

Modifikation von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten

Author(s):
Aeppli, Alfred

Publication Date:
1956

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000090229

Prom. Nr. 2548

MODIFIKATION VON REELLEN UND KOMPLEXEN MANNIGFALTIGKEITEN

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH
ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK
GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

ALFRED AEPPLI
VON ZÜRICH

Referent: Herr Prof. Dr. B. ECKMANN
Korreferent: Herr Prof. Dr. H. HOPF

1956
ART. INSTITUT ORELL FÜSSLI AG, ZÜRICH

Modifikation von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten

von Alfred Aeppli, Zürich

Einleitung

a) Der Begriff der Modifikation bezieht sich auf eine Situation, die in der Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten häufig vorkommt, aber auch in geometrischen Zusammenhängen wohlbekannt ist: man nimmt aus einer Mannigfaltigkeit W eine Teilmenge A heraus und «ersetzt» sie durch eine Menge S, so daß eine neue Mannigfaltigkeit V entsteht, wobei je nach der vorliegenden Fragestellung bestimmte Strukturen erhalten bleiben sollen (zum Beispiel: V und W sollen differenzierbare oder komplexe Mannigfaltigkeiten sein usw.); eine andere zusätzliche Bedingung besteht darin, daß auch von den Teilmengen A und S Mannigfaltigkeitscharakter verlangt wird – diese einschränkende Bedingung werden wir im folgenden voraussetzen, abgesehen von gelegentlichen Zusätzen, in welchen auf allgemeinere Fälle hingewiesen wird. In der vorliegenden Arbeit sollen solche Modifikationen topologisch, insbesondere im Rahmen von Homologiebetrachtungen untersucht werden. Es zeigt sich nämlich, daß sich aus relativ schwachen Voraussetzungen ziemlich starke Einschränkungen für die auftretenden Räume ergeben.

Einfache Beispiele von Modifikationen: 1. Es werde aus der n-Sphäre Σ^n ein Punkt p herausgenommen und an seiner Stelle der $(n - 1)$-dimensionale reell projektive Raum P^{n-1} so eingesetzt, daß P^n entsteht; oder, wenn $n = 2m$ ist, der komplex projektive Raum $P^{(m-1)}$ von $m - 1$ komplexen Dimensionen, so daß $P^{(m)}$ entsteht. 2. Eine komplexe Mannigfaltigkeit V werde durch eine komplex analytische Abbildung φ «fast überall schlicht» auf eine andere W derselben Dimension abgebildet. Dabei heißt φ fast überall schlicht, wenn der Abbildungsgrad von φ gleich 1 ist. φ muß dann überall lokal topologisch sein, bis auf eine Singularitätenmenge S von niedrigerer Dimension, welche durch φ auf eine Menge A (A heißt Ausnahmemenge, $\dim(A) < \dim(S)$) abgebildet wird. φ induziert einen Homöomorphismus von $V - S$ auf $W - A$. – In derartigen Fällen, wo der Homöomorphismus von $V - S$ auf $W - A$ zu einer stetigen Abbildung von V auf W ausgedehnt werden kann, sprechen wir von «Modifikation mit Abbildung».

b) Im ersten Kapitel werden die Definitionen verschiedener Arten von Modifikation gegeben (topologische, differenzierbare, reell und komplex analytische Modifikation, spezielle und allgemeine Modifikation); dann wird auf die Erzeugungsweisen hingewiesen, insbesondere auf die Modifikation mit Abbildung, und schließlich werden die Zusammenhänge mit den Sphärenfaserungen und mit den Möglichkeiten des Abschlusses berandeter Mannigfaltigkeiten behandelt. Es zeigt sich, daß jede differenzierbare Modifikation zwei Sphärenfaserungen des Umgebungsrandes N von A in W (oder von S in V) induziert, und daß umgekehrt jedes Paar zweier Sphärenfaserungen des Umgebungsrandes eine Modifikation liefert. Ist weiter M eine «regulär» berandete Mannigfaltigkeit mit der Randmannigfaltigkeit N, und kann N in Sphären gefasert werden, so läßt sich M zu einer unberandeten Mannigfaltigkeit W abschließen; liegt ein differenzierbarer Abschluß von M zu W vor, so kann N in Sphären gefasert werden. Die §§ 5 und 6 handeln von den naheliegendsten Anwendungen auf Sphärenfaserungen: jedes differenzierbare Sphärenbündel ist äquivalent einem Normalenbündel; in § 6 betrachten wir die Antipodenabbildung in einem differenzierbaren Sphärenbündel, speziell bei Faserungen durch geraddimensionale Sphären, sowie Sphärenbündel mit unitärer und mit symplektischer Strukturgruppe. In § 7 wird die «Verfeinerung der Sphärenfaserung» beschrieben, welche zu Modifikationen mit Abbildung führt; umgekehrt kann jede differenzierbare Modifikation mit Abbildung durch Verfeinerung der Sphärenfaserung gewonnen werden. Es werden Beispiele von Modifikationen mit Abbildung gegeben ($\sigma^{n,q}$-Prozeß).

c) Die Kapitel II, III und IV haben die Cohomologietheorie der Modifikation zum Gegenstand. Dabei können zwei verschiedene Wege eingeschlagen werden: 1. es werden die Zusammenhänge mit den Sphärenfaserungen benutzt, wie sie im ersten Kapitel dargestellt wurden, und dann die Cohomologietheorie der Sphärenfaserungen angewandt (Gysinsche exakte Sequenz); 2. wir gehen direkt von der Modifikation aus, schreiben die exakten Sequenzen der Paare (V, S) und (W, A) an, und benutzen den Homöomorphismus zwischen $V - S$ und $W - A$, der uns den Isomorphismus $H^k(W, A) \cong H^k(V, S)$ liefert. Es wird meistens von der zweiten Methode Gebrauch gemacht, welche den Vorteil hat, auch in solchen Fällen angewandt werden zu können, wo zur Modifikation keine Sphärenfaserungen gehören. Gewisse Resultate der Cohomologietheorie der Sphärenfaserungen werden dabei mitgeliefert. Neben den exakten Sequenzen kommt der Poincarésche Dualitätssatz in einem «Pendelverfahren» wiederholt zur Anwendung (§§ 10, 11, 15, 18). – In den §§ 9 bis 11 wird die «lokale» Modifikation (Ersetzen eines Punktes) besprochen. Das Hauptergebnis lautet: bei einer (differenzierbaren) lokalen Modifikation hat die eingesetzte Mannigfaltigkeit S die additive und die multiplikative Cohomologiestruktur des verallgemeinerten projektiven Raumes. In § 12 werden die beiden oben angegebenen Methoden nacheinander vorgeführt, im Falle der Modifikation durch Ersetzen einer Mannigfaltigkeit. – Das dritte Kapitel enthält die Cohomologietheorie der Modifikation mit Abbildung (§§ 13 und 15) samt Anwendungen und Zusätzen (§§ 14 und 16). Die Resultate lauten im wesentlichen dahin, daß unter geeigneten Dimensionsvoraussetzungen die eingesetzte Mannigfaltigkeit S additiv dieselbe Cohomologiestruktur hat wie das topologische Produkt von A mit einem verallgemeinerten projektiven Raum. – Im vierten Kapitel kommt die komplexe Modifikation mit Abbildung zur Sprache, wobei das Hauptgewicht auf dem Spezialfall Kählerscher Mannigfaltigkeiten liegt. Die meisten Betrachtungen über die Kählersche Modifikation beruhen darauf, daß die wichtigsten Cohomologieresultate von Kapitel III (und II) sich im Sinne der Typeneinteilung der Differentialformen auf einer Kählerschen Mannigfaltigkeit verfeinern lassen. Dabei ergeben sich Sätze, die in der Theorie der birationalen Transformationen in der algebraischen Geometrie bekannt sind (Invarianz des Geschlechtes), und die auf funktionentheoretischem Wege verschärft werden können.

d) Es sei in diesem Zusammenhang auf einen Satz hingewiesen, gemäß welchem jede nicht triviale komplexe Modifikation mit Abbildung äquivalent einem $\sigma^{n,q}$-Prozeß ist (Einzigkeitssatz für komplexe Modifikation mit Abbildung). Er liefert für komplexe Modifikationen mit Abbildung einen neuen Zugang zu den grundlegenden Beziehungen (63′) bzw. ($63'_{s,t}$) im Kählerschen Fall, unter Verwendung der Spektralfolge für projektive Bündel. Ferner lassen sich die verfeinerten Cohomologiebeziehungen für komplexe Modifikationen mit Abbildung auch ohne die Voraussetzung der Kählerschen Metrik formulieren, wenn man die Dolbeaultschen Cohomologiegruppen heranzieht, dies wiederum auf Grund des zitierten Einzigkeitssatzes. In der vorliegenden Arbeit wird der Einzigkeitssatz mit den genannten Anwendungen nur angedeutet (§ 19c); es ist darüber eine ausführliche Publikation in Vorbereitung.

e) Der Begriff der Modifikation kommt in der Theorie der komplexen Mannigfaltigkeiten unter funktionentheoretischen Gesichtspunkten mehrfach vor. Es ist an die Arbeiten von Hopf [23], [24], Behnke und Stein [4], Kreyszig [26], Stoll [32], u.a. zu erinnern. In der vorliegenden Arbeit werden dagegen die *topologischen* Untersuchungsmethoden in den Vordergrund gerückt. Ein erster Ansatz hiezu, im Hinblick auf den Abschluß berandeter Mannigfaltigkeiten, befindet sich bei Hirsch [19]. – Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. B. Eckmann, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen. In vielen Diskussionen hat er mich auf die verschiedenen Fragestellungen geführt und manche wertvolle Hinweise gegeben. Auch Herrn Prof. H. Hopf möchte ich vielmals danken für die zahlreichen Anregungen und Ratschläge. – Schließlich danke ich für den Beitrag aus dem Zentenarfonds der Eidgenössischen Technischen Hochschule, der einen Teil der Druckkosten dieser Arbeit deckte.