Doctoral Thesis

Ueber die Rolle des Whiteheadschen Homotopieproduktes für die Homologie-Theorie

Author(s):
Ebersold, Johannes Michael

Publication Date:
1955

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000090231

PROM.-Nr 2305

ÜBER DIE ROLLE DES WHITEHEADSCHEN HOMOTOPIEPRODUKTES FÜR DIE HOMOLOGIE-THEORIE

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

JOHANNES MICHAEL EBERSOLD

VON ZÄZIWIL (BERN)

REFERENT: HERR PROF. DR. H. HOPF
KORREFERENT: HERR PROF. DR. B. ECKMANN

1955

P. NOORDHOFF N. V. - GRONINGEN - DJAKARTA

Über die Rolle des Whiteheadschen Homotopieproduktes für die Homologietheorie

Einleitung.

Es sind schon manche Beziehungen zwischen Homotopie und Homologie untersucht worden. Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird der Zusammenhang des von J. H. C. Whitehead in [1] [1]) eingeführten Produktes von Homotopieelementen mit der Homologietheorie untersucht. Das Hilfsmittel, mit welchem dieser Zusammenhang hergestellt wird, bildet der von Hopf in [2] und [3] eingeführte Begriff der Homotopieränder von Ketten und Zyklen.

Das Whiteheadsche Produkt ordnet einem Element der k-ten und einem Element der l-ten Homotopiegruppe ein Element der $(k + l - 1)$-ten Homotopiegruppe zu. Es wird nun die Untergruppe der $(n - 1)$-ten Homotopiegruppe betrachtet, welche durch Whiteheadsche Produkte erzeugt wird. Es zeigt sich, dass das Vorhandensein von gewissen Relationen in dieser Untergruppe die Existenz von nicht nullhomologen n-dimensionalen Zyklen nach sich zieht. Diese Zyklen gehören einer Klasse von Zyklen an, welche einerseits dadurch ausgezeichnet sind, dass ihre Homotopieränder sich durch Summen von Whiteheadschen Produkten darstellen lassen, andrerseits dadurch, dass sie Bilder von topologischen Summen von Sphärenprodukten sind. Wird von einem dieser Zyklen gezeigt, dass er nicht nullhomolog ist, so geschieht dies dadurch, dass man die skalaren Produkte dieses Zyklus mit gewissen Cupprodukten und sogenannten Pontrjaginschen Quadraten bildet und feststellt, dass nicht alle dieser skalaren Produkte gleich 0 sind.

Im zweiten Kapitel werden die Methoden des ersten Kapitels auf die Untersuchung der dritten Homotopiegruppe in einfachzusammenhängenden Komplexen angewendet. Insbesondere wird

---

[1]) Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

die Struktur derselben aus der Homologiestruktur des Komplexes „im weiteren Sinne" (dies wird in Kap. II, §5, 4. präzisiert) bestimmt. Die sich in diesem Kapitel ergebenden Resultate sind zwar im wesentlichen schon in Arbeiten von Whitehead [4], Pontrjagin [5] und zum Teil auch von Hirsch [6] enthalten; jedoch sind die Methoden und die Darstellung in dieser Arbeit ganz anders.

Im dritten Kapitel wird eine Verallgemeinerung der Methode des ersten Kapitels behandelt. Ein Spezialfall des dort bewiesenen Satzes möge hier angeführt werden: Ein Komplex besitze in einer Dimension n (n gerade, > 0) einen sphärischen Zyklus, der nicht divisionshomolog 0 ist, und der Komplex sei in den Dimensionen $2n-1, 3n-1, \ldots, rn-1$ asphärisch. Dann sind seine Homologiegruppen in den Dimensionen $2n, 3n, \ldots, rn$ nicht trivial. Durch diesen Satz wird der Zusammenhang mit der Theorie der Eilenberg-MacLaneschen Gruppen hergestellt.

Kapitel I.

Gegeben sei ein endlicher simplizialer zusammenhängender Komplex $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{K}^n$ sei das n-dimensionale Gerüst von $\mathfrak{K}$, $\Pi^n(\mathfrak{K})$ die n-te Homotopiegruppe von $\mathfrak{K}$, $n = 1, 2, \ldots$; für $\Pi^n(\mathfrak{K})$ schreiben wir oft auch kurz Π^n. Die Homotopiegruppen sollen alle denselben Grundpunkt $p \in \mathfrak{K}$ besitzen, wobei p ein Eckpunkt von $\mathfrak{K}$ sei.

§ 1. Whiteheadsche Produkte.

1. Wir definieren zuerst das Whiteheadsche Produkt von $\alpha_i \in \Pi^{n_i}$, $i = 1, 2$. Unter E^k verstehen wir den fest orientierten k-dimensionalen Einheitswürfel. Ist $\alpha \in \Pi^n$, so sei $[\alpha]$ eine stetige Sphäre, welche α repräsentiert. Die Elemente $\alpha_i \in \Pi^{n_i}$, $i = 1, 2$ seien repräsentiert durch Abbildungen f_i (simpliziale) von Einheitswürfeln:

$$f_i(E^{n_i}) = [\alpha_i], \text{ wobei } f_i(\dot{E}^{n_i}) = p.$$

Produkte von orientierten Zyklen seien im folgenden so orientiert, wie es in [7], S. 303 erklärt ist. Auf

$$\dot{E}^{n_1+n_2} = (E^{n_1} \times E^{n_2})^{\cdot} = \dot{E}^{n_1} \times E^{n_2} + (-1)^{n_1} E^{n_1} \times \dot{E}^{n_2}$$

definieren wir eine Abbildung f:

$$f(\dot{E}^{n_1} \times E^{n_2}) = f(0 \times E^{n_2}) = f_2(E^{n_2}) = [\alpha_2]$$
$$f(E^{n_1} \times \dot{E}^{n_2}) = f(E^{n_1} \times 0) = f_1(E^{n_1}) = [\alpha_1],$$

wobei 0 der Nullpunkt von E^{n_1} bzw. E^{n_2} ist. Das so definierte Bild