

Prom. Nr. 2881

**Die Berechnung der Spannungen in Rotoren,
die aus Scheiben
und Zylinderschalen aufgebaut sind**

Von der

**EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH**

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der
technischen Wissenschaften
genehmigte

PROMOTIONSARBEIT

Vorgelegt von

Albert Künzli

dipl. Masch.-Ing. ETH
von Gossau (ZH)

Referent: Herr Prof. Dr. W. Traupel
Korreferent: Herr Prof. Dr. H. Ziegler

VORWORT

Die vorliegende Arbeit entstand auf Anregung von Herrn Prof. Dr. W. Traupel.

Ich möchte es daher nicht unterlassen, Herrn Prof. Dr. W. Traupel für sein Interesse und seine wertvollen Ratschläge zum Gelingen dieser Arbeit, herzlich zu danken.

Winterthur, im Dezember 1959

A. Künzli

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitung	3
I. Der Spannungszustand rotationssymmetrischer Scheiben	5
§ 1. Die Gleichgewichtsbedingungen	6
§ 2. Die Beziehungen zwischen den Dehnungen und den Spannungen	8
§ 3. Die Differentialgleichungen für den Neigungswinkel und die Verschiebung	12
II. Die Scheibe konstanter Dicke ohne Bohrung	17
§ 1. Der Membranspannungszustand	17
§ 2. Der Biegespannungszustand	20
III. Die Scheibe mit dem Profil einer Scheibe "gleicher Festigkeit"	25
§ 1. Der Membranspannungszustand	25
§ 2. Der Biegespannungszustand	32
IV. Der Spannungszustand rotierender Zylinderschalen konstanter Dicke.	39
V. Die Spannungsberechnung von Rotoren, die aus Scheiben und Zylinderschalen aufgebaut sind.	52
§ 1. Herleitung der Grundgleichungen	52
§ 2. Das praktische Vorgehen bei der Spannungsberechnung	57
§ 3. Die numerische Durchführung der Rechnung an Hand einiger Beispiele	72
3.1 Gasturbinen-Rotor mit Scheiben konstanter Dicke	72
3.2 " " " " mit dem Profil einer Scheibe "gleicher Festigkeit"	78
3.3 Dampfturbinen-Rotor mit Scheiben konstanter Dicke	80
Anhang	
1. Hilfsfunktionen für Scheiben mit dem Profil einer Scheibe "gleicher Festigkeit"	82
2. Hilfsfunktionen der Zylinderschale	105
Literaturhinweise	

EINLEITUNG

Aus Scheiben und Zylinderschalen zusammengesetzte Rotoren, nachfolgend kurz mit Rotoren bezeichnet, haben seit langem beim Bau von Gas- und Dampfturbinen eine bemerkenswerte Verbreitung gefunden. Die Spannungen solcher Rotoren werden einerseits durch die Fliehkraft und den Schaufelzug und andererseits durch Temperaturunterschiede hervorgerufen. Im allgemeinen treten sowohl Membran- als auch Biegespannungen auf. Die Berechnung der Spannungen in Scheiben und Zylinderschalen findet man in verschiedenen Lehrbüchern (s. Literaturhinweise am Ende dieser Arbeit). Den Einflusszahlen, welche sich bei der Spannungsberechnung von Rotoren als sehr praktisch erweisen, wird in diesen jedoch nur wenig Bedeutung beigemessen. Darüber hinaus sind die Ausführungen meistens dimensionsbehaftet, was sich beim Ausarbeiten von Kurvenblättern unangenehm bemerkbar macht.

Die vorliegende Arbeit hat deshalb einleitend zum Ziel, die Spannungsberechnung in Scheiben und Zylinderschalen auf eine einheitliche dimensionslose Basis zu stellen, um das Verständnis der teilweise neu definierten Einflusszahlen zu erleichtern.

Die Kapitel I bis III befassen sich mit der Spannungsberechnung rotationssymmetrischer Scheiben. Dabei werden ausgehend von den an sich bekannten Grundgleichungen die später benötigten Zusammenhänge dargelegt und die entsprechenden Kurvenblätter ausgearbeitet.

Das Kapitel IV lehnt sich eng an [5] [7] ¹⁾ an, sodass auf die Ableitung der eingangs erwähnten Ausdrücke verzichtet wird. Die Einflusszahlen werden hingegen ausführlich besprochen.

In Kapitel V wird die Aufgabe der Spannungsberechnung von Rotoren, die aus Scheiben und Zylinderschalen aufgebaut sind, in Angriff genommen. Die in den vorhergehenden Kapiteln eingeführten Einflusszahlen erweisen sich dabei sehr nützlich und ermöglichen eine klare und übersichtliche Darstellung der Zusammenhänge. In § 2 werden sämtliche Grössen, die zur Spannungsberechnung von Rotoren benötigt werden, zusammengefasst, um die Bestimmung der Spannungen in Rotoren zu ermöglichen, ohne die vorhergehenden Ausführungen eingehend durcharbeiten zu müssen.

Die Tatsache, dass bei grösseren Scheibenzahlen Gleichungssysteme mit vielen Unbekannten auftreten, lässt sich nicht umgehen. Eine Durchführung der Rechnung ohne Mithilfe moderner Rechengeräte ist bei drei Scheiben mit tragbarem Aufwand möglich. Da bei grösseren Scheibenzahlen insbesondere das Auflösen der Gleichungssysteme viel Zeit in Anspruch nimmt, erscheint eine Zuhilfenahme der in modernen Rechenzentren vorhandenen Rechenprogramme zu deren Auflösung zweckmässig. Bei wiederholten Berechnungen dürfte sich die Aufstellung eines vollständigen Rechenprogrammes, mit dem durch Eingabe der geometrischen und physikalischen Grössen die gesamte Spannungsberechnung der elektronischen Rechenmaschine überlassen werden könnte, durchaus lohnen, umso mehr als die Theorie so allgemein ist, dass sie auch auf andere aus Scheiben und Zylinderschalen aufgebaute Maschinenteile anwendbar ist.

1) Die Zahlen in [] beziehen sich auf die Literaturhinweise am Ende der Arbeit.

Die in der Schalentheorie üblichen Voraussetzungen werden auch hier beibehalten. Darüber hinaus wird ferner die Unabhängigkeit der elastischen und thermischen Materialkonstanten von der Temperatur und die Rotationssymmetrie, d.h. die Konstanz aller Grössen längs des Umfangs vorausgesetzt.

Die Ausführungen sind bezüglich des Temperaturverlaufes so allgemein gehalten, dass die in der Praxis vorkommenden Temperaturen leicht berücksichtigt werden können. Die im Anhang zusammengefassten Kurvenblätter sind jedoch nur für quadratische Temperaturverteilungen ausgearbeitet.

I. Der Spannungszustand rotationssymmetrischer Scheiben

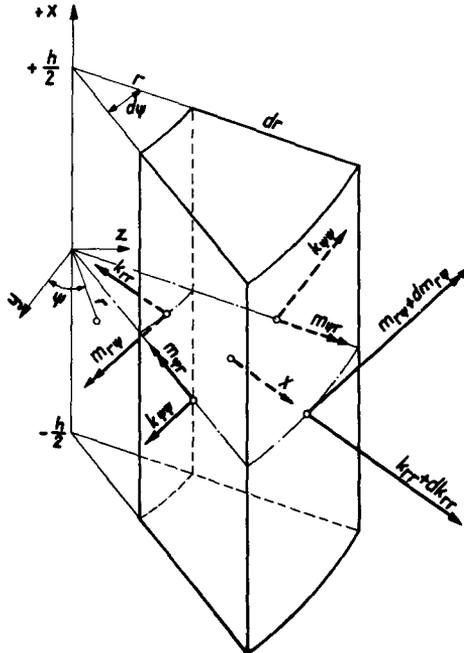
Körper, deren Abmessung normal zu einer Fläche F klein ist gegenüber denjenigen in der Fläche F , werden in der Literatur als Schalen bezeichnet, falls die Begrenzungsflächen, auf den Normalen zu F gemessen, von F den gleichen Abstand haben. Unter der Dicke der Schale, die wir im folgenden stets mit h bezeichnen wollen, versteht man den senkrecht zur Mittelfläche gemessenen Abstand der Begrenzungsflächen. Ueber die Dicke wird im allgemeinen vorausgesetzt, dass sie sich längs der Mittelfläche nicht sprunghaft ändert und im besonderen wollen wir hier voraussetzen, dass Rotationssymmetrie bestehe.

Wir bezeichnen ferner Größen (Spannungen, Reaktionen, Temperaturen usw.), welche unabhängig vom Winkel ψ (Abb. 1) sind, als rotationssymmetrisch.

Die in der Schalentheorie üblichen Voraussetzungen sollen kurz erwähnt werden. Die Bedeutung und Zulässigkeit derselben sind in [1] eingehend besprochen :

1. Die Normalspannungen senkrecht zur Mittelfläche können vernachlässigt werden.
2. Alle Punkte, die vor der Verformung auf einer Normalen zur Mittelfläche liegen, befinden sich auch nach der Verformung auf einer Geraden.
3. Diese Gerade ist ebenfalls Normale zur verformten Mittelfläche.
4. Die Verschiebungen sind klein im Vergleich zur Dicke.

Abb.1 Belastung eines Scheibenelementes der Dicke h mit den Schnittgrößen.



Ist die Mittelfläche im undeformierten Zustand eben, so spricht man von Scheiben bzw. Platten je nachdem, ob die Belastung in der Mittelfläche bzw. senkrecht dazu wirkt. Die erste Belastungsart führt zu Membranspannungen, welche über der Dicke angenähert konstant sind, während die letzte zu Biegespannungen führt, deren Betrag in erster Näherung linear ändert. Im Dampf- und Gasturbinenbau überwiegt im allgemeinen die erste Belastungsart, sodass dort durchwegs von Scheiben die Rede ist. Obschon beim hier zu behandelnden Problem beide Belastungsarten auftreten, wollen wir im folgenden trotzdem von Scheiben sprechen.

§1. Die Gleichgewichtsbedingungen

Zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen wählen wir ein Zylinderkoordinatensystem r, ψ, x . Am Scheibenelement der Dicke h (Abb. 1) soll nur die senkrecht zur x -Achse wirkende Fliehkraft pro Volumeneinheit

$$\chi = \rho r \omega^2 \quad (11)$$

angreifen, wo ρ die Dichte des Scheibenmaterials und ω die Winkelgeschwindigkeit bedeuten. Da die Scheibe voraussetzungsgemäss rotationssymmetrisch ist, erzeugt diese einen ebenfalls rotationssymmetrischen Membranspannungszustand mit den Komponenten σ_{r0} als radiale und σ_{t0} als tangentielle Spannung. Die am Scheibenaussenrand angreifenden rotationssymmetrischen Randmomente erzeugen Biegespannungen, die man durch einen radialen bzw. tangentialen Anteil σ_{rb} bzw. σ_{tb} beschreiben kann. Da wir von weiteren Belastungen absehen und die Temperatur ebenfalls rotationssymmetrisch verteilt sein soll, sind dies die einzigen von Null verschiedenen Spannungskomponenten. Die Gesamtspannungen setzen sich demnach additiv aus den Membran- und den Biegespannungen zusammen.

Die auf die Einheit der radialen Erstreckung bzw. des Umfanges bezogenen Schnittkräfte k und -momente m lassen sich somit wie folgt definieren :

$$m_{r\psi} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r x dx - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{rb} x dx \quad (12)$$

$$m_{\psi r} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_t x dx = - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{tb} x dx \quad (13)$$

$$k_{rr} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{r0} dx \quad (14)$$

$$k_{\psi\psi} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{t0} dx \quad (15)$$

Die Indizes der Schnittkräfte und -momente sind dabei so gewählt, dass sich der erste auf die Schnittfläche und der zweite auf die Richtung bezieht.

Die Gleichgewichtsbedingungen des Scheibenelementes sind reine Beziehungen zwischen den auftretenden Kräften und Momenten und können unabhängig von den durch die Temperatur bewirkten Verzerrungen aufgestellt werden. Man erhält für die Momente um die Achse senkrecht zur r - und x -Richtung sowie für die Kräfte in r -Richtung:

$$(m_{r\psi} + dm_{r\psi})(r+dr) d\psi - m_{r\psi} r d\psi + m_{\psi r} dr d\psi = 0 \quad (16)$$

$$(k_{rr} + dk_{rr})(r+dr) d\psi - k_{rr} r d\psi - k_{\psi\psi} dr d\psi + \chi r d\psi dr h = 0 \quad (17)$$

Vernachlässigt man die unendlich kleinen Größen höherer Ordnung und dividiert durch $r dr d\psi$, so erhält man

$$\frac{dm_{r\psi}}{dr} + \frac{m_{r\psi} + m_{\psi r}}{r} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{dk_{rr}}{dr} + \frac{k_{rr} - k_{\psi\psi}}{r} + \chi h = 0 \quad (19)$$

Die erste Gleichung beschreibt die Biegung der Scheibe, während die zweite den Membranzustand bestimmt. Die Tatsache, dass diese beiden Gleichungen unabhängig voneinander sind, ist eine Folge der Voraussetzung 4, welche zudem die Anwendung des Superpositionsgesetzes erlaubt. Dies ermöglicht die voneinander unabhängige Berechnung der Membran- und Biegespannungen und deren Addition zur Gesamtspannung.

§ 2. Die Beziehungen zwischen den Dehnungen und den Spannungen

Zwischen Spannungen und Dehnungen wird bei unveränderlicher Temperatur eine lineare Beziehung vorausgesetzt (Hooke'sches Gesetz).

Bei gleichzeitiger Erwärmung des Körpers setzt sich die gesamte Deformation eines Volumelementes aus zwei Anteilen zusammen:

1. Aus einer Verformung, die durch die Temperaturerhöhung bei spannungsfreien Oberflächen des Elementes hervorgerufen wird und
2. aus einer solchen, die durch die an der Oberfläche des Elementes angreifenden Kräfte entsteht.

Die Verteilung der Temperatur ϑ der Scheibenmittelfläche sowie des Temperaturgefälles $\Delta \vartheta$ zwischen der oberen und unteren Begrenzungsfläche der Scheibe sollen rotationssymmetrisch sein, können aber längs des Radius beliebig, jedoch stetig variieren. In [2] wird gezeigt, wie eine rotationssymmetrische Temperaturverteilung in einem beliebigen Punkte einer Schale ersetzt werden kann durch eine mittlere Temperatur ϑ (111) und einen linearen Temperaturverlauf $\Delta \vartheta$ (112) längs der Schalendicke, wobei die Abweichung $\delta T(r, x)$ (Abb. 2) vom wirklichen Temperaturverlauf $T(r, x)$ zur Krümmung der Schale keinen Beitrag leistet, da die dazugehörigen Temperaturdehnungen durch entsprechende zusätzliche Wärmespannungen unterdrückt werden.

Die Temperatur der Scheibe lässt sich somit darstellen durch

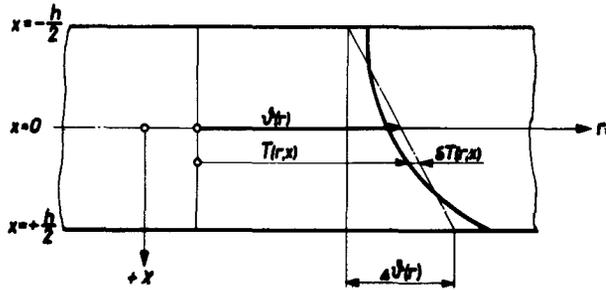
$$T(r, x) = \vartheta(r) + x \cdot \frac{\Delta \vartheta(r)}{h} \quad (110)$$

wobei h die Dicke der Scheibe bedeutet. (Abb. 2). Die in diesen Ansatz eingehenden Grössen, nämlich die Temperatur ϑ der Mittelfläche bzw. das Temperaturgefälle $\Delta \vartheta$ lassen sich bestimmen aus den Bedingungen, dass die Dehnung sowie die Wölbung der Schale bei allgemeinem rotationssymmetrischem Temperaturverlauf mit den entsprechenden Werten beim Temperaturverlauf nach Gleichung (110) übereinstimmen müssen. Bei bekannter Verteilung der Temperatur erhält man somit

$$\vartheta(r) = \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} T(r, x) dx \quad (111)$$

$$\Delta \vartheta(r) = \frac{12}{h^2} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} T(r, x) \cdot x dx \quad (112)$$

Abb.2 Verteilung der Temperatur längs der Schalendicke.



Die vorhin erwähnten zusätzlichen Wärmespannungen lassen sich ferner berechnen zu

$$\sigma_{rx} = \sigma_{tx} = \pm \frac{m E \alpha}{m-1} \cdot \delta T(r,x) \quad (113)$$

Diese sind im allgemeinen klein gegen die durch die Temperaturverteilung (110) erzeugten Wärmespannungen, weshalb sie nicht weiter untersucht werden.

Zur Beschreibung der Formänderung der Scheibe führen wir folgende Bezeichnungen ein:

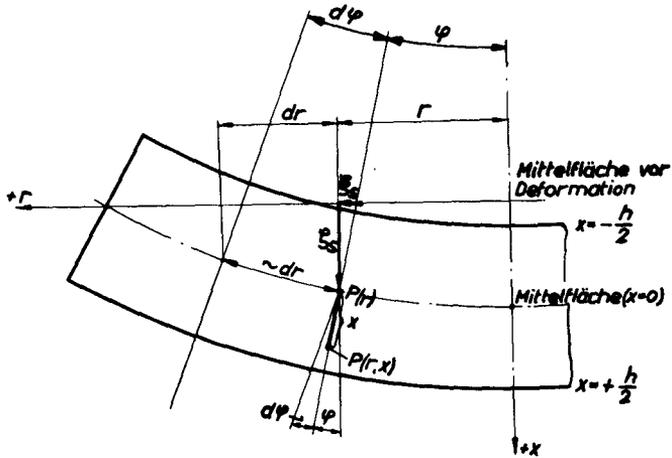
(Abb.3)

- ξ_s = Verschiebung eines Punktes der Mittelfläche in radialer Richtung.
- ζ_s = Verschiebung senkrecht zur Mittelfläche.
- φ = Neigungswinkel, den die Scheibennormale mit der x - Achse bildet.
- ϵ_r = Dehnung in radialer Richtung.
- ϵ_t = Dehnung in tangentialer Richtung
- $\epsilon_{r0}, \epsilon_{t0}$ = Dehnung der Mittelfläche ($x = 0$)
- $\epsilon_{rx}, \epsilon_{tx}$ = Zusätzliche Dehnungen im Abstand x von der Mittelfläche
- α = Lineare Wärmedehnzahl

Die Beziehungen zwischen den Dehnungen und den Verschiebungen lassen sich damit wie folgt anschreiben:

$$\epsilon_{r0} = \frac{d \xi_s}{dr} \quad (114)$$

Abb.3 Koordinatensystem der Scheibe mit positivem Richtungssinn der Verschiebungen.



$$\epsilon_{t0} = \frac{\xi_s}{r} \quad (115)$$

$$\epsilon_{rx} = x \cdot \frac{d\varphi}{dr} \quad (116)$$

$$\epsilon_{tx} = x \cdot \frac{\varphi}{r} \quad (117)$$

$$\varphi = -\frac{d\xi_s}{dr} \quad (118)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r0} + \varepsilon_{rx} = \frac{d\xi_s}{dr} + \chi \cdot \frac{d\varphi}{dr} \quad (119)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t0} + \varepsilon_{tx} = \frac{\xi_s}{r} + \chi \cdot \frac{\varphi}{r} \quad (120)$$

Der Zusammenhang zwischen den Hauptspannungen und den Hauptdehnungen ist gegeben durch

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{1}{m} \cdot \sigma_t \right) + \alpha \left(\nu + \frac{\chi}{h} \cdot \Delta \nu \right) \quad (121)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \cdot \sigma_r \right) + \alpha \left(\nu + \frac{\chi}{h} \cdot \Delta \nu \right) \quad (122)$$

wo m die sogenannte Querdehnzahl bedeutet.

Durch Auflösen von (121) und (122) nach σ_r und σ_t und Einsetzen von (119) und (120) erhält man für die Spannungen:

$$\sigma_r = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \left\{ \chi \left[\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi}{r} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \alpha \frac{\Delta \nu}{h} \right] + \frac{d\xi_s}{dr} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\xi_s}{r} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \alpha \nu \right\} \quad (123)$$

$$\sigma_t = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \left\{ \chi \left[\frac{1}{m} \cdot \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \alpha \frac{\Delta \nu}{h} \right] + \frac{1}{m} \cdot \frac{d\xi_s}{dr} + \frac{\xi_s}{r} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \alpha \nu \right\} \quad (124)$$

und für die eingangs definierten Schnittkräfte und -momente durch Integration

$$m_{r\nu} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r \cdot x \, dx = \frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \left[\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi}{r} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \alpha \frac{\Delta \nu}{h} \right] \quad (125)$$

$$m_{\varphi r} = - \int_{-h/2}^{+h/2} G_t x dx = - \frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)} \left[\frac{1}{m} \cdot \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \alpha \cdot \frac{\Delta v^3}{h} \right] \quad (126)$$

$$k_{rr} = \int_{-h/2}^{+h/2} G_r dx = \frac{m^2 E h}{m^2-1} \left[\frac{d\xi_s}{dr} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\xi_s}{r} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \alpha v \right] \quad (127)$$

$$k_{\varphi\varphi} = \int_{-h/2}^{+h/2} G_t dx = \frac{m^2 E h}{m^2-1} \left[\frac{1}{m} \cdot \frac{d\xi_s}{dr} + \frac{\xi_s}{r} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \alpha v \right] \quad (128)$$

Betrachtet man diese Gleichungen, so erkennt man, dass die Momente durch den Verlauf des Neigungswinkels φ längs r und das Temperaturgefälle senkrecht zur Scheibe bestimmt sind. Die Kräfte hingegen hängen von den Verschiebungen der Punkte der Mittelfläche und von der Temperatur in derselben ab. Dementsprechend lassen sich die Gesamtspannungen in einen Biegespannungs- und Membranspannungsanteil zerlegen.

Für die weiteren Ausführungen nehmen wir den Elastizitätsmodul E , die lineare Wärmedehnzahl α und die Querdehnzahl m als konstant an. Da der Elastizitätsmodul mit steigender Temperatur abnimmt, die Wärmedehnzahl jedoch zunimmt und die Wärmespannungen proportional dem Produkt beider Grössen sind, kompensieren sich diese Einflüsse teilweise, wodurch sich die obigen Annahmen rechtfertigen. Die Querdehnzahl soll bei den späteren numerischen Auswertungen zudem als $10/3$ angenommen werden. Dieser Wert dürfte für die üblichen Werkstoffe auch bei höheren Temperaturen genügend genau sein, da er nur wenig temperaturabhängig ist. Die Membranspannungen sind in [3] sowohl mit variabler als auch mit konstanter Querdehnzahl berechnet worden. Aus dieser Arbeit geht hervor, dass sie nur geringen Abweichungen unterworfen sind.

§ 3. Die Differentialgleichungen für den Neigungswinkel φ und die Verschiebung ξ_s

Die Gleichgewichtsbedingungen führen mit den Beziehungen zwischen den Dehnungen und den Spannungen und den kinematischen Bedingungen (I 14) bis (I 17) zu Differentialgleichungen für den Neigungswinkel φ , den die Scheibennormale mit der x -Achse bildet, und für die Verschiebung ξ_s eines Punktes der Mittelfläche.

Durch Differenzieren der Gleichung (125) ergibt sich

$$\frac{dm_{r\varphi}}{dr} = \frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)} \left\{ \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left(\frac{3}{h} \cdot \frac{dh}{dr} + \frac{1}{mr} \right) \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{mr} \left(\frac{3}{h} \cdot \frac{dh}{dr} - \frac{1}{r} \right) \varphi \right. \\ \left. - \alpha \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{1}{h} \left(\frac{2}{h} \cdot \frac{dh}{dr} \Delta v + \frac{d(\Delta v)}{dr} \right) \right\} \quad (129)$$

Führt man diesen Ausdruck mit (125) und (126) in (18) ein, so erhält man als Differentialgleichung für den Neigungswinkel

$$r^2 \cdot \frac{d^2\varphi}{dr^2} + r \left(1 + \frac{3r}{h} \cdot \frac{dh}{dr} \right) \frac{d\varphi}{dr} - \left(1 - \frac{3r}{mh} \cdot \frac{dh}{dr} \right) \varphi - \frac{r^2}{h} \alpha \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left[\frac{2}{h} \cdot \frac{dh}{dr} \Delta v + \frac{d(\Delta v)}{dr} \right] \quad (130)$$

In analoger Weise wird durch Differenzieren der Gleichung (127)

$$\frac{dk_{rr}}{dr} = \frac{m^2 E h}{m^2-1} \left(\frac{d^2\xi_s}{dr^2} + \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dr} + \frac{1}{mr} \right) \cdot \frac{d\xi_s}{dr} + \frac{1}{mr} \cdot \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dr} - \frac{1}{r} \right) \cdot \xi_s \right. \\ \left. - \alpha \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dr} v + \frac{dv}{dr} \right) \right) \quad (131)$$

und durch Einsetzen dieses Ausdruckes mit (11), (127) und (128) in (19) ergibt sich als Differentialgleichung für die Verschiebung

$$r^2 \cdot \frac{d^2\xi_s}{dr^2} + r \left(1 + \frac{r}{h} \cdot \frac{dh}{dr} \right) \frac{d\xi_s}{dr} - \left(1 - \frac{r}{mh} \cdot \frac{dh}{dr} \right) \xi_s = r^2 \alpha \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dr} v + \frac{dv}{dr} \right) \\ - \frac{m^2-1}{m^2 E} \cdot g \omega^2 r^3 \quad (132)$$

Die Differentialgleichungen (130) und (132) sollen nun in dimensionsloser Form angeschrieben werden. Zu diesem Ende führen wir folgende Bezeichnungen ein :

- r_a = Aussenradius der Scheibe ($\mu = 1$)
- h_0 = Dicke der Scheibe im Zentrum ($\mu = 0$)
- $u = r_a \omega$ = Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe
- v_a = Temperatur der Mittelfläche am Aussenrand
- Δv_a = Temperaturgefälle am Aussenrand

$$\mu = \frac{r}{r_a} \quad (133)$$

$$\bar{s}_s = \frac{s_s}{r_a} \quad (134)$$

$$\bar{h} = \frac{h}{h_0} \quad (135)$$

$$\bar{v} = \frac{v}{v_a} \quad (136)$$

$$\Delta \bar{v} = \frac{\Delta v}{\Delta v_a} \quad (137)$$

$$\delta = v_a \alpha \left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (138)$$

$$\lambda_s = \Delta v_a \cdot \frac{r_a}{h_0} \cdot \alpha \left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (139)$$

$$\alpha = \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{g u^2}{E} \quad (140)$$

Beachtet man ferner noch die Identitäten

$$\frac{d}{dr} \equiv \frac{1}{r_a} \cdot \frac{d}{d\mu} \quad (141)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \equiv \frac{1}{r_a^2} \cdot \frac{d^2}{d\mu^2} \quad (142)$$

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dr} \equiv \frac{1}{r_a \bar{h}} \cdot \frac{d\bar{h}}{d\mu} \quad (143)$$

so lassen sich die Gleichungen (130) und (132) in folgender Form anschreiben

$$\mu^2 \varphi'' + \mu \left(1 + 3\mu \cdot \frac{\bar{h}'}{\bar{h}}\right) \varphi' - \left(1 - \frac{3\mu}{m} \cdot \frac{\bar{h}'}{\bar{h}}\right) \varphi = \mu^2 \frac{\lambda_s}{h} \left(2 \cdot \frac{\bar{h}'}{\bar{h}} \cdot \Delta \bar{v} + \Delta \bar{v}'\right) \quad (144)$$

$$\mu^2 \bar{\varphi}'' + \mu \left(1 + \mu \cdot \frac{\bar{h}'}{\bar{h}}\right) \bar{\varphi}' - \left(1 - \frac{\mu}{m} \cdot \frac{\bar{h}'}{\bar{h}}\right) \bar{\varphi} = \mu^2 \delta \left(\frac{\bar{h}'}{\bar{h}} \cdot \bar{v} + \bar{v}'\right) - \mu^3 \alpha \quad (145)$$

wobei Ableitungen nach μ mit Strichen bezeichnet sind.

Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gehen die Ausdrücke (123), (124) und (125)

über in

$$G_{rb} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{x}{r_a} \left[\varphi' + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi}{\mu} - \lambda_s \cdot \frac{\Delta \bar{v}}{\bar{h}} \right] \quad (146)$$

$$G_{tb} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{x}{r_a} \left[\frac{1}{m} \cdot \varphi' + \frac{\varphi}{\mu} - \lambda_s \cdot \frac{\Delta \bar{v}}{\bar{h}} \right] \quad (147)$$

$$G_{r0} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \left[\bar{\xi}'_s + \frac{1}{m} \cdot \frac{\bar{\xi}_s}{\mu} - \delta \bar{\psi} \right] \quad (148)$$

$$G_{t0} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \left[\frac{1}{m} \cdot \bar{\xi}'_s + \frac{\bar{\xi}_s}{\mu} - \delta \bar{\psi} \right] \quad (149)$$

$$m_{r\psi} = \frac{m^2 E}{12(m^2 - 1)} \cdot \frac{h^3}{r_0} \left[\varphi' + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi}{\mu} - \lambda_s \cdot \frac{\Delta \bar{\psi}}{h} \right] \quad (150)$$

II. Die Scheibe konstanter Dicke ohne Bohrung

§ 1. Der Membranspannungszustand

Die Differentialgleichung (145) der Verschiebung $\bar{\xi}_S$ eines Punktes der Mittelfläche geht für diesen Spezialfall über in

$$\mu^2 \bar{\xi}_S'' + \mu \bar{\xi}_S' - \bar{\xi}_S = \mu^2 \delta \bar{v}' - \mu^3 \alpha \quad (11.1)$$

oder

$$\bar{\xi}_S'' + \frac{1}{\mu} \bar{\xi}_S' - \frac{1}{\mu^2} \bar{\xi}_S = \left[\frac{1}{\mu} \cdot (\mu \bar{\xi}_S)' \right]' = \delta \bar{v}' - \alpha \mu \quad (11.2)$$

woraus durch zweimalige Integration

$$\bar{\xi}_S = C_1 \mu + \frac{C_2}{\mu} + \frac{\delta}{\mu} \cdot \int_0^\mu \bar{v} \cdot \bar{\mu} d\bar{\mu} - \frac{\alpha}{8} \cdot \mu^3 \quad (11.3)$$

entsteht.

Da $\bar{\xi}_S$ für $\mu = 0$ den Wert Null annehmen muss, wird $C_2 = 0$ und man erhält

$$\bar{\xi}_S = C_1 \cdot \mu + \frac{\delta}{\mu} \cdot \int_0^\mu \bar{v} \cdot \bar{\mu} d\bar{\mu} - \frac{\alpha}{8} \cdot \mu^3 \quad (11.4)$$

Die Konstante C_1 bestimmt sich durch Einsetzen in (148) aus der Randbedingung am Außenrand $\sigma_{r0} |_{\mu=1} = \sigma_a$, wo σ_a die am Scheibenumfang angreifende gleichmässig verteilte radiale Membranspannung bedeutet.

Man erhält

$$C_1 = \frac{\sigma_a}{E} \cdot \frac{m-1}{m} + \frac{m-1}{m+1} \cdot \delta \cdot \int_0^1 \bar{v} \cdot \bar{\mu} \cdot d\bar{\mu} + \frac{3m+1}{8(m+1)} \cdot \alpha \quad (11.5)$$

und der Ausdruck für die Verschiebung geht über in

$$\bar{\xi}_S = \left[\frac{m-1}{m} \cdot \frac{\sigma_a}{E} + \frac{m-1}{m+1} \cdot \delta \cdot \int_0^1 \bar{v} \cdot \bar{\mu} \cdot d\bar{\mu} + \frac{3m+1}{8(m+1)} \cdot \alpha \right] \mu + \frac{\delta}{\mu} \cdot \int_0^\mu \bar{v} \cdot \bar{\mu} \cdot d\bar{\mu} - \frac{\alpha}{8} \cdot \mu^3 \quad (11.6)$$

Wir bezeichnen nun die Verschiebung $\bar{\xi}_s$ am Aussenrand ($\mu = 1$) der rotierenden Scheibe unter Einwirkung der Wärmedehnung und einer auf die Längeneinheit des Umfanges bezogene Einheitskraft $K = \sigma_a \cdot h = 1$ als Einflusszahl, welche nach (II 6) die Gestalt

$$\bar{\xi}_s \Big|_{\mu=1} = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{Eh} + \frac{m-1}{4m} \cdot \frac{g \cdot u^2}{E} + \frac{m}{m+1} \cdot 2\delta \int_0^1 \sqrt{\mu} \cdot d\mu \quad (II 7)$$

annimmt.

Man erkennt, dass sich diese Einflusszahl aus drei Anteilen zusammensetzt, welche die Wirkung der Radialkraft am Scheibenumfang, den Temperatur- und Fliehkrafteinfluss getrennt berücksichtigen und sich wie folgt anschreiben lassen:

$$\bar{\xi}_{sk} = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{Eh} \quad (II 8)$$

$$\bar{\xi}_u = \frac{m-1}{4m} \cdot \frac{g \cdot u^2}{E} \quad (II 9)$$

$$\bar{\xi}_v = \frac{m}{m+1} \cdot 2\delta \int_0^1 \sqrt{\mu} \cdot d\mu \quad (II 10)$$

Im Kapitel V dieser Arbeit werden die beiden letzten Einflusszahlen durch die Abkürzung

$$\bar{\xi}_{uv} = \bar{\xi}_u + \bar{\xi}_v \quad (II 11)$$

erfasst.

Bei gegebener Umfangsgeschwindigkeit und Temperaturverteilung bleibt in (II 6) als einzige Unbekannte noch die am Scheibenumfang angreifende Radialkraft K resp. die durch diese erzeugte radiale Membranspannung σ_a übrig, welche aus der Randbedingung zu bestimmen ist.

Die Membranspannungen gehen durch Einsetzen des Ausdrucks (II 6) in (I 48) und (I 49) über in

$$\sigma_{ro} = \sigma_a + \frac{3m+1}{8m} \cdot g \cdot u^2 (1 - \mu^2) + \sigma_{roT} \quad (II 12)$$

$$\sigma_{to} = \sigma_a + \frac{3m+1}{8m} \cdot g \cdot u^2 \left(1 - \frac{m+3}{3m+1} \cdot \mu^2\right) + \sigma_{toT} \quad (II 13)$$

wo

$$\sigma_{rot} = \alpha \cdot E \cdot \bar{\nu}_a \left[\int_0^1 \bar{\nu} \cdot \bar{\mu} \cdot d\bar{\mu} - \frac{1}{\mu^2} \int_0^{\mu} \bar{\nu} \cdot \bar{\mu} \cdot d\bar{\mu} \right] \quad (II 14)$$

$$\sigma_{tot} = \alpha \cdot E \cdot \bar{\nu}_a \left[\int_0^1 \bar{\nu} \cdot \bar{\mu} \cdot d\bar{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \int_0^{\mu} \bar{\nu} \cdot \bar{\mu} \cdot d\bar{\mu} - \bar{\nu} \right] \quad (II 15)$$

die durch die Temperatur allein erzeugten Spannungen sind.

Es stellt sich nun die Frage, welches der einfachste analytische Ansatz für die Temperaturverteilung ist, der die in der Praxis vorkommenden Verteilungen genügend genau approximiert. Es ist bekannt, dass diese aus Symmetriegründen für $\mu = 0$ eine zur x-Achse normale Tangente aufweisen muss. Diese Bedingung wird, abgesehen von einer Konstanten, durch ein gerades Polynom zweiten Grades erfüllt, sodass wir als Temperaturverteilung der Mittelfläche den Ansatz

$$\bar{\nu} = \bar{\nu}_0 + (1 - \bar{\nu}_0) \mu^2 \quad (II 16)$$

wählen.

Damit erhält man

$$\int_0^1 \bar{\nu} \bar{\mu} \cdot d\bar{\mu} = \frac{1 + \bar{\nu}_0}{4} \quad (II 17)$$

$$\frac{1}{\mu^2} \int_0^{\mu} \bar{\nu} \bar{\mu} \cdot d\bar{\mu} = \frac{\bar{\nu}_0}{2} + \frac{1 - \bar{\nu}_0}{4} \cdot \mu^2 \quad (II 18)$$

und die Einflusszahl $\bar{\xi}_{\nu}$ geht über in

$$\bar{\xi}_{\nu} = \frac{\bar{\nu}_a}{2} \cdot \alpha (1 + \bar{\nu}_0) \quad (II 19)$$

Die durch die Temperatur bewirkten Membranspannungen vereinfachen sich somit auf

$$\sigma_{rot} = \frac{\alpha E \bar{\nu}_a}{4} \cdot (1 - \bar{\nu}_0) (1 - \mu^2) \quad (II 20)$$

$$\sigma_{tot} = \frac{\alpha E \bar{\nu}_a}{4} (1 - \bar{\nu}_0) (1 - 3\mu^2) \quad (II 21)$$

§ 2. Der Biegespannungszustand

Die Differentialgleichung (I 44) für den Neigungswinkel, den die Scheibennormale mit der x-Achse bildet, geht über in

$$\mu^2 \varphi'' + \mu \varphi' - \varphi = \mu^2 \lambda_S \Delta \bar{v}' \quad (II 22)$$

Es lässt sich leicht überlegen, dass $\varphi_1 = \mu$ und $\varphi_2 = \frac{1}{\mu}$ zwei voneinander unabhängige partikuläre Lösungen der homogenen Differentialgleichung darstellen.

Wir gehen sogleich zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung über, machen für die Verteilung des Temperaturgefälles $\Delta \bar{v}$ einen Potenzreihenansatz der Gestalt

$$\Delta \bar{v} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} \mu^{\nu} \quad (II 23)$$

und setzen voraus, dass sich diese sowie alle übrigen in dieser Arbeit verwendeten unendlichen Reihen gliedweise differenzieren lassen.

Als rechte Seite der Gleichung (II 22) ergibt sich weiter

$$\mu^2 \lambda_S \Delta \bar{v}' = \lambda_S \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu C_{\nu} \mu^{\nu-1} = \lambda_S \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu-1) C_{\nu-1} \mu^{\nu} \quad (II 24)$$

Mit dem Ansatz

$$\varphi_p = \lambda_S \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \mu^{\nu} \quad (II 25)$$

für die partikuläre Lösung der Differentialgleichung (II 22) erhält man die Ableitungen

$$\varphi_p' = \lambda_S \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_{\nu} \mu^{\nu-1} \quad (II 26)$$

$$\varphi_p'' = \lambda_S \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1) b_{\nu} \mu^{\nu-2} \quad (II 27)$$

$$\mu \varphi_p' = \lambda_S \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu b_{\nu} \mu^{\nu} \quad (II 28)$$

$$\mu^2 \varphi_p'' = \lambda_S \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu-1) b_\nu \mu^\nu \quad (II 29)$$

Der Index p soll dabei andeuten, dass es sich um eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung handelt.

Durch Einsetzen in (II 22) ergibt sich als Koeffizientengleichung

$$\nu(\nu-1) b_\nu \Big|_{\nu=2} + \nu b_\nu \Big|_{\nu=1} - b_\nu \Big|_{\nu=0} = (\nu-1) C_{\nu-1} \Big|_{\nu=2} \quad (II 30)$$

woraus sich die Koeffizienten wie folgt bestimmen:

$$\nu = 0: -b_0 = 0$$

$$\nu = 1: b_1 - b_1 = 0, \quad b_1 \text{ ist somit beliebig wählbar, im besonderen } = 0$$

$$\nu \geq 2: \quad b_\nu = \frac{C_{\nu-1}}{\nu+1} \quad (II 31)$$

Die partikuläre Lösung reduziert sich somit auf

$$\varphi_p = \lambda_S \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_{\nu-1}}{\nu+1} \cdot \mu^\nu \quad (II 32)$$

und als allgemeinste Lösung der Differentialgleichung (II 22) erhält man

$$\varphi = D \mu + F \cdot \frac{1}{\mu} + \varphi_p \quad (II 33)$$

wobei die Konstanten D und F durch die Randbedingungen zu bestimmen sind. Für $\mu = 0$ muss bei der Scheibe ohne Bohrung auch $\varphi = 0$ werden. Die Lösung (II 33) geht somit über in

$$\varphi = D \mu + \varphi_p \quad (II 34)$$

Für die weiteren Ausführungen wollen wir den Ansatz für die Verteilung des Temperaturgefälles spezialisieren auf

$$\Delta \bar{v} = \Delta \bar{v}_0 + (1 - \Delta \bar{v}_0) \mu^2 \quad (II 35)$$

wo $\Delta \bar{v}_0$ das Temperaturgefälle im Zentrum der Scheibe bedeutet. Durch Variieren des Parameters $\Delta \bar{v}_0$ lässt sich $\Delta \bar{v}$ der jeweiligen Temperaturverteilung einigermaßen anpassen. Für $\Delta \bar{v}_0 = 1$ erhält man ein konstantes Temperaturgefälle und für $\Delta \bar{v}_0 = 0$ eine Verteilung, bei der das Gefälle in der Scheibenachse Null ist.

Die Koeffizienten von (1123) werden damit

$$C_0 = \Delta \bar{v}_0 \quad (1136)$$

$$C_2 = 1 - \Delta \bar{v}_0 \quad (1137)$$

und als einziger Koeffizient von (1125), der von Null verschieden ist, ergibt sich

$$b_v \Big|_{v=3} = b_3 = \frac{1 - \Delta \bar{v}_0}{4} \quad (1138)$$

Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung vereinfacht sich somit auf

$$\varphi_p = \frac{\lambda_S (1 - \Delta \bar{v}_0)}{4} \mu^3 = \frac{\lambda_D}{4} \mu^3 \quad (1139)$$

mit

$$\lambda_D = \lambda_S (1 - \Delta \bar{v}_0) = \Delta v_a \cdot \frac{r_a}{h} \cdot \alpha \left(1 + \frac{1}{m}\right) (1 - \Delta \bar{v}_0) \quad (1140)$$

und als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1122) bei einer Verteilung des Temperaturgefälles nach (1135) erhält man

$$\varphi = D \mu + \frac{\lambda_D}{4} \mu^3 \quad (1141)$$

Die Konstante D bestimmt sich aus der Randbedingung am Aussenrand ($\mu = 1$), nach welcher $m_r \psi$ (150) gleich dem am Aussenrand angreifenden Moment M sein muss, also

$$m_r \psi \Big|_{\mu=1} = M = \frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1) r_a} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right) D + \left(\varphi_p' + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi_p}{\mu}\right) \Big|_{\mu=1} - \lambda_S \right] \quad (1142)$$

Mit der Abkürzung

$$\theta = \varphi'_p + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi_p}{\mu} \quad (11.43)$$

wird daraus

$$D = \frac{12(m-1)r_a}{m E h^3} \cdot M - \frac{\theta|_{\mu=1} - \lambda_s}{1 + \frac{1}{m}} \quad (11.44)$$

und durch Einsetzen in (11.41) ergibt sich

$$\varphi = \left[\frac{12(m-1)r_a}{m E h^3} \cdot M - \frac{\theta|_{\mu=1} - \lambda_s}{1 + \frac{1}{m}} \right] \mu + \varphi_p \quad (11.45)$$

Wir bezeichnen den Neigungswinkel am Aussenrand ($\mu = 1$) unter der Einwirkung der Wärmedeformation und eines auf die Längeneinheit des Umfanges bezogenen Einheitsmomentes $M = 1$ als Einflusszahl, welche sich anschreiben lässt als

$$\varphi|_{\mu=1} = \frac{12(m-1)r_a}{m E h^3} - \frac{\theta|_{\mu=1} - \lambda_s}{1 + \frac{1}{m}} + \varphi_p|_{\mu=1} \quad (11.46)$$

und sich zusammensetzt aus einem ersten Anteil

$$\varphi_s = \frac{12(m-1)r_a}{m E h^3} \quad (11.47)$$

welcher die Wirkung des Biegemomentes am Aussenrand berücksichtigt, und einem zweiten

$$\varphi_{\lambda} = \varphi_p|_{\mu=1} - \frac{\theta|_{\mu=1} - \lambda_s}{1 + \frac{1}{m}} \quad (11.48)$$

welcher vom Temperaturgefälle allein abhängt. Dieser geht für die oben eingeführte spezielle Temperaturverteilung bei Beachtung der Abkürzung

$$\eta = \frac{m}{m+1} \cdot \lambda_s = \alpha \cdot \frac{r_a}{h} \cdot \Delta v_0 \quad (11.49)$$

über in

$$\varphi_{\lambda} = \frac{\eta}{2} \cdot (1 + \Delta v_0) \quad (11.50)$$

Ist das Biegemoment M aus den Randbedingungen am Aussenrand bestimmt, so erhält man für die Grösstwerte der Biegespannungen an der Aussenfaser, d.h. für $x = \pm h/2$

$$\sigma_{rb} = \pm \frac{6}{h^2} \cdot M \pm \frac{E}{8} \cdot \alpha \cdot \Delta v_a (1 - \Delta \bar{v}_0) (1 - \mu^2) \quad (11.51)$$

$$\sigma_{tb} = \pm \frac{6}{h^2} \cdot M \pm \frac{E}{8} \cdot \alpha \cdot \Delta v_a (1 - \Delta \bar{v}_0) (1 - 3\mu^2) \quad (11.52)$$

Man erkennt, dass sich diese Spannungen aus einem vom Biegemoment M herrührenden konstanten Anteil und einem vom Temperaturgefälle abhängigen variablen Anteil zusammensetzen. Im Zentrum der Scheibe nehmen sie ferner gleiche Werte an.

III. Die Scheibe mit dem Profil einer Scheibe "gleicher Festigkeit"

§ 1. Der Membranspannungszustand

Bekanntlich lässt sich eine nur durch Fliehkräfte beanspruchte Scheibe so ausbilden, dass in ihr die Tangentialspannung σ_{t0} und die Radialspannung σ_{r0} überall konstant und einander gleich sind. Man spricht in diesem Falle von einer "Scheibe gleicher Festigkeit". Es lässt sich auf elementarem Wege zeigen, dass ihre Gestalt dem Gesetz

$$h = h_0 e^{-\frac{\rho \omega^2 r^2}{2\sigma}} \quad (III 1)$$

entspricht. Hierbei bedeuten

- ρ = Dichte des Scheibenmaterials
- ω = Winkelgeschwindigkeit
- r = Abstand vom Zentrum der Scheibe
- σ = Fliehkraftspannung, welche nach Voraussetzung in der ganzen Scheibe konstant ist.

Scheiben, die wenigstens annähernd so geformt sind, werden in der Praxis oft verwendet. Sobald in Scheiben dieser Art Temperaturunterschiede auftreten, sind in ihnen die Spannungen nicht mehr konstant. Aber auch rein mechanisch sind andere Spannungsverläufe durchaus möglich, selbst wenn von Biegespannungen abgesehen wird. So würden z.B. in einer ruhenden Scheibe, die einer über dem Umfang gleichmässig verteilten Radialkraft unterworfen ist, ortsabhängige Spannungen entstehen. Unter den Verhältnissen, wie sie in Wirklichkeit besonders bei zusammengesetzten Rotoren gegeben sind, hat also eine sog. Scheibe gleicher Festigkeit im allgemeinen nicht ohne weiteres die Eigenschaft, nach der sie benannt ist. Deshalb sprechen wir absichtlich von einer Scheibe, deren Profil dasjenige einer Scheibe gleicher Festigkeit ist und meinen damit die durch Gleichung (III 1) gegebene Scheibenform. Sie erweist sich als der theoretischen Behandlung verhältnismässig gut zugänglich.

Für die bezogene Scheibendicke \bar{h} geht der Ansatz (III 1) über in

$$\bar{h} = \frac{h}{h_0} = e^{-\frac{\rho \omega^2 r_a^2}{2\sigma} \mu^2} = e^{-\frac{\beta}{6} \mu^2} \quad (III 2)$$

Bei der Scheibe gleicher Festigkeit, die nur durch Fliehkräfte beansprucht ist und bei der die Radialspannung am Aussenrand den Wert σ besitzt, der voraussetzungsgemäss in der ganzen Scheibe herrschen soll, geht aus (III 2) die Definition von β hervor zu

$$\beta = 3 \frac{\rho u^2}{\sigma} \quad (III 3)$$

wo $u = r_a \cdot \omega$ die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe bedeutet.

Bei zusammengesetzten Rotoren ist die Fliehkraftspannung aus den oben erwähnten Gründen nicht notwendig konstant, sodass die Definition (III 3) unbrauchbar wird. Behält man das Profil der Scheibe bei, so kann aus (III 2) eine neue Definition von β gefunden werden, welche unabhängig von der Fliehkraftspannung ist und für beliebige Temperaturverteilungen gültig bleibt.

Für $\mu = 1$ ergibt sich aus (III 2)

$$\bar{h} \int_{\mu=1} = \frac{h_a}{h_o} = e^{-\frac{\beta}{6}} \quad (\text{III 4})$$

womit durch Auflösen

$$\beta = 6 \cdot \ln \frac{h_o}{h_a} \quad (\text{III 5})$$

entsteht. Die Grösse β ist damit durch das Verhältnis der Scheibendicke im Zentrum und am Aussenrand definiert.

Durch Differenzieren des Ausdruckes (III 2) erhält man

$$\bar{h}' = -\frac{\beta}{3} \mu e^{-\frac{\beta}{6} \mu^2} \quad (\text{III 6})$$

$$\frac{\bar{h}'}{\bar{h}} = -\frac{\beta}{3} \cdot \mu \quad (\text{III 7})$$

und die Differentialgleichung (I 45) für die Verschiebung $\bar{\xi}_s$ eines Punktes der Mittelfläche geht über in

$$\mu^2 \bar{\xi}_s'' + \mu \left(1 - \frac{\beta}{3} \cdot \mu^2\right) \bar{\xi}_s' - \left(1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{\beta}{3} \cdot \mu^2\right) \bar{\xi}_s = \mu^2 \delta \left(\bar{v}' - \frac{\beta}{3} \cdot \mu \bar{v}\right) - \alpha \mu^3 \quad (\text{III 8})$$

Die Lösung $\bar{\xi}_H$ der homogenen Gleichung lässt sich, wie wir in § 2 dieses Kapitels sehen werden, aus derjenigen für die Biegespannung gewinnen, indem man β durch $\beta/3$ und φ_{H_0} durch $\bar{\xi}_s$ ersetzt, sodass wir sogleich zur Lösung der inhomogenen Gleichung übergehen wollen.

Für die Verteilung der Temperatur der Mittelfläche machen wir den Ansatz

$$\bar{v} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} \mu^{\nu} \quad (\text{III 9})$$

und befassen uns zuerst mit der Lösung der inhomogenen Gleichung mit Temperaturglied allein. Durch Differenzieren von (III 9) erhält man

$$\bar{v}' = \sum_{v=1}^{\infty} v C_v \mu^{v-1} \quad (\text{III } 10)$$

$$\mu^2 \bar{v}' = \sum_{v=1}^{\infty} v C_v \mu^{v+1} \quad (\text{III } 11)$$

$$\mu^3 \bar{v} = \sum_{v=0}^{\infty} C_v \mu^{v+3} = \sum_{v=2}^{\infty} C_{v-2} \mu^{v+1} \quad (\text{III } 12)$$

und die rechte Seite von (III 8) wird

$$\mu^2 \delta \left(\bar{v}' - \frac{\beta}{3} \mu \bar{v} \right) = \delta \left(\sum_{v=1}^{\infty} v C_v - \frac{\beta}{3} \cdot \sum_{v=2}^{\infty} C_{v-2} \right) \mu^{v+1} \quad (\text{III } 13)$$

Als Lösungsansatz der inhomogenen Differentialgleichung mit Temperaturglied allein wählen wir

$$\bar{v} = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \mu^v \quad (\text{III } 14)$$

womit

$$\mu^2 \bar{v}'' = \delta \sum_{v=1}^{\infty} v(v+1) a_v \mu^{v+1} \quad (\text{III } 15)$$

$$\mu \bar{v}' = \delta \sum_{v=0}^{\infty} (v+1) a_v \mu^{v+1} \quad (\text{III } 16)$$

$$\mu^3 \bar{v} = \delta \sum_{v=2}^{\infty} (v-1) a_{v-2} \mu^{v+1} \quad (\text{III } 17)$$

$$\mu^2 \bar{S}_{PV} = \delta \sum_{v=2}^{\infty} a_{v-2} \mu^{v+1} \quad (\text{III } 18)$$

entsteht.

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Differentialgleichung (III 8) ohne Fliehkraft wird

$$v(v+1) a_v \Big|_{v+1} + v a_v \Big|_{v=0} - \frac{\beta}{3} \left(\frac{1}{m} + v-1 \right) a_{v-2} \Big|_{v-2} = v C_v \Big|_{v+1} - \frac{\beta}{3} C_{v-2} \Big|_{v=2} \quad (\text{III } 19)$$

woraus sich die Koeffizienten folgendermassen bestimmen :

$$v = 0 : 0 \cdot a_0 = 0 \text{ also ist } a_0 \text{ beliebig wählbar.}$$

Wir setzen

$$a_0 = 1 \quad (\text{III } 20)$$

$$v = 1 : 2a_1 + a_1 = C_1, \quad a_1 = \frac{C_1}{3} \quad (\text{III } 21)$$

$$v \geq 2 : v(v+2) a_v - \frac{\beta}{3} \left(\frac{1}{m} + v-1 \right) a_{v-2} = v C_v - \frac{\beta}{3} C_{v-2}$$

$$a_v = \frac{1}{v(v+2)} \left[\frac{\beta}{3} \left(\frac{1}{m} + v-1 \right) a_{v-2} + v C_v - \frac{\beta}{3} C_{v-2} \right] \quad (\text{III } 22)$$

Als Spezialfall wählen wir

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + (1 - \bar{v}_0) \mu^2 \quad (\text{III } 23)$$

also

$$C_0 = \bar{v}_0 \quad (\text{III } 24)$$

$$C_2 = 1 - \bar{v}_0 \quad (\text{III } 25)$$

und erhalten

$$a_0 = 1 \quad (\text{III } 26)$$

$$a_2 = \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{\beta}{3} \left(\frac{1}{m} + 1 \right) + 2(1 - \bar{v}_0) - \frac{\beta}{3} \cdot \bar{v}_0 \right] \quad (\text{III } 27)$$

$$a_4 = \frac{1}{24} \cdot \left[\frac{\beta}{3} \left(\frac{1}{m} + 3 \right) a_2 - \frac{\beta}{3} (1 - \bar{v}_0) \right] \quad (\text{III } 28)$$

$$v > 4: \quad a_v = \frac{1}{v(v+2)} \cdot \frac{\beta}{3} \cdot \left(\frac{1}{m} + v - 1 \right) a_{v-2} \quad (\text{III } 29)$$

Die inhomogene Differentialgleichung (III 8) mit Fliehkraftglied allein lässt sich mit dem Ansatz

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \mu^{\nu} = -\alpha \mu \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \mu^{\nu} \quad (\text{III } 30)$$

in analoger Weise lösen. Die Koeffizientengleichung wird

$$v(v+1) b_{\nu} \Big|_{\nu=1} + v b_{\nu} \Big|_{\nu=0} - \frac{\beta}{3} \left(\frac{1}{m} + v - 1 \right) b_{\nu-2} \Big|_{\nu=2} = \begin{cases} 0 & v \neq 2 \\ 1 & v = 2 \end{cases} \quad (\text{III } 31)$$

woraus durch Auflösen die Koeffizienten

$$b_0 = 1 \quad (\text{III } 32)$$

$$b_2 = \frac{1}{8} \cdot \left[1 + \frac{\beta}{3} \cdot \left(\frac{1}{m} + 1 \right) \right] \quad (\text{III } 33)$$

$$v > 2: \quad b_{\nu} = \frac{1}{v(v+2)} \cdot \frac{\beta}{3} \cdot \left(\frac{1}{m} + v - 1 \right) b_{\nu-2} \quad (\text{III } 34)$$

hervorgehen.

Für gebräuchliche Werte von β und einer Querdehnzahl von $10/3$ sind die Entwicklungskoeffizienten der partikulären Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (III 8) mit dem oben erwähnten speziellen Temperaturverlauf und dem Fliehkraftglied ausgewertet. Die zur Berechnung von Rotoren benötigten Funktionen sind im Anhang zusammengefasst.

Als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (III 8) der Verschiebung \bar{s}_s eines Punktes der Scheibemittelfläche ergibt sich somit

$$\bar{s}_s = C_1 \bar{s}_H + \bar{s}_{P_H} + \bar{s}_{P_U} \quad (\text{III 35})$$

Die Konstante C_1 lässt sich aus der Randbedingung am Aussenrand $\sigma_{r0} \Big|_{\mu=1} = \sigma_a$ bestimmen, wo σ_a die am Scheibenumfang angreifende gleichmässig verteilte radiale Membranspannung bedeutet. Mit den Abkürzungen

$$\Gamma = \bar{s}_H' + \frac{1}{m} \cdot \frac{\bar{s}_H}{\mu} \quad (\text{III 36})$$

$$\Lambda = \bar{s}_{P_H}' + \frac{1}{m} \cdot \frac{\bar{s}_{P_H}}{\mu} \quad (\text{III 37})$$

$$\Phi = \bar{s}_{P_U}' + \frac{1}{m} \cdot \frac{\bar{s}_{P_U}}{\mu} \quad (\text{III 38})$$

wird

$$C_1 = \frac{1}{\Gamma \Big|_{\mu=1}} \cdot \left[\frac{m^2-1}{m^2} \cdot \frac{\sigma_a}{E} - (\Lambda \Big|_{\mu=1} - \delta) - \Phi \Big|_{\mu=1} \right] \quad (\text{III 39})$$

und der Ausdruck (III 35) geht über in

$$\bar{s}_s = \frac{m^2-1}{m^2} \cdot \frac{\sigma_a}{E} \cdot \bar{s}_H - \frac{\Lambda \Big|_{\mu=1} - \delta}{\Gamma \Big|_{\mu=1}} \cdot \bar{s}_H + \bar{s}_{P_H} - \left(\frac{\Phi}{\Gamma} \right) \Big|_{\mu=1} \cdot \bar{s}_H + \bar{s}_{P_U} \quad (\text{III 40})$$

Als Einflusszahl bezeichnen wir wiederum die Verschiebung \bar{s}_s am Aussenrand ($\mu = 1$) der rotierenden Scheibe unter Einwirkung der Wärmedehnung und einer auf die Längeneinheit des Umfanges bezogenen Einheitskraft

$$k_{rr} = \sigma_a \quad h_a = 1 \quad (\text{III 41})$$

Diese Einflusszahl setzt sich aus drei Anteilen zusammen, welche die Wirkung der Radialkraft am Scheibenumfang, den Temperatur- und Fliehkrafteinfluss getrennt erfassen und lauten

$$\bar{s}_{sk} = \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{1}{E h_a} \cdot \left(\frac{s_H}{\Gamma} \right)_{\mu=1} \quad (III 42)$$

$$\bar{s}_{\psi} = \delta \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\delta} \right) \cdot \frac{s_H}{\Gamma} + \frac{s_{P\psi}}{\delta} \right]_{\mu=1} \quad (III 43)$$

$$\bar{s}_u = \lambda \left[-\frac{\phi}{\lambda} \cdot \frac{s_H}{\Gamma} + \frac{s_{P_u}}{\lambda} \right]_{\mu=1} \quad (III 44)$$

Im Kapitel V dieser Arbeit werden die beiden letzten Einflusszahlen durch die Abkürzung

$$\bar{s}_{\psi u} = \bar{s}_u + \bar{s}_{\psi} \quad (III 45)$$

zusammengefasst.

Führt man ferner noch die Bezeichnungen

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{m} \cdot \bar{s}_H' + \frac{s_H}{\mu} \quad (III 46)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{m} \cdot \bar{s}_{P\psi}' + \frac{s_{P\psi}}{\mu} \quad (III 47)$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{m} \cdot \bar{s}_{P_u}' + \frac{s_{P_u}}{\mu} \quad (III 48)$$

ein, so lassen sich die Membranspannungen wie folgt anschreiben :

$$\sigma_{r0} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \left\{ \left(\frac{K \bar{S}_{SK}}{\bar{S}_H} \right)_{\mu=1} + \frac{\delta - \Lambda - \Phi}{\Gamma} \right\} \Gamma + \Lambda + \Phi - \delta \bar{v} \quad (III 49)$$

$$\sigma_{t0} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \left\{ \left(\frac{K \bar{S}_{SK}}{\bar{S}_H} \right)_{\mu=1} + \frac{\delta - \Lambda - \Phi}{\Gamma} \right\} \bar{\Gamma} + \bar{\Lambda} + \bar{\Phi} - \delta \bar{v} \quad (III 50)$$

Die am Scheibenumfang angreifende Radialkraft K ist aus den Randbedingungen am Aussenrand der Scheibe zu bestimmen.

Im Zentrum der Scheibe ist $\Gamma = \bar{\Gamma}$, $\Lambda = \bar{\Lambda}$ und $\Phi = \bar{\Phi}$, sodass die radiale und die tangential Spannung unabhängig von β den gleichen Wert annehmen. Dies muss in der Tat gefordert werden, da die beiden Spannungen dort nicht unterscheidbar sind.

§2. Der Biegespannungszustand

Die Differentialgleichung (I 44) für den Neigungswinkel φ , den die Scheibennormale mit der x-Achse bildet, geht für dieses Scheibenprofil über in

$$\mu^2 \varphi'' + \mu (1 - \beta \mu^2) \varphi' - \left(1 + \frac{\beta}{m} \cdot \mu^2\right) \varphi - \mu^2 \lambda_s e^{\frac{\beta}{6} \mu^2} \left(\Delta \bar{v}' - \frac{2}{3} \beta \mu \Delta \bar{v} \right) \quad (III 51)$$

Zur Lösung der homogenen Differentialgleichung machen wir in Anlehnung an [4] den Potenzreihen-Ansatz

$$\varphi_{H0} = e^{-r \mu^2} \mu^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \mu^{2n} \quad (III 52)$$

mit einem noch zu bestimmenden Anfangsexponenten λ und einem frei wählbaren Parameter r in der Funktion $e^{-r \cdot \mu^2}$, welche zur Konvergenzverbesserung in den Ansatz aufgenommen wurde, da die Reihe

$$\mu^\lambda \sum a_{2n} \mu^{2n} \quad \text{für Werte von } \beta \cong 4 \text{ schlecht konvergiert.}$$

Aus Symmetriegründen verschwinden die ungeraden Exponenten, sodass dieselben im Ansatz weglassen wurden.

Die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten von (III 52) werden

$$\varphi'_{H_0} = e^{-r\mu^2} \left[-2r \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \mu^{2n+1+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+\lambda) a_{2n} \mu^{2n+1+\lambda} \right] \quad (\text{III } 53)$$

$$\begin{aligned} \varphi''_{H_0} = e^{-r\mu^2} & \left[4r^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \mu^{2n+2+\lambda} - 2r \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1+2\lambda) a_{2n} \mu^{2n+\lambda} \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+\lambda)(2n+\lambda-1) a_{2n} \mu^{2n-2+\lambda} \right] \quad (\text{III } 54) \end{aligned}$$

Bildet man die Ausdrücke $\mu^2 \varphi''_{H_0}$, $\mu \varphi'_{H_0}$, $\mu^3 \varphi'_{H_0}$, $\mu^2 \varphi_{H_0}$

und ordnet nach gleichen Exponenten $2n + \lambda$ von μ , so erhält man

$$\begin{aligned} \mu^2 \varphi''_{H_0} = e^{-r\mu^2} & \left[4r^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{2n-4} \mu^{2n+\lambda} - 2r \sum_{n=1}^{\infty} (4n-3+2\lambda) a_{2n-2} \mu^{2n+\lambda} \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+\lambda)(2n+\lambda-1) a_{2n} \mu^{2n+\lambda} \right] \quad (\text{III } 55) \end{aligned}$$

$$\mu \varphi'_{H_0} = e^{-r\mu^2} \left[-2r \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-2} \mu^{2n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+\lambda) a_{2n} \mu^{2n+\lambda} \right] \quad (\text{III } 56)$$

$$\mu^3 \varphi'_{H_0} = e^{-r\mu^2} \left[-2r \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-4} \mu^{2n+\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n-2+\lambda) a_{2n-2} \mu^{2n+\lambda} \right] \quad (\text{III } 57)$$

$$\mu^2 \varphi_{H_0} = e^{-r\mu^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-2} \mu^{2n+\lambda} \quad (\text{III } 58)$$

und durch Einsetzen in die reduzierte Differentialgleichung (III 51), wobei der Faktor $e^{-r \cdot \mu^2}$ sogleich unterdrückt wird, folgt als Koeffizientengleichung

$$2r(2r+\beta) a_{2n-4} \Big|_{n=2} - \left[2n(4r+\beta) + 4r(\lambda-1) + \beta \left(\frac{1}{m} - 2 + \lambda \right) \right] a_{2n-2} \Big|_{n=1} + \left[4n(n+\lambda) + \lambda^2 - 1 \right] a_{2n} \Big|_{n=0} = 0 \quad (\text{III } 59)$$

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten lässt sich daraus auf folgende Weise ermitteln :

$$n = 0: \quad (\lambda^2 - 1) \cdot a_0 = 0 \quad (\text{III } 60)$$

Soll die Potenzreihe von Null verschiedene Koeffizienten aufweisen, so muss $a_0 \neq 0$ sein. Zur Bestimmung der Anfangsexponenten λ ergibt sich somit als sogenannte determinierende Fundamentalgleichung

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad (\text{III } 61)$$

welche die Lösungen $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1$ hat.

Wählt man zur Vereinfachung $a_0 = 1$, so erhält man für $\lambda_0 = 1$ eine erste Potenzreihenentwicklung, wobei der Parameter r durch Nullsetzen des Koeffizienten a_2 festgelegt wird.

$$n = 1: \quad a_2 = \frac{1}{8} \cdot \left[8r + \beta \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right] = 0 \quad (\text{III } 62)$$

woraus

$$r = -\frac{\beta}{8} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \quad \text{folgt.} \quad (\text{III } 63)$$

Die weiteren Koeffizienten werden

$$n > 1: \quad a_{2n} = \frac{1}{4n(n+1)} \left[\frac{(m+1)(3m-1)}{16m^2} \beta^2 a_{2(n-2)} + \left(1 - \frac{1}{m} \right) \beta(n-1) a_{2(n-1)} \right] \quad (\text{III } 64)$$

und gehen für $m = \frac{10}{3}$ über in

$$a_{2n} = \frac{1}{4n(n+1)} \left[0,219375 \beta^2 a_{2(n-2)} + 0,7(n-1) \beta a_{2(n-1)} \right] \quad (\text{III } 65)$$

mit

$$r = -0,162500\beta \quad (III 66)$$

Damit ist die zur Wurzel $\lambda_0 = 1$ gehörende Potenzreihen-Entwicklung vollständig bestimmt. Da die Differenz der Wurzeln $\lambda_0 - \lambda_1 = 2$ ganzzahlig ist, lassen sich die zur Wurzel $\lambda_1 = -1$ gehörenden Koeffizienten berechnen aus

$$\varphi_{H1} = \left. \frac{\partial \varphi_{H0}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_1} = e^{-r\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\mu \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \mu^{2n} \right]_{\lambda=\lambda_1=-1} \quad (III 67)$$

wobei zu beachten ist, dass die Koeffizienten a_{2n} aus (III 59) zu bestimmen sind und einstweilen über λ noch nicht verfügt werden darf. Die Koeffizienten hängen also ausser von β noch vom Anfangsexponenten λ ab. Durch Ausführen der Differentiation geht (III 67) über in

$$\varphi_{H1} = e^{-r\mu^2} \left[\mu \sum_{n=0}^{-1} \left. \frac{\partial a_{2n}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_1=-1} \mu^{2n} + \mu^{-1} \ln \mu \sum_{n=0}^{\infty} \left. a_{2n} \right|_{\lambda_1=-1} \mu^{2n} \right] \quad (III 68)$$

Für $\mu = 0$ strebt somit $\varphi_{H1} \rightarrow \infty$, sodass sich, wie wir später sehen werden, die Bestimmung der einzelnen Koeffizienten erübrigt.

Wir gehen nun zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (III 51) über, indem wir die gegebene Verteilung des Temperaturgefälles in eine Potenzreihe der Gestalt

$$\Delta \bar{v} = \sum_{v=0}^{\infty} C_v \mu^v \quad (III 69)$$

entwickeln und für die partikuläre Lösung den Ansatz

$$\varphi_p = \lambda_5 \mu e^{\frac{\beta}{6}\mu^2} \sum_{v=0}^{\infty} b_v \mu^v \quad (III 70)$$

machen. Durch Differenzieren und Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man die Koeffizientengleichung

$$\begin{aligned} -\frac{2}{9}\beta^2 b_{v-4} \Big|_{v=4} - \beta \left(\frac{v}{3} - 1 + \frac{1}{m} \right) b_{v-2} \Big|_{v=2} + v(v+1) b_v \Big|_{v=1} + (v+1) b_v \Big|_{v=0} - b_v \Big|_{v=0} \\ = v C_v \Big|_{v=1} - \frac{2}{3} \beta C_{v-2} \Big|_{v=2} \end{aligned} \quad (III 71)$$

aus welcher sich durch Auflösen die Koeffizienten

$$b_0 = 1 \quad (III 72)$$

$$b_\nu = \frac{1}{\nu(\nu+2)} \left\{ \beta \left(\frac{\nu}{3} - 1 + \frac{1}{m} \right) b_{\nu-2} + \frac{2}{9} \beta^2 b_{\nu-4} + \nu C_\nu - \frac{2}{3} \beta C_{\nu-2} \right\} \quad (III 73)$$

ergeben. Dabei ist zu beachten, dass Koeffizienten mit negativen Indizes Null zu setzen sind.

Die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung (III 51) wird somit

$$\varphi = C_1 \cdot \varphi_{H_0} + C_2 \varphi_{H_1} + \varphi_p \quad (III 74)$$

Da die Scheiben gleicher Festigkeit im Zentrum keine Bohrung besitzen, muss für $\mu = 0$ auch $\varphi = 0$ werden, sodass sich die Lösung (III 74) reduziert auf

$$\varphi = C_1 \varphi_{H_0} + \varphi_p \quad (III 75)$$

Als Spezialfall wählen wir für die Verteilung des Temperaturgefälles

$$\Delta \bar{v} = \Delta \bar{v}_0 + (1 - \Delta \bar{v}_0) \mu^2 \quad (III 76)$$

d.h.

$$C_0 = \Delta \bar{v}_0 \quad (III 77)$$

$$C_2 = 1 - \Delta \bar{v}_0 \quad (III 78)$$

und erhalten

$$b_0 = 1 \quad (III 79)$$

$$b_2 = \frac{1}{8} \left[\beta \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{3} \right) + k_0 \right] \quad (III 80)$$

$$k_0 = 2 \left[1 - \left(1 + \frac{\beta}{3} \right) \Delta \bar{v}_0 \right] \quad (III 81)$$

$$b_4 = \frac{1}{24} \cdot \left[\frac{2}{9} \beta^2 + \beta \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{m} \right) b_2 - k_2 \right] \quad (III 82)$$

$$k_2 = \frac{2}{3} \cdot \beta (1 - \Delta \bar{v}_0) \quad (III 83)$$

$$v > 4: \quad b_v = \frac{1}{v(v+2)} \cdot \left[\beta \left(\frac{v}{3} - 1 + \frac{1}{m} \right) b_{v-2} + \frac{2}{9} \beta^2 b_{v-4} \right] \quad (III 84)$$

Für die homogene und inhomogene Lösung der Differentialgleichung (III 51) mit obigem Verlauf des Temperaturgefälles sind die Entwicklungskoeffizienten mit einer Querdehnzahl von 10/3 ausgewertet und die zur Berechnung von Rotoren benötigten Grössen im Anhang zusammengefasst.

Die Konstante C_1 in (III 75) lässt sich analog der Scheibe konstanter Dicke aus der Randbedingung am Aussenrand ($\mu = 1$)

$$m r \psi \Big|_{\mu=1} = M = \frac{m^2 E h_a^3}{12(m^2-1)r_a} \cdot \left[C_1 \left(\varphi'_{H_0} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi_{H_0}}{\mu} \right) + \left(\varphi'_P + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi_P}{\mu} \right) - \lambda_s e^{\frac{\beta}{6}} \right] \quad (III 85)$$

bestimmen. Mit den Abkürzungen

$$\Delta = \varphi'_{H_0} + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi_{H_0}}{\mu} \quad (III 86)$$

$$\Pi = \varphi'_P + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi_P}{\mu} \quad (III 87)$$

ergibt sich

$$C_1 = \frac{12(m^2-1)r_a}{m^2 E h_a^3} \cdot M - \frac{\Pi \Big|_{\mu=1} - \lambda_s \cdot e^{\frac{\beta}{6}}}{\Delta \Big|_{\mu=1}} \quad (III 88)$$

und durch Einsetzen in die Lösung (III 75) wird

$$\varphi = \left[\frac{12(m^2-1)r_a}{m^2 E h_0^3} \cdot M - \frac{\pi|_{\mu=1} - \lambda_s e^{\frac{\beta}{\delta}}}{\Delta|_{\mu=1}} \right] \cdot \varphi_{H_0} + \varphi_P \quad (\text{III } 89)$$

Wir bezeichnen wiederum den Neigungswinkel am Aussenrand ($\mu = 1$) unter Einwirkung der Wärmedeformation und einem Einheitsmoment $M = 1$ als Einflusszahl. Diese setzt sich zusammen aus einem ersten Anteil

$$\varphi_S = \frac{12(m^2-1)r_a}{m^2 E h_0^3} \cdot \left(\frac{\varphi_{H_0}}{\Delta} \right)_{\mu=1} \quad (\text{III } 90)$$

welcher die Wirkung des Biegemomentes am Aussenrand berücksichtigt, und einem zweiten

$$\varphi_{\lambda_s} = \lambda_s \left[\frac{\varphi_P}{\lambda_s} - \left(\frac{\pi}{\lambda_s} - e^{\frac{\beta}{\delta}} \right) \cdot \frac{\varphi_{H_0}}{\Delta} \right]_{\mu=1} \quad (\text{III } 91)$$

welcher vom Temperaturgefälle allein abhängt.

Mit den Abkürzungen

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{m} \cdot \varphi'_{H_0} + \frac{\varphi_{H_0}}{\mu} \quad (\text{III } 92)$$

$$\bar{\pi} = \frac{1}{m} \cdot \varphi'_P + \frac{\varphi_P}{\mu} \quad (\text{III } 93)$$

erhält man aus (146) & (147) für die Grösstwerte der Biegespannungen an der Aussenfaser, d.h. für $x = \pm h/2$

$$\sigma_{rb} = \pm \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{h_0}{2r_a} \cdot \left\{ e^{-\frac{\beta}{\delta} \mu^2} \left[\left(\frac{\varphi_S M}{\varphi_{H_0}} \right)_{\mu=1} - \frac{\pi|_{\mu=1} - \lambda_s e^{\frac{\beta}{\delta}}}{\Delta|_{\mu=1}} \right] \Delta + \pi \right\} - \lambda_s \Delta \bar{\nu} \quad (\text{III } 94)$$

$$\sigma_{tb} = \pm \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{h_0}{2r_a} \cdot \left\{ e^{-\frac{\beta}{\delta} \mu^2} \left[\left(\frac{\varphi_S M}{\varphi_{H_0}} \right)_{\mu=1} - \frac{\pi|_{\mu=1} - \lambda_s e^{\frac{\beta}{\delta}}}{\Delta|_{\mu=1}} \right] \bar{\Delta} + \bar{\pi} \right\} - \lambda_s \Delta \bar{\nu} \quad (\text{III } 95)$$

Im Zentrum der Scheibe ist $\Delta = \bar{\Delta}$ und $\pi = \bar{\pi}$, sodass die radiale und tangential Biegespannung unabhängig von der Scheibenform den gleichen Wert annehmen.

IV. Der Spannungszustand rotierender Zylinderschalen konstanter Dicke

Bei Rotoren sind die zwischen zwei Scheiben sich befindenden Zylinderschalen oft so kurz, dass sich die an den Enden angreifenden Randkräfte- und momente gegenseitig beeinflussen. Aus diesem Grunde soll nur die endlich lange Zylinderschale behandelt werden. Da die Grundgleichungen zur Spannungsberechnung von Zylinderschalen in der Literatur [5] [6] [7] [8] eingehend beschrieben sind, soll nur so weit darauf eingegangen werden, als dies zum Verständnis der Ausführungen über die Einflusszahlen nötig ist. Die am Anfang dieses Kapitels erwähnten Formeln können allerdings nicht in dieser Form direkt den oben erwähnten Literaturstellen entnommen werden, lehnen sich jedoch eng an [5] [7] an, sodass angenommen werden darf, dass der Leser bei Zuhilfenahme derselben den Ausführungen mühelos folgen kann. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Lösung der Differentialgleichung (IV 13) mit in axialer Richtung veränderlicher Belastungs- und Temperaturverteilung, welche die Voraussetzung der Entwickelbarkeit in eine höchstens viergliedrige Potenzreihe erfüllen muss.

Wir führen dazu folgende Bezeichnungen ein (Abb. 4):

- ξ = Verschiebung eines Punktes der Zylinderschalenmittelfläche senkrecht zur Erzeugenden.
- ζ = Verschiebung eines Punktes der Zylinderschalenmittelfläche in Richtung der Erzeugenden.
- r_0 = Radius der Zylinderschalenmittelfläche
- l = Länge der Zylinderschale
- h = Dicke der Zylinderschale
- T = Temperatur eines beliebigen Punktes (x, z) der Zylinderschale, welche sich nach (I 11) und (I 12) reduzieren lässt auf

$$T(x, z) = \mathcal{V}(x) + z \cdot \frac{\Delta \mathcal{V}(x)}{h} \quad (\text{IV } 1)$$

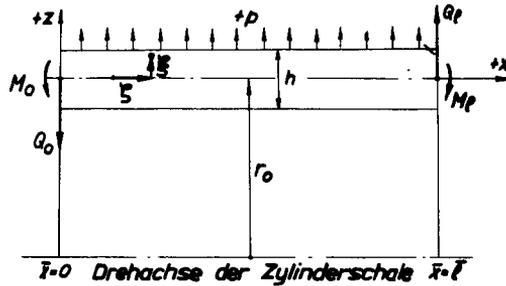
mit

- \mathcal{V} = Temperatur der Zylinderschalenmittelfläche
- \mathcal{V}_0 = Temperatur der Zylinderschalenmittelfläche für $x = 0$
- $\Delta \mathcal{V}$ = Temperaturgefälle der Zylinderschale senkrecht zur Erzeugenden.
- $\Delta \mathcal{V}_0$ = Temperaturgefälle der Zylinderschale senkrecht zur Erzeugenden für $x = 0$.

Die in Abb. 4 eingezeichneten Kräfte und Momente sollen auf die Längeneinheit des Umfanges und die Belastung auf die Flächeneinheit bezogen werden. Führt man ferner noch die Abkürzungen

$$\lambda = \frac{\xi}{r_0} \quad (\text{IV } 2)$$

Abb.4 Koordinatensystem der Zylinderschale mit Belastung und positivem Richtungssinn der Verschiebungen.



$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{r_0} \quad (\text{IV } 3)$$

$$\bar{x} = \frac{x}{r_0} \quad (\text{IV } 4)$$

$$\bar{v} = \frac{v}{v_0} \quad (\text{IV } 5)$$

$$\Delta \bar{v} = \frac{\Delta v}{\Delta v_0} \quad (\text{IV } 6)$$

$$\lambda_z = \alpha \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{r_0}{h} \cdot \Delta v_0 \quad (\text{IV } 7)$$

$$\gamma^4 = \frac{3(m^2-1)}{m^2} \cdot \left(\frac{r_0}{h}\right)^2 \quad (\text{IV } 8)$$

$$\chi = \frac{r_0}{h} \cdot \frac{p}{E} \quad (\text{IV } 9)$$

$$\psi = \alpha v_0 \bar{v} - \frac{m \alpha}{12(m-1)} \cdot \frac{h}{r_0} \cdot \Delta v_0 \Delta \bar{v}' \quad (\text{IV } 10)$$

$$\bar{\chi} = 4\gamma^4 \chi \quad (\text{IV } 11)$$

$$\bar{\psi} = 4\gamma^4 \psi \quad (\text{IV } 12)$$

ein, so lautet die Differentialgleichung für die Verschiebung eines Punktes der Zylinderschalenmittefläche senkrecht zur Erzeugenden

$$\frac{d^4 \bar{\xi}}{d\bar{x}^4} + 4\gamma^4 \bar{\xi} = \bar{\chi} + \bar{\psi} \quad (\text{IV } 13)$$

Um einfache partikuläre Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung zu erhalten, setzen wir voraus, dass sich die Funktionen $\bar{\chi}$ und $\bar{\psi}$ in je eine höchstens viergliedrige Potenzreihe der Gestalt

$$P(\bar{x}) = P_0 + P_1 \bar{x} + P_2 \bar{x}^2 + P_3 \bar{x}^3 \quad (\text{IV } 14)$$

entwickeln lassen.

Als allgemeine Lösung der Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned} \bar{\xi} = & C_1 \cos(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) + C_2 \cos(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) + C_3 \sin(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) \\ & + C_4 \sin(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) + \chi + \psi \end{aligned} \quad (\text{IV } 15)$$

und die Ableitungen nach \bar{x} werden

$$\begin{aligned} \bar{S}^I &= \gamma \left\{ C_1 [\sin(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) - \cos(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x})] + C_2 [\sin(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x})] + C_3 [\cos(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) - \sin(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x})] \right. \\ &\quad \left. + C_4 [\cos(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) + \sin(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x})] \right\} \chi' + \psi' \end{aligned} \quad (IV 16)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{II} &= 2\gamma^2 \left[-C_1 \sin(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) + C_2 \sin(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) - C_3 \cos(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) \right. \\ &\quad \left. + C_4 \cos(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) \right] + \chi'' + \psi'' \end{aligned} \quad (IV 17)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^{III} &= 2\gamma^3 \left\{ -C_1 [\cos(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) + \sin(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x})] + C_2 [\cos(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) \right. \\ &\quad \left. - \sin(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x})] - C_3 [\sin(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) + \cos(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x})] \right. \\ &\quad \left. + C_4 [\sin(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) - \cos(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x})] \right\} + \chi''' + \psi''' \end{aligned} \quad (IV 18)$$

Für die meridionalen und tangentialen Biege- bzw. Membranspannungen ergeben sich die Ausdrücke

$$\sigma_{xb} = -\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \left(\frac{z}{r_0}\right) \cdot (\bar{S}'' + \lambda_z \Delta \bar{v}) \quad (IV 19)$$

$$\sigma_{yb} = -\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \left(\frac{z}{r_0}\right) \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot \bar{S}'' + \lambda_z \Delta \bar{v}\right) \quad (IV 20)$$

bzw.

$$\sigma_{x0} = \frac{m E}{m^2 - 1} \cdot \left[\bar{S} - m \cdot \bar{S}' - (m+1) \alpha v_0 \bar{v} \right] \quad (IV 21)$$

$$\sigma_{y_0} = \frac{mE}{m^2-1} \cdot [m \bar{\xi} - \bar{\xi}' - (m+1) \alpha v_0 \bar{v}] \quad (IV 22)$$

Nimmt man an, dass die Membranspannungen in x-Richtung vernachlässigbar klein sind, so kann

$$\bar{\xi} - m \bar{\xi}' - (m+1) \alpha v_0 \bar{v} = 0 \quad (IV 23)$$

gesetzt werden.

Damit wird

$$\bar{\xi}' = \frac{1}{m} [\bar{\xi} - (m+1) \alpha v_0 \bar{v}] \quad (IV 24)$$

und der Ausdruck für die Membranspannung in tangentialer Richtung geht über in

$$\sigma_{y_0} = E (\bar{\xi} - \alpha v_0 \bar{v}) \quad (IV 25)$$

Die Verschiebung $\bar{\xi}$ ist mit den oben eingeführten Randkräften und -momenten durch die Gleichungen

$$M_{\bar{x}} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{xb} z dz = - \frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)r_0} \cdot (\bar{\xi}'' + \lambda_z \Delta \bar{v}) \quad (IV 26)$$

$$M_{\bar{y}} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{yb} z dz = - \frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)r_0} \cdot \left(\frac{1}{m} \bar{\xi}'' + \lambda_z \Delta \bar{v} \right) \quad (IV 27)$$

$$Q_{\bar{x}} = \frac{dM_{\bar{x}}}{d\bar{x}} = - \frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)r_0^2} \cdot (\bar{\xi}''' + \lambda_z \Delta \bar{v}') \quad (IV 28)$$

verknüpft.

Die vier Integrationskonstanten C_1 bis C_4 lassen sich aus den folgenden Randbedingungen bestimmen

$$M_{\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0} = - \frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)r_0} \cdot \left(\bar{S}'' + \lambda_z \Delta \bar{v} \right)_{\bar{x}=0} = M_0 \quad (\text{IV } 29)$$

$$Q_{\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0} = - \frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)r_0^2} \cdot \left(\bar{S}''' + \lambda_z \Delta \bar{v}' \right)_{\bar{x}=0} = Q_0 \quad (\text{IV } 30)$$

$$M_{\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{l}} = - \frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)r_0} \cdot \left(\bar{S}'' + \lambda_z \Delta \bar{v} \right)_{\bar{x}=\bar{l}} = M_l \quad (\text{IV } 31)$$

$$Q_{\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{l}} = - \frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)r_0^2} \cdot \left(\bar{S}''' + \lambda_z \Delta \bar{v}' \right)_{\bar{x}=\bar{l}} = Q_l \quad (\text{IV } 32)$$

und mit den Abkürzungen

$$\Omega = \gamma \bar{l} \quad (\text{IV } 33)$$

$$p = \frac{12(m^2-1)r_0}{m^2 E h^3} \quad (\text{IV } 34)$$

$$q = \frac{12(m^2-1)r_0^2}{m^2 E h^3} = p r_0 \quad (\text{IV } 35)$$

$$a = \frac{\sin \Omega \cos \Omega - \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 36)$$

$$b = \frac{\sin \Omega \cos \Omega + \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 37)$$

$$c = \frac{\sin^2 \Omega + \sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 38)$$

$$d = \frac{\sin \Omega \sin \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 39)$$

$$e = \frac{\cos \Omega \sin \Omega - \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 40)$$

$$f = \frac{\cos \Omega \sin \Omega + \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 41)$$

$$g = \frac{\sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 42)$$

$$h = \frac{\sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 43)$$

$$s = \chi'' + \psi'' + \lambda_z \Delta \bar{v} \quad (\text{IV } 44)$$

$$i = \chi + \psi \quad (\text{IV } 45)$$

$$s \Big|_{\bar{x}=0} = s_0 \quad , \quad s \Big|_{\bar{x}=\bar{l}} = s_l \quad (IV 46)$$

$$i \Big|_{\bar{x}=0} = i_0 \quad , \quad i \Big|_{\bar{x}=\bar{l}} = i_l \quad (IV 47)$$

ergibt sich nach einigen Umformungen, auf deren Wiedergabe verzichtet wird,

$$C_1 = -\frac{1}{2\gamma^2} \cdot \left\{ \frac{a}{\gamma} (q Q_0 + s'_0) + \frac{e}{\gamma} (q Q_l + s'_l) + c(p M_0 + s_0) - 2d(p M_l + s_l) \right\} \quad (IV 48)$$

$$C_2 = \frac{1}{2\gamma^2} \cdot \left\{ \frac{g}{\gamma} (q Q_0 + s'_0) + \frac{d}{\gamma} (q Q_l + s'_l) + b(p M_0 + s_0) - f(p M_l + s_l) \right\} \quad (IV 49)$$

$$C_3 = \frac{1}{2\gamma^2} \cdot \left\{ \frac{h}{\gamma} (q Q_0 + s'_0) + \frac{d}{\gamma} (q Q_l + s'_l) + b(p M_0 + s_0) - f(p M_l + s_l) \right\} \quad (IV 50)$$

$$C_4 = -\frac{1}{2\gamma^2} \cdot (p M_0 + s_0) \quad (IV 51)$$

Für die Verschiebung $\bar{\xi}$ und den Neigungswinkel $\bar{\xi}'$ an den Enden der Zylinderschale erhält man die Ausdrücke

$$\bar{x}=0: \quad \bar{\xi}_{0T} = C_1 + i_0 \quad (IV 52)$$

$$\bar{\xi}'_{0T} = \gamma (C_2 + C_3) + i'_0 \quad (IV 53)$$

$$\bar{x} = \bar{r}: \bar{S}_{\tau\tau} = C_1 \cos \Omega \cos \Omega + C_2 \cos \Omega \sin \Omega + C_3 \sin \Omega \cos \Omega + C_4 \sin \Omega \sin \Omega + i_{\ell} \quad (\text{IV } 54)$$

$$\bar{S}'_{\tau\tau} = \gamma \left[C_1 (\sin \Omega \cos \Omega - \cos \Omega \sin \Omega) + C_2 (\sin \Omega \sin \Omega + \cos \Omega \cos \Omega) + C_3 (\cos \Omega \cos \Omega - \sin \Omega \sin \Omega) + C_4 (\cos \Omega \sin \Omega + \sin \Omega \cos \Omega) \right] + i'_{\ell} \quad (\text{IV } 55)$$

welche durch Einsetzen der Konstanten C_1 bis C_4 übergehen in

$$\bar{S}_{\sigma\tau} = -\frac{1}{2\gamma^2} \left\{ \frac{a}{\gamma} (q Q_0 + S'_0) + \frac{e}{\gamma} (q Q_{\ell} + S'_{\ell}) + c(p M_0 + S_0) - 2d(p M_{\ell} + S_{\ell}) \right\} + i_0 \quad (\text{IV } 56)$$

$$\bar{S}'_{\sigma\tau} = \frac{1}{2\gamma} \left\{ \frac{c}{\gamma} (q Q_0 + S'_0) + \frac{2d}{\gamma} (q Q_{\ell} + S'_{\ell}) + 2b(p M_0 + S_0) - 2f(p M_{\ell} + S_{\ell}) \right\} + i'_0 \quad (\text{IV } 57)$$

$$\bar{S}_{\tau\tau} = \frac{1}{2\gamma^2} \left\{ \frac{e}{\gamma} (q Q_0 + S'_0) + \frac{a}{\gamma} (q Q_{\ell} + S'_{\ell}) + 2d(p M_0 + S_0) - c(p M_{\ell} + S_{\ell}) \right\} + i_{\ell} \quad (\text{IV } 58)$$

$$\bar{S}'_{\tau\tau} = \frac{1}{2\gamma} \left\{ \frac{2d}{\gamma} (q Q_0 + S'_0) + \frac{c}{\gamma} (q Q_{\ell} + S'_{\ell}) + 2f(p M_0 + S_0) - 2b(p M_{\ell} + S_{\ell}) \right\} + i'_{\ell} \quad (\text{IV } 59)$$

Wir bezeichnen nun die Verschiebung \bar{S} und den Neigungswinkel \bar{S}' an den Enden der Zylinderschale $\bar{x} = 0$ und $\bar{x} = \bar{r}$ unter Einwirkung einer Einheitskraft $Q = 1$ resp. eines Einheitsmomentes $M = 1$, sowie der Belastung und der Wärmedeformation, als Einflusszahlen. Man erkennt, dass sich diese in die folgenden zwei Gruppen unterteilen lassen. Die Bedeutung der Indizes lässt sich leicht merken, wenn man beachtet, dass sich der erste auf den Ort der Deformation bezieht, während der zweite auf den Ort der Kraft- resp. Momenteinwirkung hinweist.

Die Einflusszahlen der Kraft- und Momenteinwirkung lauten demnach

$$\bar{S}_{0Q_0} = -\frac{q \cdot a}{2\gamma^3} \quad (\text{IV } 60)$$

$$\sum_{0a_0}^{\prime} = \frac{qc}{2\gamma^2} \quad (IV\ 61)$$

$$\sum_{ca_0}^{\prime} = \frac{qe}{2\gamma^3} \quad (IV\ 62)$$

$$\sum_{da_0}^{\prime} = \frac{qd}{\gamma^2} \quad (IV\ 63)$$

$$\sum_{0m_0}^{\prime} = -\frac{pc}{2\gamma^2} \quad (IV\ 64)$$

$$\sum_{cm_0}^{\prime} = \frac{pb}{\gamma} \quad (IV\ 65)$$

$$\sum_{dm_0}^{\prime} = \frac{pd}{\gamma^2} \quad (IV\ 66)$$

$$\sum_{fm_0}^{\prime} = \frac{pf}{\gamma} \quad (IV\ 67)$$

$$\sum_{0a_e}^{\prime} = -\frac{qe}{2\gamma^3} \quad (IV\ 68)$$

$$\sum_{da_e}^{\prime} = \frac{qd}{\gamma^2} \quad (IV\ 69)$$

$$\overline{S}_{lG_e} = \frac{q d}{2\gamma^3} \quad (\text{IV } 70)$$

$$\overline{S}'_{lG_e} = \frac{q c}{2\gamma^2} \quad (\text{IV } 71)$$

$$\overline{S}_{oM_e} = \frac{p d}{\gamma^2} \quad (\text{IV } 72)$$

$$\overline{S}'_{oM_e} = -\frac{p f}{\gamma} \quad (\text{IV } 73)$$

$$\overline{S}_{eM_e} = -\frac{p c}{2\gamma^2} \quad (\text{IV } 74)$$

$$\overline{S}'_{eM_e} = -\frac{p b}{\gamma} \quad (\text{IV } 75)$$

und diejenigen der Einwirkung einer Belastung und der Wärmedeformation werden :

$$\overline{S}_o = -\frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{a s'_o}{\gamma} + c s_o + \frac{e s'_e}{\gamma} - 2 d s_e \right] + i_o \quad (\text{IV } 76)$$

$$\overline{S}'_o = \frac{1}{2\gamma} \left[\frac{c s'_o}{\gamma} + 2b s_o + 2 \left(\frac{d s'_e}{\gamma} - f s_e \right) \right] + i'_o \quad (\text{IV } 77)$$

$$\overline{S}_e = \frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{e s'_o}{\gamma} + 2 d s_o + \frac{a s'_e}{\gamma} - c s_e \right] + i_e \quad (\text{IV } 78)$$

$$\bar{S}'_e = \frac{1}{2r} \cdot \left[2 \left(\frac{ds'_0}{r} + f s_0 \right) + \frac{c s'_e}{r} - 2 b s_e \right] + i'_e \quad (\text{IV } 79)$$

Beachtet man weiter, dass die Einflusszahlen der Kraft- und Momenteinwirkung am rechten Ende der Zylinderschalen gemäss den Gleichungen

$$\bar{S}'_{0a_e} = - \bar{S}'_{e a_0} \quad (\text{IV } 80)$$

$$\bar{S}'_{0a_e} = \bar{S}'_{e a_0} \quad (\text{IV } 81)$$

$$\bar{S}'_{e a_e} = - \bar{S}'_{0 a_0} \quad (\text{IV } 82)$$

$$\bar{S}'_{e a_e} = \bar{S}'_{0 a_0} \quad (\text{IV } 83)$$

$$\bar{S}'_{0 m_e} = \bar{S}'_{e m_0} \quad (\text{IV } 84)$$

$$\bar{S}'_{0 m_e} = - \bar{S}'_{e m_0} \quad (\text{IV } 85)$$

$$\bar{S}'_{e m_e} = \bar{S}'_{0 m_0} \quad (\text{IV } 86)$$

$$\bar{S}'_{e m_e} = - \bar{S}'_{0 m_0} \quad (\text{IV } 87)$$

durch diejenigen der Einwirkung am linken Ende ausgedrückt werden können, so lassen sich die Konstanten C_1 bis C_4 mit den oben eingeführten Einflusszahlen wie folgt darstellen :

$$C_1 = Q_0 \bar{S}_{0Q_0} + M_0 \bar{S}_{0M_0} + Q_\ell \bar{S}_{0Q_\ell} + M_\ell \bar{S}_{0M_\ell} - \frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{as'_0}{\gamma} + cs_0 + \frac{es'_\ell}{\gamma} - 2ds_\ell \right) \quad (\text{IV } 88)$$

$$C_2 = \frac{1}{2\gamma} \left[Q_0 \frac{qg}{\gamma^2} + M_0 \bar{S}'_{0M_0} + Q_\ell \bar{S}'_{0Q_\ell} + M_\ell \bar{S}'_{0M_\ell} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{gs'_0}{\gamma} + bs_0 + \frac{ds'_\ell}{\gamma} - fs_\ell \right) \right] \quad (\text{IV } 89)$$

$$C_3 = \frac{1}{2\gamma} \left[Q_0 \frac{qh}{\gamma^2} + M_0 \bar{S}'_{0M_0} + Q_\ell \bar{S}'_{0Q_\ell} + M_\ell \bar{S}'_{0M_\ell} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{hs'_0}{\gamma} + bs_0 + \frac{ds'_\ell}{\gamma} - fs_\ell \right) \right] \quad (\text{IV } 90)$$

$$C_4 = - \frac{1}{2\gamma^2} (M_0 p + s_0) \quad (\text{IV } 91)$$

Sind die Randkräfte und -momente durch die Gleichgewichts- und Deformationsbedingungen bestimmt, so lassen sich die Verschiebung und deren Ableitungen, sowie die Membran- und Biegespannungen an einer beliebigen Stelle der Zylinderschale leicht berechnen.

V. Die Spannungsberechnung von Rotoren, die aus Scheiben und Zylinderschalen aufgebaut sind

§ 1. Herleitung der Grundgleichungen

Die in den vorhergehenden Kapiteln abgeleiteten Einflusszahlen ermöglichen eine übersichtliche Berechnung der in solchen Rotoren auftretenden Spannungen. Für alle Zylinderschalen und Scheiben soll das in Abb. 6 festgelegte Koordinatensystem gelten. Ferner sollen sowohl Kräfte als auch Momente in der eingezeichneten Richtung als positiv bezeichnet werden.

Der Rotor (Abb. 5) wird in Scheiben und Zylinderschalen konstanter Dicke aufgeteilt und die an den Schnittstellen angreifenden Kräfte und Momente eingeführt. Durch Formulieren der Gleichgewichts- und Deformationsbedingungen erhält man ein Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntenen Kräfte und Momente. Die Lage der Schnittstellen ist dabei etwas willkürlich und soll so festgelegt werden, dass der Radius der Zylinderschalenmittelfläche r_0 dem Aussenradius der Scheiben r_a entspricht, und die Enden der Zylinderschalen durch die Mittelflächen der Scheiben begrenzt sind. Diese Aufteilung hat den Vorteil, dass in den Deformationsbedingungen nur die bezogenen Verschiebungen \bar{u}_s und \bar{u}_z auftreten und die Radien r_a und r_0 herausfallen. Die Berechnung der Spannungen der Scheiben ist jedoch nur bis zum Innenradius der Zylinderschalen sinnvoll (Abb. 10).

Für die Schnittstellen der Zylinderschalen und Scheiben können folgende Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden :

$$\begin{aligned} K_1 + Q_{\ell 0} - Q_{01} &= 0 \\ K_2 + Q_{\ell 1} - Q_{02} &= 0 \\ \vdots \\ K_n + Q_{\ell(n-1)} - Q_{0n} &= 0 \end{aligned} \tag{V 1}$$

$$\begin{aligned} M_1 + M_{01} - M_{\ell 0} &= 0 \\ M_2 + M_{02} - M_{\ell 1} &= 0 \\ \vdots \\ M_n + M_{0n} - M_{\ell(n-1)} &= 0 \end{aligned} \tag{V 2}$$

Die weiteren Bedingungen beziehen sich auf die Deformation an den Schnittstellen. Es müssen nämlich sowohl die Verschiebung als auch der Neigungswinkel der Zylinderschale ψ_{-1} mit den entsprechenden Werten der Zylinderschale ψ übereinstimmen und gleich den Werten der Scheibe ψ am Aussenrand sein. Diese, als Deformationsbedingungen bezeichneten Gleichungen, lassen sich demnach wie folgt anschreiben. Es ist dabei zu beachten, dass sich der letzte Index der Einflusszahlen auf die Nummer der Zylinderschale bzw. der Scheibe bezieht.

Abb.5. Beispiel eines Rotors.

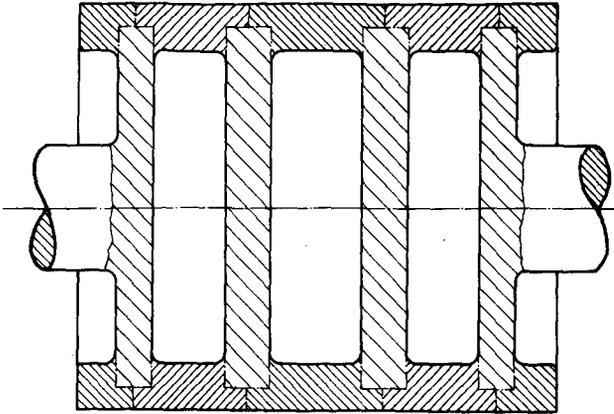
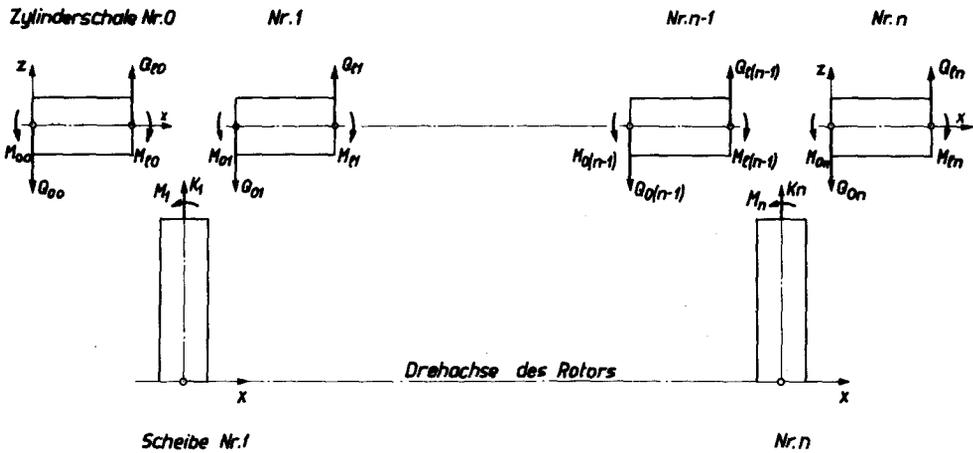


Abb.6. Aufteilung des Rotors in Scheiben und Zylinderschalen.



$$Q_{00} \bar{\xi}_{r_{q_0,0}} + M_{00} \bar{\xi}_{r_{m_0,0}} + Q_{l_0} \bar{\xi}_{r_{q_0,l_0}} + M_{l_0} \bar{\xi}_{r_{m_0,l_0}} + \bar{\xi}_{r_{l_0}}$$

$$= Q_{01} \bar{\xi}_{0q_0,1} + M_{01} \bar{\xi}_{0m_0,1} + Q_{l_1} \bar{\xi}_{0q_{l_1},1} + M_{l_1} \bar{\xi}_{0m_{l_1},1} + \bar{\xi}_{01} = \bar{\xi}_{SK1} K_1 + \bar{\xi}_{uv1}$$

(V3) (V4)

$$Q_{0(n-1)} \bar{\xi}_{r_{q_0(n-1)}} + M_{0(n-1)} \bar{\xi}_{r_{m_0(n-1)}} + Q_{l(n-1)} \bar{\xi}_{r_{q_{l(n-1)}}} + M_{l(n-1)} \bar{\xi}_{r_{m_{l(n-1)}}} + \bar{\xi}_{l(n-1)}$$

$$= Q_{0n} \bar{\xi}_{0q_0,n} + M_{0n} \bar{\xi}_{0m_0,n} + Q_{ln} \bar{\xi}_{0q_{ln},n} + M_{ln} \bar{\xi}_{0m_{ln},n} + \bar{\xi}_{0n} = \bar{\xi}_{SKn} K_n + \bar{\xi}_{uvn}$$

$$Q_{00} \bar{\xi}'_{r_{q_0,0}} + M_{00} \bar{\xi}'_{r_{m_0,0}} + Q_{l_0} \bar{\xi}'_{r_{q_0,l_0}} + M_{l_0} \bar{\xi}'_{r_{m_0,l_0}} + \bar{\xi}'_{r_{l_0}}$$

$$= Q_{01} \bar{\xi}'_{0q_0,1} + M_{01} \bar{\xi}'_{0m_0,1} + Q_{l_1} \bar{\xi}'_{0q_{l_1},1} + M_{l_1} \bar{\xi}'_{0m_{l_1},1} + \bar{\xi}'_{01} = \varphi_{s1} M_1 + \varphi_{v1}$$

(V5) (V6)

$$Q_{0(n-1)} \bar{\xi}'_{r_{q_0(n-1)}} + M_{0(n-1)} \bar{\xi}'_{r_{m_0(n-1)}} + Q_{l(n-1)} \bar{\xi}'_{r_{q_{l(n-1)}}} + M_{l(n-1)} \bar{\xi}'_{r_{m_{l(n-1)}}} + \bar{\xi}'_{l(n-1)}$$

$$= Q_{0n} \bar{\xi}'_{0q_0,n} + M_{0n} \bar{\xi}'_{0m_0,n} + Q_{ln} \bar{\xi}'_{0q_{ln},n} + M_{ln} \bar{\xi}'_{0m_{ln},n} + \bar{\xi}'_{0n} = \varphi_{sn} M_n + \varphi_{vn}$$

Die Zahl der unbekanntenen Kräfte und Momente beläuft sich auf $4 \cdot (n+1)$ bei den Zylinderschalen und auf $2n$ bei den Scheiben, sodass insgesamt $6n + 4$ unbekanntene Größen auftreten, zu deren Bestimmung $4n$ Deformations- und $2n$ Gleichgewichtsbedingungen, also $6n$ Gleichungen vorliegen. Die

vier noch fehlenden Gleichungen beziehen sich auf das linke bzw. rechte Ende der Zylinderschale 0 resp. n und sollen später noch festgelegt werden. Es ist nun naheliegend die 2n Unbekannten K_1 bis K_n und M_1 bis M_n dadurch zu eliminieren, dass man dieselben durch die entsprechenden Grössen der Zylinderschalen ausdrückt und in die Deformationsbedingungen einsetzt. Ersetzt man ferner die Einflusszahlen der Kraft- und Momenteinwirkung am rechten Ende der Zylinderschalen nach den Gleichungen (IV 80) bis (IV 87) durch diejenigen am linken Ende, so gehen die Deformationsbedingungen über in

$$-Q_{00} \bar{S}_{0q,0} + M_{00} \bar{S}_{0M,0} + Q_{10} (\bar{S}_{SK1} - \bar{S}_{0q,0}) + M_{10} \bar{S}_{0M,0} - Q_{01} \bar{S}_{SK1} = \bar{S}_{u,1} - \bar{S}_{10} \quad (V.7)$$

$$-Q_{0(n-1)} \bar{S}_{0q,(n-1)} + M_{0(n-1)} \bar{S}_{0M,(n-1)} + Q_{1(n-1)} (\bar{S}_{SKn} - \bar{S}_{0q,(n-1)}) + M_{1(n-1)} \bar{S}_{0M,(n-1)} - Q_{0n} \bar{S}_{SKn} = \bar{S}_{u,n} - \bar{S}_{1(n-1)}$$

$$Q_{01} (\bar{S}_{0q,1} - \bar{S}_{SK1}) + M_{01} \bar{S}_{0M,1} + Q_{10} \bar{S}_{SK1} + Q_{11} \bar{S}_{0q,1} + M_{11} \bar{S}_{0M,1} = \bar{S}_{u,1} - \bar{S}_{01} \quad (V.8)$$

$$Q_{0n} (\bar{S}_{0q,n} - \bar{S}_{SKn}) + M_{0n} \bar{S}_{0M,n} + Q_{1(n-1)} \bar{S}_{SKn} + Q_{1n} \bar{S}_{0q,n} + M_{1n} \bar{S}_{0M,n} = \bar{S}_{u,n} - \bar{S}_{0n}$$

$$Q_{00} \bar{S}'_{0q,0} - M_{00} \bar{S}'_{0M,0} + Q_{10} \bar{S}'_{0q,0} - M_{10} (\bar{S}'_{0M,0} + \varphi_{S1}) + M_{01} \varphi_{S1} = \varphi_{u,1} - \bar{S}'_{10} \quad (V.9)$$

$$Q_{0(n-1)} \bar{S}'_{0q,(n-1)} - M_{0(n-1)} \bar{S}'_{0M,(n-1)} + Q_{1(n-1)} \bar{S}'_{0q,(n-1)} - M_{1(n-1)} (\bar{S}'_{0M,(n-1)} + \varphi_{Sn}) + M_{0n} \varphi_{Sn} = \varphi_{u,n} - \bar{S}'_{1(n-1)}$$

$$Q_{01} \bar{S}'_{0q,1} + M_{01} (\bar{S}'_{0M,1} + \varphi_{S1}) + Q_{11} \bar{S}'_{0q,1} + M_{11} \bar{S}'_{0M,1} - M_{10} \varphi_{S1} = \varphi_{u,1} - \bar{S}'_{01} \quad (V.10)$$

$$Q_{0n} \bar{S}'_{0q,n} + M_{0n} (\bar{S}'_{0M,n} + \varphi_{Sn}) + Q_{1(n-1)} \bar{S}'_{0q,n} + M_{1(n-1)} \bar{S}'_{0M,n} - M_{1(n-1)} \varphi_{Sn} = \varphi_{u,n} - \bar{S}'_{0n}$$

Für die folgenden Betrachtungen wollen wir annehmen, dass das linke bzw. rechte Ende der Zylinderschale 0 resp. n frei sei. Die vier noch fehlenden Gleichungen lauten damit

$$Q_{00} = M_{00} = Q_{ln} = M_{ln} = 0 \quad (V11)$$

sodass man zur Bestimmung der $4n$ Unbekannten $4n$ Gleichungen besitzt, von denen jedoch, wie man sich leicht überzeugen kann, vier nur einen Teil der Unbekannten enthalten. Es ist deshalb, insbesondere beim Rechnen mit Handrechenmaschinen, zweckmässig, aus diesen 4 Gleichungen 4 Unbekannten zu eliminieren, wodurch ein Gleichungssystem von $4(n-1)$ Gleichungen mit $4(n-1)$ Unbekannten übrig bleibt. Bei zwei Scheiben erhält man somit 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten, deren Bestimmung ca. zwei Stunden in Anspruch nimmt, sofern man sich des Lösungsverfahrens nach Banachiewicz [9] bedient. Da nun der Rechenaufwand im wesentlichen mit der dritten Potenz der Anzahl Unbekannten ansteigt, würde die Auflösung mit Handrechenmaschine bei drei Scheiben ca. 16 Stunden betragen. In den letzten Jahren hat jedoch die Lösung technischer Probleme mit elektronischen Rechenmaschinen weite Verbreitung gefunden und es existieren Rechenprogramme zur Auflösung von Gleichungssystemen mit beliebiger Anzahl Unbekannten. Die Rechenzeit in Sekunden zur Auflösung solcher Gleichungssysteme beträgt dabei ca. $0,1 \cdot n^3$, wobei n die Anzahl der Unbekannten bedeutet. Bei Rotoren mit 6 Scheiben würde sich damit eine Rechenzeit von ca. 13 Minuten ergeben, welche dem heutigen Stand der Technik durchaus angemessen erscheint, umso mehr als sich die Berechnung der Einflusszahlen zur Aufstellung des Gleichungssystems mit den im Anhang enthaltenen Kurvenblättern sehr einfach gestaltet. Wir werden im § 2 und 3 dieses Kapitels sehen, dass sich die Berechnung der Spannungen in Rotoren mittels Einflusszahlen vollständig schematisieren lässt, sodass sich bei wiederholter Durchführung die Aufstellung eines Rechenprogrammes lohnen würde, mittels dessen durch Eingabe der geometrischen und physikalischen Grössen die gesamte Spannungsberechnung der elektronischen Rechenmaschine überlassen werden könnte.

Es ist ferner bemerkenswert, dass die Koeffizienten des Gleichungssystems nur von der geometrischen Form des Rotors abhängen, während die rechten Seiten durch den Temperaturverlauf und die Belastung allein bestimmt sind. Dies ermöglicht, bei richtiger Wahl des Lösungsverfahrens, mit geringem Mehraufwand verschiedene Temperaturverteilungen und Belastungen zu untersuchen.

§ 2. Das praktische Vorgehen bei der Spannungsberechnung

In diesem Abschnitt soll das praktische Vorgehen bei der Spannungsberechnung von Rotoren besprochen werden. Die das Problem bestimmenden geometrische und physikalische Größen, die Abkürzungen und die in den vorhergehenden Kapiteln abgeleiteten Formeln sollen zusammengefasst werden um Spannungsberechnungen ohne eingehendes Studium der vorangehenden Ausführungen durchführen zu können.

Zu diesem Ende sollen zuerst folgende Bezeichnungen wiederholt werden.

E = Elastizitätsmodul

m = Querdehnzahl, welche bei den numerischen Berechnungen zu $10/3$ angenommen wurde.

α = Lineare Wärmedehnzahl

ρ = Dichte

h = Dicke der Scheibe bzw. der Zylinderschale

$$\frac{\bar{h}}{h} = e^{-\frac{\beta}{6} \mu^2} \quad (III 2)$$

bezogene Scheibendicke bei der Scheibe mit dem Profil einer Scheibe "gleicher Festigkeit"

r_0 = Radius der Zylinderschalenmittelfläche

u = Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe bzw. der Zylinderschale

l = Länge der Zylinderschale

ϑ = Temperatur der Mittelfläche der Scheibe bzw. der Zylinderschale

$\Delta\vartheta$ = Temperaturgefälle in x-Richtung der Scheibe bzw. z-Richtung der Zylinderschale

ξ = Verschiebung eines Punktes der Mittelfläche bei der Scheibe in radialer Richtung und bei der Zylinderschale senkrecht zur Erzeugenden

φ = Neigungswinkel, den die Scheibennormale mit der x-Achse bildet.

Die Indizes 0 bzw. l beziehen sich bei der Zylinderschale auf das linke bzw. rechte Ende und bei der Scheibe weisen die Indizes 0 bzw. a auf das Zentrum bzw. den Aussenrand hin.

Die Temperatur einer beliebigen Stelle der Scheibe bzw. der Zylinderschale soll sich angenähert darstellen lassen durch

$$T_{(\mu, x)} = \vartheta(\mu) + x \cdot \frac{\Delta\vartheta(\mu)}{h} \quad (III 10)$$

bzw.

$$T_{(x, z)} = \vartheta(x) + z \cdot \frac{\Delta\vartheta(x)}{h} \quad (IV 1)$$

Bei gegebener Temperaturverteilung sind die Größen \bar{v} und $\Delta \bar{v}$ nach § 2, Kap. I zu bestimmen aus den Beziehungen

$$\bar{v}(\mu) = \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} T(\mu, x) dx \quad (111)$$

$$\Delta \bar{v}(\mu) = \frac{12}{h^2} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} T(\mu, x) x dx \quad (112)$$

bzw.

$$\bar{v}(x) = \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} T(x, z) dz \quad (V 12)$$

$$\Delta \bar{v}(x) = \frac{12}{h^2} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} T(x, z) z dz \quad (V 13)$$

Als dimensionslose Größen und Abkürzungen sind wichtig. Bei der Scheibe

$$\mu = \frac{r}{r_0} \quad (133)$$

$$\bar{s}_s = \frac{S_s}{r_0} \quad (134)$$

$$\bar{h} = \frac{h}{h_0} \quad (135)$$

$$\bar{v} = \frac{v}{v_0} \quad (136)$$

$$\bar{\Delta v} = \frac{\Delta v^3}{\Delta v_a} \quad (137)$$

$$\delta = v_a \alpha \left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (138)$$

$$\lambda_s = \Delta v_a \cdot \frac{r_a}{h_0} \cdot \alpha \left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (139)$$

$$\alpha = \frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{3 u^2}{E} \quad (140)$$

$$\eta = \Delta v_a \cdot \frac{r_a}{h} \cdot \alpha \quad (149)$$

und bei der Zylinderschale

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{r_0} \quad (IV 2)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{r_0} \quad (IV 3)$$

$$\bar{x} = \frac{x}{r_0} \quad (IV 4)$$

$$\bar{v} = \frac{v}{v_0} \quad (IV 5)$$

$$\Delta \bar{v} = \frac{\Delta v^2}{\Delta v_0} \quad (IV 6)$$

$$\lambda_z = \alpha \left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdot \frac{r_0}{h} \cdot \Delta v_0 \quad (IV 7)$$

Das Problem ist durch folgende geometrische und physikalische Grössen bestimmt :

Scheibe :	Aussenradius	r_a
	Dicke	h
	Umfangsgeschwindigkeit	$u = r_a \cdot \omega$
	Temperatur der Mittelfläche	\bar{v}
	Temperaturgefälle senkrecht zur Mittelfläche	$\Delta \bar{v}$
Zylinder- schale :	Radius der Mittelfläche	r_0
	Dicke	h
	Länge	l
	Schaufelzug = spezifische Zugbelastung durch die Schaufeln	P_s
	Umfangsgeschwindigkeit	$u = r_0 \cdot \omega$
	Temperatur der Mittelfläche	\bar{v}
	Temperaturgefälle senkrecht zur Mittelfläche	$\Delta \bar{v}$

Bei der Scheibe konstanter Dicke beginnt man zweckmässig mit der Berechnung der folgenden Einflusszahlen :

$$\overline{S}_{SK} = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{Eh} \quad (II 8)$$

$$\overline{S}_u = \frac{m-1}{4m} \cdot \frac{g \cdot u^2}{E} \quad (II 9)$$

$$\overline{S}_{\bar{v}} = \frac{v_a}{2} \cdot \alpha \cdot (1 + \bar{v}_0) \quad (II 19)$$

$$\bar{\xi}_{uv} = \bar{\xi}_u + \bar{\xi}_v \quad (II 11)$$

$$\varphi_s = \frac{12(m-1) \cdot r_a}{m E h^3} \quad (II 47)$$

$$\varphi_g = \frac{\eta}{2} (1 + \Delta \bar{v}_0) \quad (II 50)$$

Bei der Scheibe mit dem Profil einer Scheibe "gleicher Festigkeit" hat man anstatt dessen die folgenden Einflusszahlen zu bestimmen:

$$\bar{\xi}_{SK} = \frac{m^2-1}{m^2} \cdot \frac{1}{E h_a} \cdot \left(\frac{\bar{\xi}_H}{\Gamma} \right)_{\mu=1} \quad (III 42)$$

$$\bar{\xi}_v = \delta \left[\left(1 - \frac{\lambda}{\delta} \right) \cdot \frac{\bar{\xi}_H}{\Gamma} + \frac{\bar{\xi}_{Pv}}{\delta} \right]_{\mu=1} \quad (III 43)$$

$$\bar{\xi}_u = \lambda \left[-\frac{\phi}{\lambda} \cdot \frac{\bar{\xi}_H}{\Gamma} + \frac{\bar{\xi}_{Pu}}{\lambda} \right]_{\mu=1} \quad (III 44)$$

$$\bar{\xi}_{uv} = \bar{\xi}_u + \bar{\xi}_v \quad (III 45)$$

$$\varphi_s = \frac{12(m^2-1) r_a}{m^2 E h_a^3} \cdot \left(\frac{\varphi_{H0}}{\Delta} \right)_{\mu=1} \quad (III 90)$$

$$\varphi_{\delta} = \lambda_S \left[\frac{\varphi_P}{\lambda_S} - \left(\frac{\pi}{\lambda_S} - e^{\frac{\beta}{\delta}} \right) \cdot \frac{\varphi_{H_0}}{\Delta} \right]_{\mu^{-1}} \quad (\text{III } 91)$$

Die darin auftretenden Funktionen sind aus den im Anhang enthaltenen Kurvenblätter S. 82 - 104 zu entnehmen und definiert durch

$$\Gamma = \bar{S}_H' + \frac{1}{m} \cdot \frac{\bar{S}_H}{\mu} \quad (\text{III } 36)$$

$$\mathcal{L} = \bar{S}_{P\delta}' + \frac{1}{m} \cdot \frac{\bar{S}_{P\delta}}{\mu} \quad (\text{III } 37)$$

$$\Phi = \bar{S}_{P_u}' + \frac{1}{m} \cdot \frac{\bar{S}_{P_u}}{\mu} \quad (\text{III } 38)$$

$$\Delta = \varphi_{H_0}' + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi_{H_0}}{\mu} \quad (\text{III } 86)$$

$$\Pi = \varphi_P' + \frac{1}{m} \cdot \frac{\varphi_P}{\mu} \quad (\text{III } 87)$$

Hierbei ist

$$\bar{S}_{P\delta} = \delta \mu \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \mu^{\nu} \quad (\text{III } 14)$$

die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (III 8) mit Temperaturglied

$$\bar{S}_{P_u} = -\alpha \mu \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \mu^{\nu} \quad (\text{III } 30)$$

die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (III 8) mit Fliehkraft,

$$\varphi_p = \lambda_s \mu e^{\frac{\beta}{6} \mu^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \mu^{\nu} \quad (\text{III } 70)$$

die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (III 51),

$$\varphi_{H0} / \mu e^{-\mu^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \mu^{2n} \quad (\text{III } 52)$$

die Lösung der homogenen Differentialgleichung (III 51), und

$\bar{\xi}_H$ die Lösung der homogenen Differentialgleichungen (III 8), welche aus φ_{H0} gewonnen werden kann, indem φ_{H0} durch $\bar{\xi}_H$ und β durch $\beta/3$ ersetzt wird. Weiter ist

$$\beta = 6 \ln \frac{h_0}{h_a} \quad (\text{III } 5)$$

also durch das Verhältnis der Scheibendicke im Zentrum und am Aussenrand gegeben.

Wird der Rotor so erwärmt, dass überall dieselbe Temperatur vorhanden ist, so entstehen keine Wärmespannungen, sofern die Werte der Wärmedehnzahlen in Abhängigkeit von der Temperatur bei den Scheiben und den Zylinderschalen gleich sind und sich der Rotor frei dehnen kann. Wärmespannungen werden somit unter den oben erwähnten Voraussetzungen nur durch Temperaturunterschiede innerhalb des Rotors hervorgerufen. Man kann daher willkürlich die tiefste Temperatur im Rotor als Nullpunkt der Temperaturmessung wählen. Damit sind auch die Nullpunkte sämtlicher Verschiebungen festgelegt. Alle Verschiebungen sind Null, wenn der Rotor in Ruhe ist, keine äusseren Kräfte auf ihn einwirken und überall die als Nullpunkt gewählte Temperatur aufweist.

Der Temperaturverlauf der Mittelfläche soll dem Ansatz $\bar{v} = \bar{v}_0 + (1 - \bar{v}_0) \mu^2$ genügen, während das Temperaturgefälle den Ansatz $\Delta \bar{v} = \Delta \bar{v}_0 + (1 - \Delta \bar{v}_0) \mu^2$ zu erfüllen hat. Die Parameter \bar{v}_0 bzw. $\Delta \bar{v}_0$ dienen zur Charakterisierung des Verlaufes längs des Scheibenradius. Der erste ist voraussetzungsgemäss $0 \leq \bar{v}_0 \leq 1$ und da das Temperaturgefälle längs der Scheibe dieselbe Richtung hat, so gilt für den zweiten ebenfalls $0 \leq \Delta \bar{v}_0 \leq 1$.

Das Vorzeichen des Temperaturgefälles $\Delta \bar{v}_a$ ist nach Gleichung (I 10) so festgelegt, dass dasselbe positiv zu nehmen ist, wenn die Temperatur an der Aussenfaser $x = +\frac{h}{2}$ höher ist als bei $x = -\frac{h}{2}$. Um Uebereinstimmung mit dem in Abb. 6 gewählten Richtungssinn der Kräfte und Momente zu gewährleisten, ist der in Abb. 7 eingezeichnete positive Richtungssinn der Einflusszahlen zu beachten.

Als Vorarbeit sind bei der Zylinderschale zuerst die Grössen

$$\gamma^4 = \frac{3(m^2-1)}{m^2} \cdot \left(\frac{r_0}{h}\right)^2 \quad (\text{IV } 8)$$

$$\Omega = \gamma \bar{\ell} \quad (\text{IV } 33)$$

$$p = \frac{12(m^2-1)r_0}{m^2 E h^3} \quad (\text{IV } 34)$$

$$q = \frac{12(m^2-1)r_0^2}{m^2 E h^3} = p r_0 \quad (\text{IV } 35)$$

zu berechnen, und die Werte

$$a = \frac{\sin \Omega \cos \Omega - \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 36)$$

$$b = \frac{\sin \Omega \cos \Omega + \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 37)$$

$$c = \frac{\sin^2 \Omega + \sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 38)$$

$$d = \frac{\sin \Omega \sin \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 39)$$

$$e = \frac{\cos \Omega \sin \Omega - \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 40)$$

$$f = \frac{\cos \Omega \sin \Omega + \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 41)$$

aus dem Kurvenblatt S. 111 zu entnehmen.

Abb.7. Positiver Richtungssinn der Einflusszahlen der Scheibe.

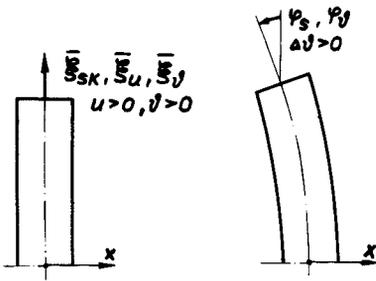
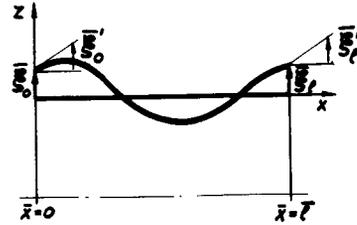


Abb.8. Positiver Richtungssinn der Einflusszahlen der Zylinderschale.



Damit lassen sich die Einflusszahlen der Kraft- und Momentenwirkung nach den Gleichungen

gen

$$S_{0a_0} = -\frac{q a}{2 \gamma^3} \quad (\text{IV } 60)$$

$$S'_{0a_0} = \frac{q c}{2 \gamma^2} \quad (\text{IV } 61)$$

$$S_{0a_l} = -\frac{q e}{2 \gamma^3} \quad (\text{IV } 68)$$

$$\overline{S_{OQ_P}}' = \frac{q d}{\gamma^2} \quad (\text{IV } 69)$$

$$\overline{S_{OM_0}}' = -\frac{\rho c}{2 \gamma^2} \quad (\text{IV } 64)$$

$$\overline{S_{OM_0}}' = \frac{\rho b}{\gamma} \quad (\text{IV } 65)$$

$$\overline{S_{OM_P}}' = \frac{\rho d}{\gamma^2} \quad (\text{IV } 72)$$

$$\overline{S_{OM_P}}' = -\frac{\rho f}{\gamma} \quad (\text{IV } 73)$$

berechnen.

Als nächster Schritt sind die Ausdrücke

$$\chi = \frac{r_0}{h} \cdot \frac{p}{E} \quad (\text{IV } 9)$$

und

$$\Psi = \alpha v_0 \bar{v} - \frac{m \alpha}{12(m-1)} \cdot \frac{h}{r_0} \cdot \Delta v_0 \Delta \bar{v}^3 \quad (\text{IV } 10)$$

in je eine höchstens viergliedrige Potenzreihe der Gestalt

$$P(\bar{x}) = P_0 + P_1 \bar{x} + P_2 \bar{x}^2 + P_3 \bar{x}^3 \quad (\text{IV } 14)$$

zu entwickeln, sofern dieselben nicht in dieser Form vorliegen. Die Belastung p setzt sich zusammen aus dem Schaufelzug p_s und der Fliehkraft der Zylinderschale, welche durch

$$p = g \cdot \frac{h}{r_0} \cdot u^2 \quad (\text{V } 14)$$

ausgedrückt werden kann.

Damit können die Grössen

$$s = \chi'' + \psi'' + \lambda_z \Delta \bar{v} \quad (\text{IV } 44)$$

$$i = \chi + \psi \quad (\text{IV } 45)$$

und die Einflusszahlen der Einwirkung der Belastung und der Wärmedeformation

$$\bar{s}_0' = -\frac{1}{2r^2} \left[\frac{a s_0'}{r} + c s_0 + \frac{e s_l'}{r} - 2d s_l \right] + i_0 \quad (\text{IV } 76)$$

$$\bar{s}_0' = \frac{1}{2r} \left[\frac{c s_0'}{r} + 2b s_0 + 2 \left(\frac{d s_l'}{r} - f s_l \right) \right] + i_0' \quad (\text{IV } 77)$$

$$\bar{s}_l' = \frac{1}{2r^2} \left[\frac{e s_0'}{r} + 2d s_0 + \frac{a s_l'}{r} - c s_l \right] + i_l \quad (\text{IV } 78)$$

$$\bar{s}_l' = \frac{1}{2r} \left[2 \left(\frac{d s_0'}{r} + f s_0 \right) + \frac{c s_l'}{r} - 2b s_l \right] + i_l' \quad (\text{IV } 79)$$

berechnet werden.

Der positive Richtungssinn der Einflusszahlen der Zylinderschale ist in Abb. 8 angedeutet. Das Temperaturgefälle in Gleichung (IV 7) ist gemäss (IV 1) positiv einzusetzen, wenn die Temperatur der Aussenfaser $z = +\frac{h}{2}$ höher ist als bei $z = -\frac{h}{2}$. Es ist ferner bemerkenswert, dass die verschiedenen Dicken der Zylinderschalen ohne Mehrarbeit leicht berücksichtigt werden können. Die ein-

schränkenden Voraussetzungen, die bisher gemacht wurden, beziehen sich lediglich auf die Konstanz der Dicke der einzelnen Zylinderschalen, sowie auf die oben erwähnte Entwickelbarkeit der Funktionen X und Ψ

Damit sind sämtliche Grössen berechnet, um das Gleichungssystem (V 7) bis (V 11) in numerischer Form anschreiben zu können. Das im § 1 dieses Kapitels erwähnte Lösungsverfahren liefert zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen (V 1) (V 2) die Randkräfte und Momente, sodass sich die Konstanten

$$C_1 = Q_0 \bar{F}_{00_0} + M_0 \bar{F}_{0M_0} + Q_l \bar{F}_{0Q_l} + M_l \bar{F}_{0M_l} - \frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{a s'_0}{\gamma} + c s_0 + \frac{e s'_l}{\gamma} - 2d s_l \right) \quad (\text{IV } 88)$$

$$C_2 = \frac{1}{2\gamma} \left[Q_0 \frac{qg}{\gamma^2} + M_0 \bar{F}'_{0M_0} + Q_l \bar{F}'_{0Q_l} + M_l \bar{F}'_{0M_l} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g s'_0}{\gamma} + b s_0 + \frac{d s'_l}{\gamma} - f s_l \right) \right] \quad (\text{IV } 89)$$

$$C_3 = \frac{1}{2\gamma} \left[Q_0 \frac{qh}{\gamma^2} + M_0 \bar{F}'_{0M_0} + Q_l \bar{F}'_{0Q_l} + M_l \bar{F}'_{0M_l} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{h s'_0}{\gamma} + b s_0 + \frac{d s'_l}{\gamma} - f s_l \right) \right] \quad (\text{IV } 90)$$

$$C_4 = -\frac{1}{2\gamma^2} (M_0 p + s_0) \quad (\text{IV } 91)$$

bestimmen lassen, wobei die Grössen

$$g = \frac{\sin^2 Q}{\sin^2 Q - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 42)$$

$$h = \frac{\sin^2 Q}{\sin^2 Q - \sin^2 \Omega} \quad (\text{IV } 43)$$

wiederum aus dem Kurvenblatt S. 111 zu entnehmen sind.

Die Kenntnis dieser Konstanten führt zur Verschiebung

$$\begin{aligned} \bar{\xi} = & C_1 \cos(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) + C_2 \cos(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) + C_3 \sin(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) \\ & + C_4 \sin(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) + \chi + \psi \end{aligned} \quad (\text{IV } 15)$$

und deren zweiten Ableitung

$$\begin{aligned} \bar{\xi}'' = & 2\gamma^2 [-C_1 \sin(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) + C_2 \sin(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) - C_3 \cos(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) \\ & + C_4 \cos(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x})] + \chi'' + \psi'' \end{aligned} \quad (\text{IV } 17)$$

an einer beliebigen Stelle der Zylinderschale, wobei das Kurvenblatt S. 112 der Ausdrücke

$$\cos(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) \quad (\text{V } 15)$$

$$\cos(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) \quad (\text{V } 16)$$

$$\sin(\gamma \bar{x}) \cos(\gamma \bar{x}) \quad (\text{V } 17)$$

$$\sin(\gamma \bar{x}) \sin(\gamma \bar{x}) \quad (\text{V } 18)$$

wiederum nützliche Dienste leistet.

Die Membran- bzw. Biegespannungen mit deren Grösstwerten für $z = \pm h/2$ ergeben sich vollends aus

$$\sigma_{y0} = E \left(\bar{\xi} - \alpha \nu_0 \bar{\psi} \right) \quad (\text{IV } 25)$$

bzw.

$$\sigma_{xb} = \bar{\tau} \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{h}{2r_0} \left(\bar{\xi}' + \lambda_z \Delta \bar{\psi} \right) \quad (\text{IV } 19)$$

$$\sigma_{yb} = \mp \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{h}{2r_0} \cdot \left(\frac{1}{m} \cdot \bar{S}'' + \lambda_z \Delta \bar{v} \right) \quad (\text{IV } 20)$$

womit der Spannungszustand der Zylinderschale vollständig bekannt ist.

Die Membranspannungen der Scheibe konstanter Dicke berechnen sich ferner aus

$$\sigma_{ro} = \sigma_a + \frac{3m+1}{8m} \cdot g u^2 (1 - \mu^2) + \sigma_{roT} \quad (\text{II } 12)$$

$$\sigma_{to} = \sigma_a + \frac{3m+1}{8m} \cdot g u^2 \left(1 - \frac{m+3}{3m+1} \cdot \mu^2 \right) + \sigma_{toT} \quad (\text{II } 13)$$

mit

$$\sigma_{roT} = \frac{\alpha E v_a}{4} \cdot (1 - \bar{v}_0) (1 - \mu^2) \quad (\text{II } 20)$$

$$\sigma_{toT} = \frac{\alpha E v_a}{4} \cdot (1 - \bar{v}_0) (1 - 3\mu^2) \quad (\text{II } 21)$$

und die Grösstwerte der Biegespannungen an der Aussenfaser $x = \pm h/2$ werden

$$\sigma_{rb} = \pm \frac{6}{h^2} \cdot M \pm \frac{E}{8} \cdot \alpha \Delta v_a (1 - \Delta \bar{v}_0) (1 - \mu^2) \quad (\text{II } 51)$$

$$\sigma_{tb} = \pm \frac{6}{h^2} \cdot M \pm \frac{E}{8} \cdot \alpha \Delta v_a (1 - \Delta \bar{v}_0) (1 - 3\mu^2) \quad (\text{II } 52)$$

Bei der Scheibe mit dem Profil einer Scheibe "gleicher Festigkeit" können die Werte der Ausdrücke

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{m} \cdot \bar{S}_H' + \frac{\bar{S}_H}{\mu} \quad (\text{III } 46)$$

$$\bar{\Lambda} = \frac{1}{m} \cdot \bar{S}_{P\beta}' + \frac{\bar{S}_{P\beta}}{\mu} \quad (\text{III } 47)$$

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{m} \cdot \bar{\Sigma}'_{Pu} + \frac{\bar{\Sigma}_{Pu}}{\mu} \quad (III 48)$$

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{m} \cdot \varphi'_{Ho} + \frac{\varphi_{Ho}}{\mu} \quad (III 92)$$

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{m} \cdot \varphi'_p + \frac{\varphi_p}{\mu} \quad (III 93)$$

wiederm den entsprechenden Kurvenblättern entnommen werden. Damit erhält man als Membranspannungen

$$\sigma_{ro} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \left\{ \left(\frac{K \bar{\Sigma}_{SK}}{\bar{\Sigma}_H} \right)_{\mu=1} + \frac{\delta - \lambda - \Phi}{\Gamma} \Big|_{\mu=1} \right\} \Gamma + \lambda + \Phi - \delta \bar{v} \quad (III 49)$$

$$\sigma_{to} = \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \left\{ \left(\frac{K \bar{\Sigma}_{SK}}{\bar{\Sigma}_H} \right)_{\mu=1} + \frac{\delta - \lambda - \Phi}{\Gamma} \Big|_{\mu=1} \right\} \bar{\Gamma} + \bar{\lambda} + \bar{\Phi} - \delta \bar{v} \quad (III 50)$$

und für die Grösstwerte der Biegespannungen an der Aussenfaser $x = \pm h/2$

$$\sigma_{rb} = \pm \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{h_o}{2r_a} \cdot \left\{ e^{-\frac{\beta}{6} \mu^2 r} \left[\left(\frac{\varphi_s M}{\varphi_{Ho}} \right)_{\mu=1} - \frac{\pi |_{\mu=1} - \lambda_s e^{\frac{\beta}{6}}}{\Delta |_{\mu=1}} \right] \Delta + \bar{\pi} \right\} - \lambda_s \Delta \bar{v} \quad (III 94)$$

$$\sigma_{tb} = \pm \frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{h_o}{2r_a} \cdot \left\{ e^{-\frac{\beta}{6} \mu^2 r} \left[\left(\frac{\varphi_s M}{\varphi_{Ho}} \right)_{\mu=1} - \frac{\pi |_{\mu=1} - \lambda_s e^{\frac{\beta}{6}}}{\Delta |_{\mu=1}} \right] \bar{\Delta} + \bar{\pi} \right\} - \lambda_s \Delta \bar{v} \quad (III 95)$$

womit der Spannungszustand der Scheiben ebenfalls bekannt ist.

§ 3. Die numerische Durchführung der Rechnung an Hand einiger Beispiele

3.1. Gasturbinen-Rotor mit Scheiben konstanter Dicke

Aus Abb. 9 entnehmen wir als Grundlage der Berechnung folgende Größen :

			Scheibe Nr. 1	Scheibe Nr. 2
Aussenradius	r_a	cm	57,5	57,5
Dicke	h	cm	12	12
Umfangsgeschwindigkeit	$u = r_a \cdot \omega$	cm/sek	$1,805 \cdot 10^4$	$1,805 \cdot 10^4$
Temperatur der Mittelfläche am Aussenrand	ϑ_a	°C	97,5	32,5
	$\bar{\vartheta}_0$		0	0
Temperaturgefälle senkrecht zur Mittelfläche	$\Delta\vartheta_a$	°C	-21	-21
	$\Delta\bar{\vartheta}_0$		0,25	0,25

			Zylinderschale		
			Nr. 0	Nr. 1	Nr. 2
Radius der Mittelfläche	r_0	cm	57,5	57,5	57,5
Dicke	h	cm	15	15	15
Länge	l	cm	18,5	37	18,5
Schaufelzug	p_s	Mdyn/cm ²	120	120	120
Umfangsgeschwindigkeit	$u = r_0 \cdot \omega$	cm/sek	$1,805 \cdot 10^4$	$1,805 \cdot 10^4$	$1,805 \cdot 10^4$

Temperatur der Mittelfläche $\bar{\vartheta}$ und Temperaturgefälle senkrecht zur Mittelfläche $\Delta\bar{\vartheta}$ in °C

Zylinderschale Nr. 0:	$\bar{\vartheta} = \Delta\bar{\vartheta} = 0,777$	(1,289- \bar{x})
" " Nr. 1:	$\bar{\vartheta} = \Delta\bar{\vartheta} = 1,037$	(0,965- \bar{x})
" " Nr. 2:	$\bar{\vartheta} = \Delta\bar{\vartheta} = 3,11$	(0,3215- \bar{x})

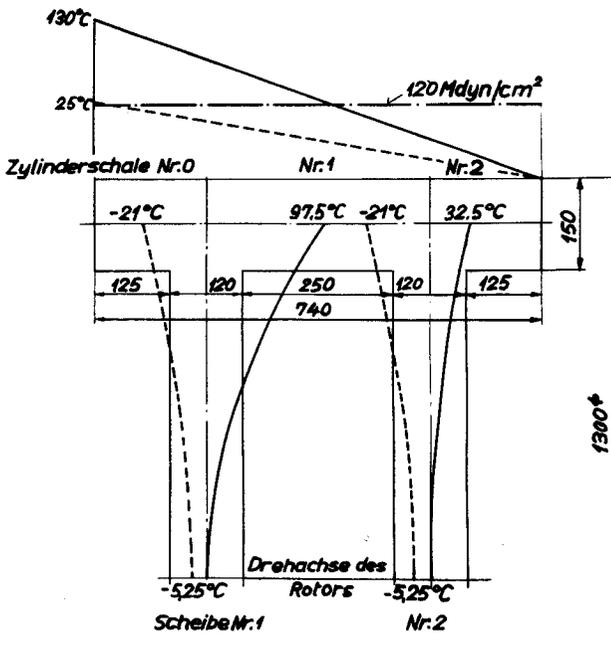
Mit einem Elastizitätsmodul E von $2,06 \cdot 10^6$ Mdyn/cm², einer Querdehnzahl μ von $10/3$, einer linearen Wärmedehnzahl α von $12 \cdot 10^{-6} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ und einer Dichte ρ für Stahl von $7,84 \cdot 10^{-6}$ Mdyn/cm² erhält man als Einflusszahlen der Scheiben

Nr. 1		Nr. 2	
$\bar{\epsilon}_{SK1}$	$= 2,836 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}}{\text{Mdyn}}$	$\bar{\epsilon}_{SK2}$	$= 2,836 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}}{\text{Mdyn}}$
φ_{S1}	$= 1,359 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{Mdyn}}$	φ_{S2}	$= 1,359 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{Mdyn}}$
$\bar{\epsilon}_{u\upsilon 1}$	$= 8,020 \cdot 10^{-4}$	$\bar{\epsilon}_{u\upsilon 2}$	$= 4,120 \cdot 10^{-4}$
$\varphi_{\delta 1}$	$= -7,540 \cdot 10^{-4}$	$\varphi_{\delta 2}$	$= -7,540 \cdot 10^{-4}$

Abb.9. Gasturbinen-Rotor mit Scheiben konstanter Dicke.

- Verlauf der Temperatur der Mittelfläche
- - - Verlauf des Temperaturgefälles senkrecht zur Mittelfläche
- · - · - Schaufelzug, über die ganze Fläche verteilt gedacht

Drehzahl $n = 3000 \text{ U/min}$



Die Grössen γ^4 , p und q , welche für alle drei Zylinderschalen gleiche Werte annehmen, werden

$$\gamma^4 = 40,20 \qquad p = 9,047 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{Mdyn}} \qquad q = 5,202 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{Mdyn}}$$

und mit $\Omega = 0,81$ bzw. $1,62$ für die Zylinderschalen Nr. 0 und 2 bzw. Zylinderschale Nr. 1 erhält man

	Zylinderschalen	
	Nr. 0 und 2	Nr. 1
a =	2,480	1,312
b =	5,940	1,292
c =	4,630	1,409
d =	2,265	0,496
e =	1,230	0,559
f =	5,530	0,512

wobei zu beachten ist, dass bei genaueren Rechnungen eine Interpolation mit den im Anhang enthaltenen Tabellen S. 105 - 108 einer Entnahme der Werte aus dem Kurvenblatt S. 111 vorzuziehen ist. Die Einflusszahlen der Kraft- und Momenteinwirkung ergeben sich somit zu

	Zylinderschalen	
	Nr. 0 und 2	Nr. 1
$\frac{U_{0Q0}}{U_{0Q0}}$ =	$-4,034 \cdot 10^{-7} \frac{\text{cm}}{\text{Mdyn}}$	$-2,137 \cdot 10^{-7} \frac{\text{cm}}{\text{Mdyn}}$
$\frac{U'_{0Q0}}{U'_{0Q0}}$ =	$1,895 \cdot 10^{-6}$ "	$5,763 \cdot 10^{-7}$ "
$\frac{U_{0Qp}}{U_{0Qp}}$ =	_____	$-9,098 \cdot 10^{-8}$ "
$\frac{U'_{0Qp}}{U'_{0Qp}}$ =	_____	$4,060 \cdot 10^{-7}$ "
$\frac{U_{0M0}}{U_{0M0}}$ =	$-3,300 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{Mdyn}}$	$-1,004 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{Mdyn}}$
$\frac{U'_{0M0}}{U'_{0M0}}$ =	$2,132 \cdot 10^{-7}$ "	$4,641 \cdot 10^{-8}$ "
$\frac{U_{0Mp}}{U_{0Mp}}$ =	_____	$7,078 \cdot 10^{-9}$ "
$\frac{U'_{0Mp}}{U'_{0Mp}}$ =	_____	$-1,841 \cdot 10^{-8}$ "

Die Grösse χ , welche für alle drei Zylinderschalen den gleichen Wert annimmt, wird

$$\chi = 8 \cdot \frac{u^2}{E} + \frac{r_0}{h} \cdot \frac{p_s}{E} = 1,24 \cdot 10^{-3} + 2,235 \cdot 10^{-4} = 1,4635 \cdot 10^{-3}$$

und die Ausdrücke für ψ und $\lambda_Z \Delta \bar{v}$ lauten

Zylinderschale Nr. 0 $\psi = 1,211 \cdot 10^{-3} \cdot (1,289 - \bar{x})$

$\lambda_Z \Delta \bar{v} = 1,16 \cdot 10^{-3} \cdot (1,289 - \bar{x})$

" " Nr. 1 $\psi = 1,211 \cdot 10^{-3} \cdot (0,965 - \bar{x})$

$\lambda_Z \Delta \bar{v} = 1,16 \cdot 10^{-3} \cdot (0,965 - \bar{x})$

" " Nr. 2 $\psi = 1,211 \cdot 10^{-3} \cdot (0,3215 - \bar{x})$

$\lambda_Z \Delta \bar{v} = 1,16 \cdot 10^{-3} \cdot (0,3215 - \bar{x})$

Da $\chi' = \chi'' = \psi'' = 0$ ist, lassen sich die Grössen i und $s = \lambda_Z \Delta \bar{v}$ für das linke und rechte Ende der Zylinderschalen wie folgt anschreiben:

Zylinderschale Nr. 0	Zylinderschale Nr. 1	Zylinderschale Nr. 2
$i_o = 2,6355 \cdot 10^{-3}$	$i_o = 2,6355 \cdot 10^{-3}$	$i_o = 1,8535 \cdot 10^{-3}$
$i_\rho = 2,6355 \cdot 10^{-3}$	$i_\rho = 1,8535 \cdot 10^{-3}$	_____
_____	$s_o = 1,121 \cdot 10^{-3}$	$s_o = 3,73 \cdot 10^{-4}$
$s_\rho = 1,121 \cdot 10^{-3}$	$s_\rho = 3,73 \cdot 10^{-4}$	_____

Mit den für alle Zylinderschalen konstanten Werten $i' = -1,211 \cdot 10^{-3}$ und $s' = \lambda_Z \Delta \bar{v}' = -1,16 \cdot 10^{-3}$ werden die Einflusszahlen der Einwirkung der Belastung, und der Wärmedeformation

Zylinderschale Nr. 0	Zylinderschale Nr. 1	Zylinderschale Nr. 2
$\frac{M_{00}'}{M_0} =$ _____	$2,6081 \cdot 10^{-3}$	$1,8518 \cdot 10^{-3}$
$\frac{M_{01}'}{M_0} =$ _____	$-9,295 \cdot 10^{-4}$	$-1,1674 \cdot 10^{-3}$
$\frac{M_{02}'}{M_0} = 2,6243 \cdot 10^{-3}$	$1,8321 \cdot 10^{-3}$	_____
$\frac{M_{03}'}{M_0} = -1,416 \cdot 10^{-3}$	$-1,3929 \cdot 10^{-3}$	_____

Da die Zylinderschalen Nr. 0 und 2 am linken bzw. rechten Ende frei sind, lautet das Gleichungssystem (V 7) bis (V 10) der verbleibenden Kräfte und Momente

$$\begin{aligned}
 43,176 Q_{P0} - 3,300 M_{P0} - 2,836 Q_{O1} &= -182230 \\
 18,950 Q_{P0} - 3,491 M_{P0} + 1,359 M_{O1} &= + 6620 \\
 -43,176 Q_{O2} - 3,300 M_{O2} + 2,836 Q_{P1} &= -143980 \\
 18,950 Q_{O2} + 3,491 M_{O2} - 1,359 M_{P1} &= + 4134
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 90,980 Q_{O1} + 7,078 M_{O1} + 242,060 Q_{P1} - 10,040 M_{P1} - 28,360 Q_{O2} &= -1420100 \\
 -242,060 Q_{O1} - 10,040 M_{O1} - 90,980 Q_{P1} + 7,078 M_{P1} + 28,360 Q_{P0} &= -1806100 \\
 40,600 Q_{O1} + 1,841 M_{O1} + 57,630 Q_{P1} - 18,231 M_{P1} + 13,590 M_{O2} &= + 63890 \\
 57,630 Q_{O1} + 18,231 M_{O1} + 40,600 Q_{P1} - 1,841 M_{P1} - 13,590 M_{P0} &= + 17550
 \end{aligned}$$

Aus den ersten vier Gleichungen lassen sich die Unbekannten Q_{P0} , M_{P0} , Q_{O2} und M_{O2} leicht eliminieren, sodass noch die vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
 90,984 Q_{O1} + 7,078 M_{O1} + 238,863 Q_{P1} - 8,594 M_{P1} &= -1262895,389 \\
 -238,863 Q_{O1} - 8,594 M_{O1} - 90,984 Q_{P1} + 7,078 M_{P1} &= -1594560,855 \\
 40,596 Q_{O1} + 1,841 M_{O1} + 49,347 Q_{P1} - 9,189 M_{P1} &= +456947,683 \\
 49,347 Q_{O1} + 9,189 M_{O1} + 40,596 Q_{P1} - 1,841 M_{P1} &= -558802,898
 \end{aligned}$$

mit den vier Unbekannten Q_{O1} , M_{O1} , Q_{P1} und M_{P1} übrig bleiben, welche zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen (V 1) und (V 2) folgende Werte für die eingeführten Kräfte und Momente ergeben :

Zylinderschale Nr. 0	Zylinderschale Nr. 1	Zylinderschale Nr. 2
	$Q_{O1} = 11677 \frac{\text{Mdyn}}{\text{cm}}$	$Q_{O2} = 7925 \frac{\text{Mdyn}}{\text{cm}}$
	$M_{O1} = -95850 \text{ Mdyn}$	$M_{O2} = -68078 \text{ Mdyn}$
$Q_{P0} = -11024 \frac{\text{Mdyn}}{\text{cm}}$	$Q_{P1} = -9319 \frac{\text{Mdyn}}{\text{cm}}$	
$M_{P0} = -99063 \text{ Mdyn}$	$M_{P1} = -67390 \text{ Mdyn}$	

Scheibe Nr. 1	Scheibe Nr. 2
$K_1 = 22701 \frac{\text{Mdyn}}{\text{cm}}$	$K_2 = 17244 \frac{\text{Mdyn}}{\text{cm}}$
$M_1 = -3213 \text{ Mdyn}$	$M_2 = 689 \text{ Mdyn}$

Mit den Werten $g = 1,821$, $h = 2,82$ der Zylinderschalen Nr. 0 und Nr. 2 und $g = 0,204$, $h = 1,205$ für die Zylinderschale Nr. 1 erhält man die Konstanten :

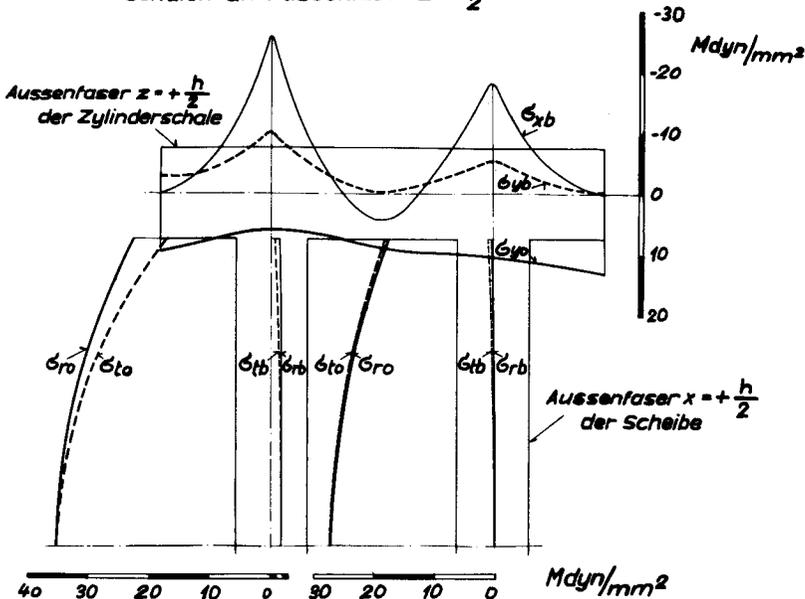
Zylinderschale Nr. 0	Zylinderschale Nr. 1	Zylinderschale Nr. 2
$C_1 = -10,0253 \cdot 10^{-4}$	$-11,8979 \cdot 10^{-4}$	$-9,5233 \cdot 10^{-4}$
$C_2 = -0,9115 \cdot 10^{-4}$	$-9,2624 \cdot 10^{-4}$	$-6,4357 \cdot 10^{-4}$
$C_3 = -1,2736 \cdot 10^{-4}$	$+9,3761 \cdot 10^{-4}$	$+6,0810 \cdot 10^{-4}$
$C_4 = -1,1748 \cdot 10^{-4}$	$+5,9456 \cdot 10^{-4}$	$+4,5561 \cdot 10^{-4}$

Damit kann die Verschiebung $\overset{S}{u}$ der Zylinderschalen mit deren zweiten Ableitung nach (IV 15) und (IV 17) leicht ermittelt werden und man gelangt zu dem in Abb. 10 dargestellten Spannungsverlauf.

Im Zentrum der Scheiben treten beachtliche Membranspannungen auf, insbesondere bei der Scheibe Nr. 1 wird $\sigma_{ro} = \sigma_{to} = 35,5 \text{ Mdyn/mm}^2$, hingegen sind die Biegespannungen kleiner als ca. 10% der ersteren und deshalb nicht von Bedeutung. Die tangentialen Membranspannungen des zylindrischen Teils des Rotors liegen zwischen 5,7 und 13 Mdyn/mm². Die in den Scheibenebenen an den Zylinderschalen auftretenden Biegespannungen sind auf die Einspannwirkung der Scheiben zurückzuführen, welche zusammen mit dem höheren Temperaturgefälle in der Ebene der Scheibe Nr. 1 daselbst zu meridionalen Biegespannungen von 26 Mdyn/mm² führt.

Abb. 10. Beanspruchung des Gasturbinen-Rotors mit Scheiben konstanter Dicke.

- σ_{ro}, σ_{to} = Radiale bzw. tangentiale Membranspannung der Scheiben
- σ_{yo} = Tangentiale Membranspannung der Zylinderschalen
- σ_{rb}, σ_{tb} = Radiale bzw. tangentiale Biegespannung der Scheiben an Aussenfaser $x = +\frac{h}{2}$
- σ_{xb}, σ_{yb} = Meridionale bzw. tangentiale Biegespannung der Zylinderschalen an Aussenfaser $z = +\frac{h}{2}$



3.2 Gasturbinen-Rotor mit Scheiben mit dem Profil einer Scheibe "gleicher Festigkeit"

Die hohen Membranspannungen im Zentrum der Scheiben können erniedrigt werden, indem man dieselben gegen das Zentrum hin dicker ausführt. Um den Einfluss einer solchen Aenderung zu untersuchen, sollen im vorhergehenden Beispiel sowohl die Temperaturverteilung als auch die Belastung unverändert beibehalten werden. Die Scheiben sollen jedoch durch solche mit dem Profil einer Scheibe "gleicher Festigkeit" mit $\beta = 3$ ersetzt werden. Dadurch müssen die Einflusszahlen der Scheiben neu berechnet werden, und man gelangt zu einem leicht modifizierten Gleichungssystem für die Randkräfte und -momente, dessen Auflösung zu den in Abb. 11 wiedergegebenen Spannungen führt. Da der Rechnungsgang analog dem Beispiel 3.1 durchzuführen ist, soll nur auf die davon abweichende Bestimmung der Einflusszahlen der Scheiben eingegangen werden.

Zur Berechnung der Einflusszahlen der Einwirkung einer Radialkraft am Scheibenumfang bestimmen wir vorerst

$$\frac{m^2 - 1}{m^2} \cdot \frac{1}{E \cdot h_a} = \frac{0,91}{2,06 \cdot 10^6 \cdot 12} = 3,68 \cdot 10^{-8}$$

und aus den Kurvenblättern der homogenen Lösung der Differentialgleichung (III 51) für φ_{HO} , indem β durch $\beta/3$ ersetzt wird, entnehmen wir $\bar{S}_H \Big|_{\mu=1} = 1,188$ und aus demjenigen für Δ folgt analog $\bar{\Gamma} \Big|_{\mu=1} = 1,975$, womit

$$\bar{S}_{SK1} = \bar{S}_{SK2} = 3,68 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1,188}{1,975} = 2,215 \cdot 10^{-8}$$

wird.

Die Einflusszahlen \bar{S}_y bleiben gleich wie bei den Scheiben konstanter Dicke und lauten

$$\bar{S}_{y1} = 5,85 \cdot 10^{-4} \quad \bar{S}_{y2} = 1,95 \cdot 10^{-4}$$

Mit $\alpha = 1,129 \cdot 10^{-3}$ und den Kurvenblättern der partikulären Lösung der Differentialgleichung (III 8) mit Fliehkraftglied erhält man für $\beta = 3$

$$-\frac{\bar{S}_{P\mu}}{\alpha} \Big|_{\mu=1} = 1,332 \quad -\frac{\bar{\Phi}}{\alpha} \Big|_{\mu=1} = 2,494$$

und die Einflusszahl der Einwirkung der Fliehkraft wird

$$\bar{S}_{u1} = \bar{S}_{u2} = 1,898 \cdot 10^{-4}$$

Zu den Einflusszahlen der Biegung übergehend, entnehmen wir, wiederum für $\beta = 3$, aus den Kurvenblättern

$$\frac{\varphi_{H_0}}{\mu-1} = 1,779$$

$$\frac{\Delta}{\mu-1} = 4,691$$

womit sich

$$\varphi_{S1} = \varphi_{S2} = 6,691 \cdot 10^{-8}$$

ergibt.

Mit $\lambda_S = -9,50 \cdot 10^{-4}$ und $\Delta \bar{v}_0 = 1/4$ erhält man ferner

$$\frac{\varphi_p}{\lambda_S \mu-1} = 1,897$$

$$\frac{\pi}{\lambda_S \mu-1} = 5,021$$

$$e^{\frac{B}{6}} = 1,650$$

und die Einflusszahlen der Einwirkung des Temperaturgefälles werden

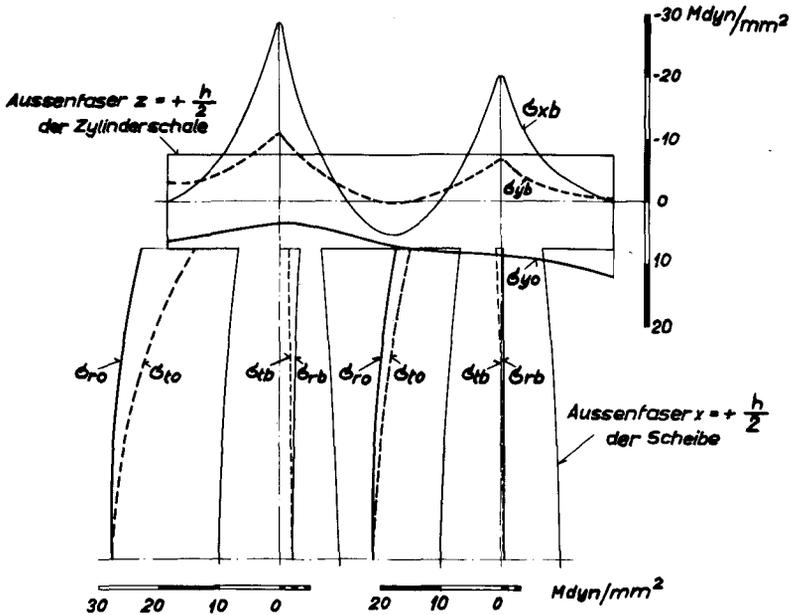
$$\varphi_{\beta 1} = \varphi_{\beta 2} = -5,87 \cdot 10^{-4}$$

Damit sind die neuen Einflusszahlen bestimmt und der Rechnungsgang kann, den vorhergehenden Ausführungen sinngemäss folgend, weitergeführt werden.

Ein Vergleich der Abb. 11 mit Abb. 10 lässt eine Reduktion der Membranspannungen, sowohl der Scheiben als auch des zylindrischen Teils des Rotors, erkennen. Die grössere Steifigkeit der Scheiben hat andererseits eine geringe Erhöhung der Biegespannungen beider Teile zur Folge, welche jedoch kaum von Bedeutung ist.

Abb.11. Beanspruchung des Gasturbinen-Rotors mit Scheiben mit dem Profil einer Scheibe „gleicher Festigkeit“.

- σ_{ro}, σ_{to} - Radiale bzw. tangentielle Membranspannung der Scheiben
- σ_{yo} - Tangentielle Membranspannung der Zylinderschalen
- σ_{rb}, σ_{tb} - Radiale bzw. tangentielle Biegespannung der Scheiben an Aussenfaser $x = +\frac{h}{2}$
- σ_{xb}, σ_{yb} - Meridionale bzw. tangentielle Biegespannung der Zylinderschalen $z = +\frac{h}{2}$



3.3 Dampfturbinen-Rotor mit Scheiben konstanter Dicke

Der Dampfturbinen-Rotor unterscheidet sich von dem in § 3.1. besprochenen Gasturbinen-Rotor, ausser den Dimensionen, durch die kleinere Temperatur und den höheren Schaufelzug. Um ein Unterteilen der beiden Endzylinderschalen zu vermeiden, wurde der durch die Anordnung der Schaufeln gegebene Schaufelzug so auf die ganze Länge des Rotors verteilt, dass die Gesamtbelastung gleich gross bleibt. Die Rechnung wurde deshalb mit einem von 86 auf 257 Mdyn/cm² linear ansteigenden Schaufelzug und den übrigen, aus Abb. 12 zu entnehmenden Daten, durchgeführt.

Aus dem in Abb. 13 dargestellten Spannungsverlauf geht hervor, dass die Membranspannungen im Zentrum der Scheibe Nr. 1 den Betrag von 32,6 Mdyn/mm² erreichen und die Biegespannungen wiederum vernachlässigbar klein sind. Infolge des grösseren Schaufelzuges und der höheren Fliehkraftbelastung werden die tangentialen Membranspannungen am rechten Ende des zylindrischen Teils des Rotors 20,3 Mdyn/mm² im Vergleich zu 13 Mdyn/mm² beim Gasturbinen-Rotor. Der ansteigende Schaufelzug und die in gleicher Richtung sinkende Temperatur führen weitgehend zu einem Ausgleich der Biegespannungen der Zylinderschalen, welche mit 23 Mdyn/mm² unter denjenigen des Gasturbinen-Rotors bleiben.

Abb. 12. Dampfturbinen-Rotor mit Scheiben konstanter Dicke.

- Verlauf der Temperatur der Mittelfläche
- - - Verlauf des Temperaturgefälles senkrecht zur Mittelfläche
- Effektiver Schaufelzug
- - - Schaufelzug, über die ganze Fläche verteilt gedacht

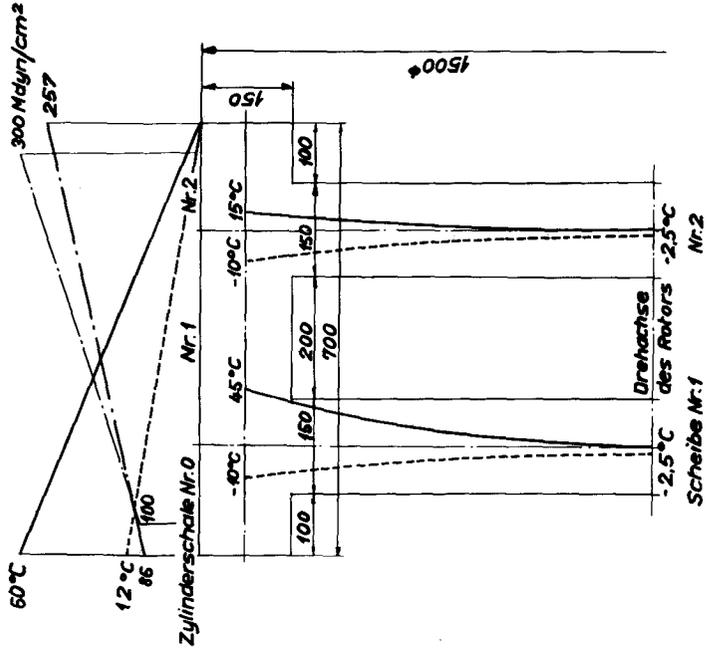
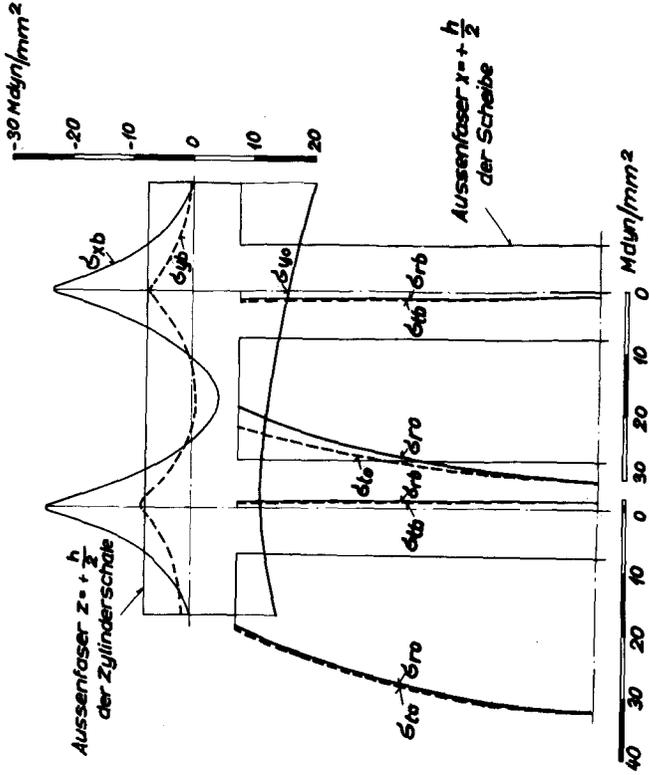


Abb. 13. Beanspruchung des Dampfturbinen-Rotors mit Scheiben konstanter Dicke.

- σ_{ro}, σ_{yo} - Radiale bzw. tangentielle Membranspannung der Scheiben
- σ_{yb} - Tangentielle Membranspannung der Zylinderschalen
- σ_{rb}, δ_{tb} - Radiale bzw. tangentielle Biegespannung der Scheiben an Aussenfaser $x = +\frac{h}{2}$
- δ_{xb}, δ_{yb} - Meridionale bzw. tangentielle Biegespannung der Zylinderschalen an Aussenfaser $x = +\frac{h}{2}$



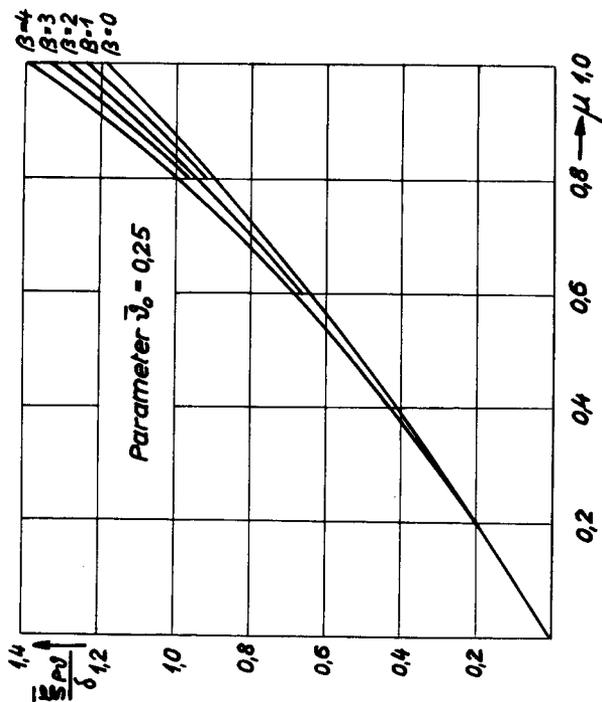
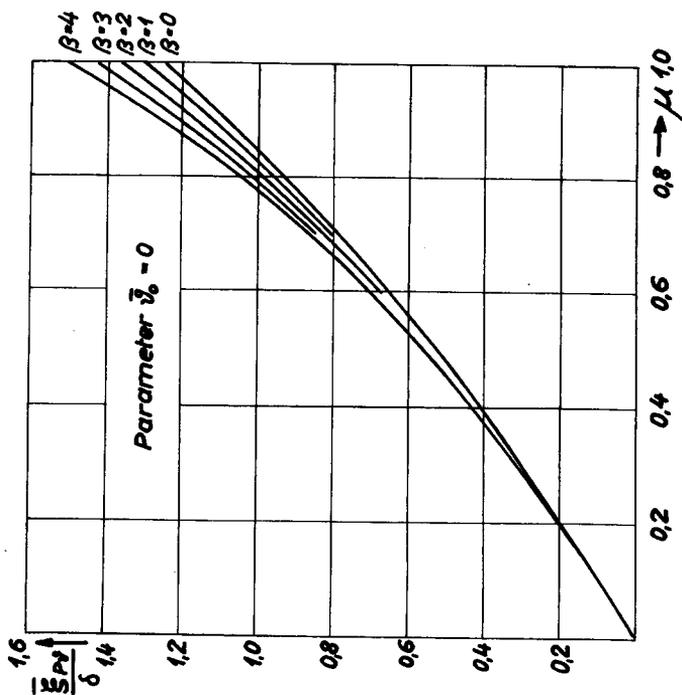
A N H A N G

1. Hilfsfunktionen für Scheiben mit dem Profil einer Scheibe "gleicher Festigkeit".

Partikuläre Lösung der Differentialgleichung (III 8) mit Temperaturglied.

$$\frac{\bar{\Sigma} P v}{\delta} = \mu \cdot \sum_{v=0}^{\infty} a_v \cdot \mu^v$$

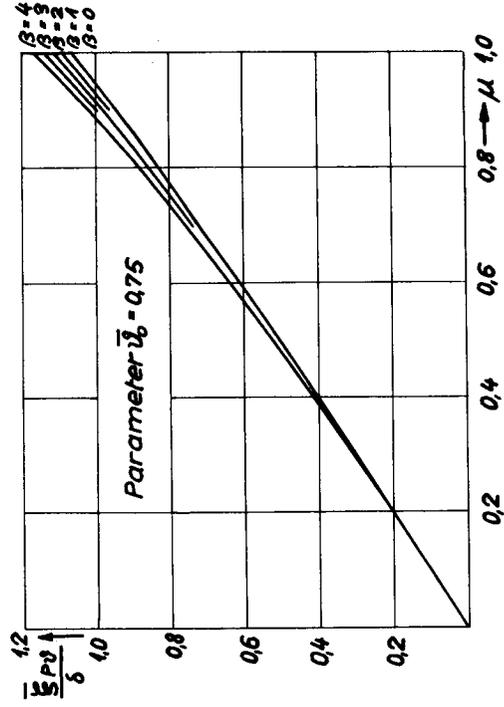
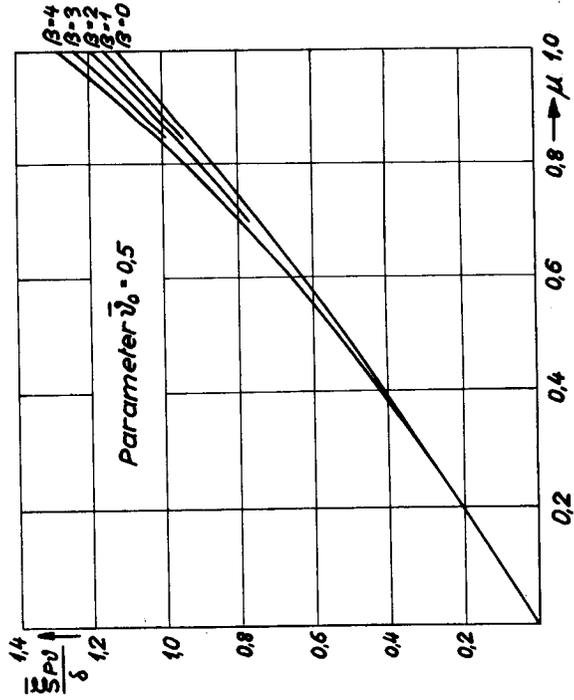
Verlauf der Temperatur der Scheibenmittelfläche $\bar{v} \cdot \bar{v}_0 + (1 - \bar{v}_0) / \mu^2$



Partikuläre Lösung der Differentialgleichung (III 8) mit Temperaturglied.

$$\frac{\bar{\xi} P \nu}{\delta} = \mu \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cdot \mu^{\nu}$$

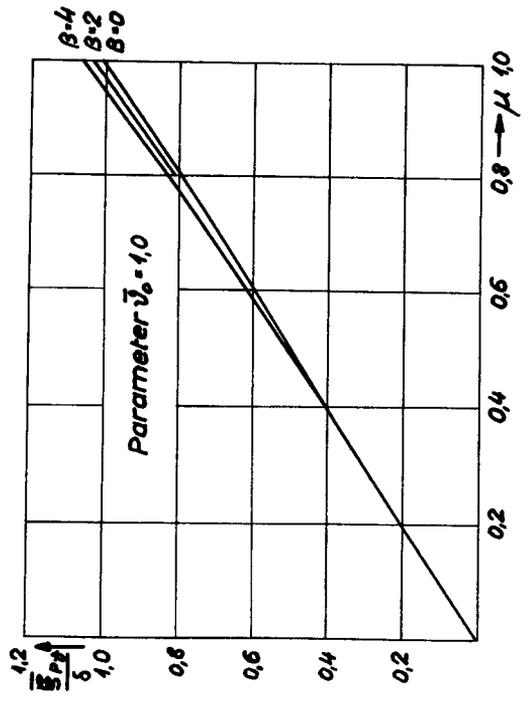
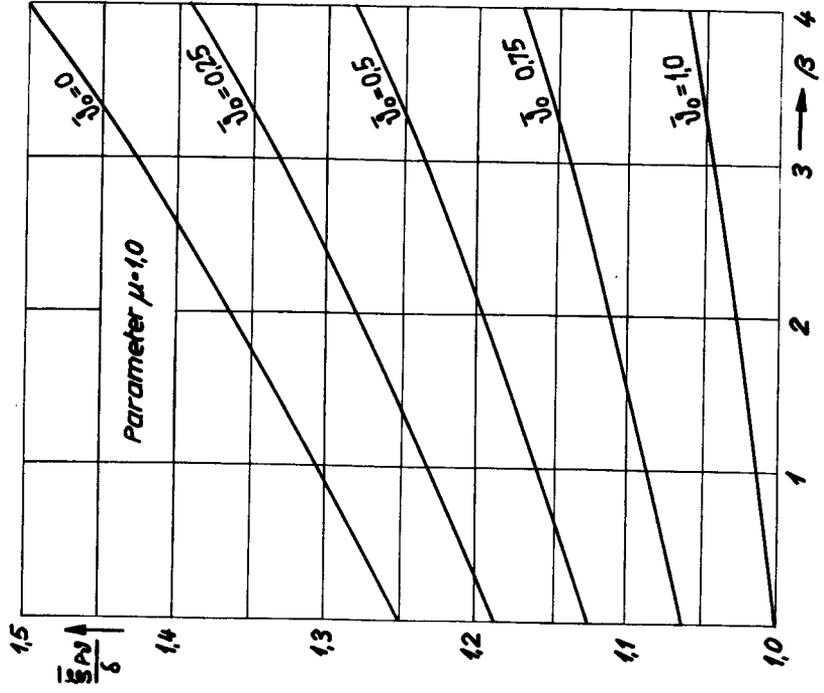
Verlauf der Temperatur der Scheibenmittelfläche $\bar{\nu} = \bar{\nu}_0 + (1 - \bar{\nu}_0) \mu^2$



Partikuläre Lösung der Differentialgleichung(III 8) mit Temperaturglied.

$$\frac{\bar{\theta}_{p2}}{\delta} = \mu \cdot \sum_{v=0}^{\infty} a_v \cdot \mu^v$$

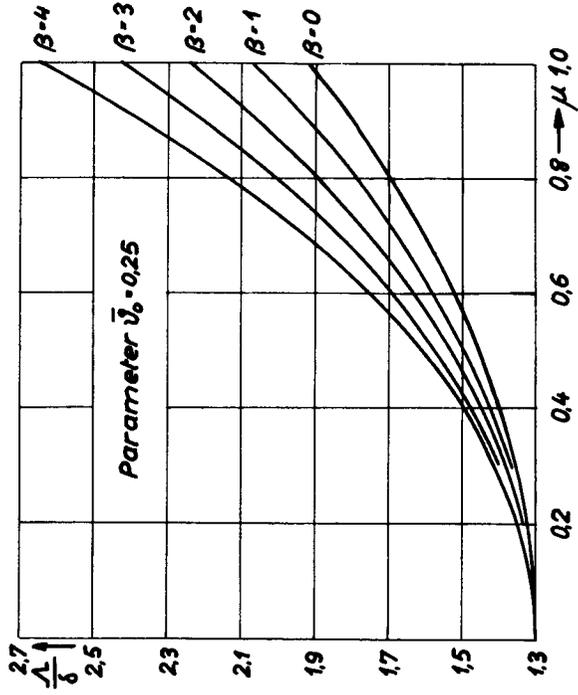
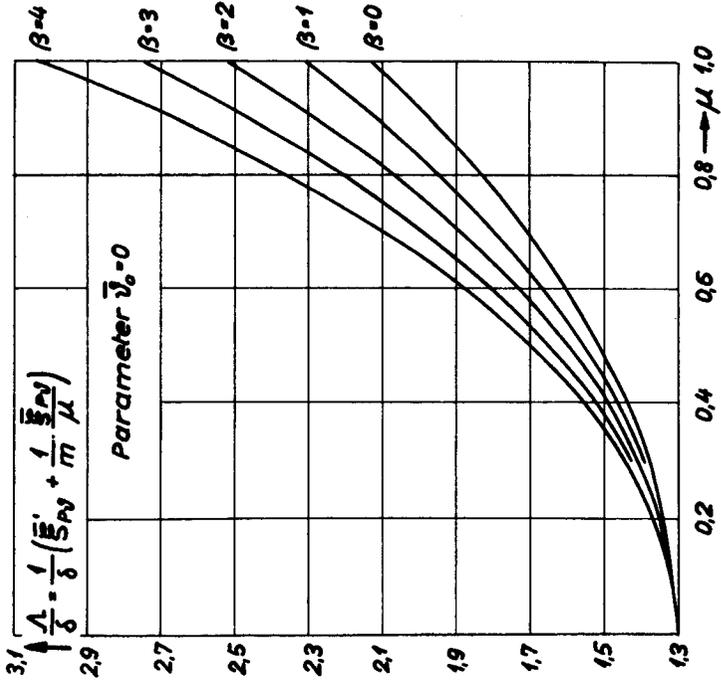
Verlauf der Temperatur der Scheibenmittelfläche $\bar{v} \cdot \bar{v}_0 + (1 - \bar{v}_0) \mu^2$



Partikuläre Lösung der Differentialgleichung (III 8) mit Temperaturglied.

$$\frac{\bar{\Sigma} P_N}{\delta} = \mu \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\nu} \cdot \mu^{\nu}$$

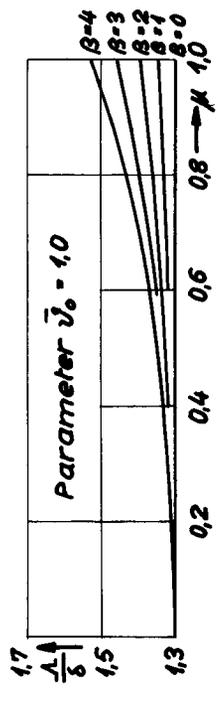
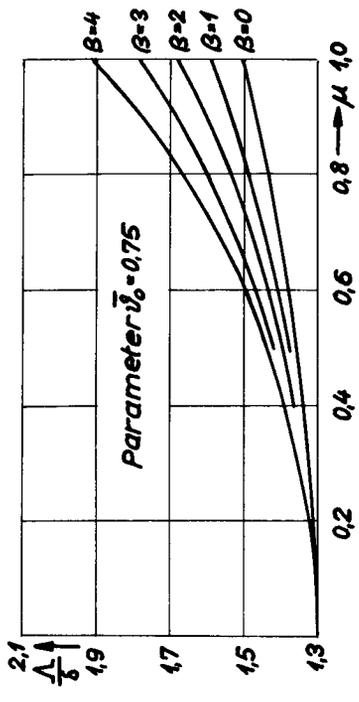
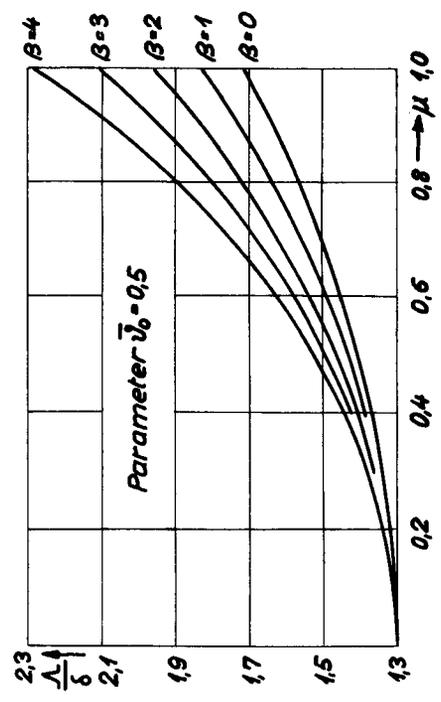
Verlauf der Temperatur der Scheibenmittelfläche $\bar{v} = \bar{v}_0 + (1 - \bar{v}_0) \mu^2$



Partikuläre Lösung der Differentialgleichung (III 8) mit Temperaturglied.

Verlauf der Temperatur der Scheibenmittelfläche $\bar{v} \cdot \bar{v}_0 + (1 - \bar{v}_0) / \mu^2$

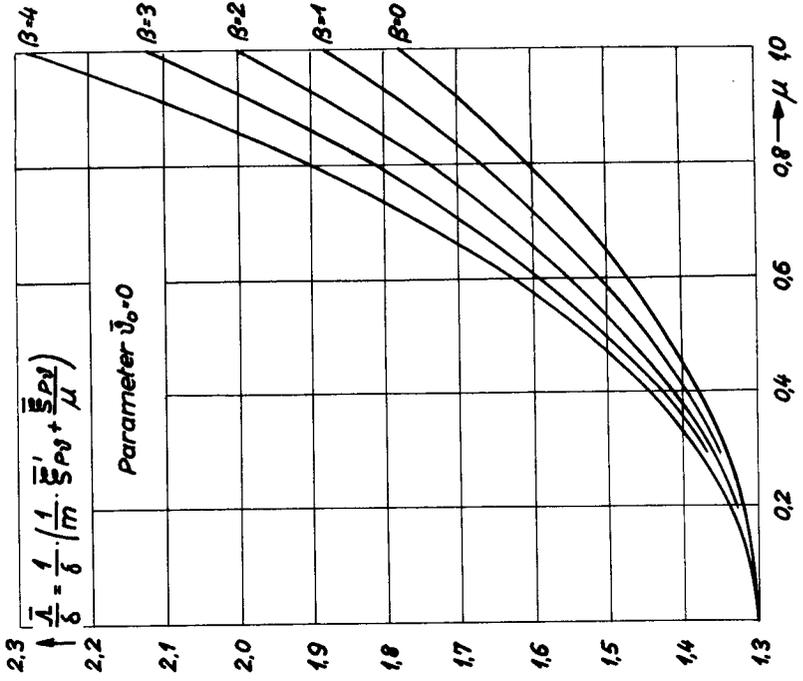
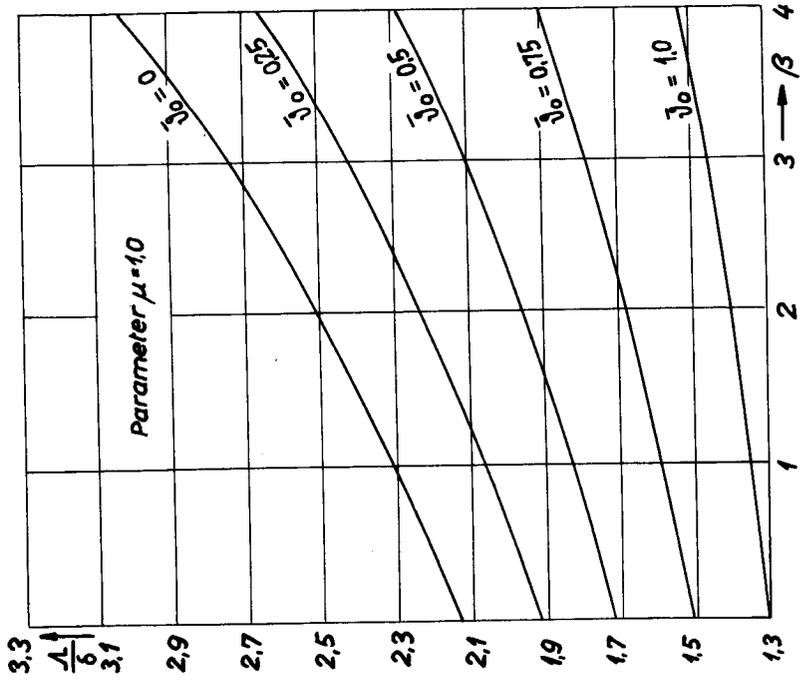
$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{v}_0}{\delta} = \mu \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cdot \mu^{\nu}$$



Partikuläre Lösung der Differentialgleichung (III 8) mit Temperaturglied.

$$\frac{\bar{\theta}_{pV}}{\delta} = \mu \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cdot \mu^{\nu}$$

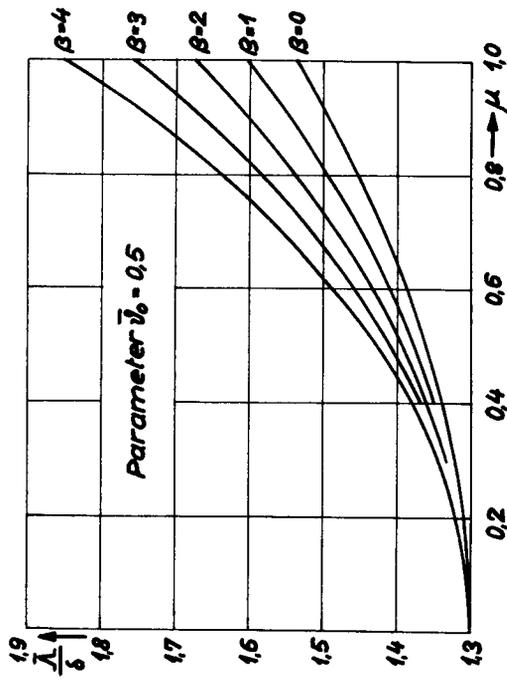
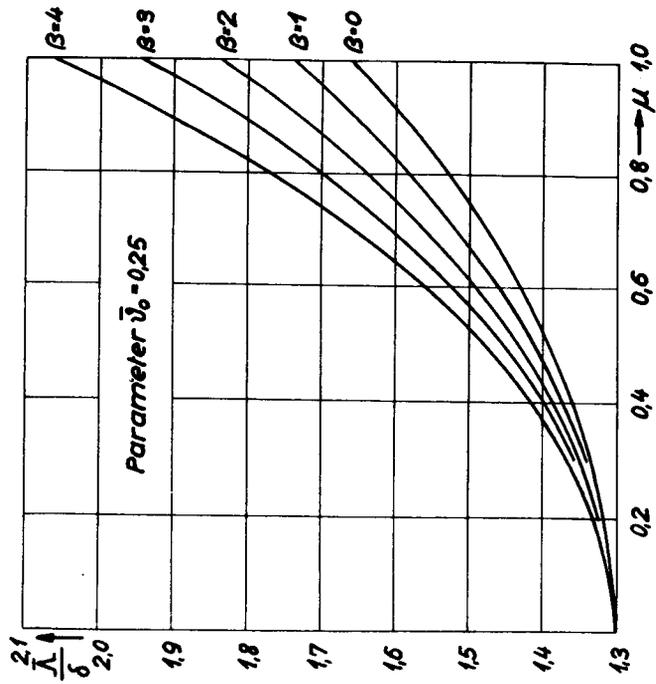
Verlauf der Temperatur der Scheibenmittelfläche $\bar{\nu}_0 = \bar{\nu}_0 + (1 - \bar{\nu}_0) \mu^2$



Partikuläre Lösung der Differentialgleichung (III 8) mit Temperaturglied.

$$\frac{\bar{\theta} \rho v}{\delta} = \mu \cdot \sum_{v=0}^{\infty} a_v \cdot \mu^v$$

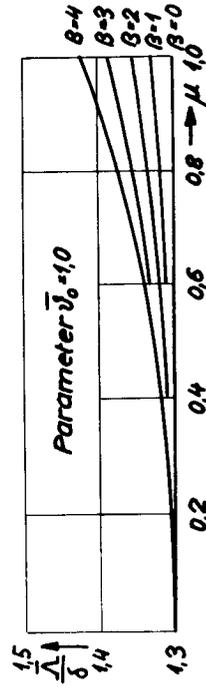
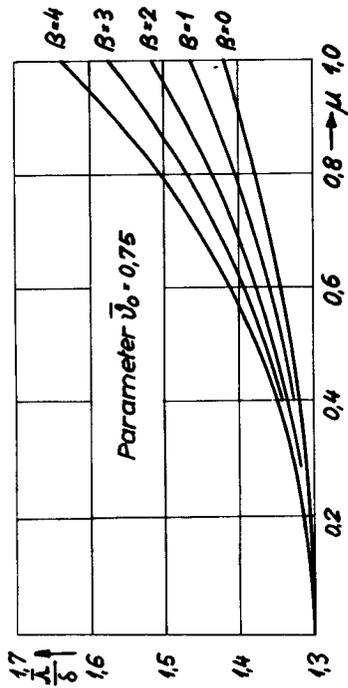
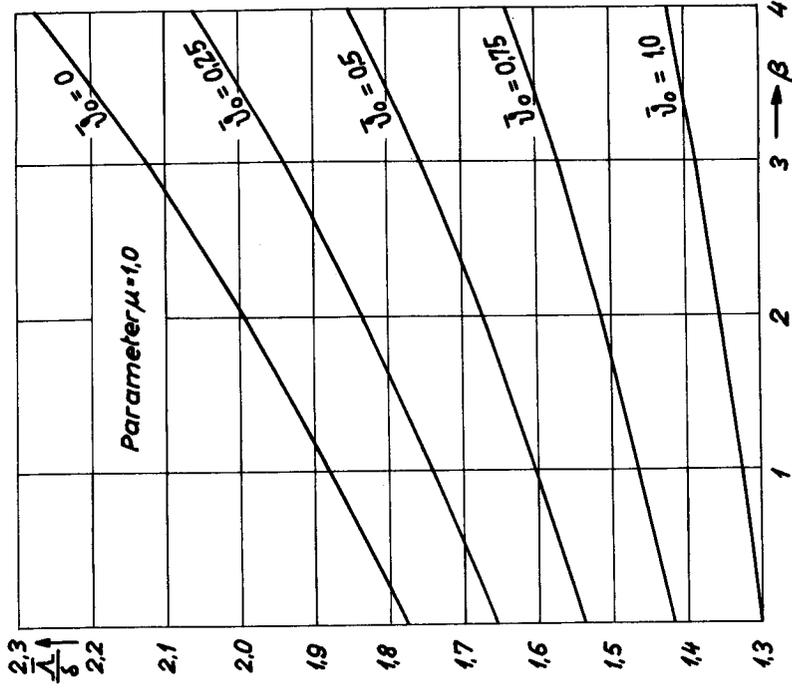
Verlauf der Temperatur der Scheibenmittelfläche $\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 + (1 - \bar{\theta}_0) \mu^2$



Partikuläre Lösung der Differentialgleichung (III 8) mit Temperaturglied.

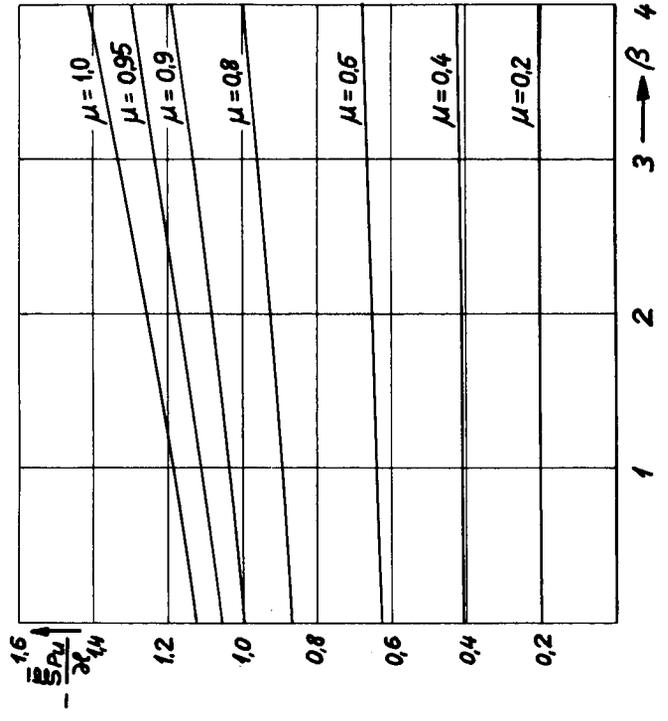
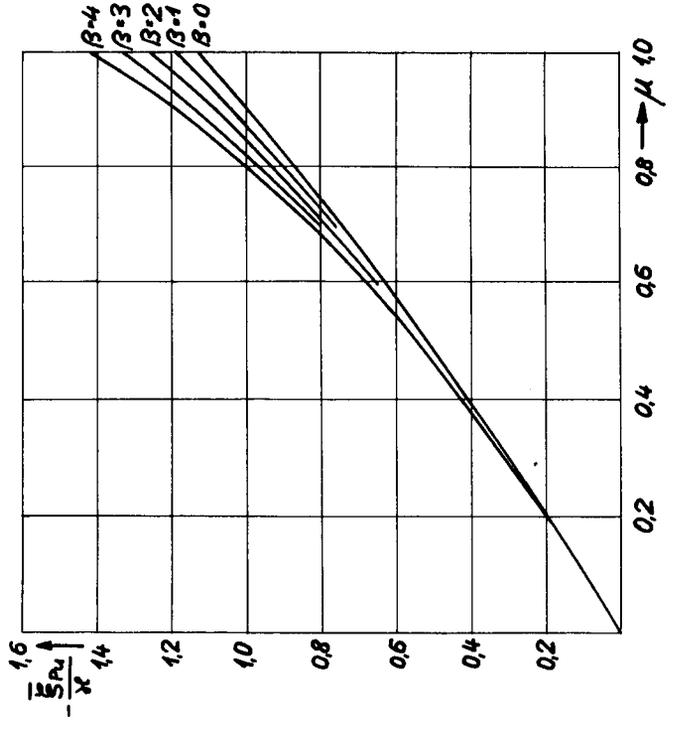
$$\frac{\bar{T}_p \nu}{\delta} = \mu \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cdot \mu^{\nu}$$

Verlauf der Temperatur der Scheibenmittelfläche $\bar{T}_0 = \bar{T}_0 + (1 - \bar{T}_0) \mu^2$



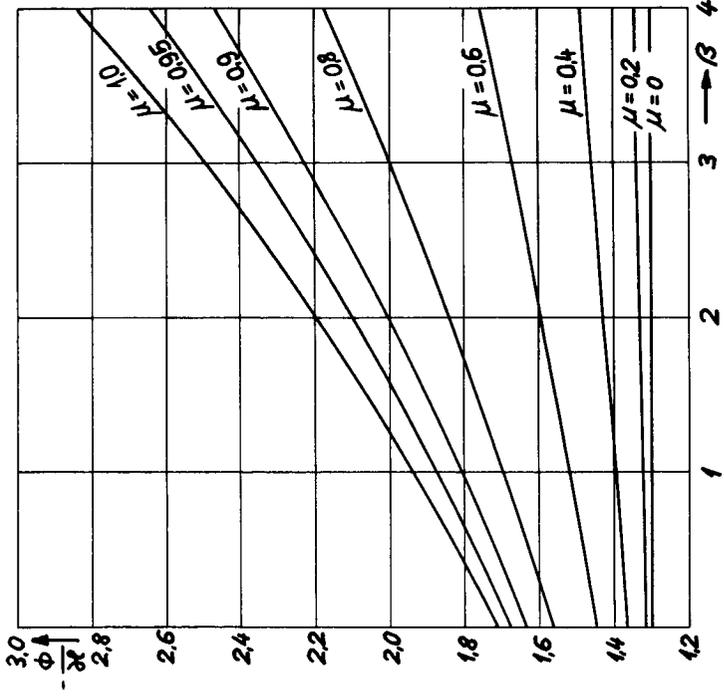
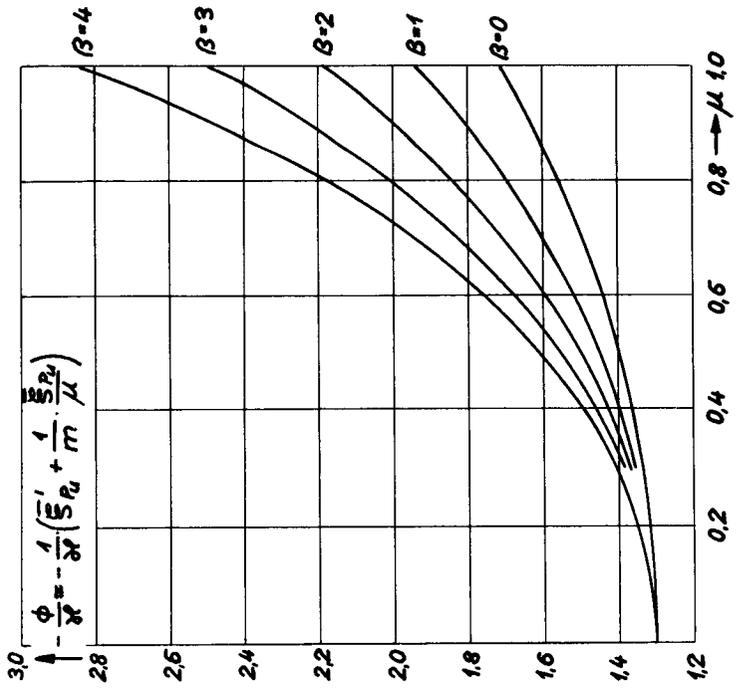
Partikuläre Lösung der Differentialgleichung (III 8) mit Fliehkraftglied.

$$-\frac{\partial p_v}{\partial x} = \mu \sum_{v=0}^{\infty} b_v \cdot \mu^v$$



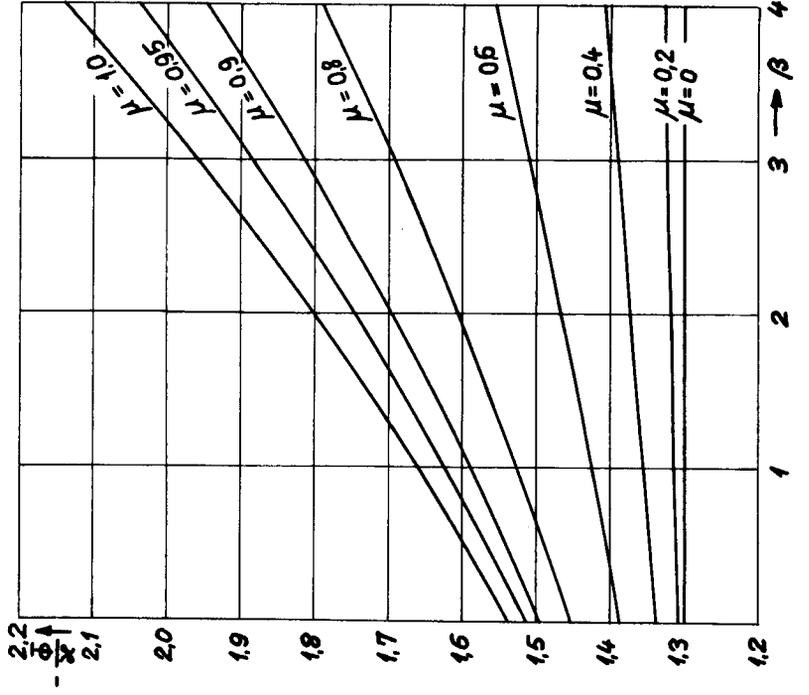
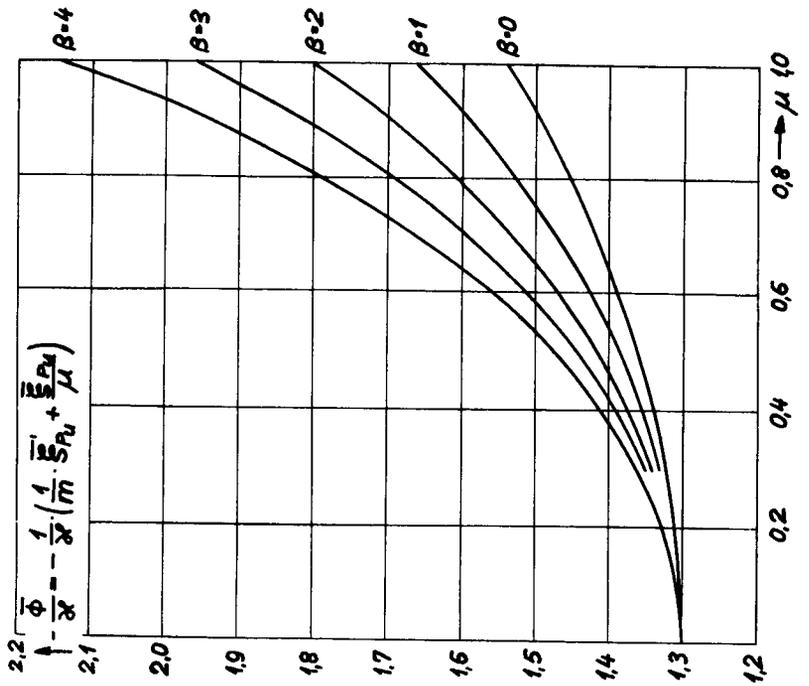
Partikuläre Lösung der Differentialgleichung (III 8) mit Fliehkraftglied.

$$-\frac{\sum p_n}{\mathcal{R}} = \mu \cdot \sum_{y=0}^{\infty} b_n \cdot \mu^n$$



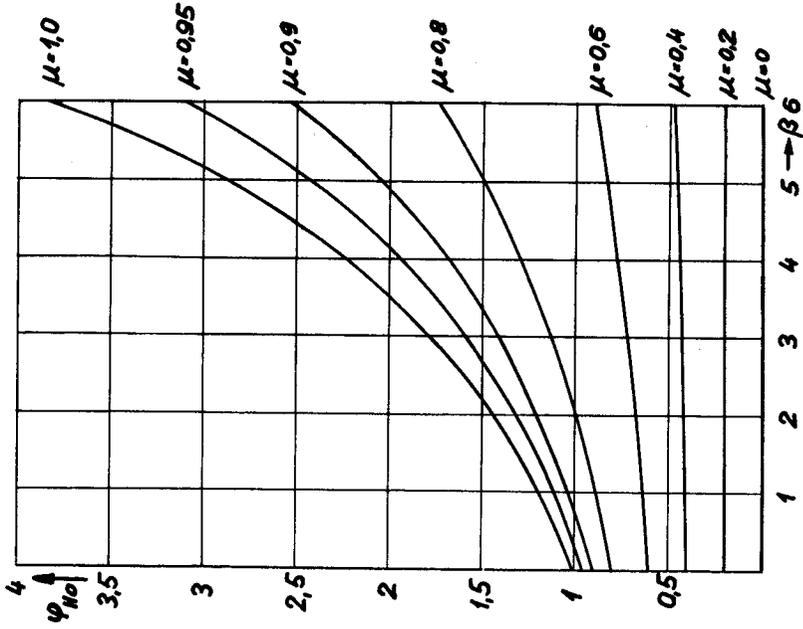
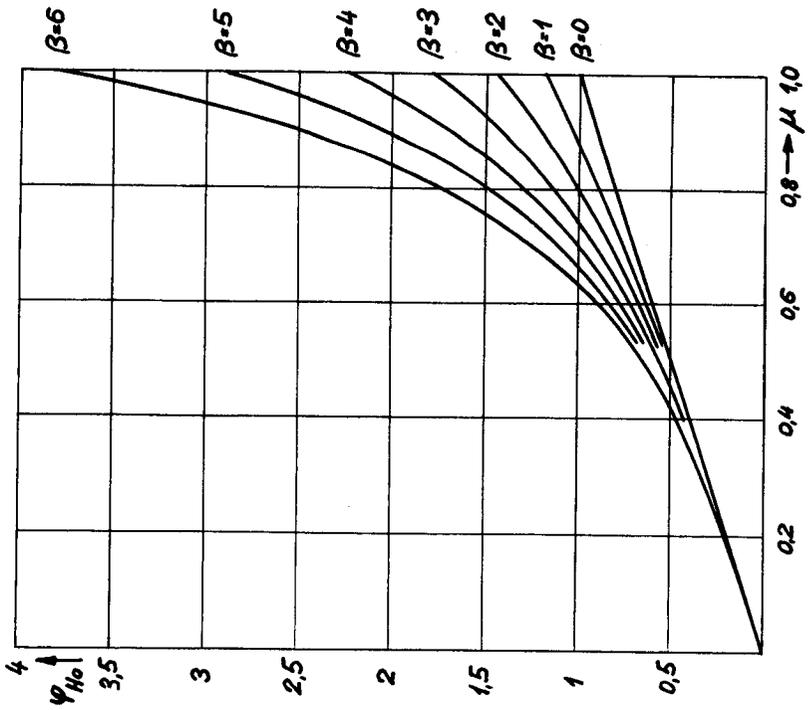
Partikuläre Lösung der Differentialgleichung (III 8) mit Fliehkraftglied.

$$-\frac{\sum P_n}{\mathcal{X}} = \mu \cdot \sum_{v=0}^{\infty} b_v \cdot \mu^v$$



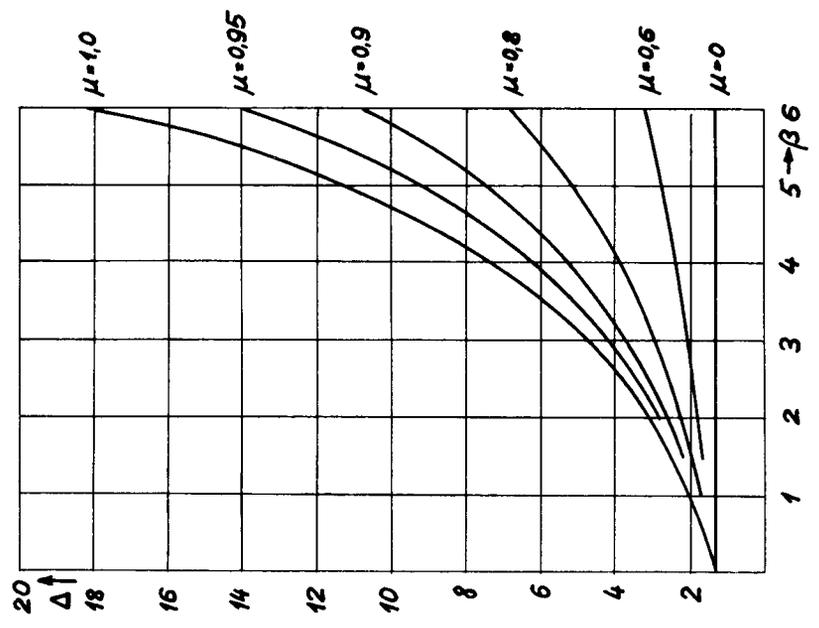
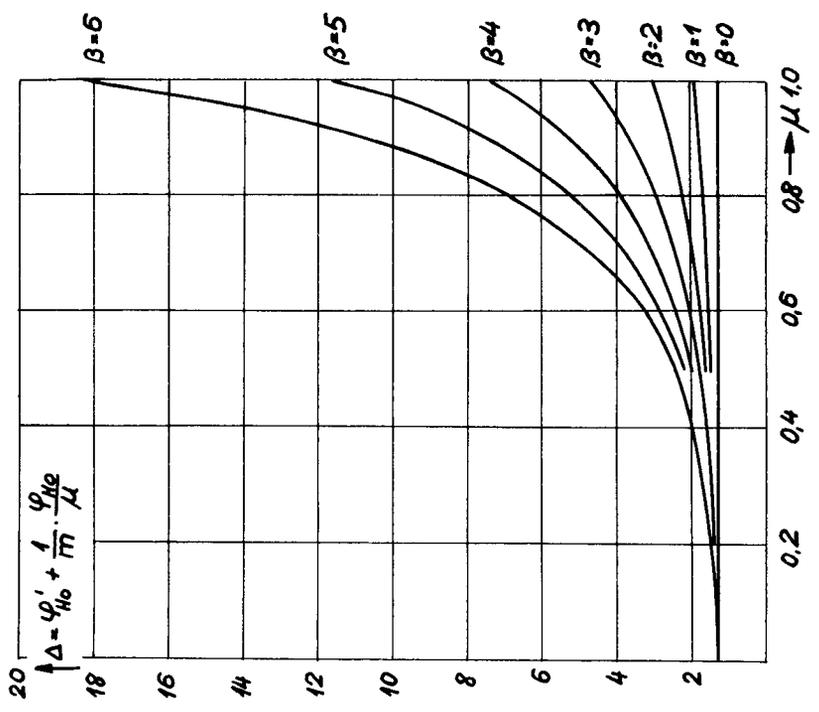
Homogene Lösung der Differentialgleichung (III 51)

$$\varphi_{H0} |_{\lambda=1} = \mu \cdot e^{-r\mu^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \mu^{2n}$$



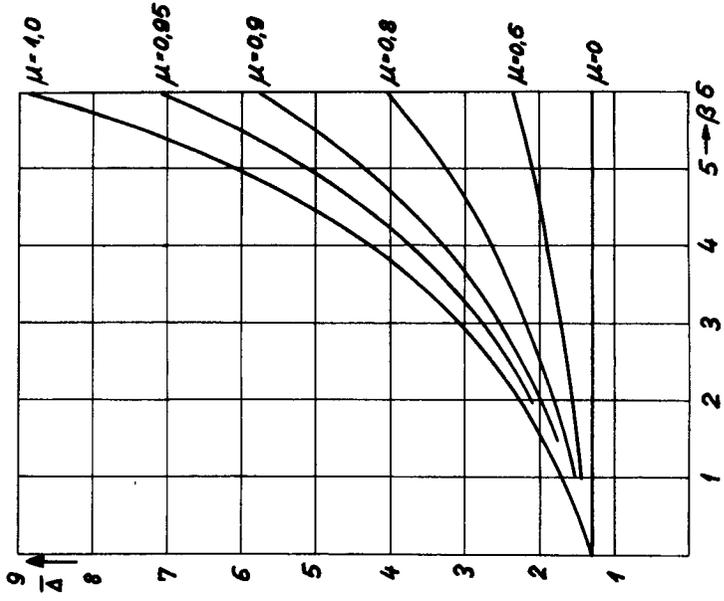
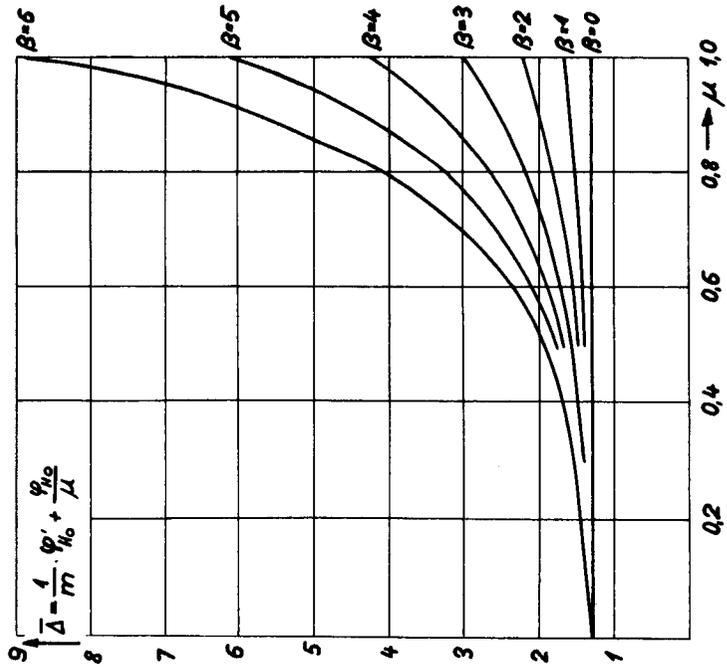
Homogene Lösung der Differentialgleichung (III 51)

$$\varphi_{H_0} |_{\lambda_1=1} = \mu \cdot e^{-r\mu^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \mu^{2n}$$



Homogene Lösung der Differentialgleichung (III 51)

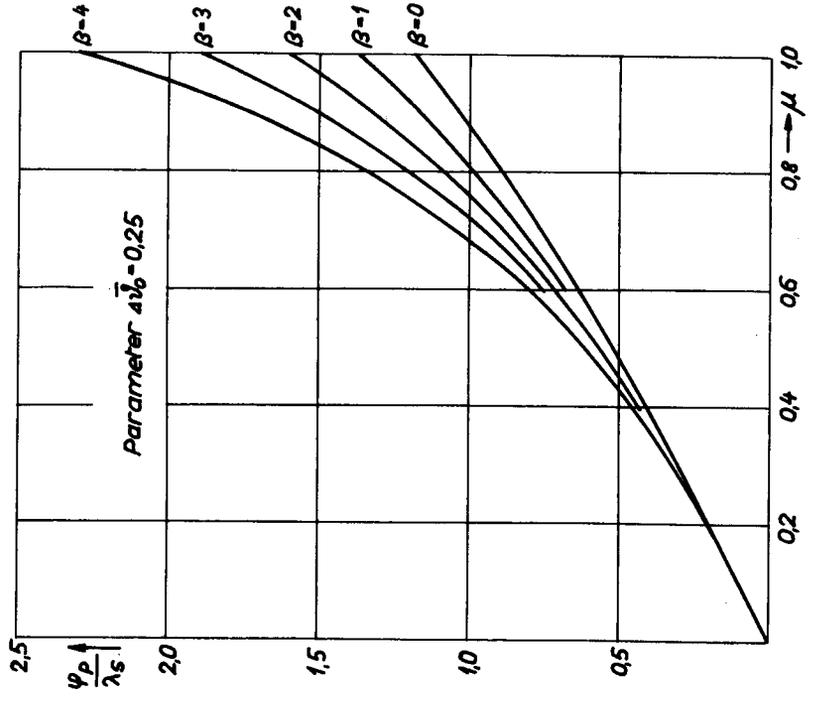
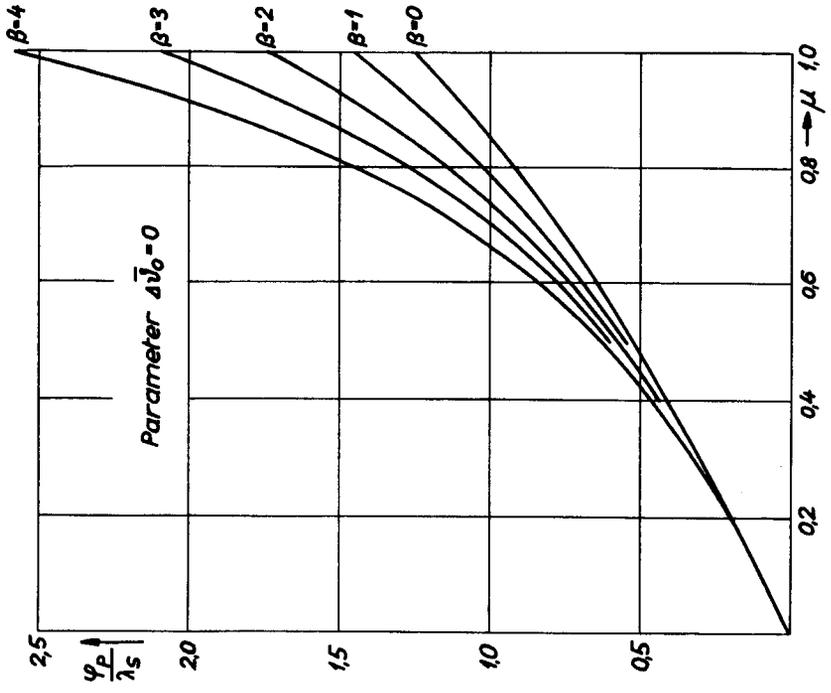
$$\varphi_{H0} / \lambda_{1=1} = -\mu \cdot e^{-r\mu^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \mu^{2n}$$



Inhomogene Lösung der Differentialgleichung (III 51)

Verlauf des Temperaturgefälles $\Delta \bar{v} = \Delta \bar{v}_0 + (1 - \Delta \bar{v}_0) \mu^2$

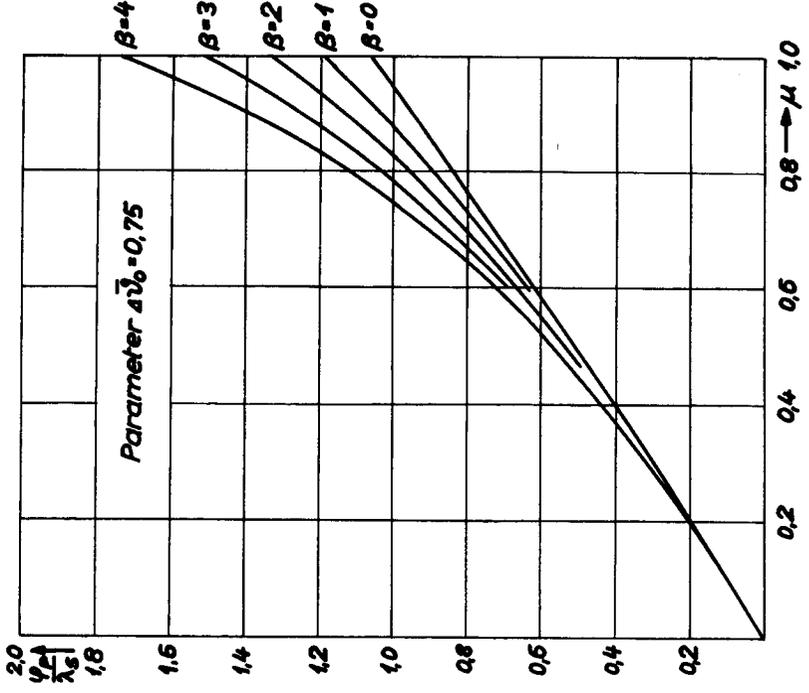
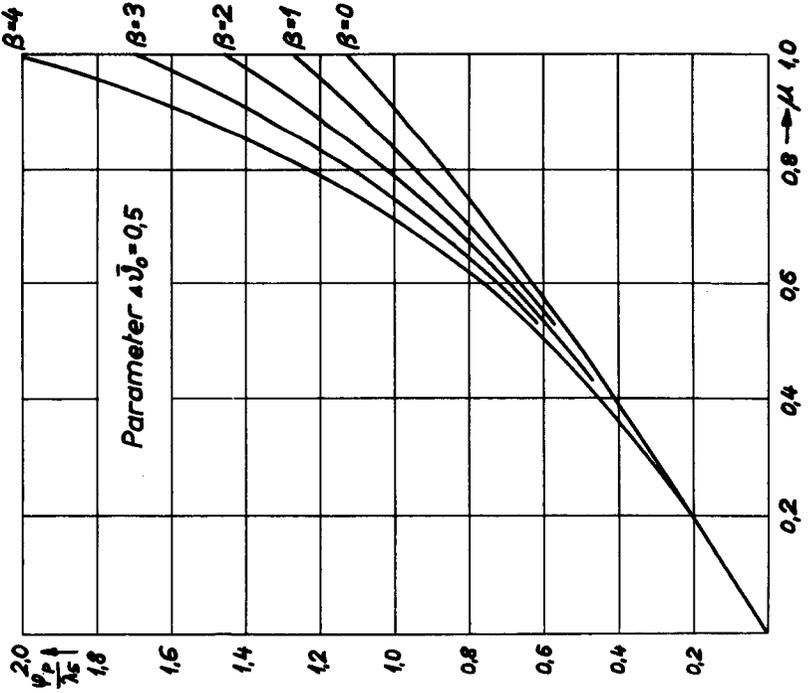
$$\frac{\varphi_p}{\lambda_s} = \mu e^{\frac{\beta}{\delta} \mu^2} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \cdot \mu^{\nu}$$



Inhomogene Lösung der Differentialgleichung (III 51)

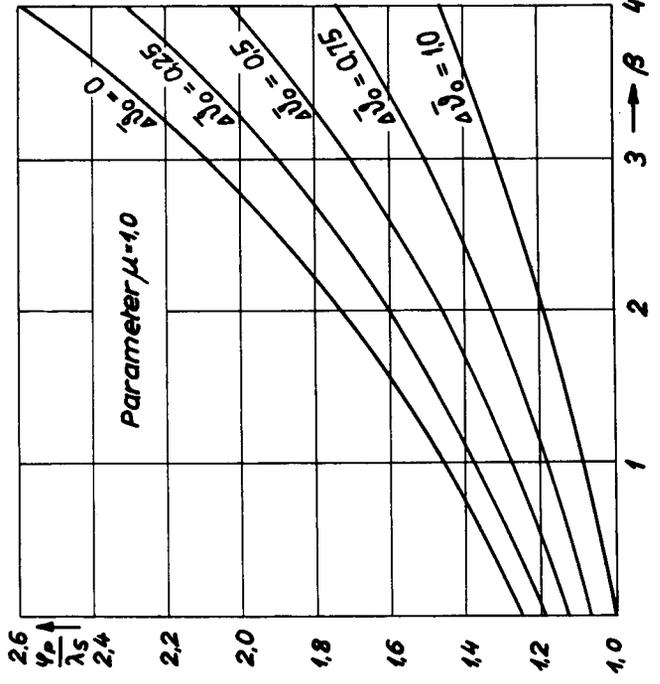
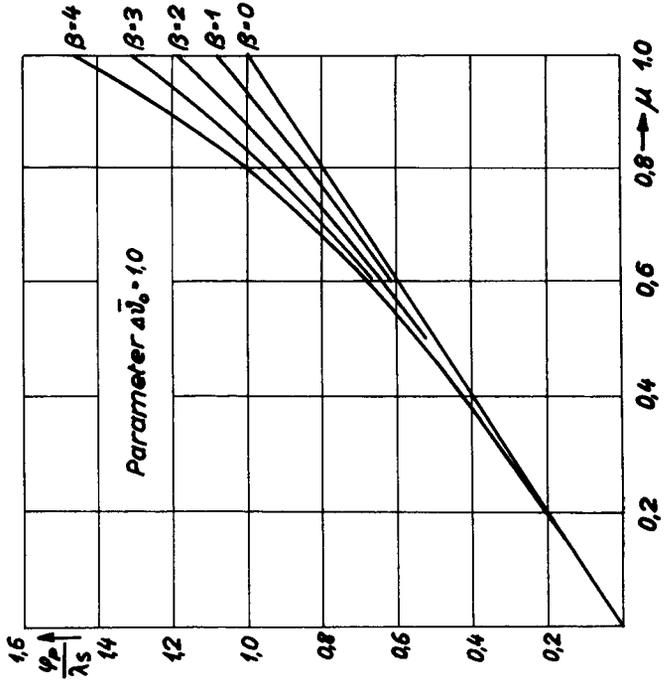
$$\frac{\psi_p}{\lambda_s} = \mu \cdot e^{-\beta \mu^2} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \cdot \mu^{\nu}$$

Verlauf des Temperaturgefälles $\Delta \bar{v} = \Delta \bar{v}_0 + (1 - \Delta \bar{v}_0) \mu^2$



Inhomogene Lösung der Differentialgleichung (III 51)

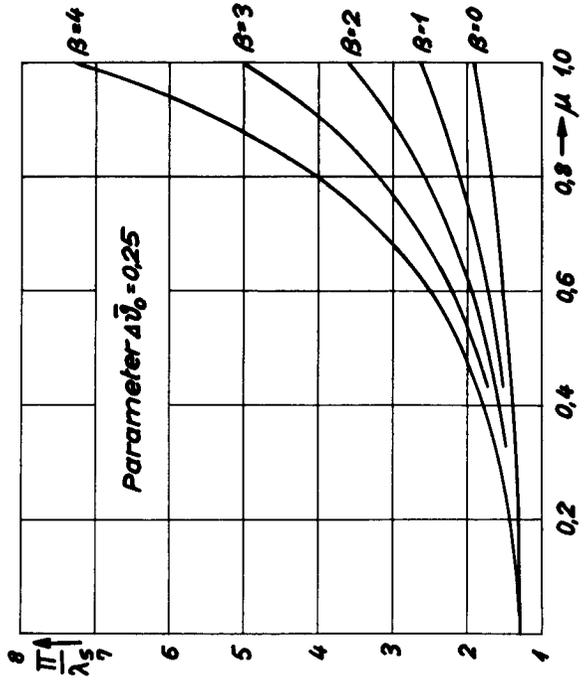
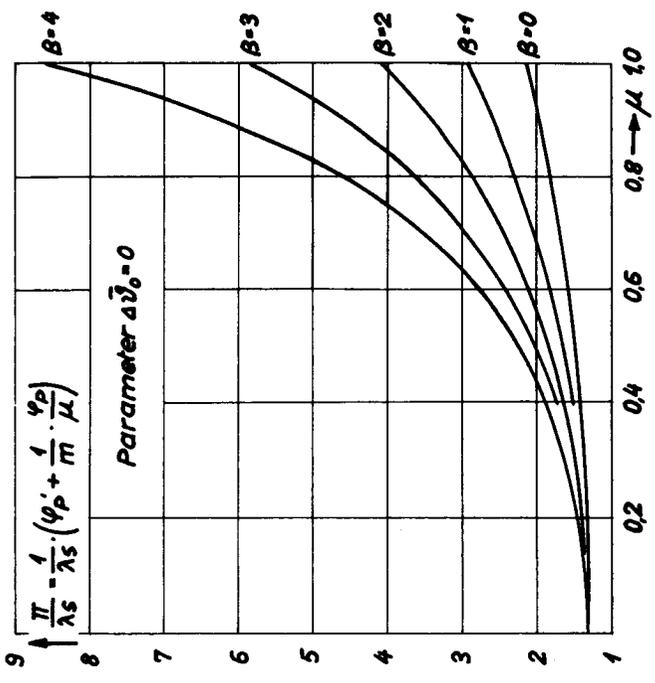
Verlauf des Temperaturgefälles $\Delta\bar{v} = \Delta\bar{v}_0 + (1 - \Delta\bar{v}_0)\mu^2$ $\frac{\varphi_P}{\lambda_S} = \mu \cdot e^{\frac{\beta}{6} \cdot \mu^2} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \cdot \mu^{\nu}$



Inhomogene Lösung der Differentialgleichung (III 51)

Verlauf des Temperaturfalles $\Delta \bar{v} = \Delta \bar{v}_0 + (1 - \Delta \bar{v}_0) \mu^2$

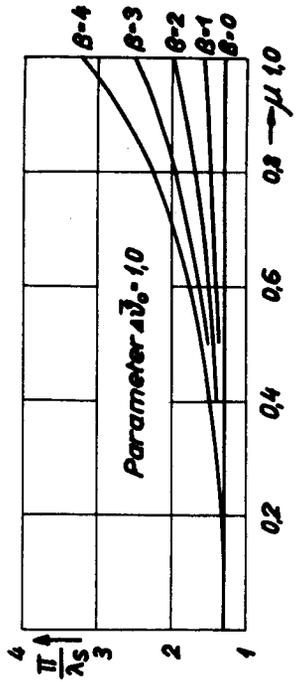
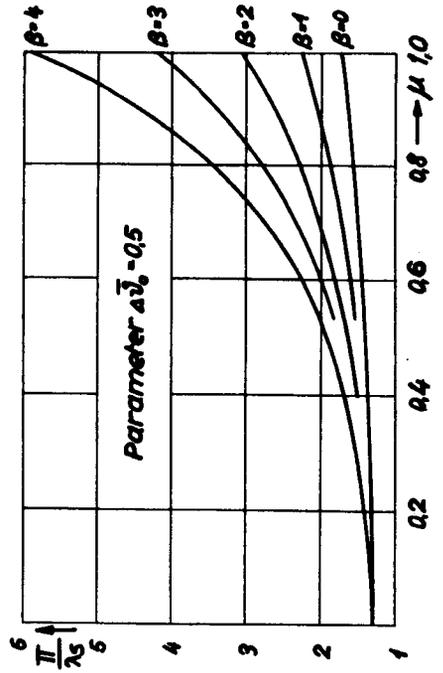
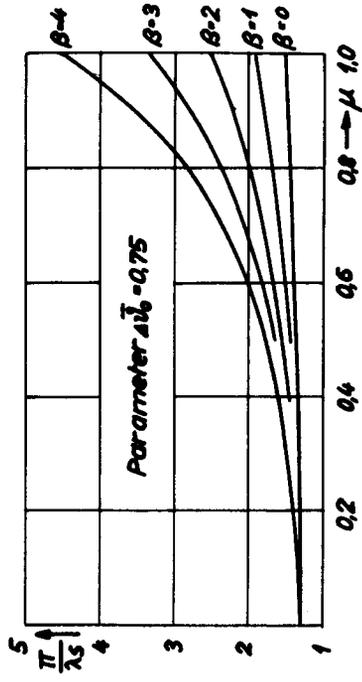
$$\frac{\psi_p}{\lambda_S} = \mu \cdot e \cdot \frac{B}{6} \cdot \mu^2 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \cdot \mu^{\nu}$$



Inhomogene Lösung der Differentialgleichung (III 51)

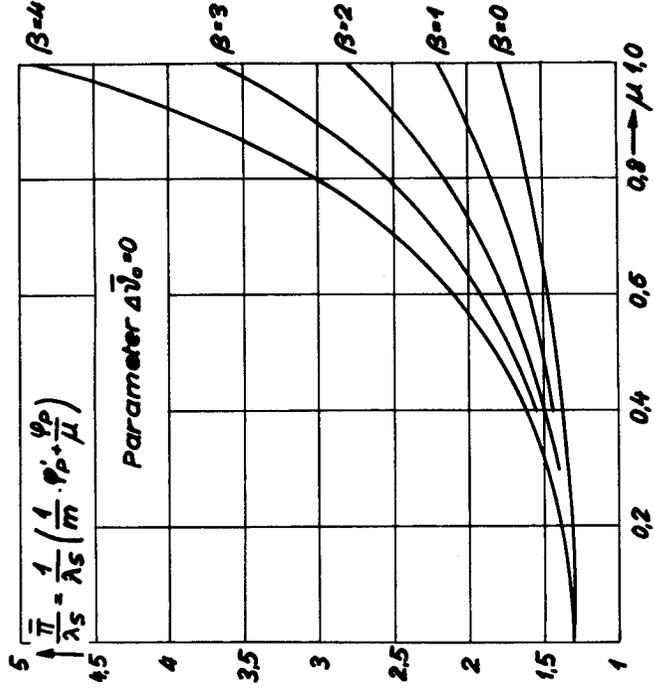
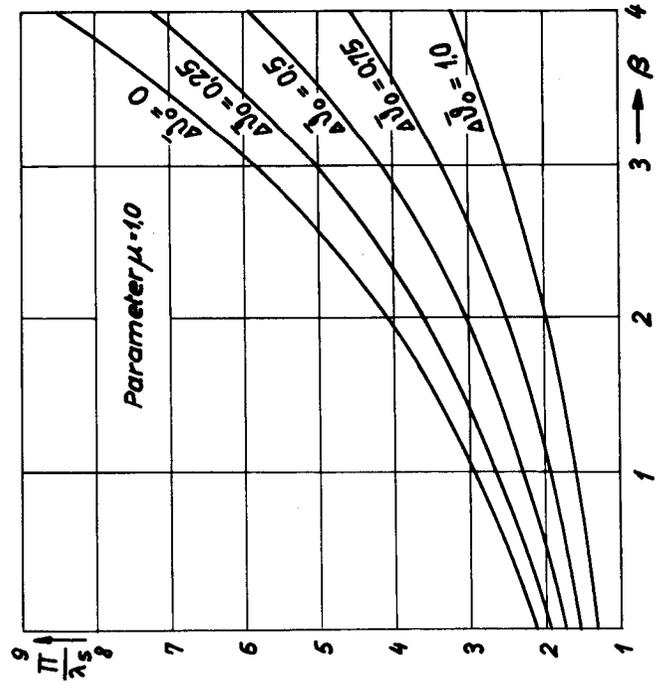
Verlauf des Temperaturgefälles $\Delta \bar{v} = \Delta \bar{v}_0 + (1 - \Delta \bar{v}_0) \mu^2$

$$\frac{v_p}{\lambda_S} = \mu e^{\frac{\beta}{\sigma}} \mu^2 \sum_{v=0}^{\beta} b_v \cdot \mu^v$$



Inhomogene Lösung der Differentialgleichung (III 51)

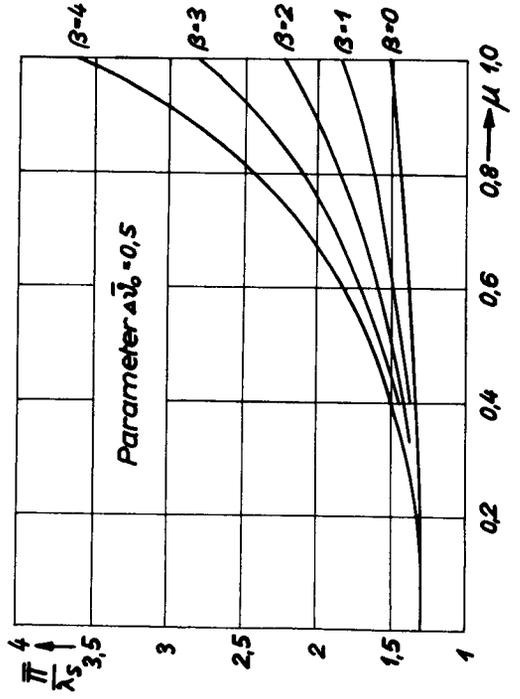
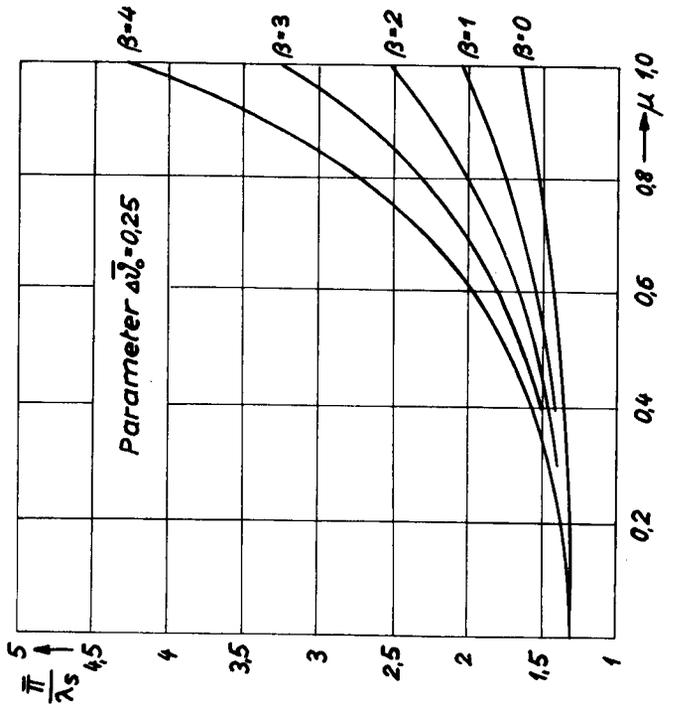
Verlauf des Temperaturgefälles $\Delta \bar{v} = \Delta \bar{v}_0 + (1 - \Delta \bar{v}_0) \mu^2$ $\frac{\varphi_p}{\lambda_s} = \mu \cdot e^{-\frac{\beta}{\delta}} \cdot \mu^2 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \cdot \mu^{\nu}$



Inhomogene Lösung der Differentialgleichung (III 51)

Verlauf des Temperaturgefälles $\Delta \bar{v} - \Delta \bar{v}_0 + (1 - \Delta \bar{v}_0) \mu^2$

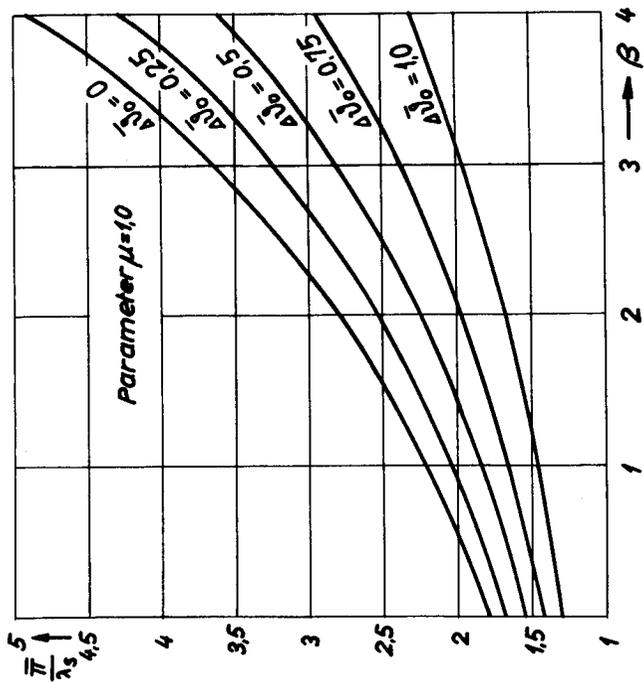
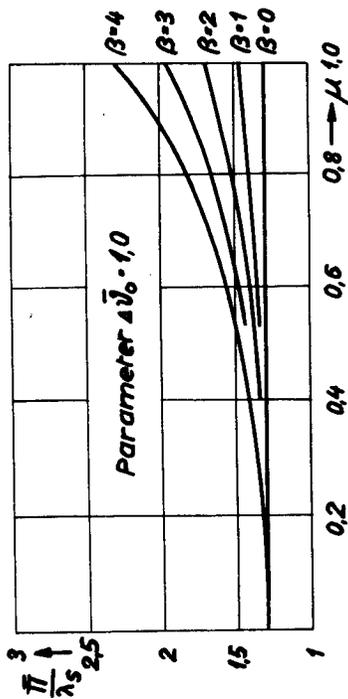
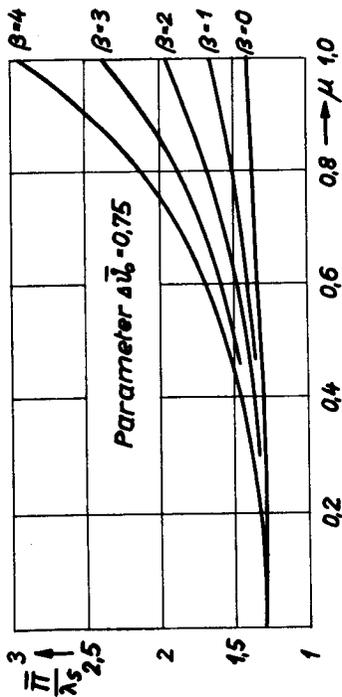
$$\frac{\varphi_p}{\lambda_s} = \mu \cdot e^{\frac{\beta}{\delta} \cdot \mu^2} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} \cdot \mu^{\nu}$$



Inhomogene Lösung der Differentialgleichung (III 51)

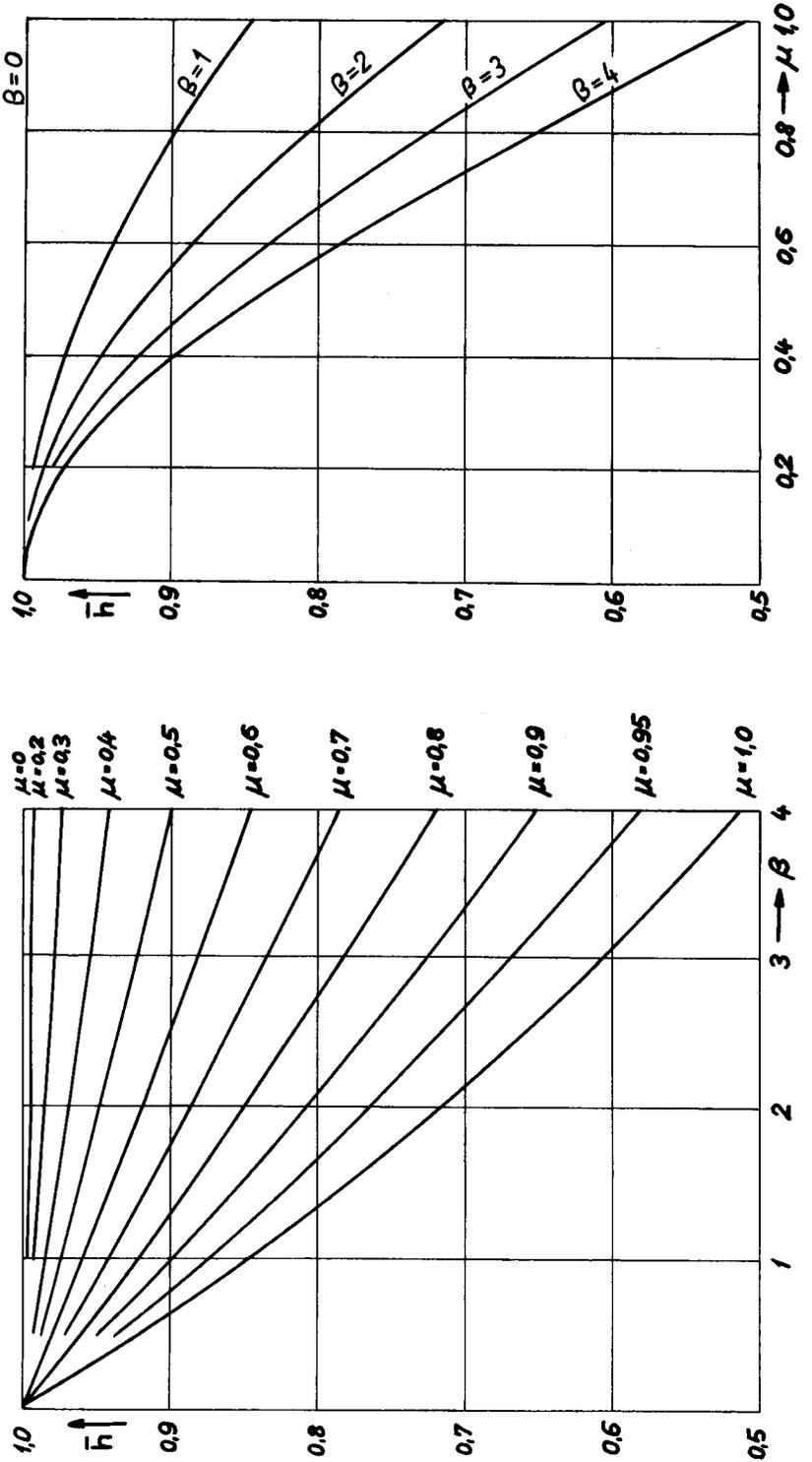
$$\frac{\varphi_P}{\lambda_S} = \mu e^{\delta} \mu^2 \sum_{\nu=0}^{\beta} b_{\nu} \mu^{\nu}$$

Verlauf des Temperaturfalles $\Delta \bar{v} = \Delta \bar{v}_0 + (1 - \Delta \bar{v}_0) \mu^2$



Scheibe mit dem Profil einer Scheibe, gleicher Festigkeit.

Bezogene Scheibendicke $\bar{h} = \frac{h}{h_0} = e^{-\frac{\beta}{6} \mu^2}$



A N H A N G

2. Hilfsfunktionen der Zylinderschale

Ω	$a = \frac{\sin \Omega \cos \Omega - \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$b = \frac{\sin \Omega \cos \Omega + \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$c = \frac{\sin^2 \Omega + \sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$h = \frac{\sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$
0,1	19,99970	2999,97990	299,99532	150,49766
0,2	10,00002	375,06763	75,00286	38,00143
0,3	6,66717	111,22238	33,34271	17,17135
0,4	5,00121	47,02349	18,76673	9,88336
0,5	4,00238	24,18567	12,02618	6,51309
0,6	3,33744	14,11162	8,37101	4,68550
0,7	2,86366	9,00611	6,17371	3,58685
0,8	2,50972	6,15604	4,75438	2,87719
0,9	2,23604	4,44865	3,78823	2,39411
1,0	2,01891	3,36997	3,10415	2,05207
1,1	1,84328	2,66019	2,60502	1,80251
1,2	1,69912	2,17825	2,23238	1,61619
1,3	1,57951	1,84305	1,94930	1,47465
1,4	1,47950	1,60566	1,73146	1,36573
1,5	1,39548	1,43535	1,56232	1,28116
1,6	1,32469	1,31212	1,43027	1,21513
1,7	1,26504	1,22256	1,32692	1,16346
1,8	1,21483	1,15742	1,24607	1,12303
1,9	1,17272	1,11020	1,18302	1,09151
2,0	1,13758	1,07619	1,13414	1,06707
2,1	1,10845	1,05196	1,09658	1,04829
2,2	1,08449	1,03496	1,06804	1,03402
2,3	1,06498	1,02326	1,04669	1,02334
2,4	1,04928	1,01543	1,03101	1,01550
2,5	1,03681	1,01035	1,01976	1,00988
2,6	1,02703	1,00721	1,01192	1,00596
2,7	1,01951	1,00537	1,00668	1,00334
2,8	1,01382	1,00439	1,00335	1,00167
2,9	1,00960	1,00394	1,00139	1,00069
3,0	1,00656	1,00377	1,00039	1,00019

Ω	$a = \frac{\sin \Omega \cos \Omega - \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$b = \frac{\sin \Omega \cos \Omega + \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$c = \frac{\sin^2 \Omega + \sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$h = \frac{\sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$
3,1	1,00441	1,00374	1,00002	1,00001
3,2	1,00296	1,00374	1,00004	1,00002
3,3	1,00201	1,00371	1,00027	1,00013
3,4	1,00141	1,00362	1,00058	1,00029
3,5	1,00107	1,00347	1,00089	1,00044
3,6	1,00089	1,00326	1,00117	1,00058
3,7	1,00081	1,00301	1,00137	1,00068
3,8	1,00078	1,00272	1,00150	1,00075
3,9	1,00077	1,00241	1,00155	1,00077
4,0	1,00077	1,00210	1,00153	1,00076
4,1	1,00076	1,00180	1,00147	1,00073
4,2	1,00074	1,00151	1,00136	1,00068
4,3	1,00071	1,00125	1,00123	1,00061
4,4	1,00067	1,00102	1,00109	1,00054
4,5	1,00061	1,00082	1,00094	1,00047
4,6	1,00055	1,00064	1,00079	1,00039
4,7	1,00049	1,00050	1,00066	1,00033
4,8	1,00042	1,00038	1,00053	1,00026
4,9	1,00036	1,00028	1,00042	1,00021
5,0	1,00030	1,00020	1,00033	1,00016
5,1	1,00025	1,00014	1,00025	1,00012
5,2	1,00020	1,00010	1,00019	1,00009
5,3	1,00016	1,00007	1,00013	1,00006
5,4	1,00012	1,00004	1,00009	1,00004
5,5	1,00010	1,00003	1,00006	1,00003
5,6	1,00007	1,00002	1,00004	1,00002
5,7	1,00005	1,00001	1,00002	1,00001
5,8	1,00004	1,00001	1,00001	1,00000
5,9	1,00002	1,00000	1,00000	1,00000
6,0	1,00002	1,00000	1,00000	1,00000

Ω	$d = \frac{\sin \Omega \cdot \sin \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$e = \frac{\cos \Omega \sin \Omega - \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$f = \frac{\cos \Omega \sin \Omega \cdot \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$g = \frac{\sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$
0,1	149,99682	9,99985	2999,93000	149,49766
0,2	37,49810	4,99976	374,96763	37,00143
0,3	16,66385	3,33293	111,07239	16,17135
0,4	9,37003	2,49908	46,82352	8,88336
0,5	5,99226	1,99821	23,93576	5,51309
0,6	4,15553	1,66358	13,81184	3,68550
0,7	3,04609	1,42368	8,65657	2,58685
0,8	2,32401	1,24271	5,75694	1,87719
0,9	1,82693	1,10075	4,00028	1,39411
1,0	1,46933	0,98583	2,87273	1,05207
1,1	1,20272	0,89031	2,11461	0,80251
1,2	0,99794	0,80909	1,58505	0,61619
1,3	0,83662	0,73861	1,20313	0,47465
1,4	0,70674	0,67637	0,92016	0,36573
1,5	0,60018	0,62051	0,70563	0,28116
1,6	0,51129	0,56968	0,53981	0,21513
1,7	0,43610	0,52287	0,40955	0,16346
1,8	0,37172	0,47932	0,30588	0,12303
1,9	0,31604	0,43848	0,22253	0,09151
2,0	0,26752	0,39994	0,15507	0,06707
2,1	0,22499	0,36343	0,10025	0,04829
2,2	0,18756	0,32875	0,05570	0,03402
2,3	0,15457	0,29581	0,01960	0,02334
2,4	0,12548	0,26456	-0,00942	0,01550
2,5	0,09989	0,23497	-0,03247	0,00988
2,6	0,07746	0,20707	-0,05043	0,00596
2,7	0,05789	0,18089	-0,06405	0,00334
2,8	0,04096	0,15647	-0,07394	0,00167
2,9	0,02642	0,13383	-0,08066	0,00069
3,0	0,01408	0,11300	-0,08468	0,00019

Ω	$d = \frac{\sin \Omega \sin \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$e = \frac{\cos \Omega \sin \Omega - \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$f = \frac{\cos \Omega \sin \Omega + \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$	$g = \frac{\sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$
3,1	0,00375	0,09397	- 0,08643	0,00001
3,2	- 0,00476	0,07673	- 0,08630	0,00002
3,3	- 0,01165	0,06126	- 0,08463	0,00013
3,4	- 0,01708	0,04750	- 0,08173	0,00029
3,5	- 0,02121	0,03538	- 0,07788	0,00044
3,6	- 0,02421	0,02481	- 0,07332	0,00058
3,7	- 0,02623	0,01572	- 0,06825	0,00068
3,8	- 0,02740	0,00799	- 0,06287	0,00075
3,9	- 0,02787	0,00152	- 0,05732	0,00077
4,0	- 0,02775	- 0,00380	- 0,05174	0,00076
4,1	- 0,02714	- 0,00809	- 0,04623	0,00073
4,2	- 0,02616	- 0,01145	- 0,04089	0,00068
4,3	- 0,02488	- 0,01400	- 0,03577	0,00061
4,4	- 0,02338	- 0,01583	- 0,03094	0,00054
4,5	- 0,02173	- 0,01705	- 0,02642	0,00047
4,6	- 0,01998	- 0,01773	- 0,02224	0,00039
4,7	- 0,01819	- 0,01797	- 0,01842	0,00033
4,8	- 0,01640	- 0,01784	- 0,01496	0,00026
4,9	- 0,01463	- 0,01741	- 0,01185	0,00021
5,0	- 0,01292	- 0,01674	- 0,00910	0,00016
5,1	- 0,01129	- 0,01590	- 0,00668	0,00012
5,2	- 0,00974	- 0,01491	- 0,00457	0,00009
5,3	- 0,00830	- 0,01384	- 0,00277	0,00006
5,4	- 0,00698	- 0,01271	- 0,00124	0,00004
5,5	- 0,00576	- 0,01155	0,00002	0,00003
5,6	- 0,00466	- 0,01040	0,00106	0,00002
5,7	- 0,00368	- 0,00927	0,00190	0,00001
5,8	- 0,00281	- 0,00817	0,00254	0,00000
5,9	- 0,00204	- 0,00713	0,00303	0,00000
6,0	- 0,00138	- 0,00614	0,00337	0,00000

$\gamma \bar{x}$	$\text{Cos}(\gamma \bar{x}) \text{cos}(\gamma \bar{x})$	$\text{Sin}(\gamma \bar{x}) \text{cos}(\gamma \bar{x})$	$\text{Cos}(\gamma \bar{x}) \text{sin}(\gamma \bar{x})$	$\text{Sin}(\gamma \bar{x}) \text{sin}(\gamma \bar{x})$
0,1	0,99998	0,09966	0,10033	0,00999
0,2	0,99973	0,19732	0,20265	0,03999
0,3	0,99865	0,29091	0,30891	0,08999
0,4	0,99573	0,37832	0,42098	0,15995
0,5	0,98958	0,45730	0,54061	0,24982
0,6	0,97840	0,52545	0,66936	0,35948
0,7	0,96000	0,58019	0,80860	0,48869
0,8	0,93179	0,61874	0,95941	0,63708
0,9	0,89082	0,63809	1,12257	0,80409
1,0	0,83373	0,63496	1,29845	0,98889
1,1	0,75683	0,60584	1,48699	1,19033
1,2	0,65610	0,54696	1,68760	1,40687
1,3	0,52721	0,45431	1,89909	1,63649
1,4	0,36558	0,32366	2,11960	1,87659
1,5	0,16640	0,15061	2,34651	2,12394
1,6	-0,07526	-0,06936	2,57636	2,37455
1,7	-0,36441	-0,34087	2,80474	2,62358
1,8	-0,70602	-0,66846	3,02620	2,86522
1,9	-1,10491	-1,05656	3,23419	3,09266
2,0	-1,56562	-1,50930	3,42095	3,29789
2,1	-2,09224	-2,03041	3,57741	3,47170
2,2	-2,68821	-2,62301	3,69313	3,60355
2,3	-3,35617	-3,28937	3,75628	3,68151
2,4	-4,09765	-4,03076	3,75351	3,69223
2,5	-4,91284	-4,84708	3,67000	3,62087
2,6	-5,80028	-5,73664	3,48943	3,45114
2,7	-6,75655	-6,69579	3,19401	3,16528
2,8	-7,77590	-7,71860	2,76456	2,74419
2,9	-8,84987	-8,79645	2,18065	2,16749
3,0	-9,96690	-9,91762	1,42074	1,41372

$y\bar{x}$	$\text{Cos}(y\bar{x}) \cos(y\bar{x})$	$\text{Sin}(y\bar{x}) \cos(y\bar{x})$	$\text{Cos}(y\bar{x}) \sin(y\bar{x})$	$\text{Sin}(y\bar{x}) \sin(y\bar{x})$
3,1	-11,11188	-11,06687	0,46243	0,46056
3,2	-12,26569	-12,22500	- 0,71722	- 0,71484
3,3	-13,40480	-13,36838	- 2,14136	- 2,13554
3,4	-14,50075	-14,46848	- 3,83279	- 3,82426
3,5	-15,51973	-15,49145	- 5,81346	- 5,80287
3,6	-16,42213	-16,39763	- 8,10377	- 8,09168
3,7	-17,16216	-17,14119	-10,72177	-10,70867
3,8	-17,68744	-17,66975	-13,68223	-13,66854
3,9	-17,93876	-17,92407	-16,99562	-16,98170
4,0	-17,84985	-17,83788	-20,6693	-20,65307
4,1	-17,34728	-17,33775	-24,69431	-24,68075
4,2	-16,35052	-16,34317	-29,06763	-29,05456
4,3	-14,77212	-14,76668	-33,76683	-33,75440
4,4	-12,51815	-12,51437	-38,76025	-38,74856
4,5	- 9,48878	- 9,48644	-44,00265	-43,99179
4,6	- 5,57927	- 5,57814	-49,43332	-49,42334
4,7	- 0,68110	- 0,68099	-54,97391	-54,96481
4,8	5,31637	5,31565	-60,52628	-60,51809
4,9	12,52404	12,52265	-65,97033	-65,96301
5,0	21,05055	21,04964	-71,16172	-71,15526
5,1	30,99946	30,99716	-75,92977	-75,92412
5,2	42,46582	42,46324	-80,07534	-80,07046
5,3	55,53217	55,52940	-83,36897	-83,36482
5,4	70,26397	70,26110	-85,54925	-85,54576
5,5	86,70433	86,70143	-86,32145	-86,31857
5,6	104,86819	104,86532	-85,35675	-85,35442
5,7	124,73562	124,73283	-82,29190	-82,29006
5,8	146,24470	146,24202	-76,72965	-76,72824
5,9	169,28347	169,28092	-68,24001	-68,23898
6,0	193,68136	193,67898	-56,36247	-56,36178

Funktionen a bis h der Zylinderschale.

$$a = \frac{\sin \Omega \cos \Omega - \sin^2 \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$$

$$e = \frac{\cos \Omega \sin \Omega - \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$$

$$b = \frac{\sin \Omega \cos \Omega + \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$$

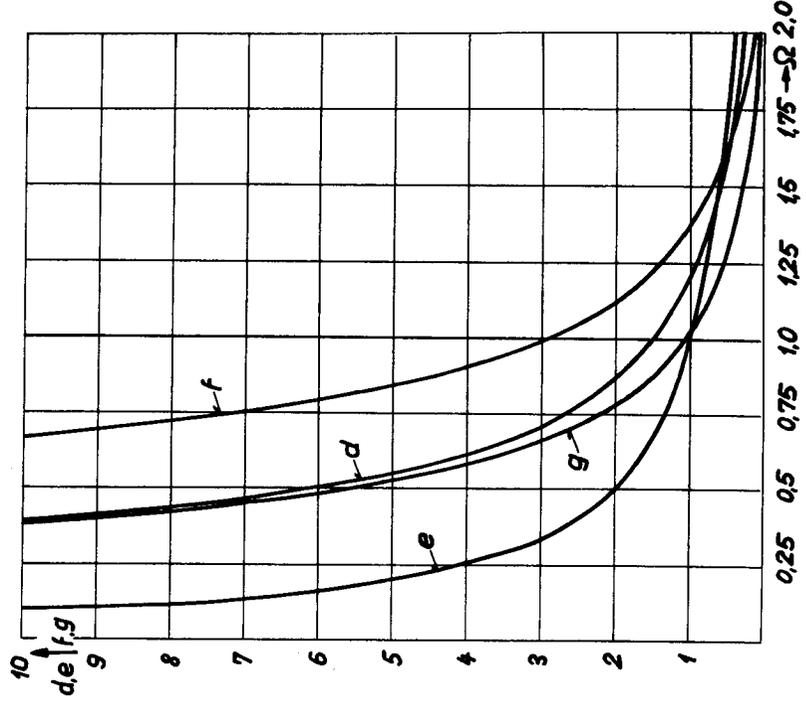
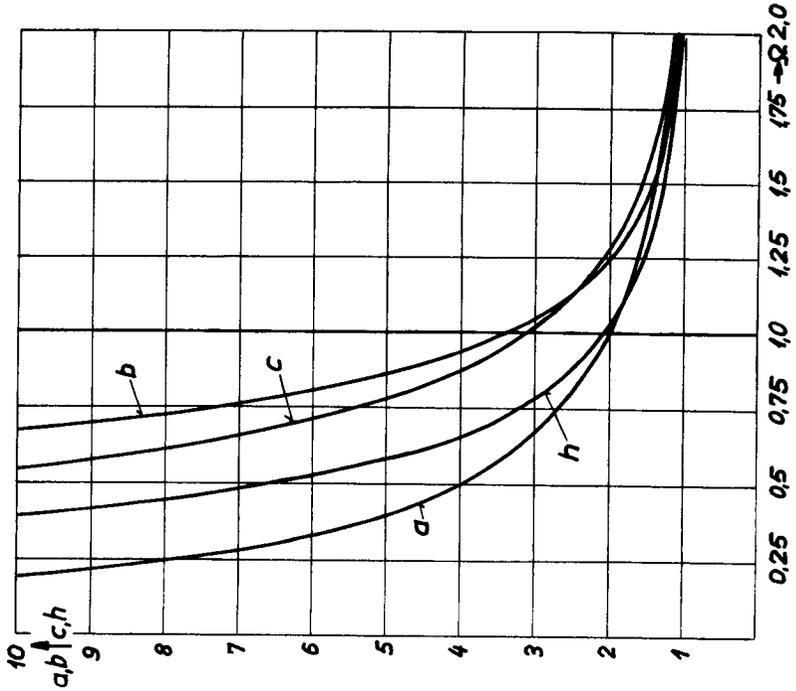
$$f = \frac{\cos \Omega \sin \Omega + \sin \Omega \cos \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$$

$$c = \frac{\sin^2 \Omega + \sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$$

$$g = \frac{\sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$$

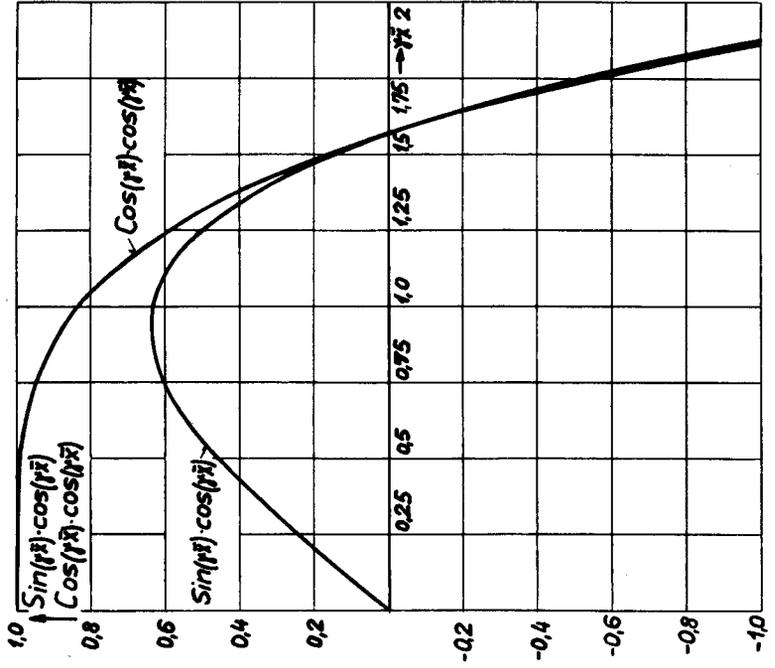
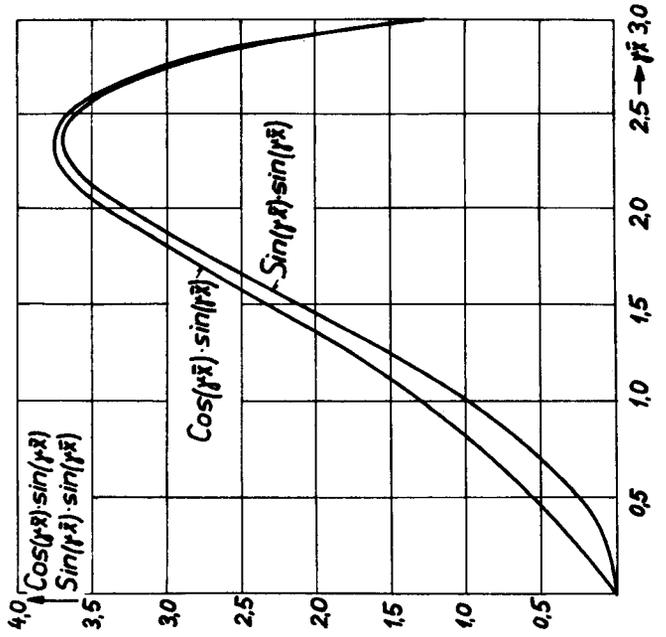
$$d = \frac{\sin \Omega \sin \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$$

$$h = \frac{\sin^2 \Omega}{\sin^2 \Omega - \sin^2 \Omega}$$



Funktionen $\text{Cos}(\gamma\bar{x}) \cdot \sin(\gamma\bar{x})$, $\text{Sin}(\gamma\bar{x}) \cdot \sin(\gamma\bar{x})$, $\text{Cos}(\gamma\bar{x}) \cdot \text{cos}(\gamma\bar{x})$, $\text{Sin}(\gamma\bar{x}) \cdot \text{cos}(\gamma\bar{x})$

der Zylinderschale.



LITERATURHINWEISE

- 1) Pflüger A. Elementare Schalenstatik, 2. Auflage 1957, S. 4
- 2) Eichelberg G. Temperaturverlauf und Wärmespannungen in Verbrennungsmotoren.
VDI-Forschungsheft Nr. 263, Berlin 1923, S. 37
- 3) Manson S. Determination of Elastic Stresses in Gas-Turbine Disks. National
Advisory Committee for Aeronautics, Report Nr. 871, 1947
- 4) W. Hort und Die Differentialgleichungen der Technik und Physik, 5. Auflage
A. Thoma 1950, S. 182
- 5) Biezeno C.B. Technische Dynamik, 2. Auflage 1953, Bd. 2, S. 17, Bd. 1, S. 513
Gammel R.
- 6) Timoshenko S. Theory of Plates and Shells, 1. Auflage 1940, S. 389
- 7) Eichelberg G. Vorlesungen über Verbrennungsmotoren II, 2. Auflage 1947, S. 1
- 8) Melan E. Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. 1953, S. 89
Parkus H.
- 9) Zurmühl R. Matrizen eine Darstellung für Ingenieure, 1. Auflage 1950, S. 248

L E B E N S L A U F

Künzli Albert, von Gossau ZH, geb. am 16. April 1922 in Gossau ZH

Nach dem Besuche der Primar- und Sekundarschule in Gossau ZH absolvierte ich eine Lehre als Maschinenzeichner bei der Firma Gebr. Sulzer in Winterthur. Im April 1945, nach 3jährigem Studium am Kantonalen Technikum Winterthur, diplomierte ich daselbst als Maschinentechniker. Im Oktober desselben Jahres begann ich am Institut Minerva mit den Vorbereitungen auf die Eidg. Technische Hochschule. Vom Oktober 1946 bis Juni 1950 war ich regulär Studierender an der Abteilung für Maschineningenieurwesen der Eidg. Technischen Hochschule. Diplomabschluss Dezember 1950 als Maschineningenieur.

Seit Januar 1951 Ingenieur bei der Firma Gebr. Sulzer AG. in Winterthur.