

Prom. Nr. 2858

**Lösung der Diffusionsgleichung
einer rotationssymmetrischen Halbleiterdiode
unter Berücksichtigung
von Raum- und Oberflächenrekombination
mit Hilfe eines Analogienetzwerkes**

**Von der
Eidgenössischen Technischen
Hochschule in Zürich**

**zur Erlangung
der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften
genehmigte**

PROMOTIONSARBEIT

vorgelegt von

ARMIN FREI

dipl. El.-Ing. E. T. H.
von Zürich und Weiningen

Referent: Herr Prof. Dr. M. J. O. Strutt

Korreferent: Herr P.-D. Dr. A. P. Speiser

Juris-Verlag Zürich

1958

Leer - Vide - Empty

Meinen Eltern

Leer - Vide - Empty

VORWORT

Die vorliegende Arbeit verfolgt zwei Ziele: Erstens soll sie einen Beitrag zur allgemeinen Theorie der Analogienetzwerke liefern und zweitens sollen die Diffusionseffekte bei Halbleitermaterialien erforscht werden. Die theoretischen Grundlagen zum Bau eines Analogienetzwerkes, welches der Poisson'schen Differentialgleichung

$$\Delta p + \frac{p_n - p}{L_p^2} + \frac{1}{D_p} \frac{\partial (p_n - p)}{\partial t} = 0$$

genügt, werden in einem rotationssymmetrischen Fall ausführlich beschrieben. Dabei wird theoretisch und experimentell untersucht, wie der systematische Fehler, herrührend vom Uebergang von der Differential- zur Differenzgleichung, mit der Maschenweite d im Zusammenhang steht. Die Beziehung zwischen den elektrischen Grössen im Netzwerk und ihren analogen Grössen in der Halbleiterdiode werden ausführlich beschrieben. Die Randbedingung an der freien Oberfläche

$$\text{grad}_n p + \frac{s}{D_p} (p - p_n) = 0$$

wird im Netzwerk durch Oberflächenableitwiderstände nachgebildet. Ein weiteres Kapitel umfasst Messungen von mittleren Diffusionsströmen bei rotationssymmetrischen Dioden, wobei die Kontaktflächen und die Dicken variiert wurden. Dabei wird eine Zahl k_2 als Quotient vom räumlichen zum linearen Diffusionsstrom definiert. Es zeigt sich, dass bei gewissen räumlichen Anordnungen dieser Faktor k_2 wesentlich von 1 abweicht. Der Einfluss der Oberflächenrekombination auf den Diodenstrom wurde gemessen und für einen einfachen Fall einer Diode auch berechnet. Für einen p-n-p-Intrinsic-Transistor wurde die Abhängigkeit des Transportfaktors von den geometrischen Abmessungen und der Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit der Basissschicht untersucht. Alle diese Messungen wurden für Gleich- und Wechselstrom durchgeführt und die Resultate in Form von Diagrammen dargestellt, so dass sie für den Konstrukteur wertvolle Hinweise für die Dimensionierung von Halbleiterelementen geben können.

Ich möchte es nicht unterlassen, meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. M. J. O. Strutt, für die Anregung zu dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Seine tatkräftige Unterstützung, seine wertvollen Ratschläge und seine aufbauende Kritik haben grossen Anteil am Gelingen dieser Arbeit.

Für das wohlwollende Korreferat von Herrn P.-D. Dr. A. P. Speiser bin ich sehr zu Dank verpflichtet. Der Kredit für Uhrenforschung und Mittel aus der Stiftung Hasler-Werke, Bern, ermöglichten diese Arbeit; diesen Stellen wird für die finanzielle Unterstützung bestens gedankt.

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	5
Nomenklatur	8
1) Physikalische Grundformeln	11
2) Methoden zur Lösung der Laplace- und Poissongleichung	15
2.1. Numerische Verfahren	15
2.2. Elektrolyttrog	15
2.3. Gummimembran	16
2.4. Netzwerke	16
3) Lineares Netzwerk	17
3.1. Berechnung der exakten Lösung der Diffusionsgleichung im ebenen (eindimensionalen) Fall	17
3.2. Konstruktion des linearen Netzwerkes	20
3.3. Messungen am linearen Netzwerk	25
4) Analogienetzwerk im rotationssymmetrischen Fall	31
4.1. Berechnung des Netzwerkes im rotationssymmetrischen Fall	31
4.2. Bedeutung der Netzwerkströme	36
4.3. Oberflächenrekombination	38
4.4. Messungen am räumlichen Netzwerk	39
4.5. Variation der Oberflächenrekombination	50
4.6. Transportfaktor eines p-n-p-Transistors	55
Literaturverzeichnis	60

NOMENKLATUR

- A = Fläche
 ΔA = Differenzenflächenelement = $2\pi r d$
A(r,z) = Funktion zur Erfüllung der Kontinuitätsbedingung
C = Netzwerkkapazität
D_p = Diffusionskonstante der Löcher
d = Abstand zweier Maschenpunkte
e = Betrag der Elektronenladung = $1,602 \cdot 10^{-19}$ As
f = Frequenz
I_C = Collectorstrom
I_E = Emitterstrom
I_{NL} = Totaler Netzwerkstrom im linearen Fall
I_{NR} = Totaler Netzwerkstrom im räumlichen Fall
I_{KL} = Diodenstrom im linearen Fall
I_{KR} = Diodenstrom im räumlichen Fall
i_{DC} = Speicherstrom in der Diode
i_{DR} = Volumenrekombinationsstrom in der Diode
i_{Dr} = Diffusionsstrom in Richtung r
i_{Dz} = Diffusionsstrom in Richtung z
i_{NC} = Speicherstrom im Netzwerk
i_{NR} = Volumenrekombinationsstrom im Netzwerk
i_{Nr} = Netzwerkstrom in Richtung r
i_{Nz} = Netzwerkstrom in Richtung z
i_{OR} = Oberflächenrekombinationsstrom im Netzwerk
j_D = Diffusionsstromdichte in der Diode
j_{DL} = Diffusionsstromdichte in der ebenen Diode
j_{DR} = Mittlere Diffusionsstromdichte im räumlichen Fall
j_{Dr} = Diffusionsstromdichte in Richtung r
j_{Dz} = Diffusionsstromdichte in Richtung z
k = Boltzmann'sche Konstante = $1,380 \cdot 10^{-23}$ VAs/°K
k₀ = Netzwerkkonstante, welche p in V überführt
k₁ = Netzwerkkonstante, welche die Ströme im Netzwerk in die Ströme in der Diode überführt
k₂ = Quotient aus mittlerer räumlicher Stromdichte und linearer Stromdichte
k_{3n} = Eigenwerte
L_p = Diffusionslänge der Löcher

- l_n = Dicke des n-Materials
- l_p = Dicke des p-Materials
- m = Anzahl der Maschenweiten in Richtung r
- n = Anzahl der Maschenweiten in Richtung z
- n = Elektronendichte
- n_i = Intrinsicdichte
- n_n = Elektronendichte im n-Material
- n_p = Gleichgewichtsdichte der Elektronen im p-Material
- p = Löcherdichte
- p_n = Gleichgewichtsdichte der Löcher im n-Material
- p_p = Löcherdichte im p-Material
- r_A = Radius der Kontaktfläche A_A
- r_B = Radius der Kontaktfläche A_B
- r_K = Radius der Kontaktfläche A_K
- R = Rekombinationswiderstand
- R_o = Netzwerkwiderstand
- $R_{1..4}$ = Maschenwiderstände
- R_{OR} = Oberflächenrekombinationswiderstand
- s = Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit
- T = Absolute Temperatur
- t = Zeit
- U = Spannung
- U_{CB} = Spannung über der Collectorsperrschicht
- U_{EB} = Spannung über der Emittersperrschicht
- U_D = Diffusionsspannung
- U_K = Klemmenspannung an der Diode
- U_N = Spannung am Netzwerk
- V = Elektrisches Potential
- ΔV = Differenzenvolumenelement
- Y_{NL} = Admittanz des linearen Netzwerkes
- Y_{NR} = Admittanz des räumlichen Netzwerkes
- α_{FB} = Stromverstärkungsfaktor in Vorwärtsrichtung bei einem Transistor in Basis-schaltung
- β_{FB} = Transportfaktor in Vorwärtsrichtung bei einem Transistor in Basisschaltung
- \mathcal{S} = Fehlerfunktion
- ϵ = Dielektrizitätskonstante
- ϵ_r = Relativer Fehler

- τ_p = Lebensdauer der Löcher
 φ_o = Phasenwinkeldifferenz zwischen der linearen Diffusionswechselstromdichte
und der mittleren räumlichen Diffusionswechselstromdichte
 φ_{DL} = Phasenwinkel der linearen Diffusionsstromdichte
 φ_{DR} = Phasenwinkel der mittleren räumlichen Diffusionsstromdichte
 ω = Kreisfrequenz

Kap. 1) PHYSIKALISCHE GRUNDFORMELN

Als Versuchsanordnung wird der schematische Aufbau nach Abb. 1 einer Halbleiterdiode vom Typus p-n betrachtet. Auf einer Elektrode E_A wird ein zylindrisches n-Plättchen sperrschichtfrei aufgelötet. Das n-Plättchen bestehe aus Germanium (Ge^{IV}), welches mit Arsen (As^{V}) versetzt wurde, so dass infolge der unabhgsättigten Valenzen eine leitungsfähige Elektronenwolke entsteht. Bei vollständiger Dissoziation befinden sich gleichviele "freie" Elektronen im Kistallgitter, wie Donatoratome eingebaut wurden. Die Ladungstrennung bewirkt von aussen gesehen keine Veränderung der Gesamtladung. Auf der freien Stirnseite K des n-Plättchens wird eine p-Perle aufgeschmolzen. Das p-Material bestehe wiederum aus Germanium (Ge^{IV}), welches aber diesmal mit Indium (In^{III}) versetzt wurde. Weil nun aber zu wenig Valenzelektronen vorhanden sind, entstehen Löcher, welche vorwiegend am Leitungsmachanismus beteiligt sind. Am p-Leiter wird wiederum eine Elektrode E_B sperrschichtfrei aufgelötet. Von aussen wird eine Spannungsquelle U_K an die Diode angelegt und gefragt wird nach dem Strom I_K , der durch die Diode fliesst.

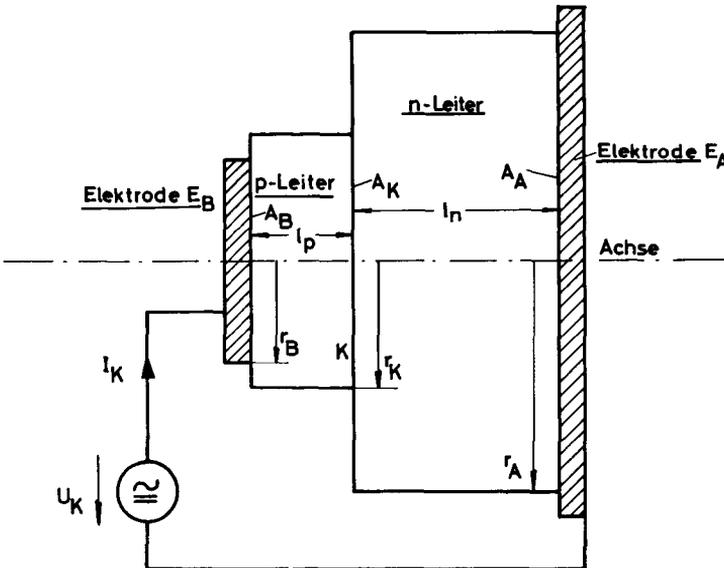


Abb. 1 Darstellung der Halbleiterdiode. Geometrische Abmessungen und elektrische Schaltung.

An der Grenzschicht K haben wir eine Unstetigkeit bezüglich der Akzeptor- und Donatordotierungen. Die im Ueberschuss vorhandenen Löcher des p-Materials werden bei abgeschalteter Spannung U_K in den angrenzenden n-Raum diffundieren, und umgekehrt werden die im Ueberschuss vorhandenen Elektronen des n-Materials in den p-Raum diffundieren. Dieser Vorgang erreicht ein Gleichgewicht, sobald die durch die Ladungsverschiebung erzeugte Feldstärke E genügend gross ist, um den Diffusionsstrom zu kompensieren. Die an der Grenzschicht auftretende Potentialschwelle berechnet sich im stationären Fall nach Boltzmann (Abb. 2):

$$U_D = \frac{kT}{e} \ln \left(\frac{n_n p_p}{n_i^2} \right) \quad (1)$$

Für $T = 300^\circ\text{K}$, $n_n = p_p = 10^{22} \text{ m}^{-3}$ und $n_i = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ wird $U_D = 0,358 \text{ V}$

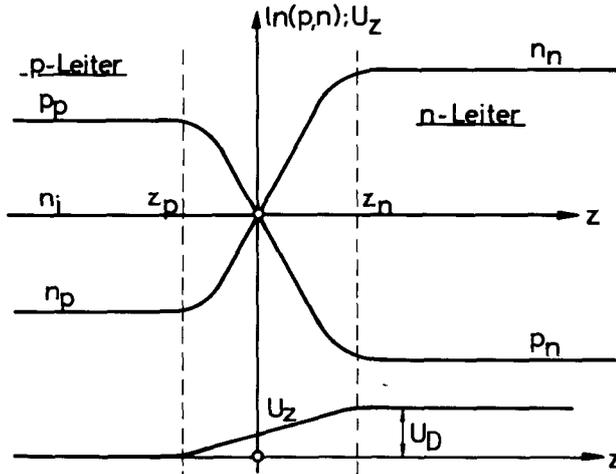


Abb. 2 Darstellung der Löcher- und Elektronendichte sowie der Spannung im Bereich der Sperrschicht.

Der Raum zwischen z_n und z_p wird Sperrschicht genannt. Seine Ausdehnung in Richtung z beträgt im stromlosen Zustand:

$$z_n - z_p = \sqrt{\frac{2 \epsilon U_D}{e} \left(\frac{1}{p_p} + \frac{1}{n_n} \right)} \quad (2)$$

Die Sperrschicht berechnet sich mit obigen Zahlenwerten ($\xi = 16 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$) zu $z_n - z_p = 3,55 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Dieser Wert kann gegen $l_n = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ vernachlässigt werden. Damit ist die geometrische Begrenzung des n-Raumes vollständig gegeben.

Die Randbedingungen des n-Raumes können wie folgt beschrieben werden: Im stromlosen Zustand ist die Löcherdichte an der Stelle z_n im n-Material $p = p_n$. Sobald eine zusätzliche Spannung U_K an die Diode angelegt wird (Vorzeichen siehe Abbildung 1), erhöht sich die Löcherdichte gemäss der Boltzmannstatistik um den Faktor $\exp\left(\frac{eU_K}{kT}\right)$. Somit wird für $U_K = \bar{U} + \tilde{U} \exp(j\omega t)$ und $\tilde{U} \ll \frac{kT}{e}$

$$p(z=0) = p_n \exp\left(\frac{eU_K}{kT}\right) = p_n \exp\left(\frac{e\bar{U}}{kT}\right) \left[1 + \frac{e\tilde{U}}{kT} \exp(j\omega t) \right] \quad (3)$$

Bei der Elektrode E_A haben wir Sperrschichtfreiheit vorausgesetzt; damit bleibt:

$$p(z=l_n) = p_n \quad (4)$$

Die Zahl der Elektronen im n-Raum ändert sich bei $U_K \neq 0$ bei Annahme vollständiger Dissoziation nicht:

$$n = n_n = \text{konst.} \quad (5)$$

Die Vorgänge an der Oberfläche sind physikalisch nicht einfach zu überblicken. Die wichtigste Oberflächenerscheinung ist die Rekombination der Löcher (Minoritätsträger) an Fremdatomen, die sich an der Oberfläche abgelagert haben. Sobald mehr Löcher vorhanden sind, als die Gleichgewichtsdichte p_n angibt, versickert ein Löcherstrom von der Grösse $s(p - p_n)$ an der Oberfläche. Dieser Löcherstrom wird durch Diffusion $-D_p \text{ grad}_n p$ aus dem Innern des Halbleiters gespeist (grad_n bedeutet erste Ableitung in Richtung der Flächennormalen):

$$\text{grad}_n p + \frac{s}{D_p} (p - p_n) = 0 \quad (6)$$

Die Zunahme der Löcher (Minoritätsträger) im n-Material beträgt im Raumelement $dx dy dz$ in der Zeit dt infolge Diffusion und Raumrekombination:

$$dp \, dx \, dy \, dz = - D_p \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_x dy \, dz \, dt - \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x+dx} dy \, dz \, dt + \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_y dz \, dx \, dt - \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y+dy} dz \, dx \, dt \right. \\ \left. + \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_z dx \, dy \, dt - \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z+dz} dx \, dy \, dt \right\} - \frac{p - p_n}{\tau_p} dx \, dy \, dz \, dt$$

Diese Trägerbilanz führt unter Berücksichtigung von $L_p^2 = \tau_p D_p$ zur Diffusionsgleichung:

$$\Delta p + \frac{p_n - p}{L_p^2} + \frac{1}{D_p} \frac{\partial(p_n - p)}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

Damit ist der Transportmechanismus im n-Leiter vollständig bestimmt. Für den p-Leiter gelten analoge Formeln, sowohl bezüglich Differentialgleichung als auch Randbedingungen. Für die folgenden Untersuchungen wurden die physikalischen und geometrischen Größen anhand der einschlägigen Literatur wie folgt festgelegt (Rationales Giorgi-System):

$D_p = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$	$r_K = 10^{-3} \text{ m}$
$L_p = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$s = 25 \text{ m/s}$
$l_n = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$
$p_n = 10^{16} \text{ m}^{-3}$	$\epsilon = 16 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$
$r_A = 10^{-3} \text{ m}$	$\tau_p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

Lit: [1], [2], [3], [4].

Kap. 2) METHODEN ZUR LÖSUNG DER LAPLACE- UND POISSONGLEICHUNG

2.1. Numerische Verfahren

Bei den numerischen Verfahren sucht man immer eine möglichst gute Näherungslösung, weil eine exakte Lösung nicht bekannt ist oder weil der Aufwand zu deren Berechnung allzu gross ist. Die Diffusionsgleichung (7) im Falle, wo keine Variation nach der Zeit stattfindet:

$$\Delta p + \frac{p_n - p}{L_p^2} = 0 \quad (8)$$

kann mit Hilfe der Relaxationsrechnung gelöst werden. Dabei wird das Feld in ein Maschennetz zerlegt und die Differentialgleichung in eine Differenzgleichung umgewandelt. Aus einer ersten Näherung, die nur eine reine Annahme des Funktionsverlaufes ist, wird schrittweise eine bessere Lösung errechnet, wobei jedesmal untersucht werden muss, ob das Verfahren konvergiert oder nicht. Der dabei auftretende Fehler ist abhängig von der Maschenweite d , der Anzahl Schritte und der Wahl der ersten Näherung. Numerische Verfahren sind dann erwünscht, wenn man über moderne digitale Rechenmaschinen verfügt. Sobald die Zeit t als freie Variable auftritt, sich also eine Koordinate des n -dimensionalen Raumes ins Unendliche erstreckt, müssen die Relaxationsverfahren entsprechend umgewandelt werden.

Lit: [5], [6].

2.2. Elektrolyttrog

Da die stationäre elektrische Strömung die Laplacegleichung erfüllt, kann der Elektrolyttrog grundsätzlich zur Lösung von Laplacegleichungen verwendet werden. Vernachlässigt man in der Diffusionsgleichung (7) die Raumrekombination und beschränkt man sich auf zeitlich unabhängige Vorgänge, so erhält man die Laplacegleichung:

$$\Delta p = 0 \quad (9)$$

Der Elektrolyttrog hat den Vorteil, dass er innerhalb der Messgenauigkeit exakte Resultate liefert, denn wir brauchen keine Differenzgleichungen und keine Anfangs-

werte. Die Neumannsche Randbedingung kann dabei durch isolierte Oberflächenplättchen, welche den elektrischen Strom über Widerstände zur Erde ableiten, erfüllt werden. Dies ist nur deshalb möglich, weil der Quotient s/D_p eine positive Zahl ist. Wenn man bedenkt, dass man mit Sonden an diskreten Punkten des Elektrolyten Ströme einspeisen kann, so muss es auch möglich sein, Gleichung (8) (mit Raumrekombination) angenähert zu lösen. Ein augenfälliger Nachteil der Elektrolytmethode ist wohl die konstruktive Schwierigkeit, örtlich veränderliche Leitfähigkeiten herzustellen.

Lit: [2], [5].

2.3. Gummimembran

Vielfach wird eine gespannte Gummimembran zur Lösung der Laplacegleichung verwendet. In neuerer Zeit ist man dazu übergegangen, auch die Poissongleichung auf der Gummimembran zu lösen. Dies wird so durchgeführt, dass man in Funktion des Ortes einen ganz bestimmten Druck senkrecht zur Gummimembran ausübt. Für stationäre Fälle ist dies mit Erfolg durchgeführt worden am Beispiel der Raumladungsgleichung bei Elektronenröhren. Die Methode hat den Nachteil, dass sie für nichtstationäre Vorgänge unbrauchbar ist.

Lit: [8].

2.4. Netzwerke

Bei den Netzwerken führen wir ähnlich wie beim Relaxationsverfahren die Differentialgleichung in eine Differenzgleichung über. Dabei entsteht ein Fehler, der von der Maschenweite d abhängt. Da die Widerstände, welche die Maschenpunkte miteinander verbinden, leicht auf einige Promille genau abgeglichen werden können, haben wir die Möglichkeit, inhomogene Leitungsmechanismen nachzubilden. Die Poissongleichung kann mit Hilfe von Stromeinspeisung iterativ gelöst werden. Das Verfahren ist dabei folgendes: Vorerst wird auf dem Netzwerk die Laplacegleichung gelöst. Aus dieser ersten Näherung berechnet man an den einzelnen Ma-

schenpunkten die Einspeiseströme und erhält damit die zweite Näherung. Das Verfahren muss auf Konvergenz geprüft werden. Im Falle der Diffusionsgleichung (7) wird es sich zeigen, dass die von Raumrekombination und Raumspeicherung abhängigen Terme sehr einfach durch Ableitwiderstände und Kapazitäten dargestellt werden können.

Lit: [2], [5], [7].

Kap. 3) LINEARES NETZWERK

3.1. Berechnung der exakten Lösung der Diffusionsgleichung im ebenen (eindimensionalen) Fall

Unter der Voraussetzung, dass eine Gleichspannung \bar{U} und eine dazu relativ kleine Wechselspannung $\tilde{U} \cdot \exp(j\omega t)$ an eine ebene Diode angelegt werden, kann man eine Formel für den Verlauf der Löcherdichte p berechnen. Nachher kann durch Vergleich mit den Messungen an einer Kette auf die Genauigkeit der Netzwerkmethod geschlossen werden.

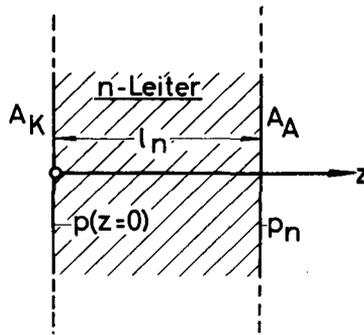


Abb. 3 Darstellung eines ebenen unendlich grossen n-Leiterplättchens.

Da sich der n-Leiter in senkrechter Richtung zur z-Achse ins Unendliche erstreckt und alle physikalischen Grössen auf einer Ebene senkrecht zur z-Achse konstant sind, das Problem also eben ist, kann man die Diffusionsgleichung (7) wie folgt anschreiben:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{p_n - p}{L_p^2} + \frac{1}{D_p} \frac{\partial(p_n - p)}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

Die Randbedingungen lauten gemäss den Formeln (3) und (4):

$$p(z=0) = p_n \exp\left(\frac{e^{-}U}{kT}\right) \left[1 + \frac{e^{-}U}{kT} \exp(j\omega t) \right] ; \quad \tilde{U} \ll \frac{kT}{e} \quad (3)$$

$$p(z=l_n) = p_n \quad (4)$$

Man löst diese Aufgabe mit folgendem Ansatz:

$$p(z, t) = \bar{p}(z) + \tilde{p}(z) \exp(j\omega t) \quad (11)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Formel (10) ein, so erhält man folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}(z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}(z)}{\partial z^2} \exp(j\omega t) + \frac{p_n - \tilde{p}(z) \exp(j\omega t) - \bar{p}(z) - \tilde{p}(z) j\omega \exp(j\omega t)}{L_p^2} - \frac{\tilde{p}(z) j\omega \exp(j\omega t)}{D_p} = 0 \quad (12)$$

Diese Gleichung wird nun nach Gleich- und Wechselanteil separiert. Dies ist dann erlaubt, wenn der Gleichspannungsanteil viel grösser ist als der Wechselspannungsanteil.

$$\bar{U} \gg \tilde{U}$$

$$\bar{p}(z) \gg \tilde{p}(z)$$

Für den Gleichspannungsanteil erhält man folgende Differentialgleichung und Randbedingungen:

$$\frac{d^2 \bar{p}(z)}{dz^2} + \frac{p_n - \bar{p}(z)}{L_p^2} = 0$$

$$\bar{p}(z=0) = p_n \exp\left(\frac{e^{-}U}{kT}\right)$$

$$\bar{p}(z=l_n) = p_n$$

Die Gleichspannungslösung heisst demzufolge:

$$\bar{p}(z) = p_n + p_n \left[\frac{\exp\left(\frac{e^{-}U}{kT}\right) - 1}{1 - \exp\left(-\frac{2l_n}{L_p}\right)} \right] \left[\exp\left(-\frac{z}{L_p}\right) - \exp\left(-\frac{2l_n}{L_p}\right) \exp\left(\frac{z}{L_p}\right) \right] \quad (13)$$

Die Diffusionsstromdichte berechnet sich allgemein:

$$j_D = - e D_p \text{grad } p \quad (14)$$

Somit wird der Gleichstromanteil der Diffusionsstromdichte im ebenen Fall an der Stelle $z = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{j}_{DL} &= - e D_p \left. \frac{d\bar{p}}{dz} \right|_{z=0} \\ \bar{j}_{DL} &= \frac{e D_p}{L_p} p_n \left[\exp \left(\frac{e^{-}U}{kT} \right) - 1 \right] \text{cth} \left(\frac{l_n}{L_p} \right) \\ \frac{\bar{j}_{DL}}{\bar{p}(z=0) - p_n} &= \frac{e D_p}{L_p} \text{cth} \left(\frac{l_n}{L_p} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Für den Wechselspannungsanteil erhält man folgende Differentialgleichung und Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{p}(z)}{dz^2} - \frac{\tilde{p}(z)}{L_p^2} - \frac{j \omega \tilde{p}(z)}{D_p} &= 0 \\ \tilde{p}(z=0) &= p_n \exp \left(\frac{e^{-}U}{kT} \right) \frac{e^{-}U}{kT} \\ \tilde{p}(z=l_n) &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung für den Wechselanteil lautet damit:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(z) \exp(j\omega t) &= \frac{p_n \exp \left(\frac{e^{-}U}{kT} \right) \frac{e^{-}U}{kT}}{1 - \exp \left(- \frac{2 l_n}{L_p} \sqrt{1 + j\omega \tau_p} \right)} \left[\exp \left(- \frac{z}{L_p} \sqrt{1 + j\omega \tau_p} \right) \right. \\ &\quad \left. - \exp \left(- \frac{2 l_n}{L_p} \sqrt{1 + j\omega \tau_p} \right) \exp \left(\frac{z}{L_p} \sqrt{1 + j\omega \tau_p} \right) \right] \exp(j\omega t) \end{aligned} \quad (16)$$

Der Wechselanteil der Diffusionsstromdichte an der Stelle $z = 0$ berechnet sich somit unter Berücksichtigung von Formel (14) zu:

$$\tilde{j}_{DL} = \frac{e^2 D_p}{L_p kT} p_n \exp\left(\frac{e^{-U}}{kT}\right) \sqrt{1 + j\omega\tau_p} \left[1 + \frac{2}{\exp\left(\frac{2}{L_p} \sqrt{1 + j\omega\tau_p}\right) - 1} \right] \cdot \tilde{U}$$

$$\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}} = \frac{e^2 D_p}{kTL_p} p_n \exp\left(\frac{e^{-U}}{kT}\right) \sqrt{1 + j\omega\tau_p} \cdot \operatorname{cth}\left(\frac{1}{L_p} \sqrt{1 + j\omega\tau_p}\right) \quad (17)$$

Mit den Formeln (13), (15), (16) und (17) sind mathematische Ausdrücke gegeben für die Gleich- und Wechselanteile der Löcherdichte und der Diffusionsstromdichte im Falle einer ebenen Diode.

Lit.: [1], [13].

3.2. Konstruktion des linearen Netzwerkes

Man führt die Diffusionsgleichung (10) in Differenzenform über. Dazu teilt man gemäss Abb. 4 die z-Achse in äquidistante Teilstücke von der Länge d auf.

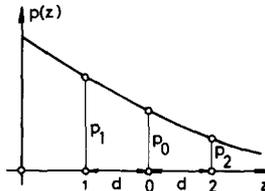


Abb. 4 Darstellung von drei benachbarten Maschenpunkten auf der z-Achse mit den dazugehörigen p-Werten.

Man betrachtet den Punkt O als Zentrum einer Taylorentwicklung und erhält für p_1 und p_2 folgende Werte:

$$p_1 = p_0 - \frac{d}{1!} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{d^2}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{d^3}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial z^3} + \frac{d^4}{4!} \frac{\partial^4 p}{\partial z^4} - + \dots$$

$$p_2 = p_0 + \frac{d}{1!} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{d^2}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{d^3}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial z^3} + \frac{d^4}{4!} \frac{\partial^4 p}{\partial z^4} + + \dots$$

Durch Addition der beiden Gleichungen und Division durch d^2 erhält man:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{p_1 - p_0}{d^2} + \frac{p_2 - p_0}{d^2} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^{2(n-1)}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} p}{\partial z^{2n}}$$

Unter der Voraussetzung, dass

$$\left| 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^{2(n-1)}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} p}{\partial z^{2n}} \right| \ll \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

und wenn wir weiterhin mit k_0/R_0 multiplizieren, wird Gleichung (10):

$$\frac{k_0(p_1 - p_0)}{R_0} + \frac{k_0(p_2 - p_0)}{R_0} + \frac{k_0 d^2}{R_0 L_p^2} (p_n - p_0) + \frac{k_0 d^2}{R_0 D_p} \frac{\partial (p_n - p_0)}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

In Abb. 5 ist eine lineare Messkette dargestellt worden. Die Punkte mit den elektrischen Potentialen V_1 , V_0 und V_2 entsprechen den Punkten 1, 0 und 2 auf der z -Achse in Abb. 4.

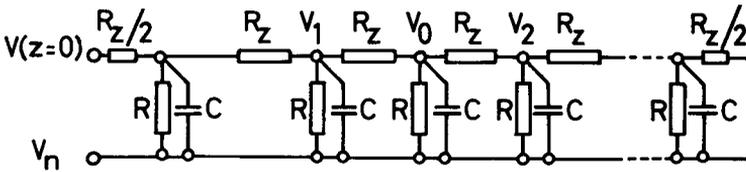


Abb. 5 Ausschnitt aus der linearen Messkette

In jedem Maschenpunkt gilt das Kirchhoffsche Gesetz, d.h. die Summe aller zu einem Maschenpunkt fließenden Ströme ist gleich Null. Diese Ströme lassen sich durch die Potentiale, die Widerstände und die Kapazitäten ausdrücken:

$$\frac{V_1 - V_0}{R_z} + \frac{V_2 - V_0}{R_z} + \frac{V_n - V_0}{R} + C \frac{\partial (V_n - V_0)}{\partial t} = 0 \quad (19)$$

Man sieht, dass die Formeln (18) und (19) analogen Aufbau haben. Wenn wir untenstehende Zuordnung der Variablen und Konstanten beachten und weiterhin dafür sorgen, dass die Randbedingungen erfüllt werden, dann löst die Widerstands-Kapazitätskette die Diffusionsgleichung im ebenen Fall.

$$\begin{aligned}
 V &= k_0 p \\
 R_z &= R_0 \frac{L^2}{d^2} \\
 R &= R_0 \frac{p}{d^2} \\
 C &= \frac{d^2}{R_0 D_p}
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 V(z=0) &= k_0 p(z=0) = k_0 p_n \exp\left(\frac{e^- U}{kT}\right) \left[1 + \frac{e^- U}{kT} \exp(j\omega t)\right] \\
 &= V_n \exp\left(\frac{e^- U}{kT}\right) \left[1 + \frac{e^- U}{kT} \exp(j\omega t)\right]
 \end{aligned}$$

$$V(z=l_n) = k_0 p(z=l_n) = k_0 p_n = V_n$$

Die Konstante k_0 verknüpft die Löcherdichte p mit der elektrischen Spannung V an der Kette; sie kann frei gewählt werden. Ebenfalls frei wählbar ist der Widerstand R_0 . Wir wählen ihn so, dass einerseits keine Erwärmung und damit Veränderung des Widerstandes bei Stromdurchgang auftritt, und andererseits die durch R_z fließenden Ströme mit den vorhandenen Messinstrumenten gut messbar sind. Je feiner man die Aufteilung des n -Raumes vornimmt, desto genauer nähert sich die Differenzgleichung der Differentialgleichung und desto mehr Schaltelemente benötigt man. Die Maschenweite d kann aus einer Fehlerbetrachtung bestimmt werden.

In Abb. 6 wurden die exakte mathematische und die durch das Netzwerk bestimmte Lösung aufgezeichnet. Ursache der Abweichungen dieser beiden Lösungen voneinander ist der Uebergang von der Differential- zur Differenzenrechnung. Wenn man einen Fehler $\delta(p_0)$ einführt, so kann man folgende Gleichung anschreiben:

$$p_0 + \delta(p_0) = p; \quad \delta(p_0) \Big|_{z=0} = 0; \quad \delta(p_0) \Big|_{z=l_n} = 0 \tag{21}$$

An den beiden Rändern hat die Fehlerfunktion $\delta(p_0)$ den Wert Null, weil die Randbedingungen in beiden Fällen die gleichen sind. Aus der Differentialgleichung und der Differenzgleichung an der Stelle 0 kann man den Quotienten

$$\epsilon_r = \frac{\delta(p_0)}{p}$$

bestimmen.

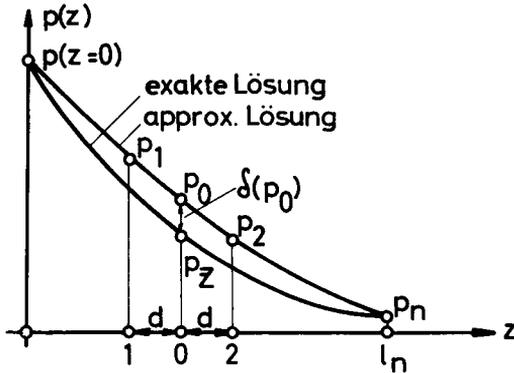


Abb. 6 Darstellung der exakten und der durch das Netzwerk approximierten Lösung im linearen Fall.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{p_n - p}{L_p^2} + \frac{1}{D_p} \frac{\partial(p_n - p)}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 (p_0 + \delta(p_0))}{\partial z^2} + \frac{p_n - (p_0 + \delta(p_0))}{L_p^2} + \frac{1}{D_p} \frac{\partial [p_n - (p_0 + \delta(p_0))]}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 (\delta(p_0))}{\partial z^2} + \frac{p_n - p_0}{L_p^2} - \frac{\delta(p_0)}{L_p^2} + \frac{1}{D_p} \frac{\partial [p_n - p_0]}{\partial t} - \frac{1}{D_p} \frac{\partial (\delta(p_0))}{\partial t} = 0$$

Gemäss Abschnitt 3.2. kann $\frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2}$ durch folgenden Ausdruck ersetzt werden:

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2} = \frac{p_1 - p_0}{d^2} + \frac{p_2 - p_0}{d^2} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^{2(n-1)}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} p_0}{\partial z^{2n}} \quad ;$$

$$\begin{aligned} & \frac{p_1 - p_0}{d^2} + \frac{p_2 - p_0}{d^2} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^{2(n-1)}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} p_0}{\partial z^{2n}} + \frac{\partial^2 (\delta(p_0))}{\partial z^2} + \frac{p_n - p_0}{L_p^2} - \frac{\delta(p_0)}{L_p^2} + \\ & + \frac{1}{D_p} \frac{\partial (p_n - p_0)}{\partial t} - \frac{1}{D_p} \frac{\partial (\delta(p_0))}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

Obige Gleichung vereinfacht sich, wenn man berücksichtigt, dass die Summe einzelner Glieder nach Gleichung (18) Null ergibt.

$$- 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d^{2(n-1)}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} p_0}{\partial z^{2n}} + \frac{\partial^2 (\delta(p_0))}{\partial z^2} - \frac{\delta(p_0)}{L_n^2} - \frac{1}{D_p} \frac{\partial (\delta(p_0))}{\partial t} = 0$$

Diese Gleichung kann nach Gleich- und Wechselanteilen separiert werden. Wir beschränken uns vorerst auf den Gleichstromfehler. Unter dem Summenzeichen berücksichtigen wir nur das erste Glied, da das zweite bereits die Ableitung sechsten Grades von p_0 nach z enthält. Das erste Glied berechnen wir nach Formel (13) und erhalten dafür:

$$- 2 \frac{d^2}{4!} \frac{d^4 p_0}{dz^4} \approx - 2 \frac{d^2}{4!} \frac{d^4 p}{dz^4} = - 2 \frac{d^2}{4!} \frac{1}{L_p^4} (\bar{p} - p_n)$$

Nehmen wir ferner an, dass die Fehlerfunktion $\delta(\bar{p}_0)$ an der Stelle $z = l_n/2$ am grössten wird, so können wir folgende Formeln schreiben:

$$\frac{d^2 (\delta(p_0))}{dz^2} \approx \frac{0 - \delta(\bar{p}_0)}{(\frac{l_n}{2})^2} + \frac{0 - \delta(\bar{p}_0)}{(\frac{l_n}{2})^2} = - \frac{8 \delta(\bar{p}_0)}{l_n^2}$$

$$\bar{p} \gg p_n$$

Damit erhalten wir:

$$- 2 \frac{d^2}{4!} \frac{1}{L_p^4} \bar{p} - \frac{8 \delta(\bar{p}_0)}{l_n^2} - \frac{\delta(\bar{p}_0)}{L_p^2} = 0$$

Da \bar{p} immer positiv ist, zeigt uns obige Formel, dass $\delta(\bar{p}_0)$ negativ sein muss (vergleiche Abb. 6). Bleibt das Vorzeichen von $\delta(\bar{p}_0)$ über der ganzen Strecke l_n erhalten, so sind die Messwerte \bar{p}_0 alle zu gross gegenüber dem richtigen Wert \bar{p} . Der relative Gleichstromfehler $\bar{\epsilon}_r$ wird somit:

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{\delta(\bar{p}_0)}{\bar{p}} \Big|_{z=l_n/2} = - \frac{d^2}{12 L_p^2 \left(1 + \frac{8 L_p^2}{l_n^2}\right)} \quad (22)$$

Den relativen Wechselstromfehler $\tilde{\epsilon}_r$ berechnet man analog und erhält dafür:

$$\tilde{\epsilon}_r = \frac{\delta(\tilde{p}_o)}{\tilde{p}} \Big|_{z=l_n/2} = - \frac{d^2 (1 + j\omega\tau_p)^2}{12 L_p^2 \left(1 + \frac{8 L_p^2}{l_n^2} + j\omega\tau_p\right)} \quad (23)$$

Für $d = 5 \cdot 10^{-5}$ m, $l_n = 5 \cdot 10^{-4}$ m und $\omega = 2\pi \cdot 30$ kHz ergeben obige Formeln für $\tilde{\epsilon}_r = -9,310^{-5}$ und $\tilde{\epsilon}_r = 5,8 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(-j 1,01)$.

Lit.: [9].

3.3. Messungen am linearen Netzwerk

Es wurde eine Messkette gebaut mit:

$$R_z = 3506,1 \Omega \pm 1 \%$$

$$d = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$R = 350,61 \text{ k}\Omega \pm 1 \%$$

$$k_o = 10^{-16} \text{ m}^3 \text{ V}$$

$$C = 1004,2 \text{ pF} \pm 1 \%$$

$$U = 0,1195 \text{ V}$$

Die Herstellung genauer Schaltelemente wird in Abschnitt 4.4. beschrieben. Die Kapazitäten sind um den Faktor 7,042 zu gross, was mit einer Erniedrigung der Frequenz um denselben Faktor kompensiert wird. Für Gleichstrom wurden die \tilde{p} -Werte auf einer Messkette von der Länge $l_n = 9d = 45 \cdot 10^{-5}$ m mit Hilfe einer Widerstandskade von der Genauigkeit 1 ‰ und einem Nullinstrument ermittelt. Der \tilde{p} -Verlauf ist in Abb. 7 dargestellt worden. Ein Vergleich mit der nach Formel (13) errechneten Werte ist aus Tabelle I ersichtlich. Dabei tritt ein ϵ_r auf, das kleiner als 1/2 ‰ ist.

Die Ursache dieses Fehlers liegt offenbar in der Ungenauigkeit der Widerstände R_z ; der von der Wahl der Maschenweite d herrührende Fehler verschwindet in diesem relativ hohen Fehlerpegel. Betrachtet man den Verlauf der Löcherdichte in Abbildung 7, so stellt man eine sehr schwache Krümmung der Kurve fest. In erster Näherung verläuft die Kurve linear wie bei einem gewöhnlichen Spannungsteiler; dies rührt davon her, weil die Ableitwiderstände R hundertmal grösser sind als die

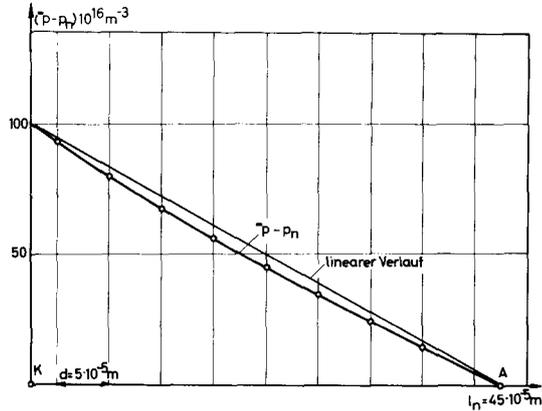


Abb. 7 Verlauf der Löcherdichte ($\bar{p} - p_n$) in einer ebenen Diode bei $\bar{U} = 0,1193 \text{ V}$.

Tab. I Vergleich der gemessenen und gerechneten Löcherdichten in einer ebenen Diode bei $\bar{U} = 0,1193 \text{ V}$.

z	0	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	45	10^{-5} m
$\bar{p} - p_n \text{ mes}$	100,0	93,2	80,1	67,6	56,20	45,40	34,80	24,60	14,80	4,90	0,00	10^{-16} m^{-3}
$\bar{p} - p_n \text{ rech}$	100,0	93,2	80,1	67,8	56,35	45,35	34,80	24,62	14,78	4,89	0,00	10^{-16} m^{-3}
ϵ_r	0	0	0	-3	-3	1	0	-1	1	2	0	%

Netzwidestände R_z .

Formel (14) in Differenzenform geschrieben lautet:

$$j_{DL} = eD_p \frac{p_1 - p_0}{d} \Big|_{z=0} = \frac{eD_p (V_1 - V_0)}{k_0 d} \Big|_{z=0} = \frac{eD_p}{k_0 d} R_z I_{NL} \Big|_{z=0} \quad (24)$$

Wir brauchen also nur den eingespeisten Strom der Kette I_{NL} mit dem Faktor

$$\frac{eD_p}{k_0 d} R_z = 561,7 \text{ m}^{-2}$$

zu multiplizieren und erhalten so die Diffusionsstromdichte j_{DL} der Diode. Dies gilt sowohl für den Gleich- wie auch für den Wechselanteil des Diffusionsstromes.

Die spezifische lineare Stromdichte $\frac{\bar{j}_{DL}}{\bar{p}(z=0) - p_n}$ lässt sich nach Formel (25) berechnen:

$$\frac{\bar{j}_{DL}}{\bar{p}(z=0) - p_n} = \frac{e D_p R_z}{d} = Y_{NL} \quad (25)$$

Die Konstante $\frac{e D_p R_z}{d}$ hat den Wert $5,6168 \cdot 10^{-14}$ Vm; Y_{NL} wurde für variables l_n/L_p auf einer Brücke von der Genauigkeit 3 ‰ gemessen. In Tabelle II werden die gemessenen Werte (Formel (25)) und die berechneten Werte (Formel (15)) für $\frac{\bar{j}_{DL}}{\bar{p}(z=0) - p_n}$ miteinander verglichen. Der mittlere Fehler beträgt ungefähr 3 ‰.

Tab. II Vergleich der gemessenen und der berechneten spezifischen Gleichstromdichten $\frac{\bar{j}_{DL}}{\bar{p}(z=0) - p_n}$ bei variabler Diodenlänge l_n/L_p .

l_n/L_p	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	
Y_{NL}	28,69	9,767	6,162	4,741	3,972	3,553	3,301	3,144	3,043	2,976	$10^{-5} \frac{1}{\Omega}$
$\frac{\bar{j}_{DL}}{\bar{p}(z=0) - p_n \text{ mes}}$	16,11	5,486	3,461	2,663	2,231	1,996	1,854	1,766	1,709	1,672	$10^{-18} \frac{1}{\text{Am}}$
$\frac{\bar{j}_{DL}}{\bar{p}(z=0) - p_n \text{ rech}}$	16,07	5,499	3,467	2,651	2,237	2,001	1,859	1,770	1,713	1,675	$10^{-18} \frac{1}{\text{Am}}$
ϵ_r	3	-3	-2	5	-3	-3	-3	-3	-3	-2	‰

An der gleichen Messanordnung wurden auch einzelne Widerstände verändert. In Abbildung 8 wird der Fehler dargestellt, wenn man an verschiedenen Stellen der Kette die Leitwiderstände R_z um -20 ‰ des Nominalwertes verändert. Der gemessene Fehler des Netzwerkstromes ist in Abb. 8 rechts angegeben worden. Abb. 8 zeigt uns, dass wir für Strommessungen die genaueren Widerstände mit Vorteil bei kleinen z-Werten anbringen müssen. Für Messungen der Löcherverteilung sollen die genaueren Widerstände bei grossen z-Werten liegen. Dies lässt sich durch Vorwärts- und Rückwärtsbetrieb der Messkette leicht bewerkstelligen.

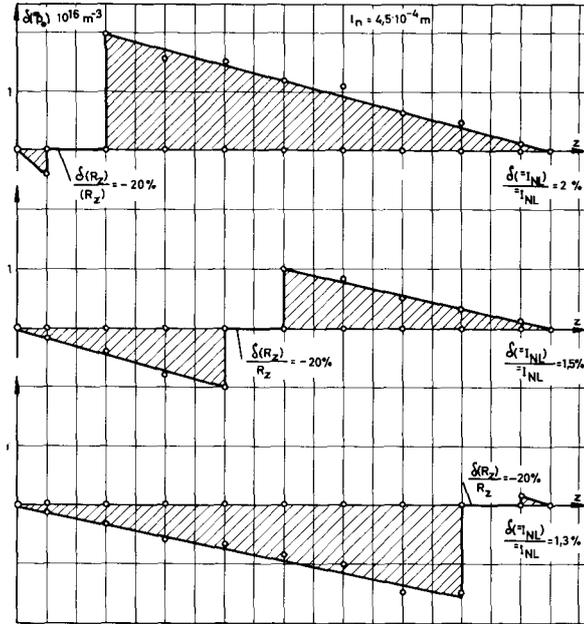


Abb. 8 Darstellung der Fehler von \bar{j}_{DL} und \bar{I}_{DL} bei Veränderung der Leitwiderstände R_z an verschiedenen Stellen der Messkette.

Der Verlauf der Diodenstromdichte bei variabler Plättchendicke l_n ist in Abb. 9 dargestellt worden; \bar{j}_{DL} strebt für grosses l_n asymptotisch nach dem berechneten Wert $\bar{j}_{DL} \Big|_{l_n = \infty} = 1,602 \text{ A/m}^2$.

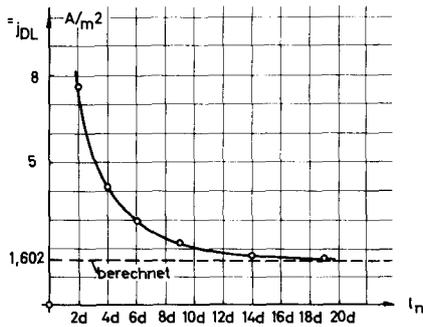


Abb. 9 Darstellung des Diffusionsstromdichteverlaufes \bar{j}_{DL} in Funktion der Plättchendicke l_n .

Formel (17) über die spezifische lineare Wechselstromdichte $\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$ wurde ebenfalls an der linearen Messkette geprüft. Formel (24) kann ohne weiteres auch auf Wechselstrom angewendet werden.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}} &= \frac{e D_p}{k_0 d} R_z \frac{\tilde{I}_{NL}}{\tilde{U}} \\ &= \frac{e D_p}{d} R_z \frac{p_n \exp\left(\frac{e \bar{U}}{kT}\right) e}{kT} \frac{\tilde{I}_{NL}}{\tilde{U}_N} \\ \frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}} &= \frac{e^2 D_p R_z p_n \exp\left(\frac{e \bar{U}}{kT}\right)}{kT d} \tilde{Y}_{NL} \end{aligned} \quad (26)$$

Wir brauchen also nur die Admittanz des Netzwerkes mit einem konstanten Faktor

$$\frac{e^2 D_p R_z p_n \exp\left(\frac{e \bar{U}}{kT}\right)}{kT d} = 2,1944 \cdot 10^6 \text{ m}^{-2}$$

zu multiplizieren, um die spezifische Wechselstromdichte der Diode zu erhalten. Da dieser Faktor eine reelle Zahl ist, haben \tilde{Y}_{NL} und $\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$ die gleiche Phasenverschiebung ψ_{DL} . Die Messungen wurden mit einer "Rhode-Schwarz"-Impedanzmessbrücke durchgeführt, die einen Fehler von weniger als 2 % aufweist. Tabelle III zeigt eine Zusammenstellung der berechneten und der gemessenen Werte für $\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$.

Die Tabelle III zeigt in Übereinstimmung mit Formel (23), dass der Fehler mit wachsendem l_n/L_p und steigender Frequenz zunimmt. Die Messungen zeigen, dass man bei einem l_n/L_p von 0,9 die maximale Frequenz von $f = 30$ kHz nicht überschreiten darf, wenn man einen Fehler von höchstens 4 % zulässt.

Tab. III Vergleich der gemessenen und berechneten spezifischen Wechselstromdichten $\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$ für verschiedene I_n/L_p im Frequenzbereich von 0,3 bis 300 kHz.

I_n/L_p	f	0,3	1	3	10	30	100	300	kHz
0,3	$\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$ mes	215,9/0°10'	215,5/0°35'	215,5/1°50'	217,5/5°50'	228,6/15°35'	323,8/37°15'	622,7/42°40'	$\frac{A}{m^2V}$
	$\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$ rech	213,8/0°14'	215,2/0°37'	213,8/1°41'	216,0/5°10'	225,6/14°25'	310,0/36°43'	596,6/46°11'	$\frac{A}{m^2V}$
0,5	$\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$ mes	136,9/0°25'	136,7/1°24'	137,0/4°12'	142,4/13°33'	180,3/32°50'	357,0/45°30'	638,9/41°49'	$\frac{A}{m^2V}$
	$\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$ rech	135,1/0°26'	135,5/1°20'	135,7/4°04'	140,6/13°00'	175,5/31°43'	341,9/45°29'	608,7/44°30'	$\frac{A}{m^2V}$
0,7	$\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$ mes	105,7/0°42'	104,7/2°28'	105,9/7°19'	117,9/22°19'	184,5/41°48'	366,2/44°07'	638,9/41°17'	$\frac{A}{m^2V}$
	$\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$ rech	103,4/0°43'	103,6/2°24'	104,7/7°01'	115,7/21°35'	178,2/40°46'	352,6/44°23'	607,6/44°42'	$\frac{A}{m^2V}$
0,9	$\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$ mes	88,6/1°02'	88,9/3°31'	90,6/10°33'	110,3/28°55'	193,7/43°56'	366,2/43°55'	641,2/41°28'	$\frac{A}{m^2V}$
	$\frac{\tilde{j}_{DL}}{\tilde{U}}$ rech	87,3/1°03'	87,6/3°29'	89,5/10°15'	108,1/28°31'	187,3/42°58'	351,3/44°02'	607,6/44°42'	$\frac{A}{m^2V}$

Kap. 4) ANALOGIENETZWERK IM ROTATIONSSYMMETRISCHEN FALL

4.1. Berechnung des Netzwerkes im
rotationssymmetrischen Fall

Die Berechnung im rotationssymmetrischen Fall geht im Prinzip genau gleich vor sich, wie dies im Abschnitt 3.2. am linearen Netzwerk gezeigt wurde. Zusätzliche Schwierigkeiten ergeben sich durch die Ränder, wobei die Achse als Spezialfall eingeschlossen ist, und durch die Oberflächenrekombination.

Im rotationssymmetrischen Fall geht Gleichung (7) über in:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{p_n - p}{L_p^2} + \frac{1}{D_p} \frac{\partial (p_n - p)}{\partial t} = 0 \quad (27)$$

Abb. 10 zeigt ein zweidimensionales Maschenfeld in einem r, z -Koordinatensystem. Die Löcherdichten p_i ($i = 1 \dots 4$) können nach Taylor entwickelt werden:

$$p_1 = p_0 - \frac{\partial p}{\partial z} d + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} d^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial z^3} d^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 p}{\partial z^4} d^4 - + \dots$$

$$p_2 = p_0 + \frac{\partial p}{\partial z} d + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} d^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial z^3} d^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 p}{\partial z^4} d^4 + \dots$$

$$p_3 = p_0 - \frac{\partial p}{\partial r} d + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} d^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial r^3} d^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 p}{\partial r^4} d^4 - + \dots$$

$$p_4 = p_0 + \frac{\partial p}{\partial r} d + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} d^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial r^3} d^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 p}{\partial r^4} d^4 + \dots$$

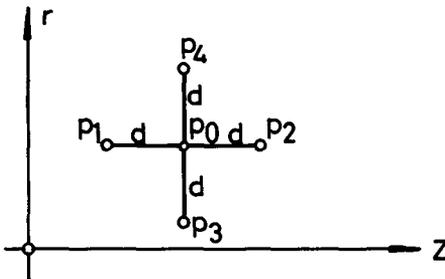


Abb. 10 Zweidimensionales Maschenfeld

Durch geeignete Kombination obenstehender Gleichungen kann man unter Vernachlässigung der Terme dritter und höherer Ordnung die Differentialgleichung (27) in die Differenzenform überführen; wir multiplizieren die Gleichung mit $A(r,z)k_o/R_o$, wobei $A(r,z)$ eine noch zu bestimmende Funktion ist:

$$\frac{A(r,z)k_o(p_1 - p_o)}{R_o d^2} + \frac{A(r,z)k_o(p_2 - p_o)}{R_o d^2} + \frac{A(r,z)k_o(p_3 - p_o)}{R_o d^2} \left(1 - \frac{d}{2r}\right) + \frac{A(r,z)k_o(p_4 - p_o)}{R_o d^2} \left(1 + \frac{d}{2r}\right) + \frac{A(r,z)k_o(p_n - p_o)}{R_o L_p^2} + \frac{A(r,z)k_o}{R_o D_p} \frac{\partial(p_n - p_o)}{\partial t} = 0 \quad (28)$$

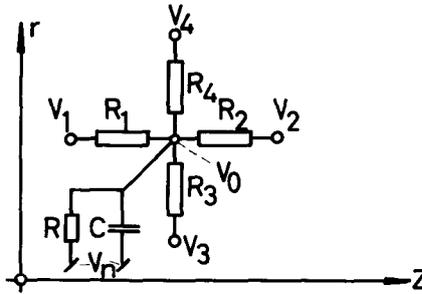


Abb. 11 Darstellung eines Netzwerkpunktes im rotationssymmetrischen Fall.

Betrachtet man nun ein Netzwerk, wie es in Abb. 11 dargestellt wurde, d.h. ein Netzwerk, in dem die einzelnen Maschenpunkte durch Widerstände R_i miteinander verbunden wurden und von jedem Maschenpunkt ein Ableitwiderstand R und eine Ableitkapazität C auf das Potential V_n führten, so gilt im Punkte O nach der Kirchhoffschen Regel über die Summe aller zufließenden Ströme folgende Gleichung:

$$\frac{V_1 - V_o}{R_1} + \frac{V_2 - V_o}{R_2} + \frac{V_3 - V_o}{R_3} + \frac{V_4 - V_o}{R_4} + \frac{V_n - V_o}{R} + C \frac{\partial(V_n - V_o)}{\partial t} = 0 \quad (29)$$

Aus der Analogie der Gleichungen (28) und (29) geht hervor:

$$\begin{aligned}
 V &= k_o p \\
 R_1 &= R_o \frac{d^2}{A(r, z)} \\
 R_2 &= R_o \frac{d^2}{A(r, z)} \\
 R_3 &= R_o \frac{d^2}{A(r, z) \left(1 - \frac{d}{2r}\right)} \\
 R_4 &= R_o \frac{d^2}{A(r, z) \left(1 + \frac{d}{2r}\right)} \\
 R &= R_o \frac{L_p^2}{A(r, z)} \\
 C &= \frac{A(r, z)}{R_o D_p}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Die Maschenpunkte sollen alle um ganzzahlige Vielfache von d von der Achse entfernt sein. Es gilt $r = md$. Die Funktion $A(r, z)$ geht über in $A(m, z)$. Man hat bis jetzt nur einen einzelnen Maschenpunkt O betrachtet. Die Gleichungen (28) und (29) können aber für alle Maschenpunkte des Feldes exklusive Randpunkte angeschrieben werden. Bei beliebiger Funktion $A(m, z)$ sind aber die Netzwidestände nicht eindeutig bestimmt, denn man kann jeden Netzwidestand auf zwei Arten berechnen, je nachdem man den ersten oder den zweiten Endpunkt des Widerstandes als Zentrum betrachtet. Das Netzwerk muss folgende Kontinuitätsbedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
 R_2 \Big|_{m, z} &\equiv R_1 \Big|_{m, z+d} \\
 R_4 \Big|_{m, z} &\equiv R_3 \Big|_{m+1, z}
 \end{aligned}$$

Diese Beziehungen gelten für alle Netzwidestände. Aus Formel (30) sieht man sofort, dass bei konstantem m die Werte R_1 und R_2 identisch werden, sobald $A(m, z)$ unabhängig von z wird: $A(m, z) \rightarrow A(m)$. Die zweite Kontinuitätsbedingung führt sofort auf die Rekursionsformel für $A(m)$:

$$\frac{A(m+1)}{A(m)} = \frac{m+1}{m}$$

$$A(m) = mA$$

Setzt man für die Konstante A den Wert d^2 ein, so gehen die Formeln (30) über in

$$\begin{aligned} V &= k_0 p \\ R_1 &= R_0 \frac{1}{m} \\ R_2 &= R_0 \frac{1}{m} \\ R_3 &= R_0 \frac{1}{m - 1/2} \\ R_4 &= R_0 \frac{1}{m + 1/2} \\ R &= R_0 \frac{L_p^2}{m d^2} \\ C &= \frac{m d^2}{R_0 D_p} \end{aligned} \tag{31}$$

Auf der z-Achse wird der Ausdruck $\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r}$ unbestimmt, denn $\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=0}$ wird aus Gründen der achsialen Symmetrie gleich Null.

Nach Bernoulli-Hôpital ergibt sich:

$$\frac{\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=0}}{\frac{\partial}{\partial r} (r) \Big|_{r=0}} = \frac{0}{0} = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \Big|_{r=0}}{\frac{\partial}{\partial r} (r) \Big|_{r=0}} = \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \Big|_{r=0}}{1}$$

Somit geht Gleichung (28) über in:

$$\begin{aligned} &\frac{A(o, z) k_0 (p_1 - p_0)}{R_0 d^2} + \frac{A(o, z) k_0 (p_2 - p_0)}{R_0 d^2} + \frac{2A(o, z) k_0 (p_3 - p_0)}{R_0 d^2} + \\ &+ \frac{2A(o, z) k_0 (p_4 - p_0)}{R_0 d^2} + \frac{A(o, z) k_0 (p_n - p_0)}{R_0 \frac{L_p^2}{d^2}} + \frac{A(o, z) k_0 \frac{\partial (p_n - p_0)}{\partial t}}{R_0 D_p} = 0 \end{aligned}$$

Setzt man $A(o, z) = \frac{d^2}{4}$, so wird die Kontinuitätsgleichung

$$R_4 \Big|_{o, z} \equiv R_3 \Big|_{1, z}$$

erfüllt, und man erhält für die Netzwerkelemente auf der Achse:

$$\begin{aligned} V &= k_o p \\ R_1 &= R_2 = 4 R_o \\ R_3 &= R_4 = 2 R_o \\ R &= 4 R_o \frac{L_p^2}{d^2} \\ C &= \frac{d^2}{4 R_o D_p} \end{aligned} \tag{32}$$

Da das Problem rotationssymmetrisch ist, können wir uns auf positive r beschränken. Dadurch wird der materielle Aufwand auf die Hälfte reduziert. Gemäss Abschnitt 4.2. müssen dabei die Widerstandswerte auf der Achse verdoppelt und die Kapazitätswerte halbiert werden. Dies ergibt folgende Elemente:

$$\begin{aligned} V &= k_o p \\ R_1 &= R_2 = 8 R_o \\ R_4 &= 2 R_o \\ R &= 8 R_o \frac{L_p^2}{d^2} \\ C &= \frac{d^2}{8 R_o D_p} \end{aligned} \tag{33}$$

Lit.: [10].

4.2. Bedeutung der Netzwerkströme

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang abgeklärt, der zwischen den Strömen im Netzwerk und den physikalischen Vorgängen in der Diode besteht. Gemäss Formel (14) lassen sich die Diffusionslöcherstromdichten im n-Leiter wie folgt anschreiben:

$$j_{Dz} = -eD_p \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$j_{Dr} = -eD_p \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$j_{Dz1} = eD_p \frac{k_o(p_1 - p_o)}{k_o d} = \frac{eD_p R_o}{k_o r} \frac{V_1 - V_o}{R_1} = \frac{eD_p R_o}{k_o r} i_{Nz1}$$

$$j_{Dz2} = eD_p \frac{k_o(p_2 - p_o)}{k_o d} = \frac{eD_p R_o}{k_o r} \frac{V_2 - V_o}{R_2} = \frac{eD_p R_o}{k_o r} i_{Nz2}$$

$$j_{Dr3} = eD_p \frac{k_o(p_3 - p_o)}{k_o d} = \frac{eD_p R_o}{k_o(r-\frac{d}{2})} \frac{V_3 - V_o}{R_3} = \frac{eD_p R_o}{k_o(r-\frac{d}{2})} i_{Nr3}$$

$$j_{Dr4} = eD_p \frac{k_o(p_4 - p_o)}{k_o d} = \frac{eD_p R_o}{k_o(r+\frac{d}{2})} \frac{V_4 - V_o}{R_4} = \frac{eD_p R_o}{k_o(r+\frac{d}{2})} i_{Nr4}$$

Berechnet man nun aus den Stromdichten die Ströme, die von den Löchern durch die Fläche $\Delta A = 2\pi rd$ respektive $\Delta A = 2\pi(r - \frac{d}{2})d$ und $\Delta A = 2\pi(r + \frac{d}{2})d$ durch Diffusion getragen werden, so erhalten wir:

$$i_{Dz1} = 2\pi rd j_{Dz1} = \frac{2\pi eD_p R_o d}{k_o} i_{Nz1}$$

$$i_{Dz2} = 2\pi rd j_{Dz2} = \frac{2\pi eD_p R_o d}{k_o} i_{Nz2}$$

$$i_{Dr3} = 2\pi(r - \frac{d}{2})d j_{Dr3} = \frac{2\pi eD_p R_o d}{k_o} i_{Nr3}$$

$$i_{Dr4} = 2\pi(r + \frac{d}{2})d j_{Dr4} = \frac{2\pi eD_p R_o d}{k_o} i_{Nr4}$$

Man sieht, dass die Netzwerkströme proportional zu den Diffusionsströmen in den Differenzenflächen sind. Dies gilt sowohl für Gleich- als auch für Wechselstrom. Der Proportionalitätsfaktor ist:

$$k_1 = \frac{2\pi e D_p R_o d}{k_o} \quad (34)$$

Die Netzwerkwiderstände haben also die Bedeutung von Diffusionsleitwerten. Bei gleichen Strömen und Löcherdichten müssen die Widerstände halb so gross gemacht werden, wenn die Diffusionskonstante auf den doppelten Wert anwächst. Das duale Netz, d. h. das Netz, dessen Knoten in die Mittelpunkte der Widerstände zu liegen kommen, ist massgebend für die Berechnung der Diffusionsströme. An den Rändern, welche durch die Maschenpunkte gehen, müssen die Widerstände verdoppelt werden, damit nur die halben Diffusionsströme fließen. Randwiderstände können auch für krummlinige Ränder approximativ berechnet werden.

Infolge Raumrekombination verschwinden bei Löcherüberschuss positive Stromträger nach dem Gesetz:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{p - p_n}{\tau_p}$$

Im Volumenelement $\Delta V = 2\pi r d^2$ kann dieser Rekombinationsvorgang durch einen abfliessenden Strom i_{DR} ersetzt werden:

$$i_{DR} = e \frac{p - p_n}{\tau_p} 2\pi r d^2 = \frac{2\pi e D_p R_o d k_o (p - p_n)}{k_o R} = \frac{2\pi e D_p R_o d}{k_o} i_{NR} = k_1 i_{NR}$$

Der abfliessende Rekombinationsstrom im Volumenelement ΔV ist proportional zum Strom im Ableitwiderstand R . Proportionalitätsfaktor ist wiederum k_1 . An den Rändern, wo man nur das Volumenelement $\frac{\Delta V}{2} = \frac{2\pi r d^2}{2}$ hat, muss der Widerstand verdoppelt werden, damit der Rekombinationsstrom auf die Hälfte reduziert wird. Volumen und Ableitwiderstand sind indirekt proportional, was für die approximative Berechnung bei krummlinigen Rändern wichtig ist.

Das Raumelement $\Delta V = 2\pi r d^2$ kann als Löcherspeicher aufgefasst werden. Der entsprechende Speicherstrom bei Aenderung der Löcherdichte ist:

$$\begin{aligned} i_{DC} &= e \frac{\partial p}{\partial t} 2\pi r d^2 = \frac{e k_o R_o 2\pi r d^2 D_p}{k_o R_o D_p} \frac{\partial (p - p_n)}{\partial t} = \\ &= \frac{2\pi e D_p R_o d}{k_o} C \frac{\partial (V - V_n)}{\partial t} = k_1 i_{NC} \end{aligned}$$

Der in den Kondensator abfliessende Strom ist wieder proportional einem Speicherstrom ins Volumenelement ΔV . Am Rand muss wegen der halben Speicherkapazität des Volumenelementes $\frac{\Delta V}{2} = \frac{2\pi r d^2}{2}$ auch für die halbe Kapazität eingelötet werden.

Obige Betrachtungen über die Ströme gestatten uns, beliebige Rände nachzubilden. Auch können Netzwerke mit verschiedenen Maschenweiten d zusammengesaltet werden, wenn man darauf achtet, dass die Randbedingungen erfüllt bleiben, d. h. dass die Potentiale an den Rändern stetig sind und die Ströme stetig von einem Netzwerk ins andere übergehen.

Lit. : [11].

4.3. Oberflächenrekombination

Gemäss Formel (6) fliesst an der freien Oberfläche ein Löcherstrom in die durch Störstellen hervorgerufenen Rekombinationszentren. Die Stromdichte senkrecht zur Oberfläche beträgt $e \cdot s(p - p_n)$. Wenn man beachtet, dass jedem Strom im Halbleiter ein Strom im Netzwerk entspricht, so muss im Netzwerk an der Oberfläche von der Grösse $2\pi r d$ folgender Strom abfliessen:

$$i_{OR} = \frac{e s (p - p_n) 2\pi r d}{k_1} = \frac{s m d (V - V_n)}{D_p R_o}$$

Dieser Strom fliesst dann aus dem Netzwerk heraus, wenn der Oberflächenrekombinationswiderstand

$$R_{OR} = \frac{D_p R_o}{s m d} \quad (35)$$

gewählt wird. Da die Differenzenflächenelemente an der Stirnseite und an der Wand eines Zylinders gleich berechnet werden ($\Delta A = 2\pi r d$), wobei r immer den Abstand des Maschenpunktes von der Achse darstellt, gilt Formel (35) für die ganze freie Oberfläche. An Stellen, wo wegen Ecken oder Rändern das Differenzenflächenelement nur halb so gross ist, muss der Widerstand verdoppelt werden.

Lit. : [2], [11].

4.4. Messungen am räumlichen Netzwerk

Die physikalischen Grössen für das räumliche Netzwerk bleiben die gleichen wie im linearen Fall. Die Maschenweite d , die auch im räumlichen Fall massgebend für den Fehler ist, wird im ganzen Gebiet zu $5 \cdot 10^{-5}$ m gewählt. In allen Dimensionsformeln für Widerstände und Kapazitäten tritt die Netzwerkkonstante R_0 in Erscheinung. Grosses R_0 bedeutet grosse Widerstände und kleine Kapazitäten. Grosse Kohleschichtwiderstände können nur in gerillter Form hergestellt werden. Dabei ist mit einer störenden Induktivität zu rechnen, und weiterhin sind gerillte Kohleschichtwiderstände sehr schwierig zu justieren. Vorteilhaft ist hingegen die geringe Verlustleistung (kleiner Anschaffungspreis) und die geringe Erwärmung (Veränderung des Widerstandes infolge erhöhter Temperatur). Kleine Kapazitäten sind deshalb ungünstig, weil die Streukapazitäten der Schaltung immer mehr ins Gewicht fallen. Wählt man andererseits R_0 sehr klein, so treten allzugrosse Ströme auf und die Kapazitäten werden gross und teuer. Im vorliegenden Fall wurde $R_0 = 1000 \Omega$ gewählt.

Die Herstellung genauer Widerstände geschieht folgendermassen: Unlackierte Kohleschichtwiderstände werden mit Benzol von Fett befreit, nachher auf einer Widerstandsmessbrücke mit einem Radiergummi auf 2 % weniger als Nennwert eingeschliffen. Nach dem Lackieren und Altern streuen die Widerstandswerte um ± 1 % um den Nennwert. Genaue Kapazitätswerte erhält man am besten, indem man aus handelsüblichen Reihen mit einer exakten Brücke jene Elemente heraus sucht, die die gewünschten Toleranzgrenzen einhalten. In unserem Fall sind die Kapazitäten ± 1 % genau.

Betrachtet man das Netzwerk als Ganzes, d. h. misst man z. B. die Impedanz des Netzwerkes, so verringert die Tatsache der statistischen Verteilung oben genannter Toleranzen den Messfehler sehr stark. In einer Serieschaltung von 10 gleichen Widerständen $R_z(1 + \epsilon_r)$, wobei die ϵ_r -Werte statistisch von - 1 % bis + 1 % variieren, wird der Gesamtwiderstand wegen Kompensation von positiven und negativen Fehlern wesentlich genauer am Nennwert $10 \cdot R_z$ liegen, als dies die Toleranzangabe von ± 1 % erwarten lässt. In Abb. 12 sind die berechneten Widerstände und Kapazitäten eingezeichnet worden.

Abb. 12 Aufbau des Analogienetzwerkes im räumlichen Fall. Die Widerstände und (S. 40) Kapazitäten sind zur Vereinfachung nur für einzelne Reihen eingezeichnet worden. Die Einheiten sind für die Widerstände Ω und für die Kapazitäten pF. Die weissen Punkte sind Maschenpunkte mit den Potentialen $V = k_0 p$; die schwarzen liegen an der gemeinsamen Erde und haben das Potential

$V_n = k_{O,p} \cdot n$. Der schraffierte Bereich stellt den n-Halbleiter dar. Dabei ist $r_A = 20d = 10^{-3}$ m, $r_K = 5,5d = 2,75 \cdot 10^{-4}$ m und $l_n = 9d = 4,5 \cdot 10^{-4}$ m.

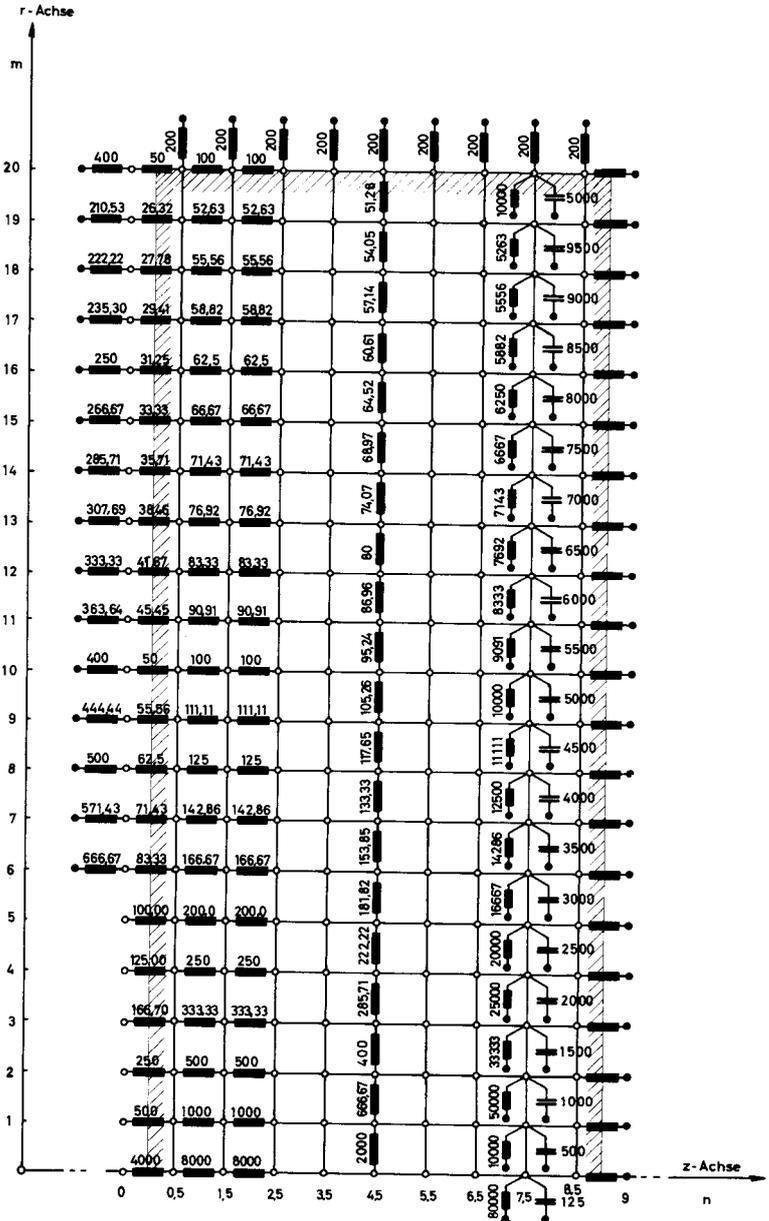


Abb. 12

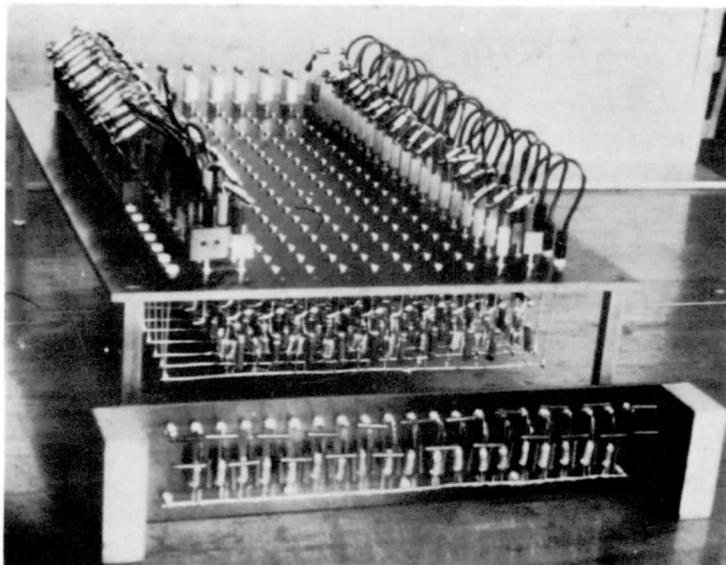


Abb. 13

Abb. 13 zeigt eine Photographie der gebrauchten Impedanznetzwerke. Die Randelemente und Oberflächenableitwiderstände sind steckbar angeordnet worden und können leicht verändert werden.

Obwohl die Spannungsquelle nur an die Punkte ($n = 0$; $m = 1, 2, 3, 4, 5$) angeschlossen wurde, hat r_K die Grösse $5,5d = 2,75 \cdot 10^{-4}$ m, denn erstens ist das Potential immer gleich dem Mittelwert über eine ganze Maschenweite d und zweitens übernimmt der Widerstand R_z an der Stelle $m = 5$ den Strom, der durch einen Zylinderderring von der Dicke d fliesst. Für die in Abb. 12 gezeichnete Schaltung wäre es somit falsch, für r_K den Wert $5d = 2,5 \cdot 10^{-4}$ m einzusetzen. Diese Theorie wurde durch Messungen bei Variation von m von 17,5 bis 20 bestätigt, indem an der Stelle $m = 20$ die Stromdichte berechnet werden kann und die Messkurven nur bei Berücksichtigung von halben Maschenweiten stetigen Charakter aufweisen.

Im Falle von Gleichstrom wurde die Löcherverteilung im n -Halbleiter punktweise ausgemessen. Die Messung erfolgte leistungslos mittels einer Potentiometerdekade in Brückenschaltung mit einer Genauigkeit von 1‰. Bei einer Gleichspannung an der Diode von $\bar{U} = 0,1193$ V beträgt der Wert $\bar{p}(z=0) - p_n$ gemäss den For-

meln (3) und (4) gerade $100 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$. Man sieht aus Abb. 14, dass die Potentialverteilungen besonders im Gebiet kleiner Löcherdichten prozentual stark voneinander abweichen, je nachdem ob man mit oder ohne Oberflächenrekombination misst. Aber auch die Gradienten der Löcherdichte an der Fläche A_K , die ja massgebend für den Löcherstrom sind, weichen voneinander ab. Mit Oberflächenrekombination ist der Gradient dem Betrage nach grösser als ohne Oberflächenrekombination. Im Falle $s = 0$ stehen die Kurven $\bar{p} - p_n = \text{konst.}$ senkrecht auf der freien Oberfläche des n-Materials, weil sich der Gradient als Mass für die Stromdichte nur in Längsrichtung der Oberfläche ausbilden kann. Sobald $s > 0$ wird, stehen die Kurven $\bar{p} - p_n = \text{konst.}$ schiefwinklig auf der Oberfläche, weil ein gewisser Strom durch die Oberfläche verschluckt wird. Eine Ausmessung des n-Raumes bezüglich der Wechselanteile

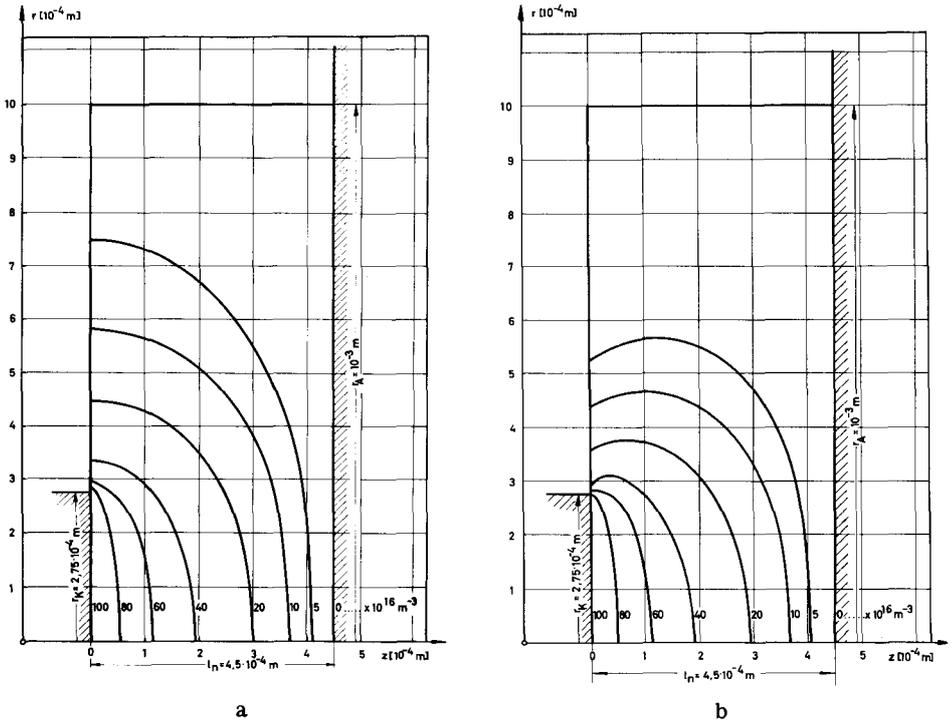


Abb. 14 Darstellung der Kurven mit konstanten Löcherdichten ($\bar{p} - p_n$) im n-Halbleiter. Der Parameter ($\bar{p} - p_n$) ist mit 10^{16} m^{-3} zu multiplizieren. Die Gleichspannung an der Diode beträgt 0,1193 V. Es gilt: Fall a: $s = 0$, Fall b: $s = 25 \text{ m/s}$.

von p ist um einen Grad umfangreicher, weil dabei noch die Phase berücksichtigt werden muss. Gemäss der Diffusionstheorie bei kleinen Strömen interessiert man sich für den Diffusionsstrom der Minoritätsträger an der Fläche A_K . Um diesen Diffusionsstrom mit dem ebenen Fall vergleichen zu können, leitet man folgende Beziehung ab:

$$j_{Dz} = e D_p \frac{p_1 - p_0}{d/2} = e D_p \frac{R_z/2}{k_o d/2} i_{Nz} =$$

$$= e D_p \frac{R_z}{k_o d} i_{Nz}$$

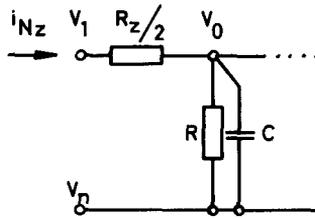


Abb. 15 Längsschnitt durch das räumliche Netzwerk ($z = \text{konst.}$) an der Fläche A_K .

Man muss nun alle Diffusionsströme über die Fläche A_K integrieren und durch die Fläche A_K dividieren, um die mittlere Stromdichte $\overline{j_{DR}}$ im räumlichen Fall zu erhalten.

$$\begin{aligned} \overline{j_{DR}} &= \frac{\sum_{A_K} j_{Dz} d A_K}{A_K} \approx \frac{\sum_{A_K} j_{Dz} \Delta A_K}{A_K} = \\ &= \frac{\sum_0^m j_{D0} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi d^2 + j_{D1} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \pi d^2 + \dots + j_{Dm} \left[\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\right] \pi d^2}{\pi \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 d^2} \\ &= \frac{e D_p R_o \sum_0^m 8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 i_{N0} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] i_{N1} + \dots + \left[\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\right] \frac{i_{Nm}}{m}}{k_o d \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Dabei durchläuft der Wert m alle Zahlen von 0 bis $r_K/d - 1/2$. Im Falle, wo $r_K/d = 20$ ist, muss wegen den doppelten Randwiderständen der Nenner in obiger Formel mit m^2 anstatt mit $\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2$ angeschrieben werden. Im letzten Term unter dem Summenzeichen hat dies keinen Einfluss, da die halbe Fläche durch den doppelten Widerstand kompensiert wird. Ferner gilt:

$$\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 = 2m$$

Somit erhält man:

$$\overline{j_{DR}} = \frac{2 e D_p R_o}{k_o d} \frac{1}{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \sum_0^m i_{Nm}$$

Die Ströme unter dem Summenzeichen müssen nach Betrag und Phase addiert werden. Wir setzen $\sum_0^m i_{Nm} = I_{NR}$, wobei bei Wechselstrom die Phase mitberücksichtigt werden muss. Wir erhalten somit:

$$\overline{j_{DR}} = \frac{2 e D_p R_o}{k_o d} \frac{I_{NR}}{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \quad (36)$$

Im Falle von Gleichstrom definiert man einen Faktor $\overline{k_2}$ wie folgt:

$$\overline{j_{DR}} = \overline{k_2} \overline{j_{DL}} \quad (37)$$

Dabei werden sowohl im linearen als auch im räumlichen Fall die gleichen Spannungen an die Diode angelegt. Wenn nun also der Faktor $\overline{k_2}$ bekannt ist, so kann von

der linearen Lösung sofort auf die räumliche geschlossen werden. Dabei hängt \bar{k}_2 von der Geometrie und den physikalischen Eigenschaften der Diode ab. Wir benützen das räumliche Netzwerk von Abb. 12 zur Bestimmung von \bar{k}_2 (siehe Formel (15)):

$$\bar{k}_2 = \frac{\bar{j}_{DR}}{\bar{j}_{DL}} = \frac{2 e D_p R_o \bar{I}_{NR}}{k_o d \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \frac{L_p}{e D_p (\bar{p}(z=0) - p_n) \operatorname{cth} \left(\frac{l_n}{L_p}\right)}$$

$$\bar{k}_2 = \frac{2 R_o L_p}{d \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \frac{1}{\operatorname{cth} \left(\frac{l_n}{L_p}\right)} \frac{\bar{I}_{NR}}{\bar{U}_N}$$

$$\bar{k}_2 = \frac{2 R_o L_p}{d \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \frac{1}{\operatorname{cth} \left(\frac{l_n}{L_p}\right)} \bar{Y}_{NR} \quad (38)$$

Man braucht also nur am räumlichen Netzwerk den Leitwert an der K-Seite zu messen und ihn mit dem Faktor

$$\frac{2 R_o L_p}{d \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \frac{1}{\operatorname{cth} \left(\frac{l_n}{L_p}\right)}$$

zu multiplizieren, um \bar{k}_2 zu erhalten. Dies wurde für verschiedene r_K und l_n durchgeführt. Abb. 16 zeigt die Messresultate, wobei das eine Mal mit und das andere Mal ohne Oberflächenrekombination gemessen wurde. In Abb. 16 a, wo $s = 0$ vorausgesetzt wurde, muss für $r_K = r_A = 10^{-3}$ m der Faktor $\bar{k}_2 = 1$ werden. Der Vergleich der gemessenen Werte mit dem theoretischen Wert bestimmt den Fehler der Messanordnung. Er liegt unterhalb 1 %. Abb. 16 a und Abb. 16 b unterscheiden sich wesentlich im Bereich, wo r_K beinahe so gross ist wie r_A ; dort hat die Oberflächenrekombination einen grossen Einfluss auf den Stromverlauf in der Diode.

Im Fall von Wechselstrom definiert man \tilde{k}_2 und φ_o wie folgt:

$$\tilde{j}_{DR} = \tilde{k}_2 e^{j\varphi_o} j_{DL} \quad (39)$$

Somit gilt:

$$\tilde{k}_2 = \frac{|\tilde{j}_{DR}|}{|j_{DL}|}$$

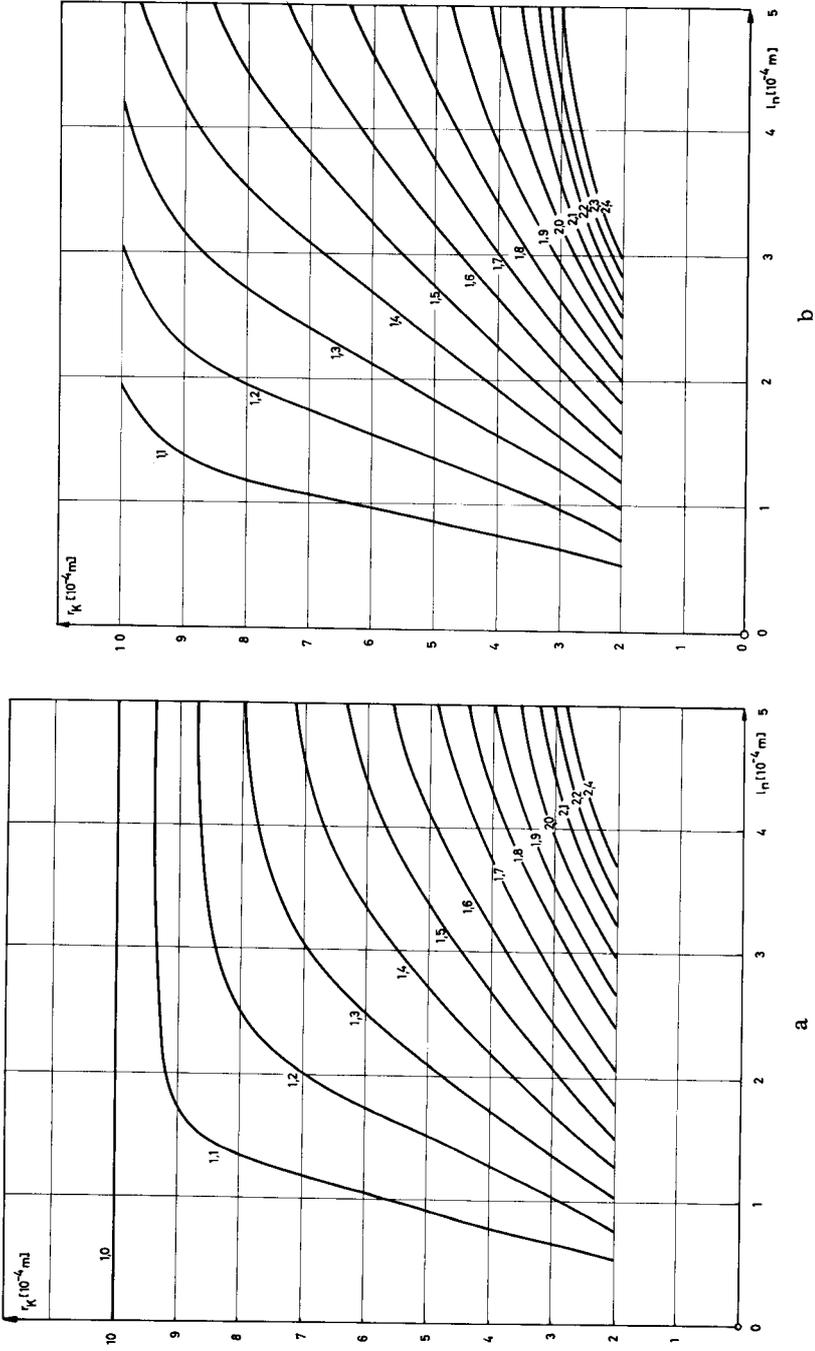


Abb. 16 Darstellung der Kurven mit konstantem \bar{k}_2 bei variablen r_K und l_n ($\bar{k}_2 = \text{Parameter}$). Die Kurven gelten für Gleichstrom ($f = 0$), wobei $r_A = 10^{-3}$ m. Es gilt: Fall a: $s = 0$, Fall b: $s = 25$ m/s.

$$\varphi_0 = \arcsin \tilde{j}_{DR} - \arcsin \tilde{j}_{DL}$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (17) erhält man für \tilde{k}_2 :

$$\tilde{k}_2 = \frac{2 e D_p R_o \tilde{I}_{NR} L_p k T}{k_o d \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 e^2 D_p p_n \exp\left(\frac{e^{-U}}{kT}\right) \left| \sqrt{1+j\omega\tau_p} \right| \left| \operatorname{cth}\left(\frac{l_n}{L_p} \sqrt{1+j\omega\tau_p}\right) \right| \tilde{U}}$$

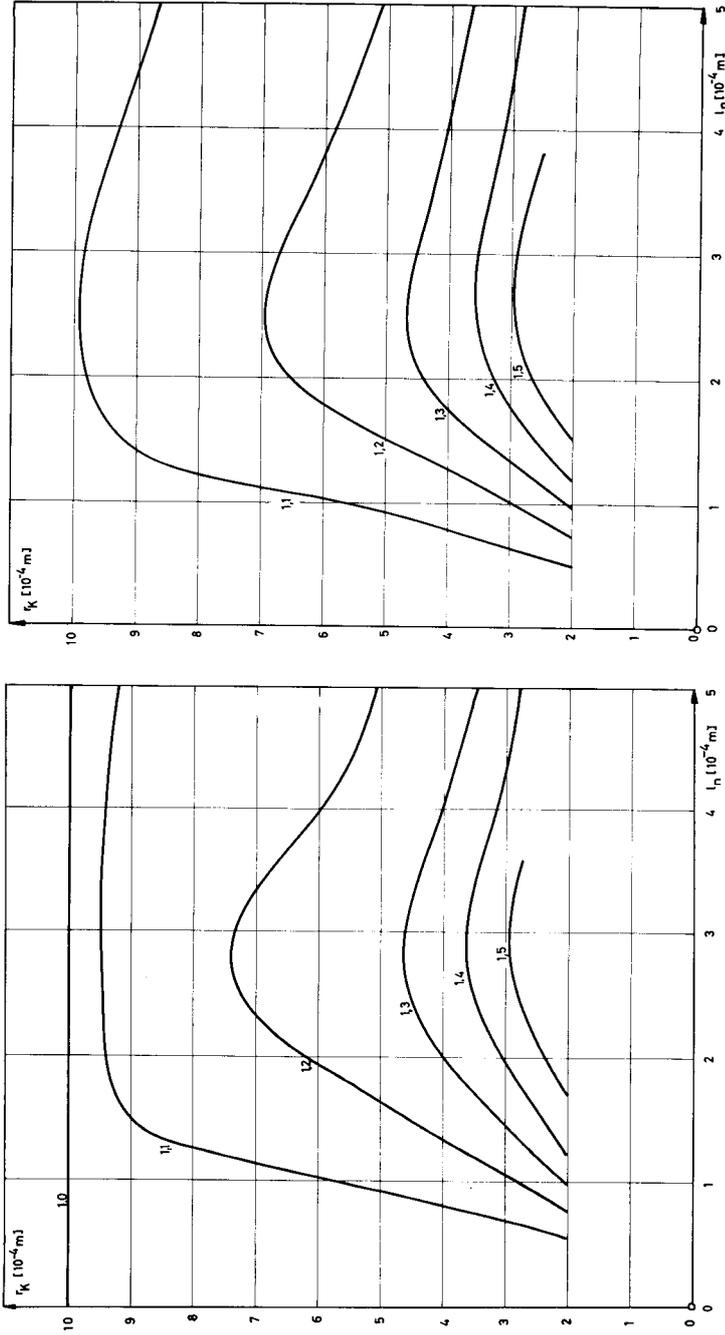
$$\tilde{k}_2 = \frac{2 R_o L_p}{d \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \frac{1}{\left| \sqrt{1+j\omega\tau_p} \right| \left| \operatorname{cth}\left(\frac{l_n}{L_p} \sqrt{1+j\omega\tau_p}\right) \right|} \left| \tilde{Y}_{NR} \right| \quad (40)$$

$$\varphi_0 = \arcsin \left(\tilde{Y}_{NR} \right) - \arcsin \left(\sqrt{1+j\omega\tau_p} \operatorname{cth}\left(\frac{l_n}{L_p} \sqrt{1+j\omega\tau_p}\right) \right) \quad (41)$$

Die Abhängigkeit von \tilde{k}_2 und φ_0 in Funktion von r_K und l_n wurde mit einer Impedanzmessbrücke von der Genauigkeit 1 % gemessen. Die Messresultate wurden in den Abb. 17 und 18 für $s = 0$ und $s = 25$ m/s dargestellt. Die Genauigkeit der Messungen wurde anhand der Tatsache kontrolliert, dass bei $r_K = r_A$ und $s = 0$ $\tilde{k}_2 = 1$ und $\varphi_0 = 0$ werden muss.

Ganz allgemein kann gesagt werden, dass die Parameterkurven in den Abbildungen 16 bis 18 eindeutig sind, d. h. dass zu einem bestimmten l_n und r_K ein und nur ein Parameter gehört. Die Parameterkurven können sich nicht schneiden. Dies gilt deshalb, weil \tilde{j}_{DL} , \tilde{j}_{DR} , \tilde{j}_{DL} und \tilde{j}_{DR} sowohl im Betrag als auch in der Phase bezüglich der Variablen l_n und r_K eindeutig sind, was direkt aus den Formeln (15), (17) und (36) ersichtlich ist. Auf der r_K -Achse sind die theoretischen Werte für \tilde{k}_2 und \tilde{k}_2 gleich 1 und φ_0 gleich 0° , weil bei einem unendlich kleinen l_n die Geometrie und die Oberflächenrekombination bedeutungslos werden. Auf der l_n -Achse sind die theoretischen Werte für \tilde{k}_2 und \tilde{k}_2 gleich unendlich, denn für infinitesimal kleine r_K werden $|\tilde{Y}_{NR}|$ und $|\tilde{Y}_{NR}|$ proportional zu r_K , was mit einer Limesbetrachtung leicht bewiesen werden kann. Die k_2 -Kurven haben also die Parameter 1 bis ∞ und werden alle durch die r_K - und l_n -Achsen auf den Nullpunkt des Koordinatensystems zu gebündelt. Der Nullpunkt ist singulär.

Die mit dem Netzwerk erhaltenen k_2 -Werte wurden für Gleich- und Wechselstrom an Realdioden nachgeprüft. Die Firma Telefunken in Ulm hat dazu Ge-Dioden verschiedener Länge ($l_n = 1, 2,5$ und $5 \cdot 10^{-4}$ m) hergestellt, die in den physikalischen Eigenschaften möglichst gut mit dem Netzwerk übereinstimmen. Zur Unterdrückung der Exemplarstreuung wurden Serien von 5-10 Stück gemittelt. Bei fester Gleich- und Wechselspannung sind die Diodenströme proportional zu \tilde{k}_2 und \tilde{k}_2 . Die auftretenden Fehler in Bezug auf die Messwerte am Netzwerk sind für Gleichstrom weniger als $\pm 5\%$ und für Wechselstrom weniger als $\pm 10\%$. Hauptursache dieses Fehlers ist die kalottenförmige Sperrschicht.



a b

Abb. 17 Darstellung der Kurven mit konstantem \tilde{k}_2 bei variablem r_K und l_n ($\tilde{k}_2 = \text{Parameter}$). Die Kurven gelten für Wechselstrom bei einer Frequenz von $f = 30 \text{ kHz}$, wobei $r_A = 10^{-3} \text{ m}$. Es gilt: Fall a: $s = 0$, Fall b: $s = 25 \text{ m/s}$

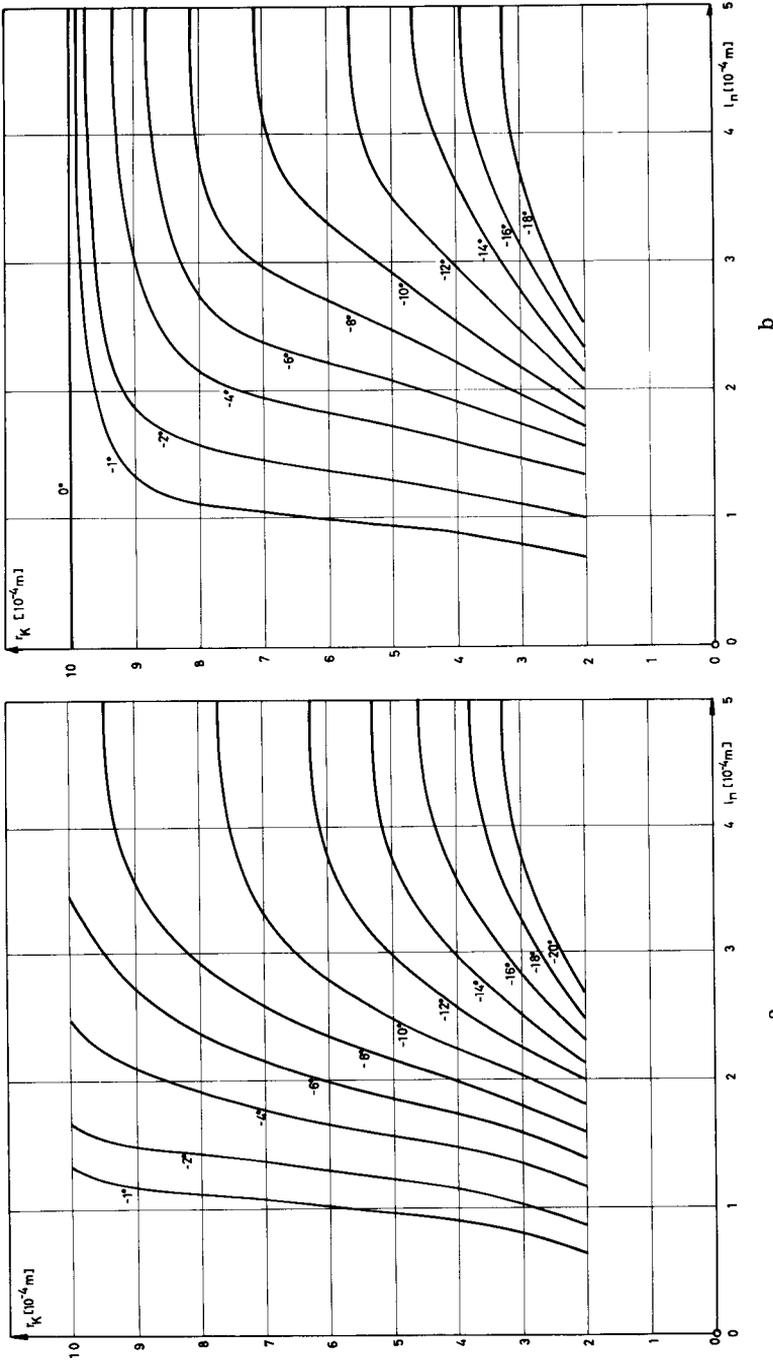


Abb. 18 Darstellung der Kurven mit konstantem φ_0 bei variablen r_K und l_h ($\varphi_0 = \text{Parameter}$). Die Kurven gelten für Wechselstrom bei einer Frequenz von $f = 30 \text{ kHz}$, wobei $r = 10^{-3} \text{ m}$. Es gilt: Fall a: $s = 0$, Fall b: $s = 25 \text{ m/s}$.

4.5. Variation der Oberflächenrekombination

Die Oberflächeneffekte werden im Netzmodell durch Oberflächenrekombinationswiderstände dargestellt. Formel (35) zeigt, dass die Oberflächenrekombinationswiderstände umgekehrt proportional zur Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit sind. Bei grossen Werten von s muss man also kleine Widerstände am Netzrand anbringen. Da diese Widerstände in erster Näherung parallel zum gesamten Widerstand des Netzwerkes geschaltet werden, wird sich der Diffusionsstrom bei gleichbleibender Spannung an der Diode mit wachsendem s vergrössern. Dieser Effekt macht sich an der Diode durch einen erhöhten Sättigungsstrom bemerkbar; der Strom wächst proportional zu \bar{k}_2 .

Für den Fall von Gleichstrom, wobei $r_K = r_A = 10^{-3}$ m und $l_n = L_p = 5 \cdot 10^{-4}$ m ist, wurde \bar{k}_2 berechnet. Es gelten folgende Differentialgleichung und Randbedingungen:

$$\frac{\partial^2(\bar{p} - p_n)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\bar{p} - p_n)}{\partial r} + \frac{\partial^2(\bar{p} - p_n)}{\partial z^2} - \frac{\bar{p} - p_n}{L_p^2} = 0$$

$$z = 0 \quad ; \quad \bar{p}(z=0) p_n = \text{konst.} \quad (42)$$

$$z = l_n \quad ; \quad \bar{p}(z=l_n) p_n = 0$$

$$r = r_K = r_A \quad ; \quad \frac{\partial(\bar{p} - p_n)}{\partial r} + \frac{s}{D_p} (\bar{p} - p_n) = 0$$

Mit dem Ansatz:

$$\bar{p} - p_n = f_1(r) \cdot f_2(z)$$

erhalten wir für die beiden Funktionen $f_1(r)$ und $f_2(z)$ folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} + k_{3n} f_1 = 0$$

$$\frac{d^2 f_2}{dz^2} - \left(\frac{1}{L_p^2} + k_{3n} \right) f_2 = 0$$

Die Konstanten k_{3n} sind in unserm Falle immer positiv, da die Werte für $\frac{d^2 f_1}{dr^2}$ und $\frac{df_1}{dr}$ immer negativ sind. Da die Neumannsche Funktion 0-ter Ordnung an der Stelle $r = 0$ gleich $-\infty$ ist, in unserm Fall also nicht in Betracht kommt, erhalten wir für den Löcherverlauf ganz allgemein:

$$\bar{p} - p_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{k_{3n}} r) \left\{ \exp\left(\sqrt{\frac{1}{L_p^2} + k_{3n}} z\right) - B_n \exp\left(-\sqrt{\frac{1}{L_p^2} + k_{3n}} z\right) \right\} \quad (43)$$

Die Randbedingung an der freien Oberfläche ergibt die Werte k_{3n} :

$$\left. \frac{d J_0(\sqrt{k_{3n}} r)}{d(\sqrt{k_{3n}} r)} \right|_{r=r_K} + \frac{s}{D_p} J_0(\sqrt{k_{3n}} r) \Big|_{r=r_K} = 0$$

$$\frac{(\sqrt{k_{3n}} r_K) J_1(\sqrt{k_{3n}} r_K)}{J_0(\sqrt{k_{3n}} r_K)} = \frac{s r_K}{D_p} \quad (44)$$

Die transzendente Gleichung (44) gibt uns die möglichen Werte für k_{3n} :

$$\begin{aligned} \sqrt{k_{31}} &= 1,9898 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} \\ \sqrt{k_{32}} &= 4,7131 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} \\ \sqrt{k_{33}} &= 7,4177 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} \\ \sqrt{k_{34}} &= 10,6223 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} \\ \sqrt{k_{35}} &= 13,6785 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

Die Randbedingung an der Fläche $z = l_n$ gibt uns die Werte für B_n :

$$B_n = \exp\left(2\sqrt{\frac{1}{L_p^2} + k_{3n}} l_n\right)$$

Die Koeffizienten A_n werden so bestimmt, dass die Funktion $\bar{p} - p_n$ an der Fläche $z = 0$ möglichst gut angenähert wird. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen. Je mehr Summanden in der Formel (43) berücksichtigt werden, desto genauer kann diese Randbedingung erfüllt werden und desto grösser wird auch der Aufwand an Rechenarbeit.

Aus der Definition von \bar{k}_2 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \bar{k}_2 &= \frac{\bar{j}_{DR}}{\bar{j}_{DL}} = \frac{\int_0^{r_K} \bar{j}_{DR} 2\pi r dr}{\pi r_K^2 \bar{j}_{DL}} = \frac{\int_0^{r_K} e D_p \frac{\partial(\bar{p} - p_n)}{\partial z} \Big|_{z=0} 2\pi r dr}{\pi r_K^2 \bar{j}_{DL}} \\ &= - \frac{2 L_p \text{th}(l_n/L_p)}{r_K(\bar{p}(z=0) - p_n)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n (1 + B_n)}{\sqrt{k_{3n}}} \sqrt{\frac{1}{L_p^2} + k_{3n}} J_1(\sqrt{k_{3n}} r_K) \quad (45) \end{aligned}$$

Für den Fall $s = 25 \text{ m/s}$ gibt uns die Rechnung für ein-, drei- und fünfgliedrige Summen:

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad \bar{k}_2 = 14,460 \\ n = 1, 2, 3, & \quad \bar{k}_2 = 1,690 \\ n = 1, 2, 3, 4, 5, & \quad \bar{k}_2 = 1,466 \end{aligned}$$

Diese Werte nähern sich asymptotisch dem gemessenen Wert:

$$\bar{k}_2 = 1,38$$

Der Rechenaufwand ist im Vergleich zur Messung sehr gross. Auch dann, wenn man moderne Rechenanlagen zur Verfügung hat, ist es vorteilhafter, das Problem am Netzwerk zu lösen. Im Fall, wo die Randbedingung an der Fläche $z = 0$ einen Sprung macht, müssen bei gleichbleibendem Fehler wesentlich mehr Summanden in Formel (43) berücksichtigt werden, als dass dies in unserm sehr speziellen Fall geschehen ist.

Abb. 19 zeigt die Variation von \bar{k}_2 in Funktion der Diodenlänge, wobei die Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit s als Parameter gewählt wurde. In Abb. 19a ist $r_K = r_A = 10^{-3} \text{ m}$ und in Abb. 19b ist $r_K = 4,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ und $r_A = 10^{-3} \text{ m}$.

Die Messungen von Abb. 19 wurden wiederholt, wobei die Raumrekombination vernachlässigt wurde ($\tau_p = 0$). Gemäss Formel (31) wird dabei der Rekombinationswiderstand R unendlich gross. Die Resultate dieser Messungen wurden in Abb. 20 dargestellt. Im Vergleich mit Abb. 19 geben diese Messungen Aufschluss darüber, in welchen Bereichen der Parameter r_K , r_A , l_n und s bei vorgegebenem Fehler eine Vernachlässigung der Raumrekombination gestattet ist. Für $r_K = r_A = 10^{-3} \text{ m}$ und $l_n = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ tritt z.B. ein relativer Fehler von $\sim 26 \%$ auf.

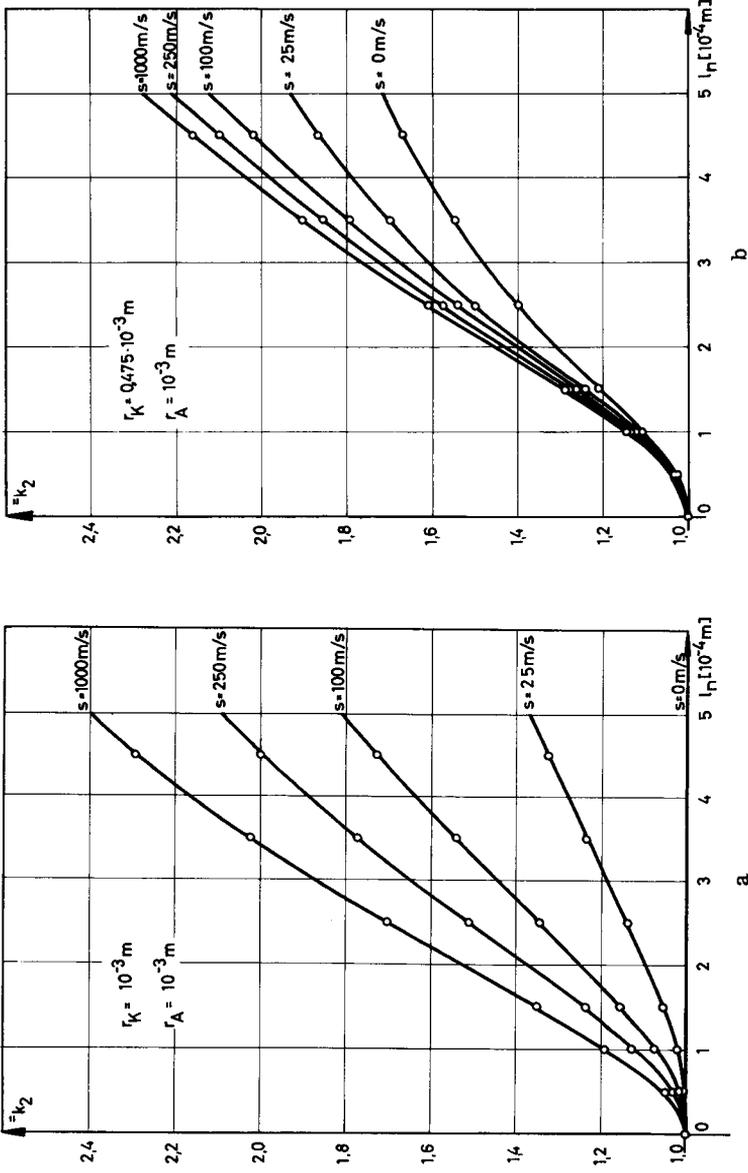
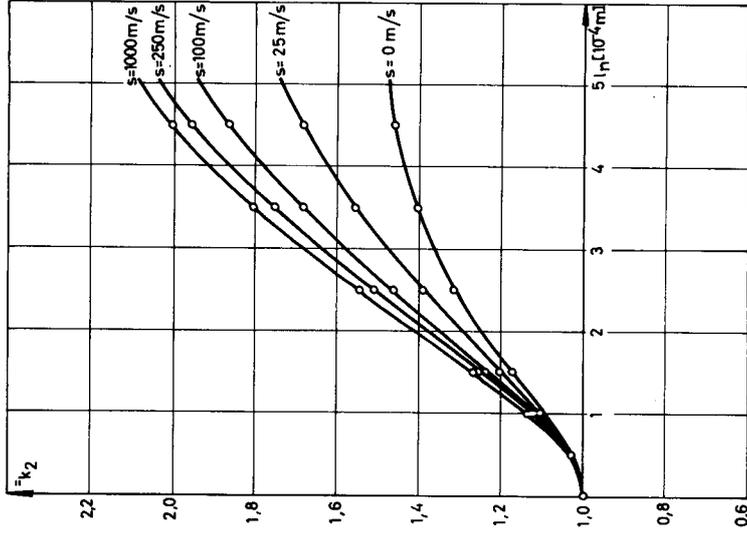
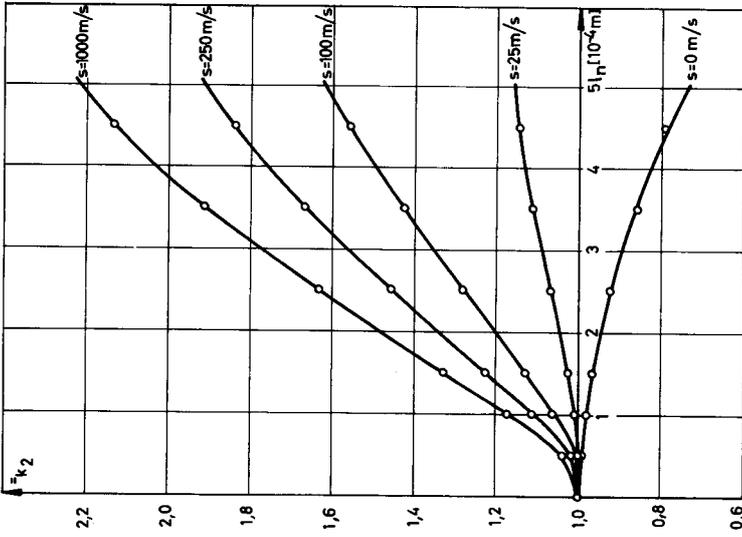


Abb. 19 Variation von \bar{k}_2 in Funktion von l_n bei verschiedenen Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeiten s .
 Es gilt: Fall a: $r_K = r_A = 10^{-3} \text{ m}$; Fall b: $r_K = 4,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $r_A = 10^{-3} \text{ m}$.



a



b

Abb. 20 Variation von \bar{k}_2 in Funktion von l_n bei verschiedenen Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeiten s , wobei die Raumrekombination vernachlässigt wurde ($\tau_p = \infty$). Es gilt: Fall a: $r_K = r_A = 10^{-3}$ m, Fall b: $r_K = 4,75 \cdot 10^{-4}$ m, $r_A = 10^{-3}$ m.

Die Abb. 19 und 20 zeigen uns deutlich, welche Effekte einen massgebenden Einfluss auf \bar{k}_2 ausüben: Sobald das n-Material einen grösseren Radius als r_K aufweist, d. h. die Strombahnen im n-Material divergieren können, steigt \bar{k}_2 . Dies ist aus den Kurven für $s = 0$ in den Abb. 20a und 20b zu ersehen. Wenn man dabei noch die Lebensdauer der Löcher herabsetzt, steigt \bar{k}_2 weiterhin an. Dieser Vergrösserung von \bar{k}_2 wird eine zusätzliche Vergrösserung durch erhöhte Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit überlagert. Interessant ist nun, dass diese drei Effekte in ganz verschiedenem Mass auftreten. Vergleicht man z. B. die Abb. 19a und 19b oder 20a und 20b miteinander, so stellt man fest, dass bei kleinem s die Anordnung $r_K < r_A$ wegen der divergierenden Strombahnen ein grösseres \bar{k}_2 aufweist, wo hingegen bei grossem s die Anordnung $r_K = r_A$ wegen der günstigen Lage der Strombahnen zur freien Oberfläche ein grösseres \bar{k}_2 ergibt.

Lit.: [12].

4.6. Transportfaktor eines p-n-p-Transistors

Bei einem ebenen p-n-p-Intrinsic-Transistor in Basisschaltung können folgende Gleichungen angeschrieben werden:

$$\bar{I}_E = I_{11} \left(\exp \left(\frac{e^{-}U_{EB}}{kT} \right) - 1 \right) + I_{12} \left(\exp \left(\frac{e^{-}U_{CB}}{kT} \right) - 1 \right) \quad (46)$$

$$\bar{I}_C = I_{21} \left(\exp \left(\frac{e^{-}U_{EB}}{kT} \right) - 1 \right) + I_{22} \left(\exp \left(\frac{e^{-}U_{CB}}{kT} \right) - 1 \right)$$

Dabei sind die Ströme I_{ij} Funktionen der physikalischen Eigenschaften und der geometrischen Abmessungen des Transistors und \bar{U}_{EB} und \bar{U}_{CB} die Gleichspannungen über der Emitter- resp. Collectorsperrschicht. Der Stromverstärkungsfaktor $\bar{\alpha}_{FB}$ für Gleichstrom in Vorwärtsrichtung wird folgendermassen definiert:

$$\bar{\alpha}_{FB} = \frac{\bar{I}_C - \bar{I}_{CBO}}{\bar{I}_E} \quad (47)$$

\bar{I}_{CBO} bedeutet den Collectorsättigungsstrom bei $\bar{I}_E = 0$. Damit wird:

$$\alpha_{FB} = \frac{I_{21}}{I_{11}} = \frac{\bar{I}_C - I_{22} \left(\exp\left(\frac{e \bar{U}_{CB}}{kT}\right) - 1 \right)}{\bar{I}_E - I_{12} \left(\exp\left(\frac{e \bar{U}_{CB}}{kT}\right) - 1 \right)} = \frac{\bar{I}_C}{\bar{I}_E} \Bigg|_{\bar{U}_{CB}=0} \quad (48)$$

Die Bedingung des sekundären Kurzschlusses ($\bar{U}_{CB} = 0$) bedeutet, dass die Löcherdichte am collectorseitigen Rand der Basisschicht und die Elektronendichte im Collectormaterial im thermodynamischen Gleichgewicht sind. Daraus folgt, dass $\bar{I}_C \Big|_{\bar{U}_{CB}=0}$ nur durch Löcher getragen wird. Erweitert man Gleichung (48) mit dem Anteil des Emittersstromes, welcher durch Löcher getragen wird, so erhält man:

$$\alpha_{FB} = \frac{\bar{I}_C}{\bar{I}_{PE}} \frac{\bar{I}_{PE}}{\bar{I}_E} \Bigg|_{\bar{U}_{CB}=0} = \beta_{FB} \gamma_{FB} \quad (49)$$

Der Transportfaktor β_{FB} ist gleich dem Verhältnis aus Collectorstrom und dem durch Löcher getragenen Emittersstrom bei sekundärem Kurzschluss. Der Emitterswirkungsgrad γ_{FB} ist gleich dem Quotienten aus Löcherstrom am Emittor und Gesamtstrom am Emittor. Für den ebenen Fall kann man unter Berücksichtigung der Formeln (13) und (14) den Transportfaktor für eine Transistorbasisschicht von der Dicke l_n berechnen:

$$\beta_{FB} = \frac{-e D_p \frac{d\bar{p}}{dz} \Big|_{z=l_n}}{-e D_p \frac{d\bar{p}}{dz} \Big|_{z=0}} = \frac{1}{\text{ch}\left(\frac{l_n}{L_p}\right)} \quad (50)$$

Für Wechselstrom wird der Transportfaktor $\tilde{\beta}_{FB}$ analog berechnet. Aus Formel (14) und (17) erhält man für den ebenen Fall:

$$\tilde{\beta}_{FB} = \frac{-e D_p \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \Big|_{z=l_n}}{-e D_p \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \Big|_{z=0}} = \frac{1}{\text{ch}\left(\frac{l_n}{L_p} \sqrt{1 + j\omega\tau_p}\right)} \quad (51)$$

Gemäss Abschnitt 4.2. können die Transportfaktoren für Gleich- und Wechselstrom am räumlichen Netzmodell gemessen werden. Dabei legt man eine Spannungsquelle ans Netzwerk und misst das Verhältnis der Collector- und Emitterströme bei sekundärem Kurzschluss. Dies ist in den Abb. (21) und (22) für verschiedene räumliche Anordnungen bei variabler Basisschichtdicke und verschiedene Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeiten für Gleich- und Wechselstrom (30 kHz) dargestellt worden. Für den linearen Fall ($r_K = r_A$, $s = 0$) wurden die Messwerte mit den aus Formeln (50) und (51) errechneten Werten verglichen. Der Fehler beträgt weniger als 2 %.

Die Diagramme zeigen deutlich, dass die Transportfaktoren mit grösser werdender Basisschichtdicke und zunehmender Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit kleiner werden. Die Fälle, bei denen der Emitterkontakt nur halb so gross ist wie der Collectorkontakt, weisen bei grosser Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit einen wesentlich besseren Transportfaktor als bei gleich grossen Kontaktflächen auf.

Lit. : [2], [13].

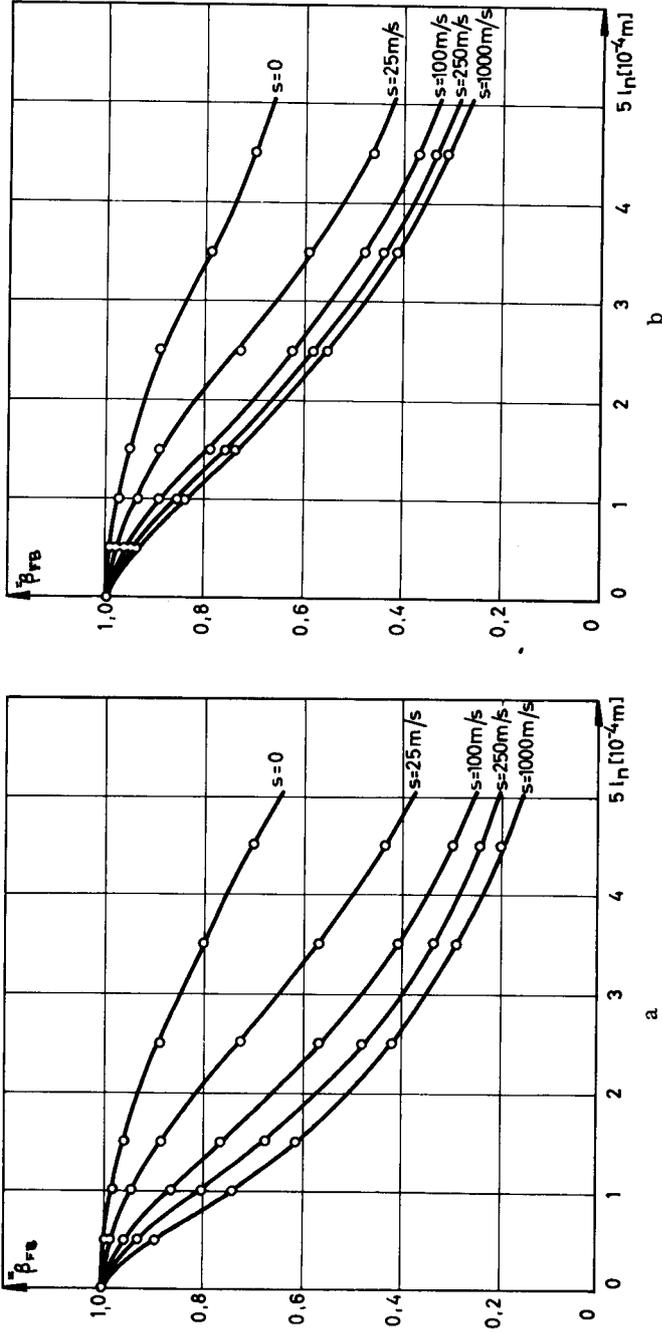


Abb. 21 Darstellung des Transportfaktors β_{FB} einer Transistorbasissschicht von der variablen Dicke l_n bei verschiedenen Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeiten s . Es gilt: Fall a: $r_K = r_A = 10^{-3} \text{ m}$; Fall b: $r_K = 4,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $r_A = 10^{-3} \text{ m}$.

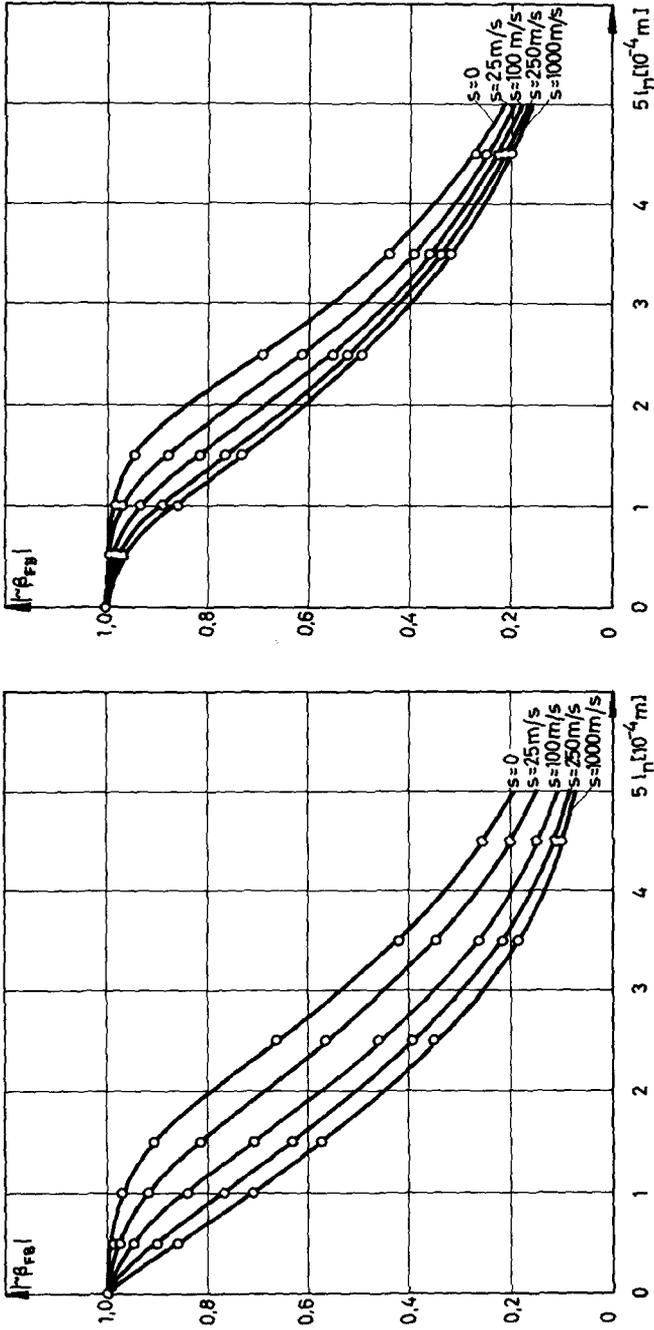


Abb. 22 Darstellung des Transportfaktors β_{FB} für Wechselstrom von der Frequenz 30 kHz einer Transistorbasis-schicht von der variablen Dicke l_n bei verschiedenen Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeiten s . Es gilt: Fall a: $r_K = r_A = 10^{-3} \text{ m}$; Fall b: $r_K = 4,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $r_A = 10^{-3} \text{ m}$.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Spenke, E. : Elektronische Halbleiter. Eine Einführung in die Physik der Gleichrichter und Transistoren. Verlag Springer, Berlin 1955.
- [2] Moore, A. R. and Pankove, J. I. : The Effect of Junction Shape and Surface Recombination on Transistor Current Gain. Proceedings of the IRE, Vol. 42, June 1954, pp. 907 - 913.
- [3] Schultz, W. : Der Einfluss der Oberflächen auf die elektrischen Eigenschaften von Gleichrichtern und Transistoren. Nachrichtentechnische Fachberichte, Bd 5, 1955.
- [4] Conwell, E. M. : Properties of Silicon and Germanium. Proceedings of the IRE, Vol. 40, November 1952, pp. 1327 - 1337.
- [5] Strutt, M. J. O. : Anleitung zur Vorlesung Höhere Elektrotechnik I und II. 1957. pp. 48 - 60.
- [6] Stiefel, E. : Ueber einige Methoden der Relaxationsrechnung. ZAMP 1952, Bd 3.
- [7] Čremošnik, G. : Ermittlung von Raumladungsfeldern und Kapazitäten mit Hilfe eines Widerstandsnetzes mit Stromquellen. Diss. ETH. Nr. 2667.
- [8] Alma, G. ; Diemer, G. ; Groendijk, H. : Elektronenbahnen in Raumladungsfeldern, nachgeahmt auf der Gummimembran. Philips Technische Rundschau, Jg. 15, Juli 1953. pp. 27 - 36.
- [9] Lüscher, J. ; Choquard, P. : Un simulateur de transistor. Actes proceedings, International computing meeting Bruxelles 1956. pp. 165 - 169.
- [10] Hechtel, R. : Ein Widerstandsnetzwerk zur Lösung der Poissonschen Gleichung. Die Telefunkenröhre, Heft 32, Februar 1955. pp. 38 - 46.
- [11] Liebmann, G. : Resistance-Network-Analogues. Revue E. (Société Belge d'Electriciens), Vol. 1, Nr. 12 1956.
- [12] Wahl, A. J. : A Three-Dimensional Analytic Solution for Alpha of Alloy Junction Transistors. IRE Transactions on Electron Devices, Nr. 3, July 1957, pp. 216 - 220.
- [13] Mitarbeiter am Institut für Höhere Elektrotechnik E. T. H. : Halbleiterkontaktgeräte, Bd 1. Verlag Birkhäuser, Basel (im Ersch.).

Curriculum vitae

Ich wurde am 26. Mai 1931 in Zürich geboren, wo ich auch die Primar- und Sekundarschule besuchte. Im Jahre 1945 trat ich in die Kantonale Oberrealschule in Zürich ein, wo ich nach $4\frac{1}{2}$ Jahren die Maturitätsprüfung Typus C ablegte. Anschließend leistete ich während längerer Zeit Militärdienst und absolvierte meine Vorstudienpraxis. Im Herbst 1952 begann ich meine Studien an der Eidgenössischen Technischen Hochschule an der Abteilung für Elektrotechnik (Richtung Schwachstrom), wo ich 1956 diplomierte. Am Institut für höhere Elektrotechnik (Vorstand: Prof. Dr. M. J. O. Strutt), wo ich seit Frühjahr 1956 als Assistent und wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig bin, beschäftigte ich mich vorwiegend mit theoretischen Arbeiten.