Einiges über die Fehlerfunktion der optimalen Polynomapproximation im Tschebyscheff'schen Sinne

Author(s):
Schlaepfer, Ferdinand Eduard

Publication Date:
1965

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000091275

Prom. Nr. 3683

Einiges über die Fehlerfunktion der optimalen Polynomapproximation im Tschebyscheff'schen Sinne

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

Ferdinand Eduard Schlaepfer

dipl. phys. ETH

von Rehetobel AR

Referent: Herr Prof. Dr. E. Stiefel

Korreferent: Herr Prof. Dr. A. Pfluger

Zürich 1965

Offsetdruck: Schmidberger & Müller

1. EINFÜHRUNG

1.1 Begriff und Bedeutung einer Phasenfunktion

Eine stetige Funktion $f(x)$ definiert auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$ wollen wir durch ein Polynom $P_n(x)$ von vorgegebenem Höchstgrad n so approximieren, dass die maximale Abweichung

$$\max |f(x) - P_n(x)|, \quad -1 \leq x \leq 1 ,$$

so klein als möglich wird.

Das eben formulierte Problem ist unter dem Namen Tschebyscheff'sches Approximationsproblem bekannt. Wir wollen $P_n(x)$ das optimale Approximationspolynom und die Differenz $f(x) - P_n(x)$ die optimale Fehlerfunktion nennen.

Es empfiehlt sich, noch die Variable φ gegeben durch $x = \cos\varphi$ einzuführen, die vorläufig zwischen 0 und π variieren soll. Ein möglicher Lösungsweg für das Tschebyscheff'sche Approximationsproblem besteht nun darin, eine stetige reelle Phasenfunktion $\varepsilon_n(\varphi)$ und eine Amplitude λ_n zu finden, so dass für $0 \leq \varphi \leq \pi$, also $-1 \leq x \leq 1$

$$f(\cos\varphi) - P_n(\cos\varphi) = \lambda_n \cos\left[(n+1)\varphi + \varepsilon_n(\varphi)\right] \tag{1.1}$$

und

$$\varepsilon_n(0) = \varepsilon_n(\pi) = 0 \tag{1.2}$$

gilt.

Satz 1.1. Ist für ein bestimmtes λ_n und $\varepsilon_n(\varphi)$ (1.1) und (1.2) befriedigt, so ist $P_n(x)$ das optimale Approximationspolynom.

Beweis: Aus (1.1) folgt für $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$|P_n(\cos\varphi) - f(\cos\varphi)| \leq |\lambda_n| ,$$

das heisst, $|\lambda_n|$ ist eine obere Grenze für den Approximationsfehler.

Der Approximationsfehler erreicht aber den Betrag $|\lambda_n|$ auch wirklich, nämlich an allen sogenannten kritischen Punkten, wo

$\left|\cos\left[(n+1)\varphi + \varepsilon_n(\varphi)\right]\right| = 1$ oder

$$(n+1)\varphi + \varepsilon_n(\varphi) = j\pi$$

für ganzzahliges j wird. Da $(n+1)\varphi + \varepsilon_n(\varphi)$ auf dem Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi$ stetig ist und auf Grund von (1.2) zwischen 0 und $(n+1)\pi$ variiert, gibt es für jedes j zwischen 0 und $n+1$ (Grenzen eingeschlossen) mindestens einen solchen kritischen Punkt. Jedenfalls existiert eine Folge von Punkten φ_j^*, $j = 0, 1, \ldots, n+1$ mit $\varphi_{j+1}^* > \varphi_j^*$, so dass

$$(n+1)\varphi_j^* + \varepsilon_n(\varphi_j^*) = j\pi$$

ist. Dem können wir nach (1.1) eine Folge von Punkten $x_j^* = \cos\varphi_j^*$, $j = 0, 1, \ldots, n+1$ mit $x_{j+1}^* < x_j^*$ und

$$f(x_j^*) - P_n(x_j^*) = (-1)^j \lambda_n$$

zuordnen. Diese $n+2$ Punkte x_j^* auf dem Intervall $[-1, +1]$ bilden eine Tschebyscheff'sche Alternante, da an ihnen der maximale Betrag des Approximationsfehlers mit alternierendem Vorzeichen angenommen wird.

Nach dem Tschebyscheff'schen Satz ([1], s. 57) ist aber das Polynom vom Höchstgrad n, das auf dem Intervall $[-1, +1]$ am wenigsten von einer gegebenen stetigen Funktion $f(x)$ abweicht, eindeutig dadurch charakterisiert, dass die Anzahl der aufeinander folgenden kritischen Punkte im Intervall, an denen die Differenz $f(x) - P_n(x)$ mit wechselndem Vorzeichen den Wert $\lambda_n = \max\limits_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)|$ annimmt, nicht kleiner ist als $n+2$. Damit ist die Behauptung von Satz 1.1 bewiesen.

Am einfachsten bestimmt man die Koeffizienten des gesuchten Polynoms $P_n(\cos\varphi)$ aus den Werten der Phase an den Tschebyscheff'schen Abszissen oder Kardinalpunkten

$$\varphi_j = j\pi/(n+1), \quad j = 0, 1, \ldots, n+1, \tag{1.3}$$

wo wegen (1.1)

$$(-1)^j f(\cos\varphi_j) = (-1)^j P_n(\cos\varphi_j) + \lambda_n \cos\varepsilon_n(\varphi_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n+1, \tag{1.4}$$

gilt. Zuerst leiten wir eine Beziehung zwischen λ_n und den Phasenwerten her. Wir eliminieren $P_n(\cos\varphi)$ in (1.4), indem wir die Formel über alle j mit den Trapezgewichten p_j,

$$p_o = p_{n+1} = 1 \; ; \; p_j = 2 \, , \quad j = 1, 2, \ldots \; n \, ,$$

summieren. Wir beachten dabei, dass $P_n(\cos\varphi)$ nur vom Grade n und nicht $n+1$ ist und somit wegen Formel (5. 29) im Anhang *)

$$\sum_{j=0}^{n+1} p_j \, (-1)^j \, P_n(\cos\varphi_j) = 0$$

wird. Diese Summation ergibt

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \; \frac{\sum\limits_{j=0}^{n+1} (-1)^j \, p_j \, f(\cos\varphi_j)}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \cos \varepsilon_n(\varphi_j)} \; . \tag{1.5}$$

Mit diesem λ_n bestimmt sich $P_n(\cos v)$ für komplexes $v = \varphi + i\,\omega$ aus (1. 4) und der trigonometrischen Interpolationsformel (5. 26)

$$P_n(\cos v) = \frac{\sin (n+1) v \sin v}{2\,(n+1)} \; \cdot$$

$$\cdot \; \sum_{j=0}^{n+1} \frac{p_j\left[(-1)^j \, f(\cos\varphi_j) - \lambda_n \cos \varepsilon_n(\varphi_j)\right]}{\cos\varphi_j - \cos v} \; . \tag{1.6}$$

Wir stellen also fest, dass es genügt, die Phasenwerte an den Kardinalpunkten zu kennen, um λ_n, $P_n(\cos\varphi)$, und schliesslich $\varepsilon_n(\varphi)$ auf dem restlichen Intervall berechnen zu können.

An dieser Stelle ist eine Bemerkung über die Existenzfrage von $\varepsilon_n(\varphi)$ angezeigt. Nicht für jedes $f(x)$ und n gibt es eine Phase $\varepsilon_n(\varphi)$, die (1.1) und zugleich (1. 2) erfüllt. Zum Beispiel sind nicht überall die Intervallsgrenzen -1 und $+1$ auch Alternantenpunkte. Der folgende Abschnitt dieses Kapitels ist der Behandlung von Existenzfragen gewidmet. Es wird sich dort zeigen, dass unter bestimmten in der Praxis wenig einschränkenden

---

*) Im Anhang ist zu Referenzzwecken ein kleines Lexikon von trigonometrischen Interpolationsformeln zusammengestellt.

Voraussetzungen für Funktionen $f(z)$, $z = x + iy$, die in einer komplexen Umgebung der Strecke $-1 \leq x \leq +1$ analytisch sind, eine Phasenfunktion $\varepsilon_n(v)$, $v = \tau + i\omega$ in einem komplexen, die τ-Achse enthaltenden Streifen existiert (Satz 1.2 des nächsten Abschnitts).

Die Phasenfunktion $\varepsilon_n(\tau)$ ist von E. Stiefel ([2], [3]) eingeführt worden. Sie erweist sich nicht nur, wie bereits angedeutet, als wertvolles Werkzeug zur Lösung des Tschebyscheff'schen Approximationsproblems, sondern ist auch selbst von grossem theoretischem Interesse. Analysen ergeben nämlich, dass für gewisse analytische Funktionen $f(z)$ die $\varepsilon_n(\tau)$ mit wachsendem Approximationsgrad n gegen eine Grenzphase $\varepsilon(\tau)$ streben, die überdies oft in geschlossener Form berechenbar ist. Die Kenntnis einer solchen Grenzphase ermöglicht weit schärfere Aussagen über das asymptotische Verhalten der Tschebyscheff'schen Alternante als die von Bernstein ([4], s. 118ff) angegebenen.

Die Untersuchungen über die Phasenfunktion $\varepsilon_n(\tau)$ in dieser Arbeit verlaufen in zwei Richtungen:

I. Theoretische Aussagen über die Grenzphase $\varepsilon(\tau)$ in einfachen Fällen (2. Kapitel).

a) Ganze Funktionen.

b) Analytische Funktionen, die auf der Konvergenzellipse der Tschebyscheff'schen Reihenentwicklung nur eine einzige Singularität in Form eines einfachen Pols auf der reellen Achse haben.

Es wird vermutet, dass auch entsprechende Aussagen für kompliziertere meromorphe Funktionen möglich sind, doch ist die Analyse mit den angegebenen Methoden wahrscheinlich schwierig durchzuführen.

II. Untersuchung der Konvergenz eines Iterationsverfahrens zur Bestimmung der Phasenfunktion. Der Iterationszyklus läuft schematisch skizziert wie folgt ab:

Es werden an den $n+2$ Tschebyscheff-Abszissen Ausgangswerte für die Phase geschätzt. Durch Einsetzen in (1.5) und (1.6) wird dann eine erste Näherung für λ_n und eine auch im Komplexen gültige Näherungsformel für $P_n(\cos v)$ berechnet. Alsdann gewinnt man aus der Grundgleichung (1. 1) eine Näherungsphase $e_n(v)$ auf einer geschlossenen komplexen Kurve, welche die Strecke $0 \leq \varphi \leq \pi$ umläuft. Durch die trigonometrische Cauchy'-sche Integralformel bekommt man neue verbesserte Phasenwerte an den Tschebyscheff-Abszissen. Damit ist die Iterationsschleife geschlossen.

Es wird gezeigt, dass der Iterationsprozess für schwache Phasen konvergiert. Das Gelingen der Iteration ist im Kern darauf zurückzuführen, dass die Näherungsphase und die korrekte Phase verschiedene funktionentheoretische Eigenschaften besitzen, und dass sich dieser Unterschied vorteilhaft auf den Prozess auswirkt. Eine genaue Kenntnis dieser Eigenschaften ist für die Beweisführung unerlässlich. Das ganze 3. Kapitel ist der Erforschung der komplizierten Struktur der Näherungsphase gewidmet. Das 4. Kapitel enthält den eigentlichen Konvergenzbeweis und am Schluss noch Ergebnisse von numerischen Experimenten, die die Leistungsfähigkeit des Verfahrens bezeugen.

Andere Iterationsverfahren zur Bestimmung von $\varepsilon_n(\varphi)$, die nur im Reellen arbeiten ([2], [3]) werden in dieser Arbeit nicht berührt.

1.2. Die Existenz der Phasenfunktion

Es geht hier darum, die im vorigen Abschnitt aufgeworfene Frage nach der Existenz der Phasenfunktion $\varepsilon_n(\varphi)$ zu diskutieren. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, der im Hauptteil dieser Arbeit besonders interessieren wird. Wir setzen voraus, dass die optimale Fehlerfunktion, die nach dem Tschebyscheff'schen Satz (siehe letzten Abschnitt) immer existiert, sogenannte Normalform aufweise, das heisst die folgenden drei Eigenschaften besitze:

1. Die Zahl der Punkte, wo $|f(x) - P_n(x)|$ maximal wird, beträgt genau n+2. Wir bezeichnen sie mit x_j^*, $j = 0, 1, \ldots, n+1$, wobei $x_{j+1}^* < x_j^*$ gelte.