THÈSE NO 3959

SUR LE MAXIMUM D'UN PROCESSUS ALÉATOIRE

THÉSE

PRÉSENTÉE
À L'ECOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE, ZURICH
POUR L'OBTENTION DU
GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES
PAR

Tiziano Pelli

MATH. DIPL. EPF
NÉ LE 21 NOVEMBRE 1939
DE PONTE TRESA, CANTON TESSIN

ACCEPTÉE SUR PROPOSITION

DU PROF. W. SAXER
RAPPORTEUR

DU PROF. H. BÜHLMANN
CORAPPORTEUR

Bâle 1967

BIRKHÄUSER VERLAG

Sur le maximum d'un processus aléatoire

par TIZIANO PELLI

Introduction

Soit X_i, $i=1,2,\dots$ une suite de variables aléatoires réelles et $Z_n = \operatorname{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$.

De nombreuses études ont été faites sur le comportement asymptotique de $P[Z_n < a_n x + b_n]$, où $a_n > 0$ et b_n sont des constantes.

Les premières recherches à ce sujet ont été effectuées pour des variables aléatoires indépendantes et identiquement réparties; les résultats obtenus ont donné une réponse complète à plusieurs problèmes (voir B. V. GNEDENKO [8], J. GEFFROY [7]). Dans les dernières années, parallelement aux études entreprises pour des sommes de variables aléatoires normées, plusieurs auteurs ont considéré le cas où les variables X_i, $i=1,2,\dots$ ont une certaine dépendance entre elles et ce travail désire apporter une contribution au développement de cette théorie.

Après avoir introduit les notations indispensables (par. 1) et exposé des résultats classiques fréquemment employés par la suite (par. 2), on examine sous quelles conditions la convergence de $P^n[X_1 < a_n x + b_n]$ vers une loi limite entraîne celle de $P[Z_n < a_n x + b_n]$ vers la même loi, pour des processus quelconques à lois marginales identiques. Les résultats obtenus sont ensuite appliqués (par. 4) à des processus soumis à des dépendances particulières. Le même problème, cette fois pour des processus de mélange strict. stationnaires, est étudié dans le par. 5 à l'aide de méthodes employées par R. M. LOYNES dans [9].

Le par. 6 est dédié aux processus de Markov à temps discret, strict. stationnaires et satisfaisant à la condition de Doeblin: les théorèmes 1.6 et 2.6 portent sur la classe des lois limites possibles de $P[Z_n < a_n x + b_n]$, le théorème 3.6 est du même type de ceux démontrés dans les paragraphes précédents.

En vertu de la relation $\operatorname{Min}_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i = -\operatorname{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} (-X_i)$ on remarquera que toute considération faite sur le comportement asymptotique de Z_n peut être transposée sur celui de $\operatorname{Min}_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$.

1. Notations

Soit X_i, $i=1,2,\dots$ un processus aléatoire défini dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{M}, P)$ et à valeurs dans l'espace des nombres réels R. On notera par $\mathfrak{M}_j^k$, où $k \geqslant j$, la σ-algèbre engendrée dans Ω par les variables X_i, $i=j, j+1, \dots, k$. La variable aléatoire Max $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, sera désignée par Z_n.

On dit qu'une fonction $F(x)$, définie dans R, croissante et continue à gauche, est une fonction de répartition (abr. f. de r.), si $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$ et $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$. Une fonction de répartition est appelée propre, s'il existe au moins un point x_0, tel que $0<F(x_0)<1$. En général on notera avec des majuscules les fonctions de répartition et avec des minuscules les fonctions quelconques. Les f. de r. $F_i(x)=P[X_i<x]$ sont dites lois marginales du processus X_i, $i=1, 2, \ldots$. L'ensemble des f. de r. $F(ax+b)$ où a et b sont des constantes, $a>0$, est appelé «type de la loi $F(x)$».

La limite $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=a$ d'une suite de nombres réels $\{a_{n_k}\}$ suivant les entiers $n_1, n_2, \ldots$ sera simplement notée $a_{n_k}\to a$. La notation $a_{n_k}\uparrow a$ (respect. $a_{n_k}\downarrow a$) sera réservée aux suites croissant vers «a» par des valeurs strictement inférieures à «a» (respect. décroissant vers «a» par des valeurs strictement supérieures à «a»).

$f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$ et $f(x)$ étant des fonctions croissantes définies dans R, $C(f(x))$ l'ensemble de points où $f(x)$ est continue, on écrit $f_n(x)\xrightarrow{W}f(x)$, lorsque $f_n(x)\to f(x)$ pour tout $x\in C(f(x))$. Si la convergence a lieu pour tout $x\in R$ on notera simplement $f_n(x)\to f(x)$.

Comme d'habitude on utilisera la notation $P(A\,|\,B)=P(A\cap B)/P(B)$ si $P(B)\neq 0$ et $P(A\,|\,\mathrm{B})=0$ si $P(B)=0$.

2. Résultats classiques

Les résultats de ce paragraphe sont bien connus (voir B. V. GNEDENKO [8], J. GEFFROY [7]); on se limitera à les énoncer.

LEMME 2.1. *Soient* $F_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$ *une suite de f. de r.,* $a_n>0$, $\alpha_n>0$, b_n *et* β_n *des constantes réelles,* $G(x)$ *et* $H(x)$ *des f. de r. propres. Si*

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{W} H(x)$$
$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{W} G(x)$$

alors $H(x)$ *et* $G(x)$ *sont du même type.*

LEMME 2.2. *Soient* $F_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$ *une suite de f. de r. et* $G(x)$ *une f. de r. propre. Si pour des constantes réelles* $a_n>0$, b_n, $\alpha_n>0$, *et* β_n *on a*

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{W} G(x)$$
$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{W} G(x)$$

alors $a_n/\alpha_n\to 1$ *et* $(b_n-\beta_n)/a_n\to 0$.

LEMME 2.3. *Soient* $F_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$ *une suite de f. de r.,* $G(x)$ *une f. de r. propre* *et* $a_n > 0$, b_n, $\alpha_n > 0$, β_n *des constantes réelles. Si* $F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{W} G(x)$ *alors les relations* $a_n/\alpha_n \to 1$ *et* $(b_n - \beta_n)/a_n \to 0$ *entraînent* $F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{W} G(x)$.

Soient X_i, $i = 1, 2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, obéissant à une même loi $F(x)$. On a $P[Z_n < x] = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i < x]\right) = F^n(x)$. Pour étudier dans quelles conditions $P[Z_n < a_n x + b_n] \xrightarrow{W} G(x)$, où $a_n > 0$ et $G(x)$ est une f. de r. propre, le lemme suivant est d'une grande utilité.

LEMME 2.4. *Soit* $F(x)$ *une f. de r.,* $G(x)$ *une f. de r. propre,* $a_n > 0$ *et* b_n *des constantes. Pour que l'on ait* $F^n(a_n x + b_n) \to G(x)$ *il faut et il suffit que* $n(1 - F(a_n x + b_n)) \to -\log(G(x))$ *pour tout* x *tel que* $G(x) \neq 0$.

Le problème de déterminer les lois propres qu'on peut obtenir comme limite $\xrightarrow{W}$ de $F^n(a_n x + b_n)$ a été résolu par B. GNEDENKO [8], qui a démontré que les lois limites possibles sont du type des lois $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ suivantes:

$$1)\ \Phi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} & \text{pour } x \geqslant 0 \quad \text{où} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

$$2)\ \Phi_2(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}} & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{pour } x \geqslant 0 \quad \text{où} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

$$3)\ \Phi_3(x) = e^{-e^{-x}} \qquad \text{pour tout } x.$$

S'il existe des nombres $a_n > 0$ et b_n tels que $F^n(a_n x + b_n) \to \Phi_k(x)$, où k peut prendre la valeur 1, 2 où 3, alors on dit que $F(x)$ appartient au domaine d'attraction de $\Phi_k(x)$. B. GNEDENKO (loc. cit.) donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une f. de r. $F(x)$ appartienne au domaine d'attraction de chacune des trois lois limites $\Phi_k(x)$. Il faut ajouter qu'une f. de r. $F(x)$ est attirée par $\Phi_1(x)$ (respect. $\Phi_2(x)$) d'une façon plus particulière: il existe une suite $a_n \uparrow \infty$ (respect. $a_n \downarrow 0$) telle que $F^n(a_n x) \to \Phi_1(x)$ (respect. $F^n(a_n x + x_0) \to \Phi_2(x)$, où x_0 est une constante).

3. Convergence vers $\Phi_k(x)$: cas général

Soit X_i, $i = 1, 2, \ldots$ un processus aléatoire à lois marginales identiques: $P[X_i < x] = F(x)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$. Plusieurs auteurs (voir S. M. BERMAN [2], R. M. LOYNES [9] et G. S. WATSON [13]) ont étudié le problème de déterminer dans quelles conditions la relation $F^n(a_n x + b_n) \to \Phi_k(x)$ entraîne la convergence de $P[Z_n < a_n x + b_n]$ vers $\Phi_k(x)$. Dans ce paragraphe on examine la même question.

THÉORÈME 3.1. *Soit* X_i, $i = 1, 2, \ldots$ *un processus aléatoire à lois marginales identiques:* $P[X_i < x] = F(x)$. *Supposons que* $F^n(a_n x + b_n) \to \Phi_k(x)$, *où* $a_n > 0$ *et* b_n *sont des constantes, alors, pour que l'on ait* $P[Z_n < a_n x + b_n] \to \Phi_k(x)$ *il faut et il suffit que, pour*