

SUR LES

SÉRIES DE FOURIER A DEUX VARIABLES

ET LE

PHÉNOMÈNE DE GIBBS

THÈSE

présentée à l'École polytechnique fédérale de Zurich
pour l'obtention du titre de Docteur ès Sciences mathématiques

PAR

ADOLPHE LÖEFLER

du Locle

N° 235

Rapporteur : M. le Prof. Dr H. WEYL

Co-Rapporteur : M. le Prof. Dr A. HIRSCH

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1920

Leer - Vide - Empty

CURRICULUM VITÆ.

Originaire du Locle, fils d'Adolphe Lœffler et de Cécile Lœffler, née Kaufmann, je naquis en France, à Enghien (département de Seine-et-Oise), le 14 mars 1890. Je fréquentai les écoles primaires de cette localité, puis le collège Rollin, à Paris, d'où je sortis en 1909, après la réussite du baccalauréat sciences-langues.

Au mois d'octobre de la même année, j'entrai à l'École polytechnique fédérale de Zurich, dans la Section de Mathématiques, et j'obtins, en 1913, le diplôme pour l'enseignement des Mathématiques et de la Physique. Je fus alors nommé au poste d'assistant de M. le Professeur Rudio, dont je remplis les fonctions pendant trois années. J'enseignai ensuite successivement à l'Institut « Juventas », à Arosa, et à l'Institut « Lémania », à Lausanne.

En mai 1920, je fus nommé maître de Physique et de Mathématiques au gymnase de La Chaux-de-Fonds. C'est le poste que j'occupe actuellement.

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici à M. le Professeur Weyl ma profonde reconnaissance pour les précieux conseils dont il m'a assisté et pour l'intérêt soutenu qu'il m'a témoigné au cours de ce travail.

ADOLPHE LOEFFLER.

La Chaux-de-Fonds, juillet 1920.

Leer - Vide - Empty

THÈSE

SUR LES
SÉRIES DE FOURIER A DEUX VARIABLES
ET LE
PHÉNOMÈNE DE GIBBS

INTRODUCTION.

Le phénomène de Gibbs (1) s'est d'abord présenté dans l'étude de la convergence uniforme des séries de Fourier d'une fonction d'une seule variable possédant un ou plusieurs points de discontinuité de première espèce.

Le cas le plus simple, auquel les autres se ramènent aisément, est celui de la fonction $f(x)$ spéciale qui prend la valeur zéro pour

$$-\pi < x < 0;$$

et la valeur 1 pour $0 < x < \pi$. La somme partielle $n^{\text{ième}}$ de la série de Fourier de $f(x)$,

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(x - \alpha)}{2 \sin \frac{x - \alpha}{2}} d\alpha,$$

converge uniformément, dans tout intervalle (a, b) , situé à l'intérieur de $(-\pi, +\pi)$, vers une fonction que nous désignerons par

(1) J.-W. GIBBS, *Fourier's Series* (*Nature*, vol. LIX, 27 avril 1899, p. 606). — C. RUNGE, *Theorie und Praxis der Reihen* (Leipzig, Göschen, 1904).

$S_i(nx)$ et qui est définie par la formule

$$S_i(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{+x} \frac{\sin t}{t} dt.$$

La courbe $S_i(nx)$ possède des maxima aux points d'abscisses

$$\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \dots; \frac{-2\pi}{n}, \frac{-4\pi}{n}, \dots;$$

et des minima aux points

$$\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots; \frac{-\pi}{n}, \frac{-3\pi}{n}, \dots;$$

k étant un nombre entier fixe, on peut choisir n suffisamment grand pour que la valeur de l'abscisse $\frac{k\pi}{n}$ qui correspond à un maximum ou à un minimum soit aussi proche de zéro qu'on le veut; et, pour'

$$x = \frac{k\pi}{n},$$

$f_n(x)$ a sensiblement la valeur $S_i(k\pi)$ qui diffère de $f(x)$ d'une quantité finie, indépendante de n . C'est en cela que consiste le phénomène de Gibbs qui est, en l'espèce, un vice de convergence des sommes $f_n(x)$ aux environs de $x = 0$.

Ce phénomène n'est pas spécial aux sommes partielles des séries de Fourier. On le retrouve dans l'étude de la convergence uniforme du développement d'une fonction f , discontinue sur une sphère, en série de Laplace.

M. H. Weyl ⁽¹⁾ a démontré que les sommes partielles d'une telle série présentent les oscillations caractéristiques du sinus intégral aux environs d'une ligne de discontinuité de f à tangente continue. Soit \mathcal{L} une de ces lignes, M. Weyl se sert pour décrire le phénomène, dans le voisinage de \mathcal{L} , d'un système de coordonnées spécial. Fixons, à son exemple, sur \mathcal{L} , un point origine O ; un point H de la courbe est déterminé par la longueur s de l'arc OH , mesuré sur \mathcal{L} à partir

(1) H. WEYL, *Die Gibbs'sche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXIX, 1^{er} semestre 1910, p. 308-323).

de O, positivement dans un sens, négativement dans l'autre. Élevons en H une perpendiculaire à \mathcal{L} (ici un arc de grand cercle); désignons par P son extrémité et par l sa longueur. Si l'on distingue, pour déterminer le signe de l , un côté positif et un côté négatif de la courbe \mathcal{L} , et si l est petit, la correspondance entre le point P et ses coordonnées l et s est univoque et réciproque.

Convenons de choisir, de part et d'autre de H ($s, 0$), le signe de l de façon que la hauteur $h(s)$ de la discontinuité en ce point, définie par la formule

$$h(s) = f(s, +0) - f(s, -0),$$

soit positive.

Le résultat des calculs est alors donné par les formules suivantes :

$$f_n(s, l) = f(s, l) + \begin{cases} h(s) \left[\sum i(nl) - 1 \right] + \delta(n) & (\text{si } l > 0), \\ h(s) \sum i(nl) + \delta(n) & (\text{si } l < 0), \end{cases}$$

dans lesquels f_n désigne la somme $n^{\text{ième}}$ de la série de Laplace de f , et δ_n une quantité qui tend uniformément vers zéro, lorsque n tend vers l'infini, en tout point P voisin de \mathcal{L} . Pour $l = 0$, f_n converge uniformément vers

$$\frac{f(s, +0) + f(s, -0)}{2}.$$

Si, en chaque point P (s, l), on porte, sur la normale à la sphère, le segment de longueur $f_n(s, l)$, la surface, lieu des extrémités de ces segments, présente une série de vallonements très resserrés. Les projections normales des lignes des crêtes de cette surface, sur la sphère, sont les parallèles à \mathcal{L} , d'équations

$$l = \frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \dots, \frac{-2\pi}{n}, \frac{-4\pi}{n}, \dots$$

Les projections des lignes des fonds de vallée sont les courbes

$$l = \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots; \frac{-\pi}{n}, \frac{-3\pi}{n}, \dots$$

La section de cette surface par un plan normal à \mathcal{L} offre une image identique à celle de la courbe représentative de la somme partielle de rang n de la série de Fourier d'une fonction d'une variable aux environs d'un point de discontinuité de première espèce.

Dans le présent travail, nous nous sommes proposé d'étudier le phénomène dans le cas d'une fonction $F(x, y)$ de deux variables, développée dans le plan en série de Fourier. La fonction que nous avons considérée satisfait dans tout le plan à de certaines conditions; nous avons, entre autres, fait sur elle les hypothèses suivantes :

1° $F(x, y)$ est à variation bornée (*voir* au Chapitre II la définition de cette classe de fonction que nous avons adoptée);

2° $F(x, y)$ est dérivable séparément et successivement par rapport aux deux variables.

En outre, nous n'avons étudié le phénomène de Gibbs qu'en des points P tels que, dans les parties du voisinage de P où $F(x, y)$ est continue, cette fonction satisfait à une condition de Lipschitz.

La fonction F étant bornée, les sommes partielles de sa série de Fourier, formées d'après le procédé de Fejér ou d'après celui de Poisson, ne peuvent présenter le défaut de convergence de Gibbs (¹). Nous nous bornerons, pour cette raison, à considérer des sommes partielles obtenues en sommant la série de F terme à terme. Dans les séries à double entrée cette sommation peut s'effectuer d'une infinité de manières.

D'après Pringsheim, $A_{mn}(x, y)$ désignant le terme général de la série de $F(x, y)$, et M et N deux nombres entiers que l'on peut faire tendre séparément vers l'infini, on entend ordinairement par somme partielle $F_{MN}(x, y)$ la somme double

$$\sum_m^{0 \dots M} \sum_n^{0 \dots N} A_{mn}(x, y).$$

Si l'on introduit un plan des mn muni d'un système d'axes rectangulaires, on voit que la somme F_{MN} renferme tous les termes A dont les indices m et n sont les coordonnées d'un point nodal de ce plan, situé à l'intérieur du rectangle (OO, NO, MN, MO). Par la suite, nous réserverons, pour cette raison, la dénomination de sommes rectangulaires aux sommes de Pringsheim. On obtient des sommes plus générales (F_{\oplus}), si l'on substitue au rectangle considéré une

(¹) Voir HILDA GEIRINGER, *Trigonometrische Reihen* (*Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik*, XIX. Jahrgang, 1916, 1, u. 2. Vierteljahr, p. 120).

courbe fermée quelconque (\ominus) située dans le premier quadrant du plan des mn . Pour mettre en évidence la dépendance du phénomène de Gibbs du mode de sommation employé, il n'est pas indispensable de choisir des courbes \ominus très générales. Celles que nous avons utilisées sont des courbes convexes passant par l'origine du plan des mn , et telles qu'une droite quelconque ne rencontre l'une d'entre elles en plus de deux points. Elles vérifient, en outre, d'autres hypothèses qu'on trouvera formulées au premier Chapitre.

Soit $P(\xi, \eta)$ un point du plan xy aux environs duquel la fonction F satisfasse à la condition de Lipschitz. Supposons, en outre, que le pied $H(s, 0)$ de la normale abaissée de P sur la ligne de discontinuité (\mathcal{L}) de $F(x, y)$ la plus voisine de P , appartienne à un arc à tangente continue de \mathcal{L} .

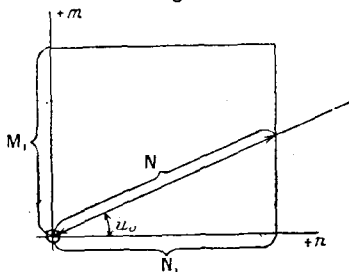
l désignant la longueur algébrique de la distance PH , et \ominus une des courbes décrites précédemment, on a

$$F_{\ominus}(s, l) = F_{\ominus}(\xi, \eta) = \begin{cases} F(s, l) + h(s) \left[\int i(Nl) - 1 \right] + \delta_{\ominus} & (l > 0), \\ \frac{F(s, +0) + F(s, -0)}{2} + \delta_{\ominus} & (l = 0), \\ F(s, l) + h(s) \int i(Nl) + \delta_{\ominus} & (l < 0), \end{cases}$$

$$\left[h(s) = \frac{F(s, +0) - F(s, -0)}{2} \right],$$

δ_{\ominus} tendant uniformément vers zéro en tous les points (ξ, η) vérifiant les hypothèses, lorsque la courbe \ominus devient infiniment grande.

Fig. 1.

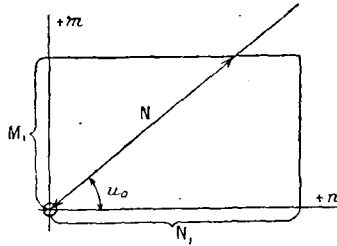


Pour définir N , il faut introduire l'angle aigu que la tangente à la courbe \mathcal{L} au point H forme avec l'axe des x . Soit u_0 cet angle,

N désigne alors, dans le plan des mn , la longueur du segment de la droite $m = n \operatorname{tang} u_0$ compris à l'intérieur de la courbe de sommation \ominus .

EXEMPLE : 1° *Sommation rectangulaire.* — Le rectangle variable \ominus dépend de deux paramètres N_1 et M_1 , pour lesquels nous choisirons les longueurs de ses côtés.

Fig. 2



On a

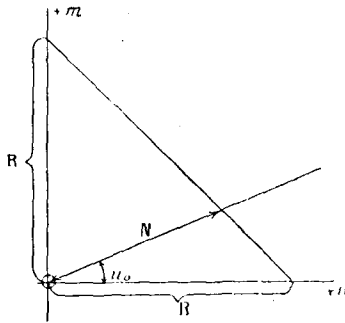
$$N = \frac{N_1}{\cos u_0} \quad \text{si } \operatorname{tang} u_0 < \frac{M_1}{N_1} \text{ (fig. 1),}$$

et

$$N = \frac{M_1}{\sin u_0} \quad \text{si } \operatorname{tang} u_0 > \frac{M_1}{N_1} \text{ (fig. 2).}$$

2° *Sommation diagonale.* — La courbe \ominus est un triangle rectangle isocèle. Elle ne dépend que d'un seul paramètre; par

Fig. 3.



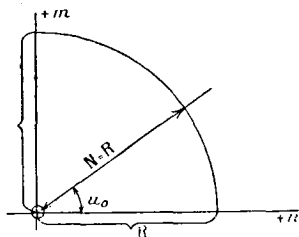
exemple, de la longueur R des côtés de l'angle droit (fig. 3).

On trouve aisément

$$N = \frac{R}{\cos u_0 + \sin u_0}.$$

Les deux exemples cités montrent que N dépend en général de u_0 , c'est-à-dire de la direction de la courbe \mathcal{L} au point H . On peut cependant sommer la série double de façon que N soit indépendant de u_0 . Ceci est réalisé si la courbe \mathcal{E} se compose d'un quart de cercle décrit autour de l'origine du plan des mn et des segments que cet

Fig. 4.



arc détache sur les axes (fig. 4). Si l'on prend comme paramètre le rayon R de ce cercle, on voit que l'on a

$$N = R$$

quel que soit u_0 . Le phénomène est dans ce cas identique pour les séries de Fourier et les séries de Laplace. Remarquons que la méthode de sommation circulaire qui fournit ici le résultat le plus simple s'introduit aussi naturellement dans la sommation d'autres développements de Fourier à deux variables, parmi lesquels nous citerons celui des oscillations de la membrane vibrante.

Étant donnée la forme générale des courbes de sommation que nous considérons, nous n'avons pu faire usage dans nos calculs des théorèmes et critères de convergence connus jusqu'à présent sur les séries de Fourier à deux variables, qui, tous, ne s'appliquent qu'aux sommes rectangulaires ou diagonales. Nous avons dû démontrer à nouveau, pour nos sommes, celles de ces propositions que nous utilisons. Par exemple, nous établissons au Chapitre II (théorèmes IV, V et corollaire) que la valeur vers laquelle la somme partielle

$$F_{\mathcal{E}}(x, y)$$

converge uniformément en tous les points (x, y) du plan ne dépend que des valeurs de F aux environs du point (x, y) considéré. Plus loin, nous démontrons qu'en chacun des points (x, y) du plan aux

environs duquel la fonction $F(x, y)$ est continue, et satisfait à une condition de Lipschitz, la somme partielle $F_{\ominus}(x, y)$ converge uniformément vers $F(x, y)$.

Ces propositions sont triviales pour des sommes rectangulaires. Par contre, la généralisation du théorème de Fourier, qui fait l'objet du Chapitre III, n'a, à notre connaissance, pas encore été énoncée jusqu'à présent, pour aucun des procédés de sommation connus.

CHAPITRE I.

DE LA SOMMATION DES SÉRIES DE FOURIER A DEUX VARIABLES.

1. Considérons une série à double entrée dont chaque terme A_{mn} dépend de deux indices dont chacun peut varier de $-\infty$ à $+\infty$. Faisons correspondre, à chaque terme A_{mn} dans un plan muni d'axes rectangulaires, le point nodal de coordonnées m et n . K étant une courbe de ce plan qui renferme l'origine, nous désignerons par

$$S_k = \sum^{(k)} A_{mn}$$

la somme des termes A_{mn} qui correspondent à chacun des points nodaux situés à l'intérieur et sur le pourtour de K . S_k est une somme partielle de la série considérée.

Supposons qu'à chaque valeur d'un paramètre R on fasse correspondre une courbe K_R . L'ensemble des courbes K_R correspondant à toutes les valeurs du paramètre constituent un système que nous désignerons par la lettre σ .

Supposons que, R tendant vers l'infini d'une façon quelconque, la courbe K_R du système σ varie de manière à renfermer finalement tous les points du plan des mn . Si la somme partielle S_k tend en même temps vers une limite, nous dirons que la série

$$\sum_{mn}^{-\infty \dots +\infty} A_{mn}$$

est convergente pour le système σ donné.

Dans les séries que nous avons étudiées, nous avons trouvé que la limite est indépendante du système σ . Toutefois, nous n'avons considéré que des systèmes σ particuliers satisfaisant à de certaines conditions. S désignant un de ces systèmes et C_R une des courbes qui le forment, ces conditions sont les suivantes :

1° Les points de la courbe C_R sont tous extérieurs au cercle de rayon R décrit autour de l'origine et intérieurs à un cercle concentrique de rayon λR ; où λ désigne un nombre supérieur à 1, indépendant de R , choisi d'ailleurs arbitrairement pour chaque système S ;

2° Une droite quelconque ne rencontre C_R qu'en deux points;

3° C_R tourne en tout point sa concavité vers l'origine;

4° C'_R désignant la courbe qu'on obtient en réduisant les ordonnées de tous les points de C_R dans le rapport 1 : R , le rayon de courbure est, en un point quelconque de C'_R supérieur à une quantité positive r_0 , indépendante de R .

2. Soit $F(x, y)$ une fonction développable dans tout le plan en série de Fourier, et admettant par suite la période 2π par rapport à x et à y .

Les termes de sa série sont donnés par les formules

$$A_{mn}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x, \beta) \cos m(x - x) \cos n(\beta - y) dx d\beta;$$

$$A_{0n}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x, \beta) \cos n(\beta - y) dx d\beta,$$

$$A_{m0}(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x, \beta) \cos m(x - x) dx d\beta,$$

$$A_{00} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x, \beta) dx d\beta.$$

Les indices de sommation m et n ne varient que de 0 à $+\infty$ nous n'utiliserons pour sommer ces séries que des courbes situées entièrement dans le premier quadrant du plan des mn .

Nous nous servirons de courbes spéciales \mathcal{C}_R que nous déduirons des courbes C_R de la manière suivante :

Étant donnée une courbe C_R , il lui correspond une courbe \mathcal{C}_R formée de l'arc de C_R situé dans le premier quadrant, et des deux segments que C_R détache sur les axes $+om$ et $+on$. A chaque système S correspond un système de courbes \mathcal{C}_R que nous désignerons par s .

A chaque courbe \mathcal{C}_R correspond une somme partielle $F_{\mathcal{C}_R}(x, y)$

de la série de Fourier de $F(x, y)$, définie par la formule

$$F_{\mathcal{C}_R}(x, y) = \sum_{m, n}^{(\mathcal{C}_R)} A_{mn}(x, y).$$

Si l'on pose maintenant

$$B_{mn}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x, \beta) e^{im(\alpha-x)} e^{in(\beta-y)} d\alpha d\beta,$$

on a, en vertu des formules d'Euler,

$$A_{mn} = B_{m,n} + B_{-m,n} + B_{m,-n} + B_{-m,-n},$$

$$A_{m0} = B_{m,0} + B_{-m,0},$$

$$A_{0n} = B_{0,n} + B_{0,-n},$$

$$A_{00} = B_{00}.$$

Soient V et T les points d'intersection de \mathcal{C}_R avec les axes $+on$ et $+om$; et soit L_R la courbe formée par l'arc \widehat{VT} de \mathcal{C}_R , et par les trois arcs qui sont les symétriques de \widehat{VT} par rapport aux axes om et on , et par rapport à l'origine (voir fig. 5).

On a

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{C}_R}(x, y) &= \sum_{m, n}^{\mathcal{C}_R} A_{mn}(x, y) = \sum_{m, n}^{L_R} B_{mn}(x, y) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x, \beta) \left[\sum_{m, n}^{L_R} e^{im(\alpha-x)} e^{in(\beta-y)} \right] d\alpha d\beta; \end{aligned}$$

on désignera plus spécialement par $F_{L_R}(x, y)$ la somme

$$F_{L_R}(x, y) = \sum_{m, n}^{L_R} B_{mn}(x, y),$$

de même C_R appartenant à un système S quelconque, on écrira

$$F_{C_R}(x, y) = \sum_{m, n}^{C_R} B_{m,n}(x, y).$$

Remarquons que la courbe L_R ne fait pas nécessairement partie d'un système S . En effet, il peut se faire qu'une parallèle à l'un des

axes rencontre l'arc VT en deux points A, B (*fig. 5*); elle rencontre l'arc symétrique de \widehat{VT} par rapport à l'autre axe en deux points A' et B' symétriques de A et B; et la courbe L_R , par suite, en quatre points. La deuxième des hypothèses faites sur les courbes C_R n'est donc pas réalisée.

Cependant, comme nous le montrerons par la suite, la convergence uniforme des sommes F_{L_R} , et, par conséquent, celle des sommes identiques F_{C_R} se déduit aisément de celle des sommes F_{C_R} . Nous pourrions donc nous borner dans les calculs à considérer les sommes F_{C_R} .

Pour simplifier leur expression, on prendra le point (x, y) comme origine des coordonnées en déplaçant les axes ox et oy parallèlement à eux-mêmes. La fonction $F(x, \beta) e^{im(x-x)} e^{in(\beta-y)}$ admettant la période 2π par rapport à x et à β , une translation quelconque du carré des périodes ne change pas la valeur de F_{C_R} . En convenant de désigner par $f(x, y)$ l'expression de $F(x, y)$ dans le nouveau système de coordonnées, et en posant

$$\theta_{C_R}(x, \beta) = \sum_{m,n}^{C_R} e^{imx} e^{in\beta}.$$

on écrira

$$f_{C_R}(0, 0) = F_{C_R}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x, \beta) \theta_{C_R}(x, \beta) dx d\beta.$$

Nous considérerons, dans les théorèmes qui suivent conjointement avec $F_{C_R}(x, y)$ l'expression $F_{C_R}^1(x, y)$ donnée par la formule

$$F_{C_R}^1(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(x, \beta) \left[\int \int_{(C_R)} e^{im(x-x)} e^{in(\beta-y)} dm dn \right] dx d\beta.$$

En prenant le point (x, y) comme origine et en posant

$$\mathfrak{Z}_{C_R}(x, \beta) = \int \int_{(C_R)} e^{imx} e^{in\beta} dm dn,$$

on écrira

$$F_{C_R}^1(x, y) = f_{C_R}^1(0, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x, \beta) \mathfrak{Z}_{C_R}(x, \beta) dx d\beta.$$

On démontrera au Chapitre III que $f_{C_R}^1$ et f_{C_R} convergent uniformément vers la même limite.

3. Il a été dit plus haut que les formules de convergence uniforme établies pour les sommes partielles $F_{C_R}(x, y)$ s'appliquent aussi aux sommes F_{L_R} et par suite aux sommes $F_{\mathcal{C}_R}$.

En effet, supposons, par exemple, démontrées les deux propositions suivantes :

1° *A toute quantité positive ω , arbitrairement petite, correspond une valeur R_0 de l'indice R , telle qu'en tous les points (x, y) dans le voisinage immédiat desquels la fonction F satisfait à une condition de Lipschitz, on ait*

$$(1) \quad F_{C_R}(x, y) = F(x, y) + \delta_{C_R},$$

où $|\delta_{C_R}| < \omega$ dès que $R > R_0$ (voir démonstration Chap. II, théorème VI).

2° *Le point (x, y) étant tel que la ligne de discontinuité de $F(x, y)$ de laquelle il est le plus rapproché soit une ligne à tangente continue, on a, en utilisant les notations de l'introduction,*

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{C_R}(x, y) = F(x, y) + h \left[\sum i(lN) - 1 \right] + \delta'_{C_R} \quad (\text{pour } l > 0), \\ F_{C_R}(x, y) = F(x, y) + h \sum i(lN) - 1 + \delta''_{C_R} \quad (\text{pour } l < 0) \end{array} \right.$$

avec

$$\left. \begin{array}{l} |\delta'_{C_R}| \\ |\delta''_{C_R}| \end{array} \right\} < \omega' \quad (\text{pour } R > R'_0).$$

Il aisé de voir que ces deux formules sont encore valables si l'on remplace la courbe C_R par une courbe L_R qui ne satisfasse pas à la deuxième hypothèse.

Soit $VP_1TP_2V'P'_1T'P'_2$ cette courbe (fig. 5). Il est évidemment toujours possible de tracer par les points V, T, V' et T' à l'intérieur de L_R une courbe C_R , que nous désignerons par C_R^3 (marquée ici par les points $V, U_2, T, U_1, V', U'_2, T', U'_1$) et telle que les contours

$$C_R^1(V, P_1, T, U_1, V', P'_1, T', U'_1) \quad \text{et} \quad C_R^2(V, U_2, T, P_2, V', U'_2, T', P'_2)$$

soient également des courbes C_R .

On a alors

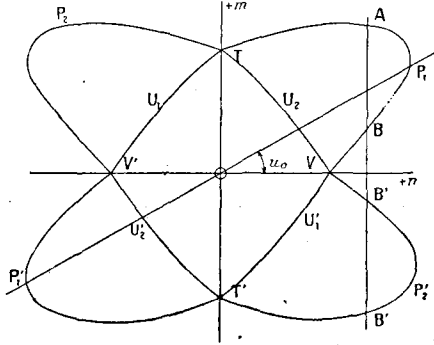
$$\sum_{m,n}^{(L_R)} B_{mn}(x, y) = \sum_{m,n}^{C_R^1} B_{mn} + \sum_{m,n}^{C_R^2} B_{mn} - \sum_{m,n}^{C_R^3} B_{mn},$$

c'est-à-dire

$$(a) \quad F_{L_R}(x, y) = F_{C_R^1}(x, y) + F_{C_R^2}(x, y) - F_{C_R^3}(x, y).$$

1° La formule (1) étant valable pour les courbes C_R^1 , C_R^2 et C_R^3 , il

Fig. 5.



existe, par hypothèse, des nombres R_1 , R_2 et R_3 tels que, en tout point (x, y) satisfaisant aux conditions requises, on ait

$$F_{C_R^1}(x, y) = F(x, y) + \delta_{C_R^1}, \quad |\delta_{C_R^1}| < \frac{\omega}{3} \quad \text{pour } R > R_1;$$

$$F_{C_R^2}(x, y) = F(x, y) + \delta_{C_R^2}, \quad |\delta_{C_R^2}| < \frac{\omega}{3} \quad \text{» } R > R_2;$$

$$F_{C_R^3}(x, y) = F(x, y) + \delta_{C_R^3}, \quad |\delta_{C_R^3}| < \frac{\omega}{3} \quad \text{» } R > R_3;$$

quelque petite que soit la quantité arbitraire ω .

En appliquant la formule (a) il vient

$$F_{L_R}(x, y) = F(x, y) + \delta_{C_R},$$

où l'on a, R_0 désignant le plus grand des indices R_1 , R_2 , R_3 : $|\delta_{C_R}| < \omega$, si $R > R_0$.

2° Soit (x, y) un point pour lequel la formule (2) soit valable. Soient P_1 et U_2 les points d'intersection des courbes L_R ou C_R^1 et C_R^2

ou C_R^3 avec la demi-droite dirigée $m = n \operatorname{tang} u_0$ (voir Introduction).

Posons

$$OP_1 = N_1, \quad OU_2 = N_2.$$

Supposons $l < 0$. Il correspond à toute quantité positive ω' des valeurs R'_1, R'_2, R'_3 telles que l'on ait

$$F_{C_R^1}(x, y) = F(x, y) + h \int i(lN_1) + \delta_1'', \quad \text{avec } |\delta_1''| < \frac{\omega'}{3}, \quad \text{pour } R > R_1;$$

$$F_{C_R^2}(x, y) = F(x, y) + h \int i(lN_2) + \delta_2'', \quad \text{» } |\delta_2''| < \frac{\omega'}{3}, \quad \text{» } R > R_2;$$

$$F_{C_R^3}(x, y) = F(x, y) + h \int i(lN_2) + \delta_3'', \quad \text{» } |\delta_3''| < \frac{\omega'}{3}, \quad \text{» } R > R_3;$$

on tire, en appliquant la formule (a) :

$$F_{L_R}(x, y) = F(x, y) + h \int i(lN_1) + \delta'',$$

et, si R'_0 désigne la plus grande des quantités R'_1, R'_2 et R'_3 , on a

$$|\delta''| < \omega',$$

dès que R est plus grand que R'_0 . Le cas $l > 0$ se traiterait de la même façon.

Il serait tout aussi aisé d'étendre aux sommes F_{L_R} le théorème de Fourier généralisé démontré au Chapitre III pour les sommes F_{C_R} .

4. Convenons que

$$m = \varphi(n)$$

est l'équation explicite d'une courbe C_R quelconque.

A toute valeur de n , cette équation doit faire correspondre deux valeurs de m . Elle se compose par conséquent de deux fonctions

$$m = \varphi_1(n),$$

$$m = \varphi_2(n).$$

Supposons $\varphi_1(n) \geq \varphi_2(n)$.

Le signe $=$ n'est valable que pour la plus grande et la plus petite des abscisses de tous les points de C_R ; nous désignerons par la suite ces abscisses par N_1 et N_2 . Soit, en outre, $\Phi_1(n)$ le plus petit entier supérieur à $\varphi_1(n)$; et $\Phi_2(n)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $\varphi_2(n)$.

Si l'on pose

$$\varphi_1(n) = \Phi_1(n) + \omega_1(n),$$

$$\varphi_2(n) = \Phi_2(n) + \omega_2(n),$$

on a

$$-1 < \left\{ \begin{array}{l} \omega_1(n) \\ \omega_2(n) \end{array} \right\} < 0.$$

Convenons que, dans l'expression de $\theta_{C_R}(\alpha, \beta)$, la sommation par rapport à m s'étend à toutes les valeurs entières de m qui vérifient les inégalités

$$\Phi_2(n) \leq m < \Phi_1(n);$$

on obtient, en effectuant d'abord cette sommation,

$$\theta_{C_R}(\alpha, \beta) = \sum_n^{N_2 \dots N_1} e^{in\beta} \frac{e^{i\Phi_1(n)\alpha} - e^{i\Phi_2(n)\alpha}}{e^{i\alpha} - 1},$$

ce que l'on peut écrire

$$(1) \quad \theta_{C_R}(\alpha, \beta) = \sum_n^{N_2 \dots N_1} e^{in\beta} \frac{e^{i[\Phi_1(n) - \frac{1}{2}]\alpha} - e^{i[\Phi_2(n) - \frac{1}{2}]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Soient $\psi_1(m)$ et $\psi_2(m)$ les équations de la courbe C_R résolues par rapport à n . Si l'on désigne par $\Psi_1(m)$, $\Psi_2(m)$, M_1 , M_2 des grandeurs analogues à Φ_1 , Φ_2 , N_1 , N_2 , on obtient, en sommant d'abord par rapport à n , une seconde formule pour θ_{C_R} :

$$(2) \quad \theta_{C_R}(\alpha, \beta) = \sum_m^{M_2 \dots M_1} e^{im\alpha} \frac{e^{i[\Psi_1(m) - \frac{1}{2}]\beta} - e^{i[\Psi_2(m) - \frac{1}{2}]\beta}}{2i \sin \frac{\beta}{2}}.$$

En intégrant au lieu de sommer, on obtient deux formules analogues pour \mathfrak{F}_{C_R} :

$$(1') \quad \mathfrak{F}_{C_R} = \int_{N_2}^{N_1} e^{in\beta} \frac{e^{i\varphi_1(n)\alpha} - e^{i\varphi_2(n)\alpha}}{i\alpha} dn,$$

$$(2') \quad \mathfrak{F}_{C_R} = \int_{M_2}^{M_1} e^{im\alpha} \frac{e^{i\psi_1(m)\beta} - e^{i\psi_2(m)\beta}}{i\beta} dm.$$

Remarque. — Pour effectuer la sommation partielle de la série

$$\sum_{mn}^{(C_R)} B_{mn},$$

on utilise d'ordinaire des rectangles ayant pour centre l'origine du plan des mn , et dont les côtés sont parallèles aux axes. M et N étant les longueurs des demi-côtés de ce rectangle, on a, en supposant M et N entiers,

$$\begin{aligned}\Phi_1(n) &= M + 1, \\ \Phi_2(n) &= -M, \\ N_1 &= -N_2 = N.\end{aligned}$$

D'après la formule (1), il vient

$$\begin{aligned}\theta_{C_R} &= \sum_n^{-N \dots N} e^{in\beta} \frac{e^{i(M+\frac{1}{2})\alpha} - e^{-i(M+\frac{1}{2})\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\beta \sin\left(M + \frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}};\end{aligned}$$

d'où, en désignant par C_R le rectangle considéré,

$$F_{C_R} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha, \beta) \frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\beta}{2 \sin \frac{\beta}{2}} d\alpha d\beta.$$

Il convient toutefois de remarquer que, pour que les rectangles utilisés forment un système S , il faut que les inégalités suivantes

$$M > R, \quad N > R, \quad \sqrt{M^2 + N^2} < \lambda R$$

soient vérifiées. [La troisième exprime que les sommets du rectangle sont situés à l'intérieur du cercle $(o, \lambda R)$.]

5. Pour clore ces considérations générales sur les courbes de sommation, nous établirons deux inégalités qui s'y rapportent, que nous utiliserons au cours des démonstrations du Chapitre suivant.

$m = \varphi(n)$ étant l'équation d'une courbe C_R , et a un nombre réel quelconque, l'équation $\varphi(n) + na = 0$ admet deux racines n_1 et n_2 qui sont les abscisses des deux points d'intersection de la droite $m = -an$ avec C_R .

Ceci posé, considérons une fonction $X(n)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° Il existe une constante positive h telle que, pour toutes les valeurs de n qui appartiennent aux intervalles $(n_1 - 2, n_1 + 2)$, on ait

$$0 < X(n) < \frac{h}{R}.$$

2° Pour les valeurs de n extérieures aux intervalles $(-1, +1)$, $(n_1 - 2, n_1 + 2)$, $(n_2 - 1, n_2 + 2)$, $X(n)$ est définie par l'équation

$$X(n) = \frac{1}{|n| |\varphi_1(n) + na|} + \frac{1}{|n| |\varphi_2(n) + na|}.$$

THÉOREME I. — *Si a est compris entre -1 et $+1$, il existe un nombre positif k , indépendant de a et de R , et une valeur R' du paramètre R , tels que les inégalités*

$$\left. \begin{array}{l} \sum_n^{N_2 \dots N_1} X(n) \\ \int_{N_2}^{N_1} X(\xi) d\xi \end{array} \right\} < k \frac{\text{Log } R}{R}.$$

soient satisfaites dès que R est plus grand que R' .

(Les accents signifient que les valeurs de n qui appartiennent à l'intervalle $(-1, +1)$ sont exceptées de la sommation et de l'intégration.)

Démonstration. — Désignons par (*fig. 6*):

g la droite $m = -an$;

A le point d'intersection de g et de C_R dont l'abscisse est n_1 ;

B le point d'intersection de g et de C_R dont l'abscisse est n_2 ;

C et D les points de C_R situés sur l'axe des m .

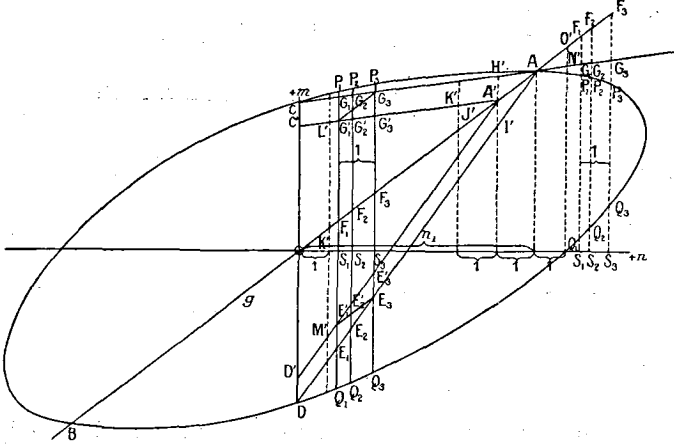
Menons les droites AC et AD. Puis par trois points S_1, S_2 et S_3 de l'axe $+on$ dont nous désignerons les abscisses respectivement par $n - 1, \xi$ et n (n entier, $n - 1 \leq \xi \leq n$), menons trois parallèles p_1, p_2 et p_3 à l'axe om , p_i désignant l'une quelconque d'entre elles, nous appellerons E_i, F_i et G_i ses points d'intersection avec les droites AD, g et AC; Q_i et P_i ses points d'intersection avec C_R . Nous distinguerons deux cas :

Premier cas :

$$2 \leq n-1 \leq \xi \leq n \leq n_1-2.$$

Menons par le point A' de OA d'abscisse n_1-1 , $A'D' \parallel AD$, et $A'C' \parallel AC$. Soient E'_i et G'_i les points d'intersection de p_i avec $A'D'$

Fig. 6.



et $A'C'$. Remarquons que les droites $G_3G'_1$ et $E_3E'_1$ sont parallèles à g ; on en déduit

$$\begin{aligned} F_2 G'_2 < F_3 G_3 \leq F_2 G_2 \leq F_1 G_1, \\ E'_2 F_2 < E_3 F_3 \leq E_2 F_2 \leq E_1 F'_1. \end{aligned}$$

On a (voir figure)

$$\begin{aligned} |\varphi_1(\xi) + \xi a| &= F_2 P_2, & |\varphi_2(\xi) + \xi a| &= F_2 Q_2, \\ |\varphi_1(n) + na| &= F_3 P_3, & |\varphi_2(n) + na| &= F_3 Q_3. \end{aligned}$$

On vérifiera aisément que ces équations seraient aussi valables si, pour faire la figure, on supposait a positif.

En vertu de la convexité de C_R , les segments AC , $A'C'$, AD et $A'D'$ sont situés entièrement à l'intérieur de cette courbe. On voit, par suite, que l'on peut écrire les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} |\varphi_1(\xi) + \xi a| &> F_2 G_2 \\ |\varphi_1(n) + na| &> F_3 G_3 \end{aligned} \right\} &> F_2 G'_2, \\ \left. \begin{aligned} |\varphi_2(\xi) + \xi a| &> E_2 F_2 \\ |\varphi_2(n) + na| &> E_3 F_3 \end{aligned} \right\} &> E'_2 F_2. \end{aligned}$$

desquelles on tire :

$$1^{\circ} \quad X(n) < \int_{n-1}^n \left(\frac{1}{F_2 G'_2} + \frac{1}{E'_2 F_2} \right) \frac{d\xi}{\xi}$$

et, en désignant par n'_1 le plus grand entier contenu dans $n_1 - 2$,

$$\sum_n^{2 \dots n'_1} X(n) < \int_1^{n_1-2} \left(\frac{1}{F_2 G'_2} + \frac{1}{E'_2 F_2} \right) \frac{d\xi}{\xi};$$

$$2^{\circ} \quad \int_1^{n_1-2} X(\xi) d\xi < \int_1^{n_1-2} \left(\frac{1}{F_2 G'_2} + \frac{1}{E'_2 F_2} \right) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Soient

$$m = a_1 n + b_1,$$

$$m = a_2 n + b_2$$

les équations des droites A'C' et A'D'.

On a

$$F_2 G'_2 = (a_1 + a)\xi + b_1,$$

$$E'_2 F_2 = |(a_2 + a)\xi + b_2|.$$

En introduisant ces valeurs dans les deux dernières inégalités, il vient

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_n^{2 \dots n'_1} X(n) \\ \int_1^{n_1-2} X(\xi) d\xi \end{array} \right\} < \int_1^{n_1-2} \left[\frac{1}{(a+a_1)\xi + b_1} + \frac{1}{|(a+a_2)\xi + b_2|} \right] \frac{d\xi}{\xi}$$

$$= \frac{1}{b_1} \text{Log} \left[\frac{(n_1-2)(a_1+a+b_1)}{(a_1+a)(n_1-2)+b_1} \right]$$

$$+ \frac{1}{|b_2|} \text{Log} \left[\frac{(n_1-2)(a_2+a+b_2)}{|(a_2+a)(n_1-2)+b_2|} \right].$$

Par hypothèse, on a

$$\lambda R > OC > R, \quad \lambda R > OD > R.$$

D'autre part, des inégalités $\lambda R > OA > R$, et $|a| < 1$, on déduit

$$\lambda R > n_1 > \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

On en conclut que les rapports $\frac{OC}{n_1}$ et $\frac{OD}{n_1}$ satisfont aux inégalités

suivantes :

$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{OC}{n_1} \leq \lambda \sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{OD}{n_1} \leq \lambda \sqrt{2}.$$

Or on a (*voir figure*)

$$(a + a_1)(n_1 - 2) + b_1 = J'K' = A'H' = \frac{OC}{n_1} > \frac{1}{\lambda},$$

$$|(a + a_1)(n_1 - 2) + b_2| = A'J' = \frac{OD}{n_1} > \frac{1}{\lambda},$$

$$a + a_1 + b_1 = K'L' < OC < \lambda R,$$

$$|a + a_2 + b_2| = K'M' < \lambda R;$$

$CC' = A'H'$ et $DD' = A'I'$ étant égaux à $\frac{OC}{n_1}$ et $\frac{OD}{n_1}$ sont plus petits que $\lambda \sqrt{2}$ et, par suite, négligeables en regard de R , pour de grandes valeurs de ce paramètre; et l'on peut écrire

$$b_1 = OC > R,$$

$$b_2 = OD > R.$$

Si l'on tient compte des six dernières inégalités, et si l'on observe que n_1 est plus petit que λR , on tire du système (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_n^{2 \dots n_1'} X(n) \\ \int_1^{n_1-2} X(\xi) d\xi \end{array} \right\} < \frac{2}{R} \text{Log } \lambda^3 R.$$

Deuxième cas. — Supposons maintenant

$$n_1 + 2 \leq n - 1 \leq \xi \leq n \leq N_1.$$

Dans le cas de la figure, les prolongements des droites CA et DA étant situés au-dessus de C_R , on peut écrire le système d'inégalités suivant :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\varphi_1(\xi) + \xi a| = F_2 P_2 \\ |\varphi_2(\xi) + \xi a| = F_2 Q_2 \\ |\varphi_1(n) + na| = F_3 P_3 \\ |\varphi_2(n) + na| = F_3 Q_3 \end{array} \right\} > F_2 G_2.$$

Dans le cas de la figure 7, on obtiendrait un système (2') différent de (2) en ce que le membre de droite serait $F_2 E_2$.

Le calcul est analogue dans les deux cas. Nous nous bornerons à le faire en supposant le système (2) valable. On en tire

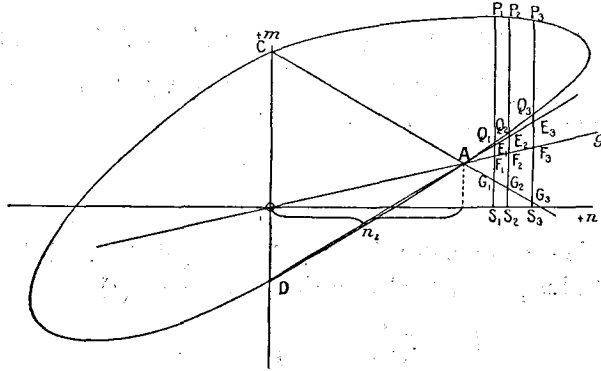
1°
$$X(n) < \int_{n-1}^n \frac{2 d\xi}{F_2 G_2 \xi},$$

d'où

$$\sum_n^{n_1+2 \dots N_1} X(n) < 2 \int_{n_1+1}^{N_1} \frac{d\xi}{F_2 G_2 \cdot \xi};$$

2°
$$\int_{n_1+1}^{N_1} X(\xi) d\xi < 2 \int_{n_1+1}^{N_1} \frac{d\xi}{F_2 G_2 \cdot \xi}.$$

Fig. 7.



Soit

$$m = a_3 n + b_3$$

l'équation de la droite AC; on a

$$F_2 G_2 = |(a_3 + a)\xi + b_3|.$$

d'où

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_n^{n_1+2 \dots N_1} X(n) \\ \int_{n_1+1}^{N_1} X(\xi) d\xi \end{array} \right\} < 2 \int_{n_1+1}^{N_1} \frac{d\xi}{\xi |(a_3 + a)\xi + b_3|}$$

$$= \frac{2}{b_3} \text{I.og} \left[\frac{N_1 |(a_3 + a)(n_1 + 1) + b_3|}{|(a_3 + a)N_1 + b_3|} \right].$$

Mais on a

$$b_3 = OC > R,$$

$$N_1 < \lambda R.$$

$$|(a_3 + a)(n_1 + 1) + b_3| = N' O' = A' H' < \lambda \sqrt{2},$$

$$|(a_3 + a)N_1 + b_3| = P' Q' > A' H' > \frac{1}{\lambda}.$$

En tenant compte de ces quatre inégalités, on tire de (3)

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_n^{n_1+2 \dots N_1} X(n) \\ \int_{n_1+1}^{N_1} X(\xi) d\xi \end{array} \right\} < \frac{2}{R} \text{Log}(\lambda^3 \sqrt{2} R).$$

On aboutit identiquement au même résultat en supposant que le système (2') est valable.

Des inégalités (I) et (II) et

$$0 < X(n) < \frac{h}{R} \quad \text{pour } n_1 - 2 < n < n_1 + 2,$$

on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_n^{2 \dots N_1} X(n) \\ \int_1^{N_1} X(\xi) d\xi \end{array} \right\} < \frac{4}{R} \text{Log} R + \frac{2 \text{Log} \lambda^6 \sqrt{2}}{R} + \frac{3h}{R}.$$

A partir d'une valeur R' de R suffisamment grande, on a

$$2 \text{Log} \lambda^6 \sqrt{2} + 3h < \text{Log} R.$$

Pour $R > R'$ le système suivant est valable :

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_n^{2 \dots N_1} X(n) \\ \int_1^{N_1} X(\xi) d\xi \end{array} \right\} < \frac{5 \text{Log} R}{R}.$$

On voit aisément que l'on pourrait établir d'une manière identique les inégalités

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_n^{N_2 \dots -2} X(n) \\ \int_{N_3}^{-1} X(\xi) d\xi \end{array} \right\} < \frac{5 \text{Log} R}{R}.$$

Par addition de (III) et (IV), on obtient

$$\left. \begin{array}{l} \sum_n^{N_2 \dots N_t} X(n) \\ \int_{N_2}^{N_t} X(\xi) d\xi \end{array} \right\} < \frac{10 \text{ Log } R}{R}.$$

Le théorème est démontré; il suffit de choisir

$$k \geq 10.$$



CHAPITRE II.

FONCTIONS A VARIATION BORNÉE. THÉOREMES PRÉLIMINAIRES.

1. Il existe plusieurs définitions des fonctions de deux variables à variation bornée. Arzela (1) a donné la plus générale. A son sens une fonction $\varphi(x, y)$ à variation double bornée à l'intérieur d'un rectangle \mathcal{R} est définie par la propriété suivante.

Etant donnée une ligne ascendante \mathcal{L} , si, à l'intérieur de \mathcal{R} , on fixe sur \mathcal{L} une suite de points, $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$; en nombre quelconque, on a

$$(a) \quad \sum_1^n |\varphi(P_i) - \varphi(P_{i-1})| < G,$$

le nombre G étant indépendant de la courbe \mathcal{L} et du choix des points P_i .

Nous adopterons la définition suivante :

Pour que $\varphi(x, y)$ soit à variation bornée, il suffit que l'inégalité (a) soit vérifiée dans le cas où les courbes \mathcal{L} considérées sont des droites, mais il faut qu'elle le soit, que ces droites soient ascendantes ou descendantes.

Nous choisirons pour rectangle \mathcal{R} le carré des périodes. Parmi les fonctions φ ainsi définies nous ne considérerons par la suite que des fonctions spéciales $F(x, y)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1° $F(x, y)$ admet la période 2π par rapport à x et par rapport à y ;
- 2° $O\xi$ et $O\eta$ étant deux axes de coordonnées rectangulaires quel-

(1) ARZELA, *Sulla funzione a variazione limitata* (Rendiconti di Bologna 1904-1905 et 1907).

conques, F est dérivable par rapport à ξ et à η et l'on a

$$(b) \quad \begin{cases} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{\partial F}{\partial \xi} \right| d\xi < G, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{\partial F}{\partial \eta} \right| d\eta < G; \end{cases}$$

3° La dérivée $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}$ existe et vérifie l'inégalité

$$(c) \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \right| d\xi d\eta < 2G;$$

4° Les expressions $\frac{\partial F}{\partial \xi}$, $\frac{\partial F}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}$ peuvent devenir infinies, mais leurs points de discontinuité forment, à l'intérieur du carré des périodes, un ensemble de mesure nulle;

5° Les lignes de discontinuité de F sont en nombre fini, ainsi que les maxima, les minima et les points singuliers de chacune de ces lignes à l'intérieur du carré fondamental. Finalement, pour simplifier le calcul, nous supposerons que la courbure y reste finie; c'est-à-dire que si ρ est la grandeur du rayon de courbure en un point quelconque d'une ligne de discontinuité de $F(x, y)$, il existe une constante positive ρ_0 qui vérifie l'inégalité

$$\rho > \rho_0.$$

2. Désignons par \mathcal{L} un arc de courbe tel que la valeur absolue du coefficient angulaire de la tangente soit, en chacun de ses points, plus petite ou égale à 1; désignons par \mathcal{L}' un arc tel que cette valeur soit en tout point supérieure à 1.

En vertu des hypothèses faites sur les lignes de discontinuité de $F(x, y)$, il est clair que l'on peut partager chacune d'elles en un nombre fini d'arcs \mathcal{L} et d'arcs \mathcal{L}' .

Circonscrivons à l'un des arcs \mathcal{L} ainsi déterminés une ligne brisée, et supposons que le nombre des côtés de cette ligne, Q , soit fonction de l'indice de sommation R .

Désignons, pour cette raison, ce contour par \mathcal{L}_R , et par \mathcal{O}_R la région comprise entre \mathcal{L}_R et \mathcal{L} .

En vertu du théorème suivant, on pourra, dans toutes les propositions sur la convergence uniforme de $F_{C_R}(x, y)$ remplacer \mathcal{L} par une ligne brisée \mathcal{L}_R convenablement choisie.

THÉORÈME II. — On peut déterminer \mathcal{L}_R de façon que le nombre de ses côtés Q tende vers l'infini avec l'indice R , cependant que le quotient

$$\frac{Q}{R}$$

ainsi que les intégrales

$$\mathfrak{D}_R(x, y) = \iint_{(Q_R)} F(\alpha, \beta) \left[\sum_{(C_R)} e^{im(\alpha-x)} e^{in(\beta-y)} \right] dx d\beta,$$

$$\mathfrak{E}_R(x, y) = \iint_{(Q_R)} F(\alpha, \beta) \left[\iint_{(C_R)} e^{im(\alpha-x)} e^{in(\beta-y)} dm dn \right] dx d\beta$$

tendent uniformément vers zéro dans tout le plan xy lorsque R tend vers l'infini.

Démonstration. — Soient x_1 et x_2 les abscisses des extrémités de l'arc \mathcal{L} ($0 < x_2 - x_1 < 2\pi$). Divisons l'intervalle (x_1, x_2) en $\frac{Q}{2}$ sous-intervalles égaux. Soient (x_{k-1}, x_k) l'un d'eux; A_{k-1} et A_k les points de l'arc \mathcal{L} d'abscisses x_{k-1} et x_k ; t_{k-1} et t_k les tangentes à \mathcal{L} en ces points; S'_k et S_k les points d'intersection des droites t_{k-1} et t_k avec la droite d'équation $x = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$.

Le contour \mathcal{L}_R que nous choisirons a pour sommets les points $S_{k-1}, S'_k, S_k, S'_{k+1}, \dots$; il est formé de $\frac{Q}{2}$ segments tels que $S_k S'_{k+1}$ appartenant à $\frac{Q}{2}$ tangentes t_k , et de $\frac{Q}{2}$ segments tels que $S'_k S_k$ parallèles à l'axe des y . L'angle φ de t_k avec l'axe des x étant compris entre -45° et $+45^\circ$, on a

$$\cos \varphi > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On en déduit, si l'on désigne par Σ_1 la longueur de l'intervalle (x_{k-1}, x_k) :

$$S_k A_k = \frac{\Sigma_1}{2 \cos \varphi} < \frac{\Sigma_1}{\sqrt{2}}.$$

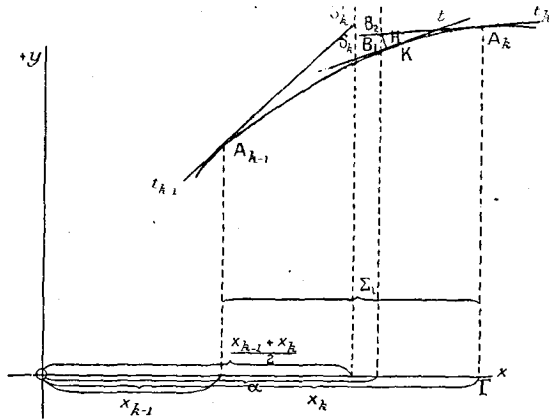
Ceci posé, α désignant une valeur quelconque de l'intervalle $(x_k - \frac{\Sigma_1}{2}, x_k)$, appelons B_1 et B_2 les points de \mathcal{L} et de t_k d'abscisse α ; β_1 et β_2 leurs ordonnées (fig. 8). Menons la tangente t à \mathcal{L} en B_1 ;

puis élevons la perpendiculaire à t_k au point B_2 ; soient H et K ses points d'intersection avec t et ρ . On a évidemment

$$B_2 H < B_2 K.$$

Si Σ_1 est suffisamment petit, les tangentes t et t_k sont très voisines, et l'on peut supposer que le triangle $B_2 B_1 H$ est rectangle en H .

Fig. 8.



Comme on a

$$B_1 B_2 H = |\varphi|,$$

il vient

$$B_1 B_2 = |\beta_2 - \beta_1| = \frac{B_2 H}{\cos \varphi} < B_2 K \cdot \sqrt{2}.$$

Si $\eta = h(\xi)$ est l'équation de ρ rapportée à t_k comme axe des ξ et à A_k comme origine, on peut écrire, d'après Mac-Laurin :

$$B_2 K = \frac{(B_2 A_k)^2}{2} h''(\xi_1) \quad (0 < \xi_1 < B_2 A_k);$$

$\rho(\xi)$ désignant le rayon de courbure, on a

$$\rho(\xi_1) = \frac{[1 + h'(\xi_1)^2]^{\frac{3}{2}}}{h''(\xi_1)} \sim \frac{1}{h''(\xi_1)},$$

d'où

$$B_2 K \sim \frac{(B_2 A_k)^2}{2\rho(\xi_1)} < \frac{(S_k A_k)^2}{2\rho_0} < \frac{\Sigma_1^2}{4\rho_0}$$

et

$$(1) \quad |\beta_2 - \beta_1| < \frac{\Sigma_1^2 \sqrt{2}}{4\rho_0}.$$

Retournons aux intégrales \mathfrak{J}_R et \mathfrak{J}_R . En prenant le point (x, y) comme origine, et en effectuant la sommation par rapport à m , on trouve, en utilisant la notation du Chapitre I :

$$\mathfrak{J}_R(x, y) = \int \int_{(\mathbb{D}_R)} f(\alpha, \beta) \left[\sum_n^{N_2 \dots N_1} \frac{e^{i[\Phi_1(m) - \frac{1}{2}]\alpha} - e^{i[\Phi_2(m) - \frac{1}{2}]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} e^{in\beta} \right] d\alpha d\beta.$$

Semblablement, en effectuant l'intégration, par rapport à n , on obtient pour $\mathfrak{J}_R(x, y)$ l'expression

$$\mathfrak{J}_R(x, y) = \int \int_{(\mathbb{D}_R)} f(\alpha, \beta) \left[\int_{N_2}^{N_1} \frac{e^{i\varphi_1(n)\alpha} - e^{i\varphi_2(n)\alpha}}{i\alpha} e^{in\beta} dn \right] d\alpha d\beta.$$

Intégrons par rapport à β ; en vertu de l'inégalité (1) il vient

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta \right| < H \frac{\Sigma_1^2 \sqrt{2}}{4\rho_0},$$

où H désigne la borne supérieure de $|f(x, y)|$.

Pour intégrer par rapport à α , nous distinguerons deux cas :

Premier cas. — x_1 et x_2 ne sont pas nuls et ont le même signe.

On trouve immédiatement

$$|\mathfrak{J}_R| < 2(N_1 - N_2) \left| \int_{x_2}^{x_1} \frac{d\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right| \frac{H \sqrt{2}}{4\rho_0} \Sigma_1^2$$

et

$$|\mathfrak{J}_R| < 2(N_1 - N_2) \left| \int_{x_2}^{x_1} \frac{d\alpha}{\alpha} \right| \frac{H \sqrt{2}}{4\rho_0} \Sigma_1^2.$$

En observant que, pour les valeurs de α comprises dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, on a

$$\left| \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right| < \frac{\pi}{|2\alpha|};$$

et en tenant compte des inégalités

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &< 2\lambda R, \\ |x_1 - x_2| &< \pi, \end{aligned}$$

on obtient

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\mathfrak{J}_R| \\ |\mathfrak{J}_R| \end{array} \right\} < \Lambda \left| \log \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \right| R \Sigma_1^2,$$

où l'on a posé

$$A = \frac{H \sqrt{2} \lambda \cdot \pi}{4 \rho_0}.$$

Deuxième cas. — L'une des deux valeurs x_1 ou x_2 est nulle. Il suffira de considérer le cas $x_2 = 0, x_1 > 0$, auquel le cas $x_2 < 0, x_1 = 0$ se ramène par la substitution $\alpha = -\alpha'$.

Les expressions

$$\left| \frac{e^{i\varphi_1(n)\alpha} - e^{i\varphi_2(n)\alpha}}{\alpha} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{e^{i\left[\Phi_1(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha} - e^{i\left[\Phi_2(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} \right|$$

ont maximales pour $\alpha = 0$. En appliquant la règle de l'Hospital, on voit sans peine que, pour cette valeur de α , elles sont inférieures à $2\lambda R$.

Dès lors, si C est un nombre compris entre 0 et x_1 , on a

$$\sum_n^{N_2 \dots N_1} \left| \int_0^C \frac{e^{i\left[\Phi_1(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha} - e^{i\left[\Phi_2(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} dx \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta \right| < (N_1 - N_2) C \cdot 2\lambda R \frac{\Sigma_1^2 \sqrt{2} H}{4\rho_0} < B \cdot R^2 C \Sigma_1^2;$$

si l'on pose

$$B = \frac{\lambda^2 \sqrt{2} H}{\rho_0},$$

C et x_1 ayant le même signe, on a, en vertu de l'inégalité (2),

$$\sum_n^{N_2 \dots N_1} \left| \int_C^{x_1} \frac{e^{i\left[\Phi_1(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha} - e^{i\left[\Phi_2(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} dx \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta \right| < A \left| \log \left(\frac{x_1}{C} \right) \right| R \Sigma_1^2;$$

d'où, en définitive,

$$(3) \quad |\mathfrak{J}_R| < B \cdot R^2 C \Sigma_1^2 + A \log \left(\frac{x_1}{C} \right) R \Sigma_1^2.$$

On établirait semblablement

$$(3') \quad |\mathfrak{J}_C| < B \cdot R^2 C \Sigma_1^2 + A \log \left(\frac{x_1}{C} \right) R \Sigma_1^2.$$

On peut choisir $c = \frac{1}{R}$, cette valeur étant certainement comprise entre 0 et x_1 dès que R est suffisamment grand.

Si l'on choisit, en outre,

$$\Sigma_1 = \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}},$$

les membres de droite des inégalités (3) et (3') qui prennent alors la valeur

$$\frac{B}{R^{\frac{1}{3}}} + A \frac{\log(x_1 R)}{R^{\frac{1}{3}}} < \frac{B}{R^{\frac{1}{3}}} + A \frac{\log \pi R}{R^{\frac{1}{3}}}$$

tendent momentanément vers zéro lorsque R tend vers l'infini. C'est *a fortiori* le cas pour le second membre de (2).

De plus, pour ce choix de Σ_1 , il vient

$$\frac{Q}{R} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{\Sigma_1 R} < \frac{2\pi}{R^{\frac{1}{3}}},$$

d'où

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{Q}{R} = 0.$$

Le théorème est, par suite, démontré dans les deux cas considérés. Il l'est d'ailleurs aussi dans le cas où x_1 et x_2 sont de signes contraires, car il suffit de diviser l'intervalle (x_2, x_1) en deux sous-intervalles $(x_2, 0)$ et $(0, x_1)$, pour être ramené au deuxième cas.

THÉORÈME III. — *A tout arc \mathcal{L}' on peut circonscrire une ligne \mathcal{L}'_R telle que le nombre Q' de ses côtés tende vers l'infini, cependant que le quotient*

$$\frac{Q'}{R}$$

ainsi que les intégrales

$$\mathcal{S}'_R(x, y) = \int \int_{(\mathbb{D}_R)} F(\alpha, \beta) \left[\sum_{(C_R)} e^{im(\alpha-x)} e^{in(\beta-y)} \right] dx d\beta,$$

$$\mathcal{H}'_R(x, y) = \int \int_{(\mathbb{D}_R)} F(\alpha, \beta) \left[\int \int_{(C_R)} e^{im(\alpha-x)} e^{in(\beta-y)} dm dn \right] dx d\beta$$

tendent uniformément vers zéro lorsque R tend vers l'infini.

Démonstration. — Si l'on permute les axes ox et oy entre eux, ainsi que les axes om et on , l'arc \mathcal{L}' devient un arc \mathcal{L} et l'on est ramené au cas traité dans le théorème II.

Remarquons d'ailleurs que les changements de variables effectués

n'ont aucune influence sur la démonstration : les hypothèses faites sur $F(x, y)$ et sur la courbe C_n étant indépendantes du système de coordonnées.

3. Traçons dans le carré des périodes le réseau des lignes de discontinuité de $f(x, y)$ et partageons chacune d'elles en un nombre fini d'arcs ϱ et d'arcs ϱ' .

Soit K un rectangle ayant pour centre l'origine et dont les côtés parallèles aux axes tendent vers zéro lorsque R tend vers l'infini. Nous évaluerons par la suite les dimensions de ce rectangle. Convenons de désigner par $2\Sigma'$ la longueur du côté parallèle à l'axe ox , et par $2\Sigma''$ la longueur du côté parallèle à l'axe oy .

Soit \mathcal{Q} la partie du carré des périodes extérieure à K .

On peut évidemment partager la région D tout entière en un nombre fini de quadrilatères mixtilignes tels qu'à l'intérieur de chacun d'eux $f(x, y)$ soit continue. De plus, A, B, C et D étant les sommets de l'un deux, on peut toujours les choisir de façon que le quadrilatère considéré appartienne à l'une des deux catégories suivantes :

Première catégorie. — AB est un arc ϱ d'une ligne de discontinuité de $f(x, y)$; les côtés AD et BC sont parallèles à l'axe oy , et le côté CD est une droite dont le coefficient angulaire est, en valeur absolue, inférieur à 1.

Deuxième catégorie. — AB est un arc ϱ' d'une ligne de discontinuité de f ; AD et BC sont parallèles à l'axe ox ; CD est un segment de droite de coefficient angulaire absolument supérieur à 1.

q désignant un quadrilatère de la première catégorie, q' un quadrilatère de la seconde, tous deux situés entièrement dans la région \mathcal{Q} , les théorèmes IV et V montrent que, si l'on détermine K convenablement, les intégrales suivantes

$$s_q(0, 0) = \frac{1}{\pi^2} \int \int_{(q)} f(\alpha, \beta) \theta_{C_n}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta,$$

$$r_q(0, 0) = \frac{1}{\pi^2} \int \int_{(q)} f(\alpha, \beta) \Xi_{C_n}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta,$$

$$s_{q'}(0, 0) = \frac{1}{\pi^2} \int \int_{(q')} f(\alpha, \beta) \theta_{C_n}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta,$$

$$r_{q'}(0, 0) = \frac{1}{\pi^2} \int \int_{(q')} f(\alpha, \beta) \Xi_{C_n}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

sont négligeables pour de grandes valeurs de R .

Pour les démontrer, nous nous servirons de l'intégration par parties dont l'application suppose que les dérivées partielles $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ sont continues à l'intérieur de q et de q' . Il peut se faire que ces conditions ne soient pas réalisées : par exemple que $\frac{\partial F}{\partial x}$ admette des lignes de discontinuité à l'intérieur d'un des domaines d'intégration considérés.

Soit $y = \psi_i(x)$ l'équation d'une de ces lignes. Supposons qu'elle traverse q , et désignons par δ_i le domaine de q limité par les lignes

$$\begin{aligned} y &= \psi_i(x) + \Sigma & (\Sigma \text{ positif et petit}), \\ y &= \psi_i(x) - \Sigma \end{aligned}$$

et par \mathfrak{S} l'ensemble de tous les domaines δ_i .

Les points de discontinuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ formant un ensemble de mesure nulle, on pourra toujours, quelque petit que soit Σ , déterminer une fonction $\varphi(x, y)$, admettant la même borne supérieure H que $f(x, y)$, et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1° En tout point de q extérieur à \mathfrak{S} on a

$$\varphi(x, y) = f(x, y);$$

2° En tout point de q , la fonction φ est continue ainsi que sa dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Or, de l'inégalité

$$|\theta_{c_n}(z, \beta)| < 4\lambda^2 R^2,$$

on en déduit

$$\left| \begin{aligned} & \int \int_{(\mathfrak{S})} f(x, \beta) \theta_{c_n}(x, \beta) dx d\beta \\ & \int \int_{(\mathfrak{S})} \varphi(x, \beta) \theta_{c_n}(x, \beta) dx d\beta \end{aligned} \right\} < 4H\lambda^2 R^2 s,$$

où s désigne la surface de \mathfrak{S} .

Si, à toute valeur de R , on fait correspondre une valeur de Σ telle que le produit $R^2 s$ tende momentanément vers zéro lorsque R tend vers l'infini, on pourra, sans changer la limite de s_q , remplacer sous le signe d'intégration $f(x, \beta)$ par $\varphi(x, \beta)$. Nous supposons donc par la suite que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue à l'intérieur de q ; semblablement, on jus-

tifierait l'hypothèse de la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ et de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, ce qui légitime l'intégration par parties. Ce raisonnement s'applique évidemment aussi à r_q , s_q , et r_q .

Ceci établi, nous pouvons passer à la démonstration des théorèmes IV et V.

THÉORÈME IV. — *On peut déterminer Σ' et Σ'' de façon que les intégrales $s_q(0, 0)$ et $r_q(0, 0)$ tendent uniformément vers zéro, quel que soit le point pris pour origine, lorsque R tend vers l'infini.*

Démonstration. — R ayant une valeur déterminée, circoncrivons à l'arc AB de q la ligne brisée ξ_R décrite plus haut. On supposera, ce qui est toujours possible, l'arc ξ choisi de façon qu'il ne possède, les extrémités exceptées, pas de point d'inflexion. Le domaine \mathbb{D}_R est alors situé entièrement à l'intérieur ou entièrement à l'extérieur de q . Suivant que l'un ou l'autre cas se présente, on désignera par q_R le domaine obtenu soit en retranchant \mathbb{D}_R de q , soit en ajoutant \mathbb{D}_R à q .

Considérons maintenant la fonction $\chi(x, y)$ définie comme suit :

1° En tout point de q extérieur à \mathbb{D}_R on a

$$\chi(x, y) = f(x, y);$$

2° A l'intérieur de \mathbb{D}_R , (x, y) prend des valeurs telles qu'elle admet ξ_R et non ξ comme ligne de discontinuité ;

3° $\chi(x, y)$ vérifie toutes les hypothèses faites au début de ce Chapitre sur $f(x, y)$, ainsi que l'inégalité $\chi(x, y) < H$.

Posons :

$$s_{q_R}(0, 0) = \frac{1}{\pi^2} \int \int_{(q_R)} \chi(\alpha, \beta) \theta_{C_R}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta,$$

$$r_{q_R}(0, 0) = \frac{1}{\pi^2} \int \int_{(q_R)} \chi(\alpha, \beta) \mathfrak{D}_{C_R}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Si l'on choisit ξ_R de façon que la projection Σ_1 d'un des côtés S_k , S_{k+1} de ce contour ait pour longueur $\frac{1}{R^3}$, on voit, en vertu du théorème II, que les différences

$$s_{q_R} - s_q \quad \text{et} \quad r_{q_R} - r_q$$

tendent uniformément vers zéro lorsque R tend vers l'infini. Pour

démontrer le théorème, il suffit donc de faire voir qu'on a uniformément

$$\lim s_{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{q_n} = 0.$$

On peut choisir les quadrilatères q de façon que, l'un quelconque d'entre eux étant donné, les coordonnées α et β de tous ses points satisfassent à l'un des quatre systèmes d'inégalités suivants :

$$\begin{aligned} \alpha &> \Sigma', \\ \alpha &< -\Sigma', \\ |\alpha| &< \Sigma', & \beta > \Sigma'', \\ |\alpha| &< \Sigma', & \beta < -\Sigma''. \end{aligned}$$

Il suffira de distinguer deux cas :

Premier cas : $\alpha > \Sigma'$.

(Le cas $\alpha < -\Sigma'$ se ramène à celui-ci par la substitution $\alpha' = -\alpha$.)

Partons de la première des expressions données pour θ_{c_n} et pour \mathfrak{S}_{c_n} , et écrivons :

$$\begin{aligned} s_{q_n}(0, 0) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_n^{N_2 \dots N_1} \int \int_{(q_n)} \chi(\alpha, \beta) e^{in\beta} \frac{e^{i[\Phi_1(n) - \frac{1}{2}]\alpha} - e^{i[\Phi_2(n) - \frac{1}{2}]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha d\beta, \\ r_{q_n}(0, 0) &= \frac{1}{\pi^2} \int_{N_2}^{N_1} dn \int \int_{(q_n)} \chi(\alpha, \beta) e^{in\beta} \frac{e^{i\varphi_1(n)\alpha} - e^{i\varphi_2(n)\alpha}}{i\alpha} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Les évaluations de ces deux intégrales étant identiques, nous nous bornerons à faire le calcul pour s_{q_n} .

Soient S_k d'abscisse α_k , et S_{k+1} d'abscisse α_{k+1} , deux sommets consécutifs du contour \mathfrak{L}_n , tels que l'on ait

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = \Sigma_1.$$

Soient

$$\beta = a_k \alpha + b_k$$

l'équation de la droite $S_k S_{k+1}$, et

$$\beta = a \alpha + b$$

l'équation du côté CD.

Si l'on pose

$$\frac{e^{i[\Phi_1(n) - \frac{1}{2}]\alpha} - e^{i[\Phi_2(n) - \frac{1}{2}]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} = p(\alpha)$$

et

$$i_k^n = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} p(x) dx \int_{a\alpha+b}^{\alpha_k\alpha+b_k} \chi(x, \beta) e^{in\beta} d\beta,$$

on a

$$s_{q_n}(0, 0) = \frac{1}{\pi^2} \sum_k^{1 \dots \frac{Q}{2}} \sum_n^{N_2 \dots N_1} i_k^n;$$

$\chi(x, \beta)$ étant continue dans l'intervalle d'intégration, on peut intégrer par parties par rapport à β . Il vient

$$i_k^n = h_k^n - g_k^n,$$

où l'on a posé

$$h_k^n = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{p(x)}{in} [e^{in(\alpha_k\alpha+b_k)} \chi(x, \alpha_k\alpha+b_k) - e^{in(\alpha\alpha+b)} \chi(x, \alpha\alpha+b)] dx,$$

$$g_k^n = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} p(x) dx \int_{a\alpha+b}^{\alpha_k\alpha+b_k} \frac{\partial \chi(x, \beta)}{\partial \beta} \frac{e^{in\beta}}{in} d\beta.$$

a. *Évaluations de $|h_k^n|$ et de $\sum_n |h_k^n|$.* — Remplaçons dans l'expression de $p(x)$, $\Phi_1(n)$ par $\varphi_1(n) - \omega_1(n)$, et $\Phi_2(n)$ par

$$\varphi_2(n) - \omega_2(n);$$

$\omega_1(n)$ et $\omega_2(n)$ étant compris entre -1 et 0 [voir Chap. I, 4].

$\chi(x, \beta)$ étant à variation bornée, il existe deux fonctions croissantes $J(x)$ et $K(x)$, inférieures en valeur absolue à $G+H$, et telles que l'on ait

$$\chi(x, \alpha_k\alpha+b_k) = \delta(x) - K(x).$$

Si l'on écrit

$$\chi(x, \alpha_k\alpha+b_k) = G+H - K(x) - [G+H - \delta(x)],$$

les fonctions $G+H - K(x)$, et $G+H - \delta(x)$ sont positives et croissantes.

Il en est de même des fonctions

$$\frac{\cos \left[\omega_1(n) + \frac{1}{2} \right] \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

et

$$\frac{\left| \sin \left[\omega_1(n) + \frac{1}{2} \right] \alpha \right|}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

pour

$$0 < \alpha \leq \pi,$$

ce qu'on vérifie aisément en remarquant que $\omega_1(n) + \frac{1}{2}$ est compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$.

On voit, par conséquent, que la fonction

$$\frac{e^{-i \left[\omega_1(n) + \frac{1}{2} \right] \alpha} \chi(\alpha, a_k \alpha + b_k)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

peut être considérée comme un agrégat de quatre fonctions positives décroissantes.

Dès lors, on trouve aisément, en appliquant le second théorème de la moyenne :

$$\left| \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{e^{i \left[\varphi_1(n) - \omega_1(n) - \frac{1}{2} \right] \alpha} e^{in(a_k \alpha + b_k)} \chi(\alpha, a_k \alpha + b_k) d\alpha}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} \right| < \frac{4(G + H)}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} \frac{1}{|\varphi_1(n) + na_k|}.$$

On obtient des inégalités analogues si l'on remplace : soit φ_1 par φ_2 et ω_1 par ω_2 ; soit a_k par a et b_k par b ; soit enfin si l'on effectue ces substitutions simultanément.

En sommant les inégalités obtenues, il vient

$$(1) \quad \sin \frac{\alpha_k}{2} |h_k^n| < 4(G + H) \left[\frac{1}{|n| \cdot |\varphi_1(n) + na_k|} + \frac{1}{|n| \cdot |\varphi_2(n) + na_k|} + \frac{1}{|n| \cdot |\varphi_1(n) + na|} + \frac{1}{|n| \cdot |\varphi_2(n) + na|} \right].$$

Cette inégalité n'a plus de sens pour

$$\varphi_1(n) + na_k = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_2(n) + na = 0.$$

Il est aisé dans ce cas d'en établir une autre.

En effet, soient n_1 et n_2 les racines de $\varphi(n) + na_k = 0$; n'_1 et n'_2 les racines de $\varphi(n) + na = 0$.

Si n est voisin de ces quatre valeurs, on a sensiblement

$$|n| > \frac{R}{\sqrt{2}} \quad [\text{voir Chap. I, 5}],$$

et l'on trouve par suite, sans peine, en observant en outre que $|\rho(x)|$ est plus petit que $\frac{1}{\sin \frac{\alpha_k}{2}}$:

$$\sin \frac{\alpha_k}{2} |h_k^n| < \frac{2\sqrt{2}(G+H)}{R}.$$

Dès lors, si n appartient à l'un des intervalles

$$(n_1 - 2, n_1 + 2), \quad (n_2 - 2, n_2 + 2), \quad (n'_1 - 2, n'_1 + 2), \quad (n'_2 - 2, n'_2 + 2),$$

il existe une constante $h = 2\sqrt{2}(G+H)$, telle que l'on ait

$$(2) \quad \sin \frac{\alpha_k}{2} |h_k^n| < \frac{h}{R}.$$

Les hypothèses du théorème du premier Chapitre sont réalisées.

On pourra, par suite, l'appliquer à la somme des inégalités (1) et (2). On obtient

$$\sin \frac{\alpha_k}{2} \sum_n^{N_2 \dots N_1} |h_k^n| < \frac{k_1 \text{Log} R}{R} \quad [k = 8(G+H)]$$

ou

$$(a) \quad \sum_n^{N_2 \dots N_1} |h_k^n| < \frac{k_1}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} \frac{\text{Log} R}{R}.$$

b. *Évaluations de $|g_k^n|$ et de $\sum |g_k^n|$.* — Si l'on désigne par $q^n(j)$ l'intégrale

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{e^{i\left[\varphi_j(n) - \omega_j(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha \int_{a\alpha+b}^{a_1\alpha+b_k} \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \frac{e^{in\beta}}{n} d\beta,$$

on a

$$g_k^n = q^n(2) - q^n(1).$$

En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}
 q^n(j) = & \frac{1}{n} \left\{ \left(\int_{\alpha_k}^{\alpha} \frac{e^{i\varphi_j(n)t}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right) \left[e^{-i\left[\omega_j(n) + \frac{1}{2}\right]\alpha} \int_{\alpha\alpha+b}^{\alpha_1\alpha+b_k} \frac{\partial \chi}{\partial \beta} e^{in\beta} d\beta \right] \right\}_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \\
 & - \frac{1}{n} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \int_{\alpha_k}^{\alpha} \frac{e^{i\varphi_j(n)t}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\
 & \times \left\{ -i \left[\omega_j(n) + \frac{1}{2} \right] e^{-i\left[\omega_j(n) + \frac{1}{2}\right]\alpha} \int_{\alpha\alpha+b}^{\alpha_1\alpha+b_k} \frac{\partial \chi}{\partial \beta} e^{in\beta} d\beta \right. \\
 & \quad \left. + e^{-i\left[\omega_j(n) + \frac{1}{2}\right]\alpha} \right. \\
 & \quad \times \left[\frac{\partial \chi(\alpha, \alpha_1\alpha + b_k)}{\partial \beta} e^{in(\alpha_1\alpha + b_k)} \alpha_k \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial \chi(\alpha, \alpha\alpha + b)}{\partial \beta} e^{in(\alpha\alpha + b)} \alpha + \int_{\alpha\alpha+b}^{\alpha_1\alpha+b_k} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \beta \partial x} e^{in\beta} dx \right] \left. \right\} dx.
 \end{aligned}$$

En appliquant par exemple le second théorème de la moyenne, on trouve

$$\left| \int_{\alpha_k}^{\alpha} \frac{e^{i\varphi_j(n)t}}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| < \frac{1}{|\varphi_j(n)|} \frac{1}{\sin \frac{\alpha_k}{2}}.$$

En tenant compte en outre des inégalités

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \right| d\beta & < G, \\
 \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha \partial \beta} \right| d\alpha d\beta & < 2G,
 \end{aligned}$$

on trouve facilement

$$\sin \frac{\alpha_k}{2} |q^n(j)| < \frac{1}{|n|} \frac{1}{|\varphi_j(n)|} 7G,$$

d'où

$$(3) \quad \sin \frac{\alpha_k}{2} |g_k^n| < \left[\frac{1}{|n|} \frac{1}{|\varphi_1(n)|} + \frac{1}{|n|} \frac{1}{|\varphi_2(n)|} \right] 7G.$$

Nous établirons une autre inégalité pour les valeurs de n voisines des racines de $\varphi(n)$.

Soient n_3 et n_4 ces racines.

Si n appartient à l'un des intervalles $(n_3 - 2, n_3 + 2)$, $(n_4 - 2, n_4 + 2)$, on a sensiblement

$$|n| > \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

En tenant compte de l'inégalité

$$|p(\alpha)| < \frac{1}{\sin \frac{\alpha_k}{2}},$$

on voit, en se reportant à l'expression de g_k^n , que l'on a

$$\sin \frac{\alpha_k}{2} |g_k^n| < \frac{G}{|n|},$$

d'où l'on tire, pour les valeurs de n considérées,

$$(4) \quad \sin \frac{\alpha_k}{2} |g_k^n| < \frac{G\sqrt{2}}{R}.$$

En appliquant le théorème du Chapitre I à la somme des inégalités (3) et (4) (on a ici $h = G\sqrt{2}$, $a = 0$), il vient

$$\sin \frac{\alpha_k}{2} \sum_n^{N_2 \dots N_1} |g_k^n| < k_2 \frac{\text{Log } R}{R} \quad \text{avec } k_2 = k_1 G,$$

d'où

$$(b) \quad \sum_n^{N_2 \dots N_1} |g_k^n| < \frac{k_2}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} \frac{\text{Log } R}{R}.$$

c. *Évaluations de i_n^{-1} , i_n^0 , i_n^1 .* — j désignant indifféremment l'un des indices 1 ou 2, considérons l'expression

$$A_j^n = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{e^{i\left[\Phi_j(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} dz \int_{a\alpha+b}^{a_k\alpha+b_k} \chi(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$A_j^n = \left[\frac{e^{i\left[\Phi_j(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha}}{i\left[\Phi_j(n) - \frac{1}{2}\right]} \frac{1}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} \int_{a\alpha+b}^{a_k\alpha+b_k} \chi(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta \right]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \\ - \frac{1}{\Phi_j(n) - \frac{1}{2}} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} e^{i\left[\Phi_j(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha} \\ \times \left[-\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \int_{a\alpha+b}^{a_k\alpha+b_k} \chi(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta + \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{a\alpha+b}^{a_k\alpha+b_k} \chi(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta \right]$$

En vertu de l'inégalité $[\varphi_j(n)]^2 + n^2 \geq R^2$, on a approximativement, pour $-1 \leq n \leq +1$,

$$|\varphi_j(n)| \geq R$$

et, en négligeant $\omega_j(n) - \frac{1}{2}$ en regard de R ,

$$\left| \Phi_j(n) - \frac{1}{2} \right| \geq R.$$

En vertu des hypothèses faites sur $\frac{\delta_j}{\partial z}$, on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \int_{a\alpha+b}^{\alpha_k z + b_k} \chi(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta \right| < 3G.$$

Comme, en outre, on a choisi $\alpha_{k+1} - \alpha_k = \Sigma_1$, on déduit des inégalités précédentes :

$$|\Lambda_j^n| < \frac{\pi H}{\sin \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{R} + \frac{\Sigma_1}{R} \left[\frac{\pi H}{2 \sin^2 \frac{\alpha_k}{2}} + \frac{3G}{2 \sin \frac{\alpha_k}{2}} \right].$$

En retournant à l'expression de i_k^n , on voit qu'on a

$$i_k^n = \Lambda_1^n - \Lambda_2^n.$$

L'inégalité établie précédemment pour Λ_j^n étant valable pour $n = -1, 0, +1$, on peut écrire

$$(c) \quad |i_k^{-1}| + |i_k^0| + |i_k^1| < \frac{k_3}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} \frac{1}{R} + \frac{k_4}{\sin^2 \frac{\alpha_k}{2}} \frac{\Sigma_1}{R} + \frac{k_5}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} \frac{\Sigma_1}{R},$$

si l'on pose

$$k_3 = 6\pi H, \quad k_4 = 3\pi H, \quad k_5 = 9G.$$

d. Or, on avait posé

$$i_k^n = h_k^n - g_k^n.$$

On en déduit l'inégalité

$$\left| \sum_n^{N_2 \dots N_1} i_k^n \right| < \left[\sum_n^{N_2 \dots N_1} (|h_k^n| + |g_k^n|) \right] + |i_k^{-1}| + |i_k^0| + |i_k^1|,$$

d'où, *a fortiori*, en vertu de (a), (b) et (c),

$$(d) \quad \left| \sum_n^{N_2 \dots N_1} i_k^n \right| < \frac{1}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} \frac{1}{R} \left[(k_1 + k_2) \text{Log } R + k_3 + \Sigma_1 \left(\frac{k_4}{\sin \frac{\alpha_0}{2}} + k_5 \right) \right],$$

où α_0 désigne la plus petite des abscisses α_k .

e. *Sommation par rapport à k.* — D'après le premier théorème de la moyenne, il existe un nombre ξ_1 , compris entre α_k et α_{k+1} qui vérifie l'équation

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{d\xi}{\xi} = (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \frac{1}{\xi_1}.$$

On en tire

$$\frac{1}{\alpha_{k+1}} < \frac{1}{\xi_1} = \frac{1}{\alpha_{k+1} - \alpha_k} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{\Sigma_1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{d\xi}{\xi};$$

α_k étant compris entre 0 et π , on a

$$\frac{1}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} < \frac{\pi}{\alpha_k}.$$

Désignons par x_1 et x_2 les abscisses des extrémités de l'arc \mathcal{L} . Des deux dernières inégalités, on tire :

$$\sum_k^{0 \dots \frac{Q}{2}} \frac{1}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} < \pi \sum_k^{0 \dots \frac{Q}{2}} \frac{1}{\alpha_k} = \frac{\pi}{\alpha_0} + \pi \sum_k^{0 \dots \frac{Q}{2} - 1} \frac{1}{\alpha_{k+1}} < \frac{\pi}{x_1} + \frac{\pi}{\Sigma_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Par hypothèse, on a

$$\begin{aligned} \alpha_0 = x_1 &> \Sigma' \\ \alpha_2 &< \tau, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\sum_k^{0 \dots \frac{Q}{2}} \frac{1}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} < \frac{\pi}{\Sigma'} + \frac{\pi}{\Sigma_1} \text{Log} \frac{\pi}{\Sigma'}.$$

De cette inégalité et de l'inégalité (d) on déduit

$$\begin{aligned} |s_{q_R}| &= \left| \frac{1}{\pi^2} \sum_k^{0 \dots \frac{Q}{2}} \sum_n^{N_1 \dots N_1} i_k^n \right| \\ &< \frac{1}{\pi R} \left[\frac{1}{\Sigma'} + \frac{1}{\Sigma_1} \text{Log} \frac{\pi}{\Sigma'} \right] \left[(k_1 + k_2) \text{Log} R + k_3 + \Sigma_1 \left(\frac{k_4}{\sin \frac{\Sigma'}{2}} + k_5 \right) \right]. \end{aligned}$$

Remplaçons, dans le second membre de cette inégalité, $\frac{1}{\sin \frac{\Sigma'}{2}}$ par la quantité $\frac{\pi}{\Sigma'}$ qui lui est supérieure.

On voit que, pour que s_{q_R} converge uniformément vers zéro, il suffit que les expressions

$$\frac{\text{Log } R}{R^{\Sigma'}}, \quad \frac{\text{Log } \frac{\pi}{\Sigma'} \text{Log } R}{R \Sigma_1}, \quad \frac{\Sigma_1}{\Sigma'^2 R}, \quad \frac{\text{Log } \frac{\pi}{\Sigma'}}{R \Sigma'}$$

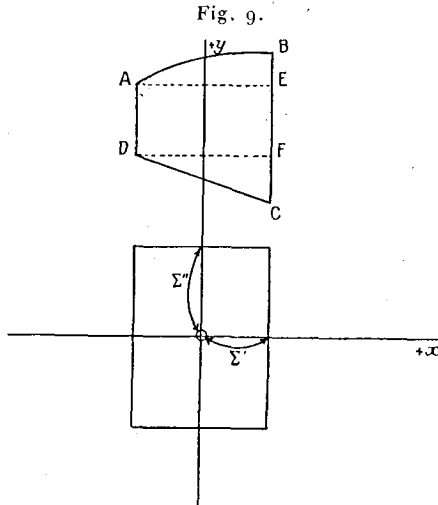
tendent monotonement vers zéro avec $\frac{1}{R}$.

Remarquons que ceci est réalisé si, Σ_1 ayant la valeur $\frac{1}{R^{\frac{1}{2}}}$, on choisit $\Sigma' = \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}}$. Nous conviendrons de désigner cette valeur de Σ' par Σ_2 . Comme nous allons le voir, ce choix de Σ' est aussi utilisable dans le second cas.

Deuxième cas : $|\alpha| \leq \Sigma', \beta > \Sigma''$.

(Le cas $|\alpha| \leq \Sigma', \beta < -\Sigma''$ se ramène à celui-ci par la substitution $\beta' = -\beta$.)

Au moyen de deux parallèles à l'axe des x , partageons q en trois polygones; à savoir : deux triangles, $t_1 = ABE$ et $t_2 = DCF$, et un rectangle, $r = A E F D$ (fig. 9).



On peut considérer le rectangle r comme un quadrilatère q' . Dès lors, l'évaluation de l'intégrale qui s'y rapporte, s_r , fait l'objet de la démonstration du théorème V.

Pour évaluer les intégrales s_{t_1} et s_{t_2} qui correspondent à t_1 et à t_2 , nous emploierons la deuxième forme de $\theta_{t_n}(\alpha, \beta)$, j désignant l'un des indices 1 ou 2, on a

$$s_{t_j} = \frac{1}{\pi^2} \int \int_{(t_j)} \chi(\alpha, \beta) \left[\sum_m^{M_2 \dots M_1} \frac{e^{i \left[\Psi_{1(m)} - \frac{1}{2} \right] \beta} - e^{i \left[\Psi_{2(m)} - \frac{1}{2} \right] \beta}}{2i \sin \frac{\beta}{2}} e^{im\alpha} \right] dx d\beta.$$

En vertu des hypothèses faites sur les coefficients angulaires de DC et des tangentes à l'arc AB, la surface de t_j est plus petite que celle d'un triangle de hauteur $2\Sigma'$ et de base $2\Sigma'$, c'est-à-dire plus petite que $2\Sigma'^2$.

Si l'on tient compte, en outre, des inégalités

$$\beta > \Sigma'', \quad M_1 - M_2 < 2\lambda R, \quad |\chi(\alpha, \beta)| < H,$$

on trouve

$$|s_{t_j}| < \frac{\Pi \cdot 2\lambda R}{2 \sin \frac{\Sigma''}{2}} 2\Sigma'^2 < \frac{2\pi H}{\Sigma''} \Sigma'^2 R.$$

De cette inégalité on déduit que, Σ' ayant la valeur Σ_2 , s_{t_j} converge uniformément vers zéro si l'on choisit

$$\Sigma'' = \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} = \Sigma_3.$$

Le théorème V montre que c'est aussi le cas pour l'intégrale s_r et achève de démontrer le théorème IV.

Nous conviendrons de désigner par K, le rectangle K spécial dont les dimensions sont

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \Sigma_2, \\ \Sigma'' &= \Sigma_3. \end{aligned}$$

THÉORÈME V. — *On peut déterminer les dimensions Σ' et Σ'' du rectangle K de façon que les intégrales $s_q(0,0)$ et $r_q(0,0)$ tendent vers zéro lorsque R tend vers l'infini, et ceci uniformément quel que soit le point pris pour origine.*

Démonstration. — Comme dans IV, on ne distinguera que deux cas :

Premier cas : $\beta > \Sigma''$. — Si l'on permute les axes x et y , ainsi

que les axes m et n entre eux, on voit que le quadrilatère q' devient un quadrilatère q . L'inégalité $\beta > \Sigma''$ devient $\alpha > \Sigma''$. On est par suite ramené au premier cas du théorème IV. On trouve, par conséquent, que s_q converge uniformément vers zéro si l'on choisit

$$\Sigma'' = \Sigma_2.$$

Remarquons que les ordonnées des points du rectangle r considéré dans le second cas du théorème IV, satisfaisant à l'inégalité $\beta > \Sigma_3$, vérifiant *a fortiori* l'inégalité $\beta > \Sigma_2$. En vertu de ce qui précède, on a donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} s_r = 0.$$

Deuxième cas : $|\beta| < \Sigma''$, $\alpha > \Sigma'$. — Au moyen de deux parallèles à l'axe ox , on ramène la surface de q' à celles de deux triangles t'_1, t'_2 , et à celle d'un rectangle r' . Si l'on permute les axes entre eux, t'_1 et t' deviennent des triangles analogues aux triangles t_1 et t_2 du second cas de IV. On trouve, par suite, semblablement, que $s_{t'_j}$ tend vers zéro si l'on choisit

$$\Sigma' = \Sigma_3.$$

Le rectangle r' peut être considéré comme un quadrilatère q .

Les abscisses de ses points vérifient l'inégalité $\alpha > \Sigma_3$, d'où, *a fortiori*, $\alpha > \Sigma_2$. En vertu du premier cas du théorème IV, on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} s_{r'} = 0.$$

Nous désignerons, pour abrégé, par K_2 le rectangle dont les dimensions sont

$$\Sigma' = \Sigma_3,$$

$$\Sigma'' = \Sigma_2.$$

Corollaire. — \mathcal{C}_{Σ_3} étant le cercle de centre (x, y) et de rayon $2\Sigma_3$, on a

$$\frac{1}{4\pi^2} \int \int_{(\mathcal{C}_{\Sigma_3})} f(\alpha, \beta) \theta_{C_R}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = F_{C_R}(x, y) + \mathfrak{S}_1,$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int \int_{(\mathcal{C}_{\Sigma_2})} f(\alpha, \beta) \mathfrak{S}_{C_R}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = F_{C_R}^1(x, y) + \mathfrak{S}_2,$$

\mathfrak{S}_1 et \mathfrak{S}_2 convergeant uniformément vers zéro en tous les points (x, y) du plan, lorsque R tend vers l'infini.

Démonstration. — Les rectangles K_1 et K_2 sont situés entièrement à l'intérieur de \mathfrak{K}_{Σ_3} . Par suite, si l'on partage la partie du carré des périodes extérieure à K_1 et K_2 en rectangles q et q' , ceux-ci seront extérieurs à K_1 et K_2 . D'après les théorèmes IV et V, les intégrales correspondantes s_q et $s_{q'}$ tendent uniformément vers zéro, ainsi que r_q et $r_{q'}$.

Remarquons que le corollaire subsiste si, au lieu de \mathfrak{K}_{Σ_3} , on considère un contour quelconque renfermant K_1 et K_2 , par exemple un carré ayant (x, y) pour centre, et dont les côtés, parallèles aux axes, ont pour longueur $2\Sigma_3$. (Nous désignerons, dans la suite, ce carré par K_{Σ_3} .)

THÉORÈME VI. — *La somme partielle $F_{C_n}(x, y)$ converge uniformément vers $F(x, y)$ dans un domaine \mathfrak{D} du plan, en tous les points duquel la condition de Lipschitz*

$$|\Delta F(x, y)| < C[|\Delta x| + |\Delta y|]$$

est réalisée (C désigne un nombre indépendant de x , de y et de R).

Pour les besoins de la démonstration, nous effectuerons deux évaluations préliminaires.

Première évaluation. — Considérons l'expression

$$\mathfrak{H} = \int_0^{\alpha_1} \left| \frac{e^{i\Phi_1(n)\alpha} - e^{i\Phi_2(n)\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} \right| dx,$$

où α_1 est une valeur quelconque de l'intervalle $(0, \pi)$.

On a

$$\mathfrak{H} < \pi \int_0^{\alpha_1} \left| \frac{e^{i\Phi_1(n)\alpha} - e^{i\Phi_2(n)\alpha}}{i\alpha} \right| dx.$$

La fonction $\left| \frac{e^{i\Phi_1(n)\alpha} - e^{i\Phi_2(n)\alpha}}{i\alpha} \right|$ atteint son plus grand maximum pour $\alpha = 0$. En appliquant la règle de l'Hospital, on voit qu'elle prend alors la valeur $|\Phi_1(n) - \Phi_2(n)|$ qui est, par hypothèse, inférieure à $2\lambda R$.

Ceci posé, écrivons

$$\int_0^{\alpha_1} \left| \frac{e^{i\Phi_1(n)\alpha} - e^{i\Phi_2(n)\alpha}}{i\alpha} \right| d\alpha = \left\{ \int_0^{\frac{1}{R}} + \int_{\frac{1}{R}}^{\alpha_1} \right\} \left| \frac{e^{i\Phi_1(n)\alpha} - e^{i\Phi_2(n)\alpha}}{i\alpha} \right| d\alpha,$$

on a

$$\int_0^{\frac{1}{R}} \left| \frac{e^{i\Phi_1(n)\alpha} - e^{i\Phi_2(n)\alpha}}{ix} \right| dx < 2\lambda R \frac{1}{R} = 2\lambda,$$

$$\int_{\frac{1}{R}}^{a_1} \left| \frac{e^{i\Phi_1(n)\alpha} - e^{i\Phi_2(n)\alpha}}{ix} \right| dx < \int_{\frac{1}{R}}^{a_1} \frac{1}{x} dx = \text{Log } a_1 + \text{Log } R < \text{Log } \pi + \text{Log } R$$

à partir d'un indice R suffisamment grand, $2\lambda + \text{Log } \pi$ est plus petit que $\text{Log } R$. De sorte qu'on peut écrire

$$|\mathcal{J}\mathcal{C}| < 2\pi \text{Log } R.$$

Cette inégalité est évidemment aussi valable si a_1 est une valeur quelconque de l'intervalle $(-\pi, 0)$.

On en déduit qu'on a

$$\int_{a_1}^{a_2} \left| \frac{e^{i\Phi_1(n)\alpha} - e^{i\Phi_2(n)\alpha}}{2i \sin \frac{x}{2}} \right| dx < 4\pi \text{Log } R$$

si a_1 et a_2 vérifient les inégalités $-\pi \leq a_1 \leq a_2 \leq +\pi$.

Deuxième évaluation. — Considérons la somme

$$S = \sum_n^{N_2 \dots N_1} \left| \frac{1}{n} \right|,$$

qui s'étend à toutes les valeurs entières de n , comprises entre N_2 et N_1 , $n = 0$ exceptée.

Pour toute valeur positive de n , on a

$$\frac{1}{n} < \int_{n-1}^n \frac{d\xi}{\xi},$$

d'où

$$\sum_n^{2 \dots N_1} \frac{1}{n} < \int_1^{N_1} \frac{d\xi}{\xi} = \text{Log } N_1 < \text{Log } \lambda R;$$

on établirait semblablement l'inégalité

$$\sum \left| \frac{1}{n} \right| < \text{Log } \lambda R;$$

on en tire

$$\sum_n^{N_2 \dots N_1} \left| \frac{1}{n} \right| < 2 \operatorname{Log} \lambda R + 2 = 2 \operatorname{Log} \lambda + 2 + 2 \operatorname{Log} R < 3 \log R.$$

Démonstration. — Nous supposons le point (x, y) pris comme origine.

On a donc

$$f(0, 0) = F(x, y).$$

Posons

$$f(\alpha, \beta) = f(0, 0) + \psi(\alpha, \beta).$$

Pour les valeurs de $|\alpha|$ et de $|\beta|$ telles que le point (α, β) est à l'intérieur de \mathcal{O} , la fonction $\psi(\alpha, \beta)$ satisfait à l'inégalité

$$(1) \quad |\psi(\alpha, \beta)| < C(|\alpha| + |\beta|),$$

de laquelle on déduit les deux suivantes :

$$(2) \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right| < C,$$

$$(3) \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right| < C.$$

F_{C_R} se compose de la somme des deux intégrales \mathfrak{A}_1 et \mathfrak{A}_2 données par les formules

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{mn}^{(C_R)} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(0, 0) e^{im\alpha} e^{in\beta} d\alpha d\beta,$$

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_n^{N_2 \dots N_1} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\alpha, \beta) \frac{e^{i\left[\Phi_1(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha} - e^{i\left[\Phi_2(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} e^{in\beta} d\alpha d\beta.$$

Pour $m \neq 0$, on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{im\alpha} d\alpha = 0,$$

et, pour $n \neq 0$,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\beta} d\beta = 0.$$

De sorte que la série double \mathfrak{A}_1 se réduit au terme $m = 0, n = 0$; \mathfrak{A}_1 a,

par suite, la valeur

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha, \beta) dx d\beta = f(\alpha, \beta) = F(x, y).$$

Il reste donc à démontrer que \mathfrak{J}_2 tend uniformément vers zéro lorsque R tend vers l'infini.

En vertu de la remarque du corollaire précédent, on a

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\Sigma_3}^{+\Sigma_3} \int_{-\Sigma_3}^{+\Sigma_3} \psi(\alpha, \beta) \sum_n \frac{e^{i[\Phi_1(n) - \frac{1}{2}]\alpha} - e^{i[\Phi_2(n) - \frac{1}{2}]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} e^{in\beta} dx d\beta + \mathfrak{S}$$

avec

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathfrak{S} = 0.$$

L'indice R étant suffisamment grand, le carré K_{Σ_3} est situé entièrement à l'intérieur de \mathcal{O} . La condition de Lipschitz est alors valable dans le champ d'intégration, et, par suite, la fonction $\psi(\alpha, \beta)$ y est continue.

On peut donc intégrer par parties. En tenant compte de (1) et (3), on trouve

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\Sigma_3}^{+\Sigma_3} \psi(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta \right| \\ &= \left| \left[\frac{\psi(\alpha, \beta) e^{in\beta}}{in} \right]_{-\Sigma_3}^{+\Sigma_3} - \int_{-\Sigma_3}^{+\Sigma_3} \frac{e^{in\beta}}{in} \frac{d\psi}{d\beta} d\beta \right| < 6C \frac{\Sigma_3}{|n|}. \end{aligned}$$

Pour $n = 0$, il vient

$$\left| \int_{-\Sigma_3}^{+\Sigma_3} \psi(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta \right| < C.4\Sigma_3^2.$$

On en tire, en tenant compte de la première évaluation préliminaire,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\Sigma_3}^{+\Sigma_3} \frac{e^{i[\Phi_1(n) - \frac{1}{2}]\alpha} - e^{i[\Phi_2(n) - \frac{1}{2}]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} dx \int_{-\Sigma_3}^{+\Sigma_3} \psi(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta \right| \\ & < \begin{cases} 6C \frac{\Sigma_3}{|n|} 4\pi \text{Log } R & (n \neq 0), \\ 4C \Sigma_3^2 4\pi \text{Log } R & (n = 0); \end{cases} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en vertu de la deuxième évaluation préliminaire,

$$|\beta_2| < \frac{18C}{\pi} (\text{Log } R)^2 \Sigma_3 + \frac{4C}{\pi} \text{Log } R \Sigma_3^2$$

et l'équation

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Sigma_3 (\text{Log } R)^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} (\text{Log } R)^2 = 0$$

entraîne uniformément

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \beta_2 = 0.$$

CHAPITRE III.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE FOURIER.

THÉORÈME VII. — x et y étant les coordonnées d'un point quelconque du plan, $F_{CR}(x, y)$ et $F_{CR}^1(x, y)$ convergent uniformément vers la même valeur lorsque R tend vers l'infini.

Démonstration. — Le point (x, y) étant pris pour origine, il faut démontrer que l'expression $f_{CR}(0, 0) - f_{CR}^1(0, 0)$ converge uniformément vers zéro. Partageons, à cet effet, le carré des périodes en quadrilatères q et q' , et l'intégrale $f_{CR} - f_{CR}^1$ en intégrales correspondantes $s_q - r_q, s_{q'} - r_{q'}$.

Nous nous bornerons à démontrer que les intégrales $s_q - r_q$ tendent vers zéro, car le calcul ne diffère, pour $s_{q'} - r_{q'}$, que par l'ordre des intégrations et des sommations.

Soient q_1 la portion de q située à l'intérieur de K_1 ; q_2 la portion de q située à l'extérieur de K_1 .

En vertu du théorème IV on a, uniformément,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} s_{q_2} = \lim_{R \rightarrow \infty} r_{q_2} = 0.$$

Il reste donc à démontrer qu'on a, semblablement,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (s_{q_1} - r_{q_1}) = 0.$$

Si l'on pose

$$g_n = \int \int_{(q_1)} f(\alpha, \beta) \frac{e^{i[\Phi_1(n) - \frac{1}{2}]\alpha} - e^{i[\Phi_2(n) - \frac{1}{2}]\alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} e^{in\beta} d\alpha d\beta,$$

$$h_n = \int \int_{(q_1)} f(\alpha, \beta) \frac{e^{i\varphi_1(n)\alpha} - e^{i\varphi_2(n)\alpha}}{i\alpha} e^{in\beta} d\alpha d\beta,$$

on peut écrire

$$s_{q_1} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_n^{N_2 \dots N_1} g_n,$$

$$r_{q_1} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{N_2}^{N_1} h_\xi d\xi = \frac{1}{4\pi^2} \sum_n^{N_2 \dots N_1} \int_n^{n+1} h_\xi d\xi$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2} \int_{N_2}^{N_2'} h_\xi d\xi - \frac{1}{4\pi^2} \int_{N_1'}^{N_1+1} h_\xi d\xi,$$

si l'on désigne par N_1' et N_2' les plus petits entiers supérieurs ou égaux à N_1 et N_2 ; les deux sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de n comprises entre N_1 et N_2 .

D'après la première formule de la moyenne, il existe une quantité θ_n comprise entre 0 et 1, et telle que l'on ait

$$\int_n^{n+1} h_\xi d\xi = h_n \cdot \theta_n = h_n + \int_n^{n+\theta_n} \frac{\partial h_\xi}{\partial \xi} d\xi.$$

Posons

$$i_n = g_n - h_n,$$

$$k_n = \int_n^{n+\theta_n} \frac{\partial h_\xi}{\partial \xi} d\xi = h_{n+\theta_n} - h_n.$$

On peut mettre $s_{q_1} - r_{q_1}$ sous la forme suivante :

$$s_{q_1} - r_{q_1} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_n^{N_2 \dots N_1} (i_n + k_n) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{N_2}^{N_2'} h_\xi d\xi - \frac{1}{4\pi^2} \int_{N_1'}^{N_1+1} h_\xi d\xi.$$

a. Évaluations de $|i_n|$, de $\sum_n^{N_2 \dots N_1} |i_n|$, de $\left| \int_{N_1'}^{N_2'} h_\xi d\xi \right|$ et de $\left| \int_{N_1'}^{N_1+1} h_\xi d\xi \right|$. — 1° Si l'on désigne par l_j^n l'intégrale

$$\int \int_{(q_1)} f(\alpha, \beta) \left[\frac{e^{i \left[\Phi_j(\alpha) - \frac{1}{2} \right] \alpha}}{2i \sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{e^{i \varphi_j(\alpha) \alpha}}{i \alpha} \right] e^{i n \beta} d\alpha d\beta,$$

on a

$$i_n = l_1^n - l_2^n.$$

Soient $\beta = \beta_1(\alpha)$ et $\beta = \beta_2(\alpha)$ les équations des côtés AB et CD du quadrilatère q_1 .

$f(\alpha, \beta)$ étant continue dans l'intervalle d'intégration, on a

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta = \left[\frac{f(\alpha, \beta)}{in} e^{in\beta} \right]_{\beta_1}^{\beta_2} - \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\partial f}{\partial \beta} \frac{e^{in\beta}}{in} d\beta;$$

d'où, en vertu des inégalités $|f(\alpha, \beta)| < H$, $\int_{\beta_1}^{\beta_2} \left| \frac{\partial f}{\partial \beta} \right| d\beta < G$,

$$(1) \quad \left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta \right| < \frac{2H + G}{|n|}.$$

Pour les valeurs $n = -1, 0, +1$, on utilisera l'inégalité

$$(2) \quad \left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(\alpha, \beta) e^{i\alpha\beta} d\beta \right| < H |\beta_2 - \beta_1| < 2H \Sigma_3.$$

D'autre part, on établit aisément, par exemple en développant

$$e^{-i\left[\frac{1}{2} + \omega_j m\right]\alpha}$$

suivant les puissances croissantes de α , l'existence d'une constante B qui, pour toutes les valeurs de α de l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, vérifie l'inégalité

$$(3) \quad \left| \frac{e^{i\left[\Phi_j(n) - \frac{1}{2}\right]\alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{e^{i\varphi_j(n)\alpha}}{\alpha} \right| = \left| e^{i\varphi_j(n)\alpha} \left[\frac{e^{-i\left[\frac{1}{2} + \omega_j m\right]\alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\alpha} \right] \right| < B.$$

Soient x_1 et x_2 les limites de l'intervalle d'intégration; q_1 étant situé à l'intérieur de K₁, on a

$$|x_1 - x_2| < 2 \Sigma_2.$$

Si l'on tient compte, en outre, des inégalités (1) et (3), on obtient

$$(1') \quad |I_j^n| < B \frac{2H + G}{|n|} 2 \Sigma_2.$$

Pour les valeurs $n = -1, 0, +1$, on trouve, en utilisant (3),

$$(2') \quad |I_j^n| < 4BH \Sigma_2 \Sigma_3 = \frac{4BH}{R}.$$

De l'inégalité (1') on tire

$$|i_n| < \frac{4B(2H + G)}{|n|} \Sigma_2;$$

d'où, d'après la deuxième évaluation préliminaire du théorème IV,

$$\sum_n^{N_2 \dots N_1} |i_n| < {}_{12}B(2H + G) \Sigma_2 \text{Log } R.$$

De l'inégalité (2') on déduit

$$\sum_n^{-1 \dots +1} |i_n| < \frac{24BG}{R}.$$

Si l'on a posé

$${}_{12}B(2H + G) = A_1, \quad 24BG = A_2,$$

on peut écrire, en additionnant,

$$\sum_n^{N_2 \dots N_1} |i_n| < A_1 \text{Log } R \cdot \Sigma_2 + \frac{A_2}{R},$$

d'où

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_n^{N_2 \dots N_1} |i_n| = 0,$$

2° Dans la première évaluation préliminaire du théorème VI, on avait établi l'inégalité

$$\int_{x_2}^{x_1} \left| \frac{e^{i\varphi_1(n)\alpha} - e^{i\varphi_2(n)\alpha}}{\alpha} \right| dx < 4 \text{Log } R.$$

Si l'on tient compte, en outre, de (1), on trouve

$$\left| \int_{N_2}^{N_2'} h_\xi d\xi \right| < \frac{2H + G}{N_2'} 4 \text{Log } R,$$

$$\left| \int_{N_1'}^{N_1+1} h_\xi d\xi \right| < \frac{2H + G}{N_1'} 4 \text{Log } R.$$

Comme on a

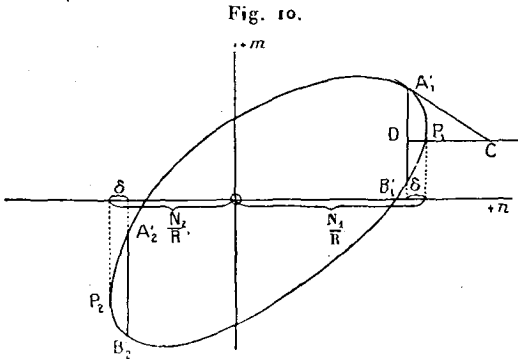
$$\left. \begin{matrix} N_1 \\ |N_2| \end{matrix} \right\} > R \quad \text{et} \quad \left. \begin{matrix} N_1' - N_1 \\ N_2' - N_2 \end{matrix} \right\} < 1,$$

les deux intégrales considérées tendent uniformément vers zéro lorsque R tend vers l'infini.

b. Évaluations de $|k_n|$ et de $\sum_n^{N_2 \dots N_1} |k_n|$. — Avant d'effectuer le

calcul, considérons la courbe C'_R obtenue en réduisant les coordonnées de tous les points de C_R dans le rapport $1 : R$. C'_R possède deux tangentes verticales aux points P_1 , d'abscisse $\frac{N_1}{R}$; et P_2 , d'abscisse $\frac{N_2}{R}$.

Soit δ (*fig. 10*) une quantité qui tend vers zéro lorsque R tend



vers l'infini. Traçons les deux parallèles à l'axe om qui ont pour abscisses $\frac{N_1}{R} - \delta$ et $\frac{N_1}{R} + \delta$. Soient A'_1 et B'_1 les points d'intersection de la première avec C'_R ; A'_2 et B'_2 ceux de la seconde. Par hypothèse, le rayon de courbure est, en tous les points de l'arc $A_1 A_2$, supérieur à r_0 . On voit dès lors que, si l'on trace le cercle de rayon r_0 qui est tangent à C'_R au point P_1 , le segment détaché par ce cercle sur la corde $A'_1 B'_1$ est situé entre les extrémités de cette corde. La longueur de ce segment est $\sqrt{(2r_0 - \delta)\delta}$. Si l'on néglige δ^2 en regard de $r_0 \delta$, on pourra écrire

$$A_1 B_1 > \sqrt{2r_0 \delta};$$

on trouverait semblablement

$$A_2 B_2 > \sqrt{2r_0 \delta}.$$

Désignons par a_1 , a_2 , b_1 et b_2 les coefficients angulaires des tangentes à C'_R aux points A'_1 , A'_2 , B'_1 et B'_2 . On a (*voir figure*)

$$|a_1| = \frac{A'_1 D}{DC} < \frac{A'_1 B'_1}{DP_1} < \frac{\sqrt{2r_0 \delta}}{\delta} = \sqrt{\frac{2r_0}{\delta}}$$

et semblablement

$$\left. \begin{array}{l} |a_2| \\ |b_1| \\ |b_2| \end{array} \right\} < \sqrt{\frac{2r_0}{\delta}}.$$

En vertu de la concavité de C'_R , le coefficient angulaire de la tangente varie toujours, dans le même sens, le long de l'arc $A'_2 A'_1$ et le long de l'arc $B_1 B_2$. De ce qui précède on déduit, dès lors facilement que ce coefficient angulaire est en un point quelconque des arcs considérés inférieur à $\sqrt{\frac{2r_0}{\delta}}$ en valeur absolue.

Pour passer à la courbe C_R , agrandissons les coordonnées de chacun des points de C'_R dans le rapport $R : 1$. Les points de C_R qui correspondent aux points A'_1, B'_1 et A'_2, B'_2 de C'_R sont : A_1, B_1 , dont l'abscisse commune a pour grandeur $N_1 - \delta R$; et A_2, B_2 , d'abscisse $N_2 - \delta R$. Les tangentes en deux points correspondants de C_R et de C'_R étant parallèles, on peut énoncer la proposition suivante :

En tous les points des arcs $\widehat{A_1 A_2}$ et $\widehat{B_1 B_2}$, le coefficient angulaire de la tangente est, en valeur absolue, inférieur à $\sqrt{\frac{2r_0}{\delta}}$.

Ceci posé, reportons-nous à l'expression de h_n . Si l'on pose

$$s_n = \int \int_{(q_1)} f(\alpha, \beta) e^{in\beta} [e^{i\varphi_1(n)\alpha} \varphi'_1(n) - e^{i\varphi_2(n)\alpha} \varphi'_2(n)] dx d\beta,$$

$$t_n = \int \int_{(q_1)} f(\alpha, \beta) \beta e^{in\beta} \left[\frac{e^{i\varphi_1(n)\alpha} - e^{i\varphi_2(n)\alpha}}{\alpha} \right] dx d\beta.$$

On voit sans peine que l'on a

$$\frac{\partial h_n}{\partial n} = s_n + t_n.$$

La valeur de k_n est donnée par l'une des deux formules :

$$k_n = h_{n+\theta(n)} - h_n,$$

$$k_n = \int_n^{n+\theta(n)} \frac{\partial h_\xi}{\partial \xi} d\xi.$$

Cette dernière formule est inutilisable pour $n = N_1$ et $n = N_2$. En effet, si n tend vers l'une de ces deux valeurs, $\varphi'(n)$ et par

suite $\frac{\partial h_n}{\partial n}$ tend vers l'infini. En conséquence, nous écrirons

$$\sum_n^{N_2 \dots N_1} |k_n| = \sum_n^{N_2 \dots N_2 + \delta R} |h_{n+\theta(n)} - h_n| + \sum_n^{N_2 + \delta R \dots N_1 - \delta R} \left| \int_n^{n+\theta(n)} \frac{\partial h_\xi}{\partial \xi} d\xi \right| + \sum_n^{N_1 - \delta R \dots N_1} |h_{n+\theta(n)} - h_n|.$$

En vertu de l'inégalité (1) établie dans l'évaluation précédente, on a

$$|h_n| = \left| \int_{x_2}^{x_1} \frac{e^{i\varphi_1(n)\alpha} - e^{i\varphi_2(n)\alpha}}{i\alpha} d\alpha \int_{\beta_1(\alpha)}^{\beta_2(\alpha)} f(\alpha, \beta) e^{in\beta} d\beta \right| < \int_{x_2}^{x_1} \left| \frac{e^{i\varphi_1(n)\alpha} - e^{i\varphi_2(n)\alpha}}{\alpha} \right| d\alpha \frac{2H + G}{|n|};$$

d'où, en posant $D = 4(2H + G)$,

$$|h_n| < D \frac{\text{Log } R}{|n|}$$

et

$$|h_{n+\theta_n} - h_n| < 2D \frac{\text{Log } R}{|n|}.$$

On en tire

$$(I) \begin{cases} \sum_n^{N_2 \dots N_2 + \delta R} |h_{n+\theta_n} - h_n| < 2D \text{Log } R \frac{\delta R}{|N_2 + \delta R|} < 2D \text{Log } R \frac{\delta}{|-1 + \delta|}, \\ \sum_n^{N_1 - \delta R \dots N_1} |h_{n+\theta_n} - h_n| < 2D \text{Log } R \frac{\delta}{1 - \delta}. \end{cases}$$

Passons à la somme

$$\sum_n^{N_2 + \delta R \dots N_1 - \delta R} \left| \int_n^{n+\theta_n} \frac{\partial h_\xi}{\partial \xi} d\xi \right|.$$

Elle est évidemment inférieure à la suivante :

$$\sum_n^{N_2 + \delta R \dots N_1 - \delta R} \int_n^{n+1} (|s_\xi| + |t_\xi|) d\xi = \int_{N_2 + \delta R}^{N_1 - \delta R + 1} (|s_\xi| + |t_\xi|) d\xi.$$

En vertu de l'inégalité (1), on a

$$|s_\xi| < \left[|\varphi'_1(\xi)| \int_{x_2}^{x_1} |e^{i\varphi_1(\xi)\alpha}| d\alpha + |\varphi'_2(\xi)| \int_{x_2}^{x_1} |e^{i\varphi_2(\xi)\alpha}| d\alpha \right] \frac{2H + G}{|\xi|}.$$

Pour les valeurs de ξ comprises entre $N_2 + \delta R$ et $N_1 - \delta R$, l'inégalité $|\varphi'(\xi)| < \sqrt{\frac{2r_0}{\delta}}$ est valable; comme on a, en outre,

$$x_1 - x_2 < 2 \Sigma_2,$$

on peut écrire

$$|s_\xi| < \frac{E}{\sqrt{\delta}} \Sigma_2 \frac{1}{|\xi|}$$

en posant

$$E = 2 \sqrt{2r_0} (2H + G).$$

On a, par suite,

$$\int_1^{N_1 - \delta R + 1} |s_\xi| d\xi < \frac{E}{\sqrt{\delta}} \Sigma_2 \int_1^{N_1 - \delta R + 1} \frac{d\xi}{|\xi|} < \frac{E}{\sqrt{\delta}} \Sigma_2 \text{Log } \lambda R,$$

$$\int_{N_2 + \delta R}^{-1} |s_\xi| d\xi < \frac{E}{\sqrt{\delta}} \Sigma_2 \int_{N_2 + \delta R}^{-1} \frac{d\xi}{|\xi|} < \frac{E}{\sqrt{\delta}} \Sigma_2 \text{Log } \lambda R.$$

Pour les valeurs de ξ comprises entre -1 et $+1$, on se servira de l'inégalité (2) de l'évaluation précédente :

$$\left[\left| \int_{\beta_2}^{\beta_1} f(\alpha, \beta) e^{in\beta} \alpha \beta \right| < 2H \Sigma^2 \right].$$

On trouve sans difficultés

$$|s_\xi| < 2 \Sigma_2 \cdot 2H \Sigma_3 \sqrt{\frac{2r_0}{\delta}} = \frac{F}{R \sqrt{\delta}} \quad (F = 4H \sqrt{2r_0}),$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} |s_\xi| d\xi < \frac{2F}{R \sqrt{\delta}}.$$

Par addition, il vient

$$(II) \quad \int_{N_2 + \delta R}^{N_1 - \delta R + 1} |s_\xi| d\xi < \frac{2E}{\delta} \Sigma_2 \text{Log } \lambda R + \frac{2F}{R \sqrt{\delta}}.$$

On voit qu'il est possible de faire tendre δ vers zéro, R tendant vers l'infini, de façon que les membres de droite des inégalités (I) et (II) tendent vers zéro. C'est, par exemple, le cas si l'on choisit

$$\delta = \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}}.$$

Il reste à montrer que, pour ce choix de δ , l'intégrale

$$\int_{N_2 + \delta R}^{N_2 - \delta R + 1} |t_n| dn$$

converge uniformément vers zéro.

Intégrons par parties par rapport à β dans l'expression de t_n . En vertu des inégalités $|\beta_1| < \Sigma_3$, $|\beta_2| < \Sigma_3$, il vient

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} \beta f(x, \beta) e^{in\beta} d\beta \right| \\ &= \left| \left[\frac{e^{in\beta}}{in} \beta f(x, \beta) \right]_{\beta_1}^{\beta_2} - \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{e^{in\beta}}{in} \left[f(x, \beta) + \beta \frac{df}{d\beta} \right] d\beta \right| \\ &< \frac{2H\Sigma_3}{|n|} + \frac{2H+G}{|n|} \Sigma_3. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'inégalité

$$\int_{x_2}^{x_1} \left| \frac{e^{i\varphi_1(n)x} - e^{i\varphi_2(n)x}}{x} \right| dx < 4 \text{Log } R,$$

on en déduit

$$|t_n| < L \frac{\text{Log } R}{|n|} \Sigma_3 \quad [L = 4(H+G)].$$

On peut, par suite, écrire

$$\begin{aligned} \int_{N_2+\delta R}^{-1} |t_n| dn &< L \text{Log } \lambda R \cdot \text{Log } R \Sigma_3, \\ \int_1^{N_1-\delta R+1} |t_n| dn &< L \text{Log } \lambda R \cdot \text{Log } R \Sigma_3. \end{aligned}$$

Pour les valeurs de n comprises entre -1 et $+1$, on peut se servir de l'inégalité

$$|t_n| < 8H \cdot \text{Log } R \Sigma_3^2$$

qui se tire immédiatement de l'expression de t_n ; d'où

$$\int_{-1}^{+1} |t_n| dn < 16H \cdot \text{Log } R \Sigma_3^2.$$

En additionnant les résultats obtenus, il vient

$$\int_{N_2+\delta R}^{N_1-\delta R+1} |t_n| dn < 2L \cdot \text{Log } \lambda R \cdot \text{Log } R \cdot \Sigma_3 + 16H \cdot \text{Log } R \cdot \Sigma_3^2$$

et l'équation limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \text{Log } \lambda R \cdot \text{Log } R \cdot \Sigma_3 = 0$$

entraîne la convergence uniforme de l'intégrale considérée vers zéro.



CHAPITRE IV.

LE PHÉNOMÈNE DE GIBBS.

1. *Étude d'un cas particulier.* — Soient \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 les deux domaines du carré des périodes caractérisées par les inégalités

$$\begin{aligned} & y > l, \\ \text{resp. } & y < l, \end{aligned}$$

où l est une valeur quelconque de l'intervalle $(-\pi, +\pi)$.

Considérons la fonction discontinue particulière $I(x, y)$ qui prend la valeur 0 en tout point (x, y) de \mathcal{D}_0 , la valeur 1 en tout point de \mathcal{D}_1 , et la valeur $\frac{1}{2}$ pour $y = l$. Proposons-nous d'étudier la somme partielle $I_{C_R}(0, 0)$.

Partons de la formule

$$I_{C_R}(0, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{mn}^{(C_R)} \int_{-\pi}^l e^{in\beta} d\beta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{im\alpha} dx.$$

Supposons que la courbe C_R soit symétrique par rapport à l'origine du plan des mn et désignons par $-N$ et $+N$ les abscisses de ses points d'intersection avec l'axe des n .

En vertu des équations

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{im\alpha} dx &= 0 && (\text{pour } m \text{ entier et } \neq 0), \\ \int_{-\pi}^{+\pi} e^{im\alpha} dx &= 2\pi && (\text{pour } m = 0), \end{aligned}$$

la somme double I_{C_R} se réduit à la somme simple

$$\begin{aligned} I_{C_R}(0, 0) &= \frac{1}{2\pi} \sum_n^{-N \dots +N} \int_{-\pi}^l e^{in\beta} d\beta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^l d\beta + \frac{1}{2\pi} \sum_n^{1 \dots N} \int_{-\pi}^l (e^{in\beta} + e^{-in\beta}) d\beta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^l \left(\frac{1}{2} + \sum_n^{1 \dots N} \cos n\beta \right) d\beta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^l \frac{\sin \left(N + \frac{1}{2} \right) \beta}{2 \sin \frac{\beta}{2}} d\beta, \end{aligned}$$

et l'on sait que cette intégrale converge uniformément vers

$$S i(lN)$$

pour toute valeur de l comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

Pour $l=0$, il vient

$$I_{C_R}(0, 0) \sim S i(0) \sim \frac{1}{2}.$$

2. *Cas général.* — A. Soit $F(x, y)$ une fonction qui satisfait aux conditions énoncées au début du deuxième Chapitre.

Supposons qu'il existe dans le plan xy un domaine \mathcal{D} à l'intérieur duquel les hypothèses suivantes soient réalisées :

1° Les lignes de discontinuité de Fy sont des courbes à tangente continue;

2° Elles ne se coupent pas entre elles et la grandeur de la discontinuité est, sur une de ces lignes, une fonction continue de l'arc;

3° Il existe une constante positive k telle que, dans toute région de \mathcal{D} où $F(x, y)$ est continue, on ait

$$|\Delta F| < \frac{k}{2} (|\Delta x| + |\Delta y|) \quad (\text{condition de Lipschitz}).$$

De cette dernière condition on déduit sans peine que, si ox' et oy' sont deux axes de coordonnées quelconques, on a

$$|\Delta F| < k(|\Delta x'| + |\Delta y'|).$$

Avant d'étudier la convergence uniforme à l'intérieur de ω , convenons qu'en un point (x, y) d'une ligne de discontinuité, $F(x, y)$ est donnée par la formule

$$(a) \quad F(x, y) = \frac{1}{4} [F(x - 0, y) + F(x + 0, y) + F(x, y - 0) + F(x, y + 0)].$$

Cette valeur est, comme on le verra par la suite, celle vers laquelle tend uniformément $F_{c_r}(x, y)$ en tous les points d'une ligne de discontinuité de ω .

B. Soient maintenant P un point quelconque de la région ω ; x et y ses coordonnées. Prenons ce point pour origine, K_{Σ_3} désignant le cercle de centre P et de rayon $2\Sigma_3 = \frac{2}{R^{\frac{1}{2}}}$, on a, d'après le corollaire des théorèmes IV et V, et le théorème VII :

$$(1) \quad F_{c_r}(x, y) = f_{c_r}(0, 0) \sim \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{(\partial C_{\Sigma_3})} f(x, \beta) \left[\int \int_{(C_r)} e^{imx} e^{in\beta} dm dn \right] dx d\beta$$

si l'on emploie le signe \sim pour relier deux expressions qui convergent uniformément vers la même limite.

Abaissons de P la normale sur la ligne de discontinuité L la plus proche. Soient H son pied; l la mesure algébrique de sa longueur dont on déterminera le signe suivant la convention adoptée dans l'Introduction.

La tangente t à L au point H partage le carré des périodes en deux domaines, ω_0 et ω_1 , qu'on distinguera comme suit : le point P est un point de ω_0 si l est négatif, un point de ω_1 dans le cas contraire.

Fixons sur t comme sens positif le sens dans lequel on parcourt cette droite lorsqu'on a le domaine ω_0 à sa gauche. Soit u l'angle que forment les directions positives de la tangente t et de l'axe des x .

Au moyen de la rotation d'angle u du système de coordonnées, donnée par les formules

$$(2) \quad \begin{cases} y = y' \cos u + x' \sin u, \\ x = x' \cos u - y' \sin u, \end{cases}$$

on rend la tangente t parallèle au nouvel axe des x , et le domaine ω_1 est situé au-dessous, le domaine ω_0 au-dessus de t .

(1) devient

$$f_{C_R}(0, 0) \sim \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{(\mathcal{K}_{\Sigma_3})} f^{(1)}(\alpha, \beta) \\ \times \left[\int \int_{(C_R)} e^{i(m \cos u + n \sin u)\alpha} e^{i(n \cos u - m \sin u)\beta} dm dn \right] d\alpha d\beta$$

si l'on pose

$$f^{(1)}(x', y') = f(x, y).$$

La rotation d'angle $-u$ du système de coordonnées du plan des mn , définie par les formules

$$(3) \quad \begin{cases} m \cos u + n \sin u = m', \\ n \cos u - m \sin u = n', \end{cases}$$

donne à la dernière intégrale la forme

$$\frac{1}{4\pi^2} \int \int_{(\mathcal{K}_{\Sigma_3})} f^{(1)}(\alpha, \beta) \left[\int \int_{(C_R^u)} e^{im\alpha} e^{in\beta} dm dn \right] d\alpha d\beta,$$

sous laquelle on reconnaît, par comparaison avec (1), qu'on a

$$f_{C_R}(0, 0) \sim f_{C_R^u}(0, 0),$$

C_R^u désignant dans cette formule la courbe qu'on obtient en faisant tourner C_R de l'angle u autour de l'origine du plan des mn .

En faisant usage du corollaire des théorèmes IV et V, on remplacera, dans les calculs qui suivent, le domaine d'intégration \mathcal{K}_{Σ_3} par le carré K_{Σ_3} qui a pour centre l'origine et dont les côtés parallèles aux axes ont pour longueur $2\Sigma_3$.

En outre, nous désignerons par \mathfrak{B}_{Σ_2} la bande du carré des périodes caractérisée par l'inégalité

$$|x| < \Sigma_2 = \frac{1}{R^{\frac{3}{2}}},$$

et par \mathfrak{B}_{Σ_3} la région du carré caractérisée par

$$|x| < \Sigma_3.$$

Considérons maintenant la fonction $\chi^{(1)}(x, y)$ définie à l'intérieur de B_{Σ_3} de la façon suivante :

A et A' désignant deux points de même abscisse de L et de t , $\chi^{(1)}$ prend au point A' la même valeur que $f^{(1)}$ au point A, valeur donnée

par la formule (α). Le long de AA', $\chi^{(1)}$ est constante et n'a pas de discontinuité au point A. En tout point de la droite AA' extérieur au segment AA', on a

$$\chi^{(1)}(x, y) = f^{(1)}(x, y).$$

En résumé, $\chi^{(1)}$ diffère de $f^{(1)}$ en ce que, aux environs de H, la ligne de discontinuité L y est remplacée par la droite t. En vertu de la première et de la deuxième hypothèse, il est évident que la grandeur de la discontinuité de $\chi^{(1)}$ varie d'une façon continue le long du segment de t intérieur à B_{Σ_2} .

A l'extérieur de B_{Σ_2} , on choisira pour simplifier $\chi^{(1)} = f^{(1)}$.

Désignons par σ la région de B_{Σ_2} intérieure au carré K_{Σ_2} et par $\sigma^{(1)}$ la région de K_{Σ_2} extérieure à B_{Σ_2} .

On a

$$f_{c_{\mathbb{R}}^{(1)}}^{(1)}(0, 0) \sim \left\{ \int_{(\sigma)} + \int_{[\sigma^{(1)}]} \right\} f^{(1)}(\alpha, \beta) \delta c_{\mathbb{R}}^{(1)}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta,$$

ce que nous écrirons

$$f_{c_{\mathbb{R}}^{(1)}}^{(1)}(0, 0) \sim f_{(\sigma)}^{(1)} + f_{[\sigma^{(1)}]}^{(1)}.$$

Posons semblablement

$$\chi_{c_{\mathbb{R}}^{(1)}}^{(1)}(0, 0) \sim \chi_{(\sigma)}^{(1)} + \chi_{[\sigma^{(1)}]}^{(1)}.$$

Il ressort de la deuxième des hypothèses faites sur \mathbb{Q} que, Σ_2 étant suffisamment petit, K_{Σ_2} ne peut être traversé au maximum que par une seule ligne de discontinuité, qui ne peut évidemment être que la ligne L. Dans ce cas, comme on a $t \parallel o_x$ et la tangente étant supposée continue le long de L, l'arc de cette courbe qui est situé à l'intérieur de K_{Σ_2} est un arc de genre ϱ . On pourra, par suite, partager $\sigma^{(1)}$ en quadrilatères du genre q .

D'après le théorème IV, on a

$$f_{[\sigma^{(1)}]}^{(1)} \sim 0.$$

De même on voit qu'on a

$$\chi_{[\sigma^{(1)}]}^{(1)} \sim 0.$$

D'autre part, le segment de t qui est compris à l'intérieur de B_{Σ_2} , ayant pour longueur $2\Sigma_2$ est plus petit que $2\Sigma_2 = \frac{2}{R^{\frac{2}{3}}}$. On a, par suite,

en vertu du théorème II,

$$f_{(\sigma)}^{(1)} \sim \chi_{(\sigma)}^{(1)}.$$

De sorte qu'il vient finalement

$$f_{C_R^a}^{(1)}(o, o) \sim \chi_{C_R^a}^{(1)}(o, o).$$

Cette formule est évidente dans le cas où L ne traverse pas K_{Σ_3} .

Soit maintenant

$$h = f^{(1)}(o, l - o) - f^{(1)}(o, l + o)$$

la grandeur de la discontinuité de $f^{(1)}$ et par suite de $x^{(1)}$ au point H.

Soient $I(x, y)$ la fonction décrite au début de ce Chapitre, $y = l$ sa ligne de discontinuité.

La fonction

$$\varphi(x, y) = \chi^{(1)}(x, y) - h I(x, y)$$

est continue à l'intérieur de K_{Σ_3} .

En particulier, en observant que les valeurs de $F(x, y)$ sur l sont tirées de la formule (a), et qu'on a, sur cette droite, $I(x, y) = \frac{1}{2}$, on vérifiera aisément que la fonction $\varphi(x, y)$ est continue en tout point de l .

On en déduit, en vertu de la troisième hypothèse, que, si l'on néglige des infiniment petits du second ordre, on a, en tout point de K_{Σ_3} ,

$$|\Delta\varphi| < k[|\Delta x| + |\Delta y|].$$

On peut, par suite, appliquer le théorème VI; on obtient

$$\varphi_{C_R^a}(o, o) \sim \varphi(o, o),$$

c'est-à-dire

$$\chi_{C_R^a}^{(1)}(o, o) - h I_{C_R^a}(o, o) \sim \chi^{(1)}(o, o) - h I(o, o);$$

mais on a

$$\chi_{C_R^a}^{(1)} \sim f_{C_R^a}^{(1)}(o, o) \sim f_{C_R}(o, o) \sim F_{C_R}(x, y),$$

$$\chi^{(1)}(o, o) = F(x, y);$$

d'où, en remplaçant,

$$F_{C_R}(x, y) \sim F(x, y) + h [I_{C_R^a}(o, o) - I(o, o)].$$

Soit N l'abscisse du point d'intersection de C_R^a avec l'axe $+on$,

Pour $l > 0$, on a

$$I(0, 0) = 1, \quad \text{d'où} \quad F_{C_R}(x, y) \sim F(x, y) + h \left[\sum i(lN) - 1 \right];$$

Pour $l = 0$, on a

$$I(0, 0) = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad F_{C_R}(x, y) \sim F(x, y) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{[valeur donnée par} \\ \text{la formule (a)]}; \end{array} \right.$$

Pour $l < 0$, on a

$$I(0, 0) = 0, \quad \text{d'où} \quad F_{C_R}(x, y) \sim F(x, y) + h \sum i(lN).$$

En retournant à la courbe C_R , on voit que N est la longueur du rayon vecteur du point de cette courbe dont l'anomalie est $-u$.

Remplaçons dans les formules qu'on vient d'établir les courbes C_R par des courbes L_R . On a vu que les formules sont encore valables [Chap. I, 3].

N y désigne, en vertu de la symétrie de L_R par rapport aux axes et à l'origine, indifféremment le rayon vecteur d'un des quatre points de L_R d'anomalies $-u, +u, -u + 180^\circ, u + 180^\circ$.

Soit u_0 celui de ces angles qui est aigu, et soit $F_{\mathcal{E}_R}$ la somme trigonométrique partielle de laquelle on a tiré F_{L_R} au moyen des formules d'Euler.

On a

$$F_{\mathcal{E}_R} = F_{L_R}$$

et, par conséquent,

$$F_{\mathcal{E}_R}(x, y) \sim \begin{cases} F(x, y) + h \left[\sum i(lN) - 1 \right] & (l > 0), \\ F(x, y) & (l = 0), \\ F(x, y) + h \sum i(lN) & (l < 0); \end{cases}$$

\mathcal{E}_R coïncidant avec L_R dans le premier quadrant, N désigne ici le rayon vecteur du point de \mathcal{E}_R qui a pour anomalie u_0 , c'est-à-dire l'angle aigu que la tangente à la courbe L au point H forme avec l'axe des x .