Courbure intégrale généralisée et homotopie

Author(s):
Kervaire, Michel André

Publication Date:
1956

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000091756

Prom. Nr. 2507

Courbure intégrale généralisée et homotopie

Thèse présentée

à l'Ecole Polytechnique Fédérale,

Zurich,

pour l'obtention du

grade de Docteur ès Sciences mathématiques

par

MICHEL ANDRÉ KERVAIRE

de nationalité française

Rapporteur: Prof. Dr. H. HOPF

Corapporteur: Prof. Dr. B. ECKMANN

BRÜHLSCHE UNIVERSITÄTSDRUCKEREI GIESSEN

1956

KERVAIRE, M.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 219—252 (1956)

Courbure intégrale généralisée et homotopie

Par

MICHEL KERVAIRE à Berne

Introduction

Le but de ce travail est de mettre en évidence une relation entre les valeurs d'un caractère des groupes d'homotopie des sphères (noté γ) et les possibilités de généraliser le théorème de la curvatura integra (H. HOPF [3]).

Si une variété fermée M_k (de classe C^1) est immergée (par une application localement biunivoque de classe C^1) dans l'espace euclidien R_{k+1} de dimension $k+1$, les normales en chaque point du modèle de M_k dans R_{k+1} fournissent une application continue (l'application sphérique de GAUSS):

$$\varphi : M_k \to S_k$$

de la variété M_k dans la sphère des directions dans R_{k+1} et le degré de BROUWER de φ est la «curvatura integra». Le théorème mentionné [3] affirme que, pour les dimensions paires $k = 2r$, ce degré est égal à la moitié de la caractéristique d'EULER de M_k (celle-ci est paire dans la situation considérée).

La généralisation envisagée de la situation ci-dessus est du type suivant: une variété fermée M_k étant plongée dans un espace euclidien R_{k+n} avec un champ de repères normaux $\mathbf{F}_n$ (généralisant la normale à M_k dans R_{k+1}), ce champ détermine une application continue

$$\varphi : M_k \to V_{k+n,n}$$

de M_k dans la variété de STIEFEL des suites ordonnées de n vecteurs orthonormés de R_{k+n} et ayant pour origine un point fixe A: l'application φ fait correspondre à chaque point x de M_k les n vecteurs équipollents à ceux du champ F_n au point x et ayant pour origine le point A. L'application φ généralise l'application de GAUSS; pour $n = 1$, en effet, $V_{k+1,1}$ n'est autre que la sphère des directions dans R_{k+1}.

D'après les résultats de E. STIEFEL [9] sur les groupes d'homologie à coefficients entiers $H_i(V_{k+n,n})$ des variétés $V_{n+k,n}$:

$$H_i(V_{k+n,n}) = 0 \text{ pour } 1 \leqq i < k,\ H_k(V_{k+n,n}) = \begin{cases} \mathbf{Z} \text{ pour } k \text{ pair ou } n = 1, \\ \mathbf{Z}_2 \text{ pour } k \text{ impair et } n > 1, \end{cases}$$

(où $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}_2$ désignent les groupes des nombres entiers et restes modulo 2 respectivement), on peut, comme pour le cas de l'application de GAUSS, représenter la classe de φ par un nombre, disons $\overline{\varphi}(M_k)$, entier ou reste modulo 2. Le nombre $\overline{\varphi}(M_k)$ qui, pour $k = 2$, $n = 1$, est à un facteur près l'intégrale (étendue à M_2) de la courbure de GAUSS, peut être appelé *curvatura integra généralisée* du modèle de M_k dans R_{k+n}. Il faut remarquer que la définition de $\overline{\varphi}(M_k)$ est subordonnée à l'existence du champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux à M_k dans R_{k+n}.

Le théorème qui sera démontré[1]) est du type suivant: *dans certaines conditions, la curvatura integra généralisée $\overline{\varphi}(M_k)$ est indépendante du plongement et du champ $\mathbf{F}_n$: c'est un invariant de la variété différentiable M_k.* Lorsque ces «conditions», sur lesquelles nous allons revenir, sont réalisées, $\overline{\varphi}(M_k)$ est déterminée par la «*semi-caractéristique*» $\chi^*(M_k)$ de M_k égale à la moitié de la caractéristique d'EULER $\frac{1}{2}\,\chi(M_k)$ pour k pair et à

$$\chi^*(M_k) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i p_i(M_k)$$

pour $k = 2r + 1$, impair ($p_i(M_k)$ est le nombre de BETTI mod 2 de dimension i de M_k).

La condition qui doit être réalisée pour l'invariance de la curvatura integra généralisée d'une variété M_k plongée dans R_{k+n} avec un champ de repères normaux est qu'un certain invariant d'homotopie γ des applications de la sphère S_{k+n} dans S_n soit nul sur toute classe d'applications.

Cette condition est toujours réalisée pour k pair; on obtient ainsi, pour k pair, une généralisation proprement dite du théorème de H. HOPF (cf. théorème VI, § 7).

Pour k impair, il y a des cas où γ (alors reste mod 2) peut prendre les valeurs 0 et 1. Ceci se présente p. ex. pour $k = 1, 3, 7$. Il est probable (cf. conjecture du § 6) que $\gamma(f)$ pour une application $f: S_{2k+1} \to S_{k+1}$ avec k impair n'est autre que l'invariant de H. HOPF de f réduit modulo 2. La vérification de cette conjecture[1a]) permettrait de ramener le problème des valeurs possibles de γ à celui de l'existence d'applications sphériques d'invariant de H. HOPF impair.

La connection entre l'homotopie des applications sphériques et le théorème de la curvatura integra généralisée est fournie par un théorème d'approximation différentiable des applications sphériques continues dont l'idée remonte à L. PONTRJAGIN [6] et [7] et B. ECKMANN [2]. L. PONTRJAGIN utilise sa méthode d'approximation pour l'étude des groupes $\pi_{n+1}(S_n)$ et $\pi_{n+2}(S_n)$; B. ECKMANN se sert d'une méthode analogue pour déterminer la classe d'homotopie d'applications particulières de S_{n+1} dans S_n. L'invariant γ du présent article, défini pour tous les groupes $\pi_{n+k}(S_n)$, $k \geqq 1$, $n \geqq 1$, se réduit pour $k = 1$ à l'invariant considéré par L. PONTRJAGIN dans [6] et [7] pour le calcul de $\pi_{n+1}(S_n)$. C'est la recherche du détail des démonstrations dans ces notes de L. PONTRJAGIN, tâche que m'a proposée Monsieur le Professeur H. HOPF, qui a servi de point de départ à ce travail.

L'invariant γ sera en fait défini de façon un peu plus générale pour les classes d'homotopie d'applications $f: X_{n+k} \to S_n$ où X_{n+k} est une variété

---

[1]) Le cas $n = 1$, k quelconque a été traité indépendamment et simultanément par J. MILNOR. On the imbedding of n-manifolds in $(n + 1)$-space. Comm. Math. Helv., à paraître. Certains résultats de J. MILNOR loc. cit. recouvrent également en partie les résultats du § 8 du présent travail.

[1a]) J'ai pu démontrer que cette propriété de γ est effectivement satisfaite; la démonstration paraîtra ultérieurement. (Ajouté en Mars 1956.)

différentiable fermée que l'on peut plonger dans un espace euclidien R_m avec un champ de repères normaux. Si le groupe de cohomotopie $\pi^n(X_{n+k})$ existe (cf. [8]), γ est un homomorphisme de ce groupe dans le groupe des entiers pour k pair et dans le groupe des restes modulo 2 pour k impair; c'est aussi ce qui se présente si X est une sphère.

En spécialisant: $X_{n+k} = S_{n+k}$, le théorème de la curvatura integra généralisée (lorsqu'il est valable) se présente comme application de l'invariance de γ.

Il est à remarquer que l'hypothèse faite sur la variété M_k de pouvoir être plongée dans un espace euclidien R_{k+n} avec un champ de repères normaux est (même pour n arbitraire) une sérieuse restriction sur la variété M_k. On ne possède pas de méthode générale permettant de décider pour une variété donnée si un tel plongement est possible. La «Note», à la fin de l'article, apporte une faible contribution (sous forme de condition nécessaire) à cette question. Dans cet ordre d'idées, la question sans doute moins difficile, suivante n'est pas non plus tranchée (à ma connaissance): une variété M_k pouvant être plongée (topologiquement et de classe C^1) dans R_{k+n} avec un champ de repères normaux, admet-elle un tel champ quel que soit le plongement envisagé? En particulier, qu'en est-il si M_k est une sphère? Si l'on remplace dans ces questions l'hypothèse du plongement topologique par celle plus faible d'une immersion (avec self-intersection éventuelle), il faut alors donner une réponse négative: on peut immerger la sphère S_2 dans R_4 de manière que le modèle Σ_2 ainsi obtenu n'admette pas de champ de repères normaux. On obtient un tel modèle en regardant un *plongement* $p: P_2 \to R_4$ comme une immersion $i: S_2 \to R_4$, i étant la composition de la projection naturelle $S_2 \to P_2$ et du plongement p. Le modèle $\Sigma_2 = i(S_2)$ de S_2 n'admet pas de champ de repères normaux dans R_4. Un tel champ de repères, en impliquant l'existence sur $p(P_2)$ d'un champ de *vecteurs* normaux, serait en contradiction avec un théorème de H. Whitney (cf. [11], Theorem, page 113).

Les questions posées sont des cas particuliers du problème général suivant qui ne semble pas avoir été jamais efficacement abordé (avec cette généralité): étant donnés une variété M_k et une structure fibrée sphérique de base M_k:

$$\mathfrak{B} = (B, S_{n-1}, M_k, G),$$

sous quelles conditions peut-on «réaliser» cette structure fibrée comme structure normale par un plongement ou une immersion $M_k \to R_{k+n}$?

Ce problème ne sera pas abordé dans le présent travail.

Plan

Au chapitre I, j'expose des résultats connus de façon plus ou moins détaillée suivant la place que ces résultats occupent déjà dans les articles de L. Pontrjagin [6] et [7] et R. Thom [10].

Le chapitre II est consacré à la construction de l'invariant γ.

Trois applications sont faites de l'invariance de γ au chapitre III: outre le théorème de la curvatura integra qui vient d'être discuté (au § 7), on trouve (au § 8) une condition suffisante pour qu'une variété M_k que l'on peut immerger dans un espace euclidien avec un champ de repères normaux soit parallélisable (cf. théorèmes IX, X, XI); on peut ainsi traiter le cas des produits topologiques de sphères dont on voit qu'ils sont parallélisables dès que leur caractéristique d'EULER est nulle (théorème XII). Au § 9 l'un des lemmes du § 4 est utilisé pour préciser un théorème de M. MORSE sur la théorie des points critiques.

Je tiens à remercier trés vivement Monsieur le Professeur Dr. H. HOPF et Monsieur le Professeur Dr. B. ECKMANN pour leurs conseils, leur aide et l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à l'élaboration de ce travail.

Chapitre I. Préliminaires

§ 1. Théorèmes d'approximation

Nous étudions les applications continues

$$f : X_{n+k} \to S_n$$

d'une variété de RIEMANN X_{n+k} fermée et orientée, de classe C^∞, dans la sphère S_n. Les indices indiquent la dimension.

Sur l'approximation d'une telle application, on trouve, énoncés par L. PONTRJAGIN [6] et [7], les théorèmes suivants dont le détail des démonstrations a été donné par R. THOM [10]:

Aussi proche qu'on le veut d'une application continue donnée, il existe une application, disons f, de classe C^∞ ayant la propriété:

i) *il existe un voisinage $V(c)$ d'un point $c \in S_n$ dont la contre-image $f^{-1}(V)$ est un ensemble de points «réguliers» de f.*

Un point $p \in X_{n+k}$ est dit *«régulier»* lorsque les fonctions

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}) \qquad [i = 1, 2, \ldots, n]$$

exprimant l'application f dans des systèmes locaux de coordonnées ont la propriété que la matrice

$$(\partial f_i / \partial x_j) \qquad [i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n+k]$$

a en p le rang maximum n. Un point c satisfaisant avec la fonction f à la propriété i) est appelé *«valeur régulière»* de la fonction f.

La propriété i) de la fonction f implique les suivantes: la contre-image $f^{-1}(c)$ du point c est une sous-variété M_k de X_{n+k}, de classe C^∞, orientable, fermée, éventuellement non-connexe. La variété M_k est représentée localement par les équations

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}) = 0 \qquad [i = 1, 2, \ldots, n].$$

La fonction f est dans $f^{-1}(V)$ une fibration, et l'on a $f^{-1}(V) \approx M_k \times V_n$ [2]) où V_n est la boule ouverte de dimension n; on peut prendre V assez petit pour que $U = f^{-1}(V)$ soit un voisinage tubulaire de M_k dans X_{n+k}.

Si l'on fait choix en c d'un repère tangent à S_n, l'application f induit sur M_k un champ F_n de repères normaux dans X_{n+k}. Soit en effet, $N_n(x)$ le sous-

[2]) Le signe $\approx$ signifie «homéomorphe à».