Untersuchungen zur Modelltheorie

Author(s):
Engeler, Erwin

Publication Date:
1958

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000091766

Prom. Nr. 2734

UNTERSUCHUNGEN ZUR MODELLTHEORIE

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH
ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK
GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

ERWIN ENGELER

VON WAGENHAUSEN (THURGAU)

Referent: Herr Prof. Dr. P. Bernays

Korreferent: Herr Prof. Dr. E. Specker

1958

ART. INSTITUT ORELL FÜSSLI AG, ZÜRICH

Untersuchungen zur Modelltheorie

Die vorliegenden Untersuchungen betreffen die Theorie der Modelle von Axiomensystemen erster Stufe. Diese Theorie ist in den letzten Jahren vor allem durch die Arbeiten von A. TARSKI [1]), A. ROBINSON [2]) und L. HENKIN [3]) gefördert worden. Im Lichte dieser neueren Entwicklung behandelt unsere Arbeit einige, zum Teil ältere Fragestellungen.

Eine erste Frage stellt sich im Hinblick auf die sogenannten Extremalmodelle [4]). Das wohl bekannteste Beispiel für ein Extremalmodell wird durch die Charakterisierung der reellen Zahlen mittels des HILBERTschen Vollständigkeitsaxioms [5]) geliefert. Dieses besagt, daß das zu kennzeichnende System von Dingen bei Aufrechterhaltung der Beziehungen und Verknüpfungen zwischen diesen Dingen sowie auch der Erfüllung der übrigen Axiome keiner Erweiterung fähig ist. Ein Modell, das diesem Vollständigkeitsaxiom genügt, ist in einem scharf umreißbaren Sinn ein extremales – in diesem Falle maximales – Modell [6]).

Ein weiteres bekanntes Beispiel ist das Beschränktheitsaxiom in der FRAENKELschen Axiomatisierung der Mengenlehre [7]). Ein Modell der Mengenlehre, welches das Beschränktheitsaxiom erfüllt, ist ein minimales Modell in dem Sinne, daß es kein echtes Teilsystem dieses Modelles gibt, das sämtliche Axiome der Mengenlehre erfüllt.

Es erhebt sich natürlich sofort die Frage nach der Existenz eines minimalen oder eines maximalen Modells. So bildete etwa die Frage nach der Existenz eines maximalen Modells der Mengenlehre den Inhalt einer lebhaften Kontroverse zwischen FINSLER und BAER [8]). – In § 2 dieser Arbeit

---

[1]) A. TARSKI, Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1950, Bd. 1 (1952), S. 705 bis 720.

[2]) A. ROBINSON, On the Metamathematics of Algebra, North Holland Publishing Company, Amsterdam (1951).

[3]) L. HENKIN, Some interconnections between modern algebra and mathematical logic, Transactions of the American Math. Soc., Bd. 74 (1953) S. 410–427.

[4]) Vgl. R. CARNAP und F. BACHMANN, Über Extremalaxiome, Erkenntnis, Bd. 6 (1936), S. 166–188, und R. CARNAP, Einführung in die symbolische Logik ... Springer-Verlag Wien (1954), insbesondere S. 154.

[5]) D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. 1930, Anhang VI («Über den Zahlbegriff»).

[6]) Vgl. P. BERNAYS, Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome, Math. Zeitschrift, Bd. 63 (1955), S. 219–229.

[7]) A. FRAENKEL, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl., insbesondere S. 355f.

[8]) Math. Zeitschrift, Bd. 27 (1928), S. 536ff.; R. BAER, Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre; P. FINSLER, Erwiderung ...; R. BAER, Bemerkungen zur Erwiderung.

werden wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Minimalmodelles, in § 3 eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Maximalmodelles geben.

In § 4 beweisen wir den LÖWENHEIM-SKOLEMschen Satz für Axiomsysteme, welche (nebst einer beliebigen endlichen oder abzählbaren Menge von Axiomen im Rahmen des Prädikatenkalküls erster Stufe) auch unendliche Disjunktionen enthalten können.

§ 1. Definitionen

Im folgenden werden wir nur solche Axiomensysteme für mathematische Strukturen betrachten, welche sich im Rahmen des Prädikatenkalküls erster Stufe mit Identität[9]) formalisieren lassen. Für die Beschreibung von Modellen solcher Axiomensysteme hat TARSKI[10]) den Begriff des *Relationalsystems* (relational system) eingeführt.

Ein Relationalsystem A besteht aus:

a) einer Menge $\mathfrak{A}$, welche den Individuenbereich des Relationalsystems bildet,

b) einer ausgezeichneten Teilmenge $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{A}$,

c) Mengen $\mathfrak{R}_i$, $i = 1, 2, \ldots r$, wo jedes Element von $\mathfrak{R}_i$ ein k_i-Tupel von Elementen von $\mathfrak{A}$ ist,

d) $f_j$stellige Funktionen Φ_j, $j = 1, 2, \ldots s$, die jedem f_j-Tupel von Elementen von $\mathfrak{A}$ genau ein Element von $\mathfrak{A}$ zuordnen.

Wir schreiben in der Folge oft symbolisch $A = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{C}; \mathfrak{R}_1, \ldots \mathfrak{R}_r; \Phi_1, \ldots \Phi_s \rangle$.

Sei gegeben ein im Rahmen des Prädikatenkalküls erster Stufe mit Identität formalisiertes Axiomensystem. Ein Relationalsystem $A = \langle \mathfrak{A}, \mathfrak{C}; \mathfrak{R}_1, \ldots \mathfrak{R}_r; \Phi_1, \ldots \Phi_s \rangle$ ist dann und nur dann ein Modell dieses Axiomensystems, wenn

1. die folgenden Bedingungen über die Struktur des Relationalsystems erfüllt sind:

   a) jeder Individuenkonstanten, die im Axiomensystem auftritt, wird eineindeutig ein Element von $\mathfrak{C}$ zugeordnet,

   b) jedem $k_i$stelligen Grundprädikat R_i wird eineindeutig eine Menge $\mathfrak{R}_i$ von k_i-Tupeln von Elementen von $\mathfrak{A}$ zugeordnet,

   c) jedem $f_j$stelligen Funktionszeichen φ_j wird eine Funktion Φ_j von f_j Variablen eineindeutig zugeordnet, die zu jedem f_j-Tupel von Elementen von $\mathfrak{A}$ genau ein Element von $\mathfrak{A}$ als Funktionswert bestimmt,

---

[9]) Zur Orientierung über den Prädikatenkalkül vgl. D. HILBERT und P. BERNAYS, Grundlagen der Mathematik, Bd. 2 (1939), S. 375–391.

[10]) A. TARSKI, Contributions to the theory of models I, II, Indagationes mathematicae, Bd. 16 (1954), S. 572–581, 582–588.