Le Problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive

Author(s):
Fiala, Félix

Publication Date:
1941

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000091769

Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive

THÈSE

PRÉSENTÉE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE, ZURICH,
POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

FÉLIX FIALA

DE GENÈVE

Rapporteur : M. le Professeur Dr H. HOPF
Corapporteur : M. le Professeur Dr F. GONSETH

ZURICH
ORELL FÜSSLI ARTS GRAPHIQUES S.A.
1941

recherches. Nous l'appelons *un plan de Riemann. La métrique y est définie à l'aide d'une forme quadratique définie positive*

$$ds^2 = E(x, y)\, dx^2 + 2F(x, y)\, dx dy + G(x, y)\, dy^2 ,$$

dont les coefficients sont des fonctions analytiques de x et de y; la longueur de toute ligne divergente dans le plan est infinie. Par fonction analytique, nous entendons dans tout ce travail une fonction analytique réelle, c'est-à-dire développable en série entière dans le voisinage des valeurs considérées des variables. On connaît les formules permettant de calculer toutes les expressions qui ne dépendent que de l'élément linéaire, en particulier la courbure totale en un point.

1. 3. Il nous reste à formuler l'hypothèse caractéristique de ce travail. Nous considérons des *plans de Riemann à courbure totale jamais négative.*

C'est à cette classe de surfaces qu'appartiennent le plan euclidien, les paraboloïdes elliptiques, chacune des nappes des hyperboloïdes à deux nappes, et plus généralement toutes les surfaces ouvertes normales à courbure positive, comme l'a démontré Cohn-Vossen ([3], p. 80). C'est d'ailleurs dans les travaux de ce dernier, [3] et [4], qu'il faut voir le point de départ des présentes recherches.

2. Résultats[3])

Nos résultats principaux sont donnés sous la forme de trois inégalités et de quatre théorèmes dans la seconde partie de notre travail.

2. 1. Considérons une courbe $\mathfrak{F}$ rectifiable et simplement fermée, située dans un plan de Riemann. Le problème central de ce travail est la recherche d'une *inégalité isopérimétrique*, c'est-à-dire d'une relation entre la longueur L de $\mathfrak{F}$ et l'aire A du domaine compris à l'intérieur de $\mathfrak{F}$. Sans hypothèse complémentaire, relative par exemple à la courbure de la surface, le problème est évidemment beaucoup trop général. A côté de l'exemple classique *du plan euclidien* où les démonstrations de la formule bien connue

$$L^2 \geqq A \cdot 4\pi$$

ne se comptent plus, le problème a été résolu sur *la sphère* par F. Bernstein[4]) et dans *le plan hyperbolique* par E. Schmidt[5]). Celui-ci a d'ailleurs

[3]) Nous les avons résumés dans une note parue dans les Comptes Rendus, 209, 1939, p. 821—823.

[4]) Math. Ann. 60, 1905, p. 117—136.

[5]) Math. Zeitschrift, 46, 1940, p. 204.

montré que l'on peut réunir en une seule formule les inégalités isopérimétriques valables sur ces trois surfaces à courbure constante. En désignant par K la courbure totale de la surface considérée, on a:

$$L^2 \geqq A(4\pi - KA) .$$

Le signe d'égalité n'ayant lieu que pour le cercle, cette formule permet de résoudre *le problème isopérimétrique :* Parmi toutes les courbes fermées de longueur donnée, le cercle limite le domaine dont l'aire est la plus grande.

Nous ajouterons que la formule isopérimétrique du plan euclidien a été démontrée sur les surfaces minima par Carleman[6]) et d'une manière plus générale sur les surfaces à courbure totale négative par Radó et Beckenbach[7]) ; ces derniers ont également remarqué que cette formule n'est pas valable sur des surfaces à courbure totale positive. Pour ces surfaces, c'est à notre connaissance avec le théorème de Bernstein relatif à la sphère le seul résultat connu concernant le problème isopérimétrique. Si, dans le présent travail, nous n'en donnons pas encore la solution définitive, nous en fournissons du moins un élément important sous la forme d'une inégalité isopérimétrique, analogue à celle du plan euclidien. Voici d'ailleurs quelques remarques qui montreront pourquoi le problème isopérimétrique est beaucoup plus difficile à résoudre sur une surface quelconque que sur une surface à courbure totale constante.

Une condition pour qu'une courbe fermée, de longueur donnée L, limite sur une surface un domaine d'aire maximum est que la courbure géodésique de la courbe soit constante ([5], p. 154). Sur une surface à courbure totale constante, la recherche de telles courbes est considérablement simplifiée par le fait suivant : les lignes géodésiques issues d'un point fixe forment un système de coordonnées facile à étudier et leurs trajectoires orthogonales sont des courbes à courbure géodésique constante.

Il n'en est évidemment plus de même sur une surface quelconque et la notion même de cercle se décompose en plusieurs notions plus ou moins incompatibles entre elles, suivant la propriété du cercle que l'on tient à conserver.

Dans certaines démonstrations de l'inégalité isopérimétrique du plan euclidien et en supposant que la courbure de la courbe $\mathfrak{F}$ existe en tous points, on peut considérer la constante 4π comme le double de l'intégrale de la courbure de $\mathfrak{F}$[8]) ; on sait en effet que cette quantité que nous voulons

---

6) Math. Zeitschrift, 9, 1921, p. 154—160.

7) Trans. Amer. Math. Soc. 35, 1933.

8) P. ex. la démonstration de Crone et Frobenius, reproduite dans [5], p. 56.

désigner par $\kappa(\mathfrak{F})$ ne dépend pas de $\mathfrak{F}$ dans le plan euclidien et vaut toujours 2π. On peut alors énoncer l'inégalité isopérimétrique

$$L^2 \geqq 2A\,\kappa(\mathfrak{F}) . \tag{I}$$

C'est sous cette forme que nous la démontrerons pour une courbe simplement fermée $\mathfrak{F}$ située dans un plan de Riemann à courbure jamais négative; nous ferons tout d'abord l'hypothèse que $\mathfrak{F}$ est une courbe analytique régulière; $\kappa(\mathfrak{F})$ représente l'intégrale de la courbure géodésique le long de $\mathfrak{F}$.

Il est avantageux de transformer légèrement cette inégalité à l'aide de la formule de Bonnet

$$\kappa(\mathfrak{F}) = 2\pi - C(\mathfrak{F}) ,$$

où $C(\mathfrak{F})$ représente l'intégrale de la courbure totale $K(x,y)$, étendue au domaine compris à l'intérieur de $\mathfrak{F}$.

Nous pouvons ainsi énoncer l'inégalité

$$L^2 \geqq 2A\,(2\pi - C(\mathfrak{F})) . \tag{II}$$

Cette formule est tout d'abord valable pour une courbe analytique régulière; on peut l'étendre à toute courbe rectifiable $\mathfrak{F}$ à l'aide d'une suite de courbes analytiques régulières $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ convergeant vers $\mathfrak{F}$.

Le coefficient de A est une quantité qui dépend encore de la courbe $\mathfrak{F}$. Pour obtenir à sa place une constante, il suffit de rappeler que $K(x,y)$ n'est par hypothèse jamais négatif; $C(\mathfrak{F})$ est donc plus petit que l'intégrale de $K(x,y)$ sur tout le plan, intégrale que nous désignons par C_T (l'égalité $C(\mathfrak{F}) = C_T$ ne peut avoir lieu que dans le cas du plan euclidien).

Etant donné un plan de Riemann à courbure non négative, nous pouvons donc formuler une inégalité valable pour une courbe quelconque de ce plan,

$$L^2 \geqq 2A\,(2\pi - C_T) . \tag{III}$$

Si $C_T = 2\pi$, la formule est triviale. Le membre de droite ne saurait d'ailleurs être négatif, car, comme l'a démontré Cohn-Vossen, sur une surface du type considéré $C_T \leqq 2\pi$, ([3], p. 79).

Quant au signe d'égalité dans la formule (I), nous démontrerons au *Théorème B* qu'il ne peut avoir lieu que si le plan de Riemann est isométrique au plan euclidien et si la courbe est un cercle; dans ce cas on a $C(\mathfrak{F}) = 0$. Il est clair que les conditions du signe d'égalité restent les mêmes pour les inégalités (II) et (III).

La formule (I) et le théorème B sont démontrés dans la seconde partie de notre travail, au n° 11.

La formule (I) nous a été suggérée pour les surfaces ordinaires de l'espace euclidien par les considérations suivantes: Etant donnée sur une surface ouverte à courbure positive, une courbe simplement fermée $\mathfrak{F}$, considérons la surface développable, enveloppe des plans tangents à la surface le long de $\mathfrak{F}$. Dans le cas où la surface développable est un cône, l'aire comprise à l'intérieur de $\mathfrak{F}$ sur la surface est certainement plus petite que l'aire comprise à l'intérieur de $\mathfrak{F}$ sur le cône. Pour s'en persuader, il suffit d'appliquer la généralisation du théorème d'Archimède: Si une surface convexe est entièrement située à l'intérieur d'une autre surface convexe, l'aire de la première est plus petite que l'aire de la seconde. Or, il est facile de vérifier que l'inégalité (I) est valable sur le cône ou dans le secteur correspondant à son développement sur un plan. Elle l'est donc a fortiori pour le morceau de surface considéré. Il aurait peut-être été possible de la démontrer généralement pour des morceaux de surface plongés dans l'espace ordinaire en déformant isométriquement ceux-ci jusqu'à ce que la surface développable déterminée par les plans tangents à la surface le long de la courbe $\mathfrak{F}$ soit un cône. Nos efforts dans ce sens ne nous ont conduit qu'à des résultats partiels et c'est une tout autre idée qui nous permettra de donner une démonstration générale. Nous voulons faire une dernière remarque: l'hypothèse d'une surface normale n'est pas indispensable pour les formules (I) et (II), qui pourraient être démontrées sur n'importe quel morceau simplement connexe de surface à courbure non négative. Elles sont évidemment triviales dès que $C(\mathfrak{F}) \geqq 2\pi$.

2. 2. Dans nos inégalités isopérimétriques apparaissent certaines constantes dont nous nous sommes proposé de justifier le choix. Nous bornerons nos considérations à l'inégalité (III) pour laquelle le résultat obtenu est particulièrement intéressant.

Considérons un plan de Riemann fixe et l'ensemble de toutes les courbes simplement fermées de ce plan. A chaque courbe $\mathfrak{F}$ nous faisons correspondre la valeur du quotient $\frac{L^2(\mathfrak{F})}{A(\mathfrak{F})}$. L'inégalité isopérimétrique (III) nous apprend que l'ensemble de ces valeurs est borné inférieurement. Cette inégalité nous fournit même une estimation de la borne inférieure. On a évidemment

$$\text{borne inf.} \left(\frac{L^2}{A}\right) \geqq 2(2\pi - C_T) \; .$$

Lorsque nous aurons démontré que, dans cette formule, seul le signe d'égalité est valable, nous aurons en même temps montré qu'il est impossible de remplacer la constante $2(2\pi - C_T)$ par une constante plus grande dans l'inégalité (III), que nous voulons valable pour toutes les courbes du plan de Riemann considéré.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer le

Théorème C. *Dans un plan de Riemann à courbure totale non négative, on a pour l'ensemble des courbes simplement fermées*

$$\text{borne inf.} \left(\frac{L^2}{A}\right) = 2(2\pi - C_T) \ .$$

La démonstration de ce théorème, que nous présenterons au n⁰ 12, consistera à trouver une suite de courbes fermées $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ pour lesquelles

$$\lim_{n \to \infty} \frac{L^2(\mathfrak{F}_n)}{A(\mathfrak{F}_n)} = 2(2\pi - C_T) \ .$$

Il nous faut remettre au n⁰ 3 une explication plus détaillée de la construction d'une telle suite qui repose sur la méthode caractéristique de ce travail.

2. 3. On peut considérer la question suivante comme le point de départ du présent travail:

Etant donnés un plan de Riemann à courbure totale non négative et un nombre L, l'aire des domaines limités par une courbe fermée de longueur L est-elle supérieurement bornée?

A cette question nous répondrons au n⁰ 13 par le

Théorème D. *Si $C_T < 2\pi$, l'aire des domaines limités par une courbe de longueur L est bornée supérieurement pour tout L.*

Si $C_T = 2\pi$, l'aire des domaines limités par une courbe de longueur $L < L^*$ est bornée supérieurement; L^* est une constante positive (éventuellement infinie) qui dépend du plan de Riemann considéré.

Ce théorème est au fond une forme très affaiblie de la solution habituelle du problème isopérimétrique. On remarquera en particulier qu'il serait complètement faux d'en déduire immédiatement l'existence d'une courbe fermée $\mathfrak{F}$ limitant un domaine d'aire maximum.

La première partie du théorème D est applicable par exemple à la surface formée par une des nappes d'un hyperboloïde à deux nappes. La seconde partie concerne le cas du paraboloïde elliptique où l'on trouve pour L^* la valeur ∞, ou celui de la surface de révolution dont le méridien a pour équation

$$z = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \; ,$$

où l'on trouve pour L^* la valeur π^2.

2. 4. Quant au n⁰ 10, nous y démontrerons un théorème presque évident pour des surfaces plongées dans l'espace ordinaire, mais moins immédiat pour les surfaces abstraites que nous considérons:

Théorème A. *L'aire totale d'un plan de Riemann à courbure non négative est infinie.*

C'est du reste une condition essentielle pour que les conséquences que nous avons tirées de nos inégalités isopérimétriques ne soient pas triviales.

Remarquons d'autre part que ce théorème n'est pas vrai dans un plan de Riemann à courbure quelconque; il est facile en effet de construire des surfaces ouvertes normales dont l'aire totale est finie.

3. Méthode

3. 1. Nous allons dire maintenant quelques mots du procédé qui nous a permis de démontrer la formule isopérimétrique (I) et les théorèmes A, B, C. Il s'agissait avant tout de trouver un système de coordonnées adéquat à notre problème.

Crone et Frobenius[9]) ont présenté une démonsration de l'inégalité isopérimétrique du plan euclidien à l'aide des parallèles à la courbe $\mathfrak{F}$, définies de la manière suivante: C'est le lieu des points que l'on obtient en reportant une longueur constante sur toutes les normales à $\mathfrak{F}$. On est assuré que les courbes ainsi obtenues sont analytiques régulières, seulement si $\mathfrak{F}$ est une courbe analytique régulière et convexe et si l'on ne considère que les parallèles extérieures à $\mathfrak{F}$. Par contre, les parallèles intérieures ou les parallèles à une courbe non convexe peuvent présenter des points singuliers.

Sur une surface à courbure non nulle, la situation est beaucoup plus désagréable. Rappelons tout d'abord la définition que Gauss a donnée des *parallèles géodésiques à une courbe* $\mathfrak{F}$ analytique régulière: Ce sont les trajectoires orthogonales de la famille des lignes géodésiques normales à $\mathfrak{F}$; on sait que l'on peut également les définir comme lieux des points obtenus en reportant à partir de $\mathfrak{F}$ une longueur constante sur toutes les lignes géodésiques normales à $\mathfrak{F}$.

Or ce n'est que dans le voisinage de la courbe $\mathfrak{F}$ que l'on peut affirmer

[9]) Voir note [8]), voir aussi la démonstration de *Bernstein,* note [4]).