Ueber zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung

Author(s):
Hofmann, Martin

Publication Date:
1955

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000091775

Prom. Nr. 2511

Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

MARTIN HOFMANN

VON WÄDENSWIL UND WEISSLINGEN (ZH)

REFERENT: HERR PROF. DR. W. SAXER

KORREFERENT: HERR P.-D. DR. P. NOLFI

1955 GEDRUCKT BEI STÄMPFLI & CIE BERN

Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung

Einleitung

Die Theorie der stochastischen Prozesse gehört zu jenen Gebieten der Mathematik, welche ihre Entwicklung, besonders in den Anfängen, zu einem grossen Teil den Anwendungen verdanken. Viele Erscheinungen aus dem Versicherungswesen, der Physik und Biologie können als Systeme dargestellt werden, die sich im Laufe der Zeit nach bestimmten Wahrscheinlichkeitsgesetzen verändern. Das Modell, welches man sich vom Ablauf eines solchen Geschehens macht, charakterisiert einen stochastischen Prozess.

Für die Versicherungsmathematik kommen vor allem Prozesse in Betracht, bei denen eine Variable, die man als Funktion eines kontinuierlichen Zeitparameters aufzufassen hat, in zufälligen Zeitpunkten um endliche Beträge ändert, sogenannte unstetige stochastische Prozesse. Ein wichtiges und zugleich das erste Beispiel eines solchen Modells stellt die kollektive Risikotheorie dar, wie sie von *F. Lundberg* zur rationellen Behandlung von Risikoproblemen der Lebensversicherung aufgebaut wurde. *Riebesell* und seine Schüler zeigten, wie auch die Mathematik der Sachversicherung auf einem stochastischen Modell begründet werden kann. Die meisten dieser Untersuchungen sind vor allem theoretischer Natur und bedürfen noch ausgedehnter statistischer Prüfung, bevor sie für die Praxis von Bedeutung werden können.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigte uns die Frage, ob in der individuellen Unfallversicherung die Voraussetzungen für eine mathematische Behandlung versicherungstechnischer Probleme gegeben sind, oder eventuell geschaffen werden können. Wir haben zu diesem Zweck die verschiedenen Faktoren, welche das Unfallrisiko beeinflussen, untersucht und nach dem Modell gefragt, das zur Darstellung der Anzahl Unfallereignisse und des Gesamtschadens zu verwenden ist. Die mathematischen Grundlagen für die statistischen Untersuchungen wurden in enger Verbindung mit den praktischen Ergebnissen entwickelt. Indessen haben wir, zur Erreichung einer besseren Übersichtlichkeit, die Arbeit in einen ersten, mathematischen und einen zweiten, statistischen Teil gegliedert. Dieser kann im wesentlichen ohne Kenntnis des ersten Teils verstanden werden.

In einer grundlegenden Arbeit über die Mathematik der Unfallversicherung zeigte *Dubourdieu,* dass in der Unfallstatistik einem speziellen stochastischen Prozess besondere Bedeutung zukommt: dem zusammengesetzten Poisson-Prozess. Dieser ist im wesentlichen eine Verallgemeinerung des Poissonschen Gesetzes für die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. Auch die Dissertation von *O. Lundberg* hat die mathematische Behandlung von Unfallstatistiken zum Thema; sie enthält eine eingehende Untersuchung über elementare stochastische Prozesse und deren Anwendungen. Die praktischen Ergebnisse gestatten es indessen nicht, die von uns gestellte Frage eindeutig zu beantworten.

Besonders interessant in Untersuchungen solcher Art ist die Frage nach der Verteilung der Anzahl Unfälle innerhalb eines gegebenen Personenbestandes. Sie wurde erstmals von den Statistikern *Greenwood* und *Yule* systematisch studiert. Die beiden Autoren stellten drei Hypothesen über das Zustandekommen von Unfällen auf, die sie mathematisch formulierten und die daraus abgeleiteten Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit empirischen Daten von Arbeitsunfällen aus der englischen Industrie verglichen. Eines dieser Modelle führte zu einem Wahrscheinlichkeitsgesetz, das auch in andern Zusammenhängen wichtig wurde, der sogenannten negativen Binomialverteilung. Im Falle von *Greenwood* und *Yule* ist sie als zusammengesetzte Poisson-Verteilung zu interpretieren. Sie entspricht der Annahme eines Personenbestandes, den man sich zusammengesetzt denkt aus Teilbeständen mit konstantem Unfallrisiko, das indessen von einem Teilbestand zum andern variiert. Da die untersuchten Bestände bereits so gruppiert waren, dass in ihnen für alle Personen gleiches äusseres Unfallrisiko bestand, muss die Verschiedenheit der Teilbestände als durch subjektive Ursachen bedingt angesehen werden. *Greenwood* und *Yule* sprachen daher von verschiedener individueller Unfallneigung. Durch ähnliche, jedoch nicht mathematische Untersuchungen an einem deutschen Versichertenbestand wurde der Psychologe *K. Marbe* zur Bildung von Persönlichkeitsgefahrenklassen veranlasst, ein den Teilbeständen bei *Greenwood* und *Yule* entsprechender Begriff.

Es stellte sich heraus, dass dem Modell der individuell verschiedenen Unfallneigungen gegenüber andern Modellen der Vorzug zu geben ist. Die Problematik dieser theoretischen Betrachtungsweise besteht indessen darin, dass versucht wird, eine komplizierte psychologische Erscheinung durch das verhältnismässig einfache mathematische Schema des zusammengesetzten Poisson-Prozesses darzustellen. Wir haben gezeigt, dass dieses Schema im Hinblick auf die Bedürfnisse der Versicherung angewendet werden darf. Dabei wurden wir auf die Betrachtung von zweidimensionalen zusammengesetzten Poisson-Verteilungen geführt.

Neben der Anzahl Unfälle tritt in der Unfallversicherung auch die Schadenhöhe als stochastische Grösse auf. Um sie für die Berechnungen berücksichtigen zu können, muss der zusammengesetzte Poisson-Prozess verallgemeinert werden; diese Verallgemeinerung entspricht der Khintchineschen Erweiterung der gewöhnlichen Poisson-Verteilung.

Der erste Teil unserer Arbeit enthält die mathematischen Überlegungen, auf denen sich die statistischen Untersuchungen aufbauen. Zuerst zeigen wir, wie der zweidimensionale zusammengesetzte Poisson-Prozess aus einer einfachen Annahme über die betrachteten Ereignisse abgeleitet werden kann. Da, von einem andern Ausgangspunkt her, dieser Prozess schon von *Consael* untersucht wurde, führen wir nur einige wenige Eigenschaften desselben an. Wir geben sodann zwei neue zweidimensionale zusammengesetzte Poisson-Verteilungen an, die man als negativ-binomiale Korrelationsfunktionen bezeichnen kann. Schliesslich befassen wir uns noch mit eindimensionalen zusammengesetzten Poisson-Verteilungen. Wir leiten eine Schar von Verteilungen her, die sich in verschiedener Hinsicht gut eignen zur Anwendung auf empirische Daten. In dieser Schar sind einige bekannte zusammengesetzte Poisson-Verteilungen als Spezialfälle enthalten, so vor allem die negative Binomialverteilung. Zum Schluss erweitern wir die zusammengesetzte Poisson-Verteilung und zeigen, unter welchen Voraussetzungen die erweiterte Verteilung gegen die Normalverteilung strebt.

Im zweiten Teil grenzen wir zuerst die Voraussetzungen für eine mathematisch-statistische Untersuchung der Unfälle innerhalb eines geschlossenen Personenbestandes ab. Es stand uns eine Unfallstatistik über die Betriebs- und Nichtbetriebsunfälle während der Jahre 1944 bis 1952 von 1196 Arbeitern der städtischen Verkehrsbetriebe Zürich zur Verfügung. Wir prüfen allgemein die Anwendbarkeit der zusammengesetzten Poisson-Verteilung auf die Verteilungen der Anzahl Betriebs- und Nichtbetriebsunfälle und bestimmen auf Grund der positiven Ergebnisse die speziellen Verteilungen aus der im ersten Teil abgeleiteten Schar zur Darstellung dieser empirischen Verteilungen. Zudem zeigen wir, dass die gemeinsame Verteilung der Betriebs- und Nichtbetriebsunfälle durch eine zweidimensionale Korrelationsfunktion wiedergegeben werden kann. Am Beispiel der Betriebsunfälle vergleichen wir die theoretische und praktische Verteilung der summaren Schadenhöhe je Person während der ganzen Beobachtungsperiode. Wir geben ferner an, wie die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens für den ganzen Bestand berechnet werden kann.

Die Ergebnisse, welche wir auf Grund der Untersuchungen an unserem verhältnismässig kleinen Bestand erhalten, berechtigen zur Schlussfolgerung, dass es möglich ist, die individuelle Unfallversicherung auf mathematische Grundlagen aufzubauen. Wir verzichten indessen auf die Behandlung der einzelnen versicherungsmathematischen Probleme, sondern verweisen, was die Berechnung der Nettoprämie anbetrifft, auf die Arbeit von *Dubourdieu* und bemerken, dass mit Hilfe der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens die interessierenden risikotheoretischen Fragen nach bekannten Überlegungen gelöst werden können.

Es bleibt mir noch die angenehme Pflicht, meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. *W. Saxer*, den besten Dank auszusprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Unterstützung und Förderung, die er ihr während ihres Entstehens zuteil werden liess. Ebenso danke ich Herrn PD Dr. *P. Nolfi* sowie dem städtischen Strassenverkehrsamt Zürich für die Hilfe bei der Auffindung und Zusammenstellung des statistischen Materials.