Eine konstruktiv-figürliche Begründung eines Abschnittes der zweiten Zahlklasse

Author(s):
Wermus, Hersz

Publication Date:
1961

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000092027

Prom. Nr. 2646

Eine konstruktiv-figürliche Begründung eines Abschnittes der zweiten Zahlklasse

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

HERSZ WERMUS

DIPL. MATH. ETH

GENF

Referent: Herr Prof. Dr. P. Bernays

Korreferent: Herr Prof. Dr. E. Specker

1961

ART. INSTITUT ORELL FÜSSLI AG, ZÜRICH

leistet das Gewünschte. Durch Induktion nach $N(Z)$ kann man weiter zeigen, daß eine analoge Darstellung für alle Terme Z_α, mit $\sigma(Z_\alpha) > 1$, gilt.

Diese Betrachtungen zeigen, daß man zu jeder Ordnungszahl ψ in CANTORscher Schreibweise eine Darstellung, wo nur Indizes und «$+$»-Zeichen als Operationen verwendet werden (wie zum Beispiel oben für $\psi = [a, b, c, d]$), angeben kann *(Indexform)*. Mit Hilfe von (α) und des Satzes 91 kann man die Sätze über den Vergleich von Z-Ausdrücken auf diese Indexformen übertragen. Da $CH(U_{(p)}) = p$ ist, so kann man insbesondere leicht die Charakteristik einer Ordinalzahl in Indexform aufschreiben; bei dem Vergleich der auf diese Weise dargestellten Ordinalzahlen kann also u.a. der Satz 47 gute Dienste leisten.

Z.B. ist $\psi = \varepsilon_{\zeta_{\zeta_\omega} + \zeta_{\varepsilon_1}} < \psi' = \zeta_{\zeta_{\varepsilon_1}}$, weil $CH(\psi) = 442 < CH(\psi') = 443$.

Ausblick

Die *Grenzzahl* des hier behandelten Abschnittes der zweiten Zahlklasse ist die Ordinalzahl $U^* = \lim U_{(p)}$, die wir zweckmäßigerweise durch $U_{([0,1])} = [1_{[0,1]}]$ bezeichnen können. Unter Benützung der hier entwickelten Theorie der Z-Ausdrücke mit *endlicher* Stellenzahl, kann man aber auf geeignete Weise den Aufbau der Ausdrücke mit *transfiniter* Stellenzahl über $U_{([0,1])}$ fortsetzen. (Dabei kann man zeigen, daß man zur Darstellung eines Ausdruckes mit einer endlichen Klammernanzahl auskommen kann.) Ist $T^{(1)} = [1_{[0,1]}]$ und $T^{(n+1)} = [1_{T^{(n)}}]$, so ist $\lim T^{(n)} = Z^*$ die Grenzzahl des so erweiterten Systems. Für diese Zahl gilt $\sigma(Z^*) = Z^*$, das heißt Z^* ist eine Zahl, die – im System der Z-Ausdrücke – gleich ihrer Stellenzahl ist. Um die zweite Zahlklasse über diese Zahl weiter fortzubauen, muß man für Z^* ein neues (Klammer-) Zeichen einführen.

LITERATUR

[1] O. VEBLEN, *Continous increasing functions of finite and transfinite ordinals.* Trans. Amer. Math. Soc. *9* (1908), 280.

[2] A. CHURCH and S. C. KLEENE, *Formal definitions in the theory of ordinal numbers.* Fund Math. *28* (1937), 11.

[3] A. CHURCH, *The constructive second number class.* Bull. Amer. Math. Soc. *44* (1938), 224–232.

[4] W. ACKERMANN, *Konstruktiver Aufbau eines Abschnittes der zweiten CANTORschen Zahlklasse.* Math. Z. *53* (1951), 403.

[5] H. BACHMANN, *Die Normalfunktionen und das Problem der ausgez. Folgen von Ordnungszahlen.* Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich *95* (1950), 115–147.

[6] P. FINSLER, *Eine transfinite Folge arithmetischer Funktionen.* Comment. Math. Helvet. *25* (1951), 75–90.

[7] K. SCHÜTTE, *Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen.* Math. Ann. *127* (1954), 15.

[8] H. BACHMANN, *Transfinite Zahlen* (Springer, Berlin 1955).

(Eingegangen den 30. August 1960)