

Eine konstruktiv-figürliche Begründung eines Abschnittes der zweiten Zahlklasse

Doctoral Thesis

Author(s):

Wermus, Hersz

Publication date:

1961

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000092027>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

Prom. Nr. 2646

**Eine konstruktiv-figürliche
Begründung eines Abschnittes der
zweiten Zahlklasse**

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH
ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK
GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON
HERSZ WERMUS
DIPL. MATH. ETH
GENÈVE

Referent: Herr Prof. Dr. P. BERNAYS

Korreferent: Herr Prof. Dr. E. SPECKER

1961

ART. INSTITUT ORELL FÜSSLI AG, ZÜRICH

leistet das Gewünschte. Durch Induktion nach $N(Z)$ kann man weiter zeigen, daß eine analoge Darstellung für alle Terme Z_α , mit $\sigma(Z_\alpha) > 1$, gilt.

Diese Betrachtungen zeigen, daß man zu jeder Ordnungszahl ψ in CANTORScher Schreibweise eine Darstellung, wo nur Indizes und «+»-Zeichen als Operationen verwendet werden (wie zum Beispiel oben für $\psi = [a, b, c, d]$), angeben kann (*Indexform*). Mit Hilfe von (α) und des Satzes 91 kann man die Sätze über den Vergleich von Z -Ausdrücken auf diese Indexformen übertragen. Da $CH(U_{(\psi)}) = \psi$ ist, so kann man insbesondere leicht die Charakteristik einer Ordinalzahl in Indexform aufschreiben; bei dem Vergleich der auf diese Weise dargestellten Ordinalzahlen kann also u. a. der Satz 47 gute Dienste leisten.

Z. B. ist $\psi = \varepsilon_{\zeta_\omega + \zeta_{e_1}} < \psi' = \zeta_{\zeta_{e_1}}$, weil $CH(\psi) = 442 < CH(\psi') = 443$.

Ausblick

Die *Grenzzahl* des hier behandelten Abschnittes der zweiten Zahlklasse ist die Ordinalzahl $U^* = \lim U_{(\psi)}$, die wir zweckmäßigerweise durch $U_{([0,1])} = [1_{[0,1]}]$ bezeichnen können. Unter Benützung der hier entwickelten Theorie der Z -Ausdrücke mit *endlicher* Stellenzahl, kann man aber auf geeignete Weise den Aufbau der Ausdrücke mit *transfiniten* Stellenzahl über $U_{([0,1])}$ fortsetzen. (Dabei kann man zeigen, daß man zur Darstellung eines Ausdruckes mit einer endlichen Klammeranzahl auskommen kann.) Ist $T^{(1)} = [1_{[0,1]}]$ und $T^{(n+1)} = [1_{T^{(n)}}]$, so ist $\lim T^{(n)} = Z^*$ die Grenzzahl des so erweiterten Systems. Für diese Zahl gilt $\sigma(Z^*) = Z^*$, das heißt Z^* ist eine Zahl, die – im System der Z -Ausdrücke – gleich ihrer Stellenzahl ist. Um die zweite Zahlklasse über diese Zahl weiter fortzubauen, muß man für Z^* ein neues (Klammer-) Zeichen einführen.

LITERATUR

- [1] O. VEBLEN, *Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals*. Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), 280.
- [2] A. CHURCH and S. C. KLEENE, *Formal definitions in the theory of ordinal numbers*. Fund. Math. 28 (1937), 11.
- [3] A. CHURCH, *The constructive second number class*. Bull. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 224–232.
- [4] W. ACKERMANN, *Konstruktiver Aufbau eines Abschnittes der zweiten CANTORSchen Zahlklasse*. Math. Z. 53 (1951), 403.
- [5] H. BACHMANN, *Die Normalfunktionen und das Problem der ausgez. Folgen von Ordnungszahlen*. Vierteljahr. Naturforsch. Ges. Zürich 95 (1950), 115–147.
- [6] P. FINSLER, *Eine transfinite Folge arithmetischer Funktionen*. Comment. Math. Helvet. 25 (1951), 75–90.
- [7] K. SCHÜTTE, *Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen*. Math. Ann. 127 (1954), 15.
- [8] H. BACHMANN, *Transfinite Zahlen* (Springer, Berlin 1955).

(Eingegangen den 30. August 1960)