

# Der Geschiebetrieb als Wahrscheinlichkeitsproblem

---

VON DER  
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN  
HOCHSCHULE IN ZÜRICH  
ZUR ERLANGUNG  
DER WÜRDE EINES DOKTORS DER  
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN  
GENEHMIGTE  
PROMOTIONSARBEIT  
VORGELEGT VON  
**HANS ALBERT EINSTEIN**  
aus **Zürich**

Referent: Herr Prof. Dr. E. Meyer-Peter  
Korreferent: Herr Prof. Dr. G. Polya



ZÜRICH 1936  
Diss.-Druckerei A.-G. Gebr. Leemann & Co.  
Stockerstr. 64.

Leer - Vide - Empty

## Inhalt.

	Seite
Einleitung . . . . .	5
<b>I. Teil. Die Verteilungsaufgabe</b>	
1. Grundlagen des Verteilungsgesetzes . . . . .	10
2. Der Grenzübergang . . . . .	11
3. Ableitung des Verteilungsgesetzes der Steine nach einer bestimmten Zeit $T$ . . . . .	18
4. Diskussion der Verteilungsfunktion . . . . .	25
5. Zusammenhang zwischen der Verteilungsfunktion und der Binominalkurve . . . . .	29
6. Zusammenhang zwischen der Verteilungsfunktion und der Poisson'schen Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . . .	31
7. Auswertung der Zahlenbeispiele . . . . .	34
8. Unvollständige Verteilungen . . . . .	41
9. Der Erwartungswert . . . . .	51
10. Resultate der Zahlenbeispiele . . . . .	54
11. Resultate der Verteilungen in Versuchen mit Geschiebegemisch	63
<b>II. Teil. Die Füllaufgabe</b>	
12. Verteilung der Einzelvorgänge . . . . .	68
13. Wahrscheinlichkeitsverteilung bei Beginn der Bewegung mit einer Ruhephase . . . . .	74
14. Diskussion der Verteilungsfunktion . . . . .	78
15. Anwendung der Verteilungsfunktion $p_T^*(x)$ auf die Füllaufgabe .	82

Leer - Vide - Empty

## Einleitung.

Die Versuchsanstalt für Wasserbau in Zürich führt gegenwärtig groß angelegte Geschiebeversuche durch, um die Zusammenhänge zwischen Geschiebeführung und Wasserabfluß in geschiebeführenden Gewässern zu erforschen. Dabei stellte sich das Bedürfnis ein, die Wanderung einzelner Geschiebestücke näher zu verfolgen. Dies versuchte man u. a. dadurch, daß eine gewisse Anzahl natürlicher Geschiebe, wie sie im Versuch Verwendung fanden, durch Färben (mit Menning) kenntlich gemacht wurden. Diese Steine warf man in einem bestimmten Zeitpunkt am oberen Ende der Versuchsstrecke ins Wasser und setzte sie eine Zeit lang der fortbewegenden Wirkung des Wassers aus. Darauf wurde die Wasserbewegung zum Stillstand gebracht und die Lage der einzelnen Steine aufgenommen. Hierbei zeigte sich merkwürdigerweise, daß gleichartige Steine bei denselben Versuchen ganz verschiedene Wege zurücklegten. Ebenso zeigte sich, daß innerhalb einer Gesteinskategorie wahllos einmal der eine und einmal der andere Stein den größeren Weg zurücklegte. Es war also nicht möglich, für den Weg des einzelnen Steines eine Gesetzmäßigkeit zu finden. Umso interessanter war es, daß man immer wieder ähnliche Kurven bekam, wenn man die Häufigkeit der Steine in Funktion des Weges auftrug. Es lag daher auf der Hand, die Bewegung der Steine als Wahrscheinlichkeitsproblem aufzufassen.

Wie bei vielen anderen naturwissenschaftlichen Problemen sind aber diese Verteilungskurven nicht symmetrisch und können daher nicht durch die einfache Binomialkurve<sup>1)</sup> dargestellt werden. Von unsymmetrischen Ansätzen sind die bekanntesten:

---

<sup>1)</sup> Die Bezeichnung Binomialkurve für die Gauss'sche Fehlerkurve, sowie alle wahrscheinlichkeitstheoretischen Bezeichnungen wurden in Anlehnung an das Buch von G. Polya (Lit. 2) gewählt.

1. *Der Ansatz von Pearson.* Dieser baut sich auf der Differentialgleichung

$$\frac{y'}{y} = \frac{a + x}{b + cx + dx^2}$$

auf, die je nach der Größe der vier Konstanten sieben verschiedene Funktionen als Lösung ergibt<sup>2)</sup>). Durch diese Mannigfaltigkeit wird aber das Arbeiten mit diesem Ansatz wesentlich erschwert, insbesondere ist es bei dieser Formel unmöglich, den wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinn der einzelnen Konstanten für unser Problem a priori anzugeben. Daher ist in unserem Falle z. B. auch die Angabe der „mittleren Reisegeschwindigkeit“ einer Serie gleichartiger Steine nicht besser möglich, als es auch direkt aus der Verteilung der Steine möglich ist.

Nun muß aber zuerst der Begriff „mittlere Reisegeschwindigkeit“ erklärt und genau definiert werden. Die Bezeichnung ist von der Eisenbahn übernommen, wo man die Reisegeschwindigkeit durch Division des totalen zurückgelegten Weges durch die gesamte für Fahrt und Zwischenhalte verbrauchte Zeit bekommt. Genau so erhalten wir auch für einen Stein in einem geschiefbeführenden Gewässer, der ja auch abwechslungsweise läuft und wieder liegen bleibt, die mittlere Reisegeschwindigkeit, indem wir die Zeit bestimmen, die er für das Durchlaufen einer bestimmten, gegenüber dem Einzelschritte sehr großen Strecke braucht, und diesen Weg durch die entsprechende Zeit dividieren. Für eine Gruppe von Steinen stellt sich die Frage ganz entsprechend wie folgt: Bekannt ist die Verteilung der Steine nach einer relativ kurzen Laufzeit. Wie sieht die entsprechende Verteilung nach einer sehr großen Laufzeit aus, und wie bestimmt sich der mittlere oder wahrscheinlichste Weg für diese neu gefundene Verteilung? Aus dieser Fragestellung sehen wir sofort, daß uns die schönste Verteilungsfunktion nichts nützt, wenn wir den inneren Sinn ihrer Konstanten nicht kennen, denn nur dann können wir aus einer experimentell ermittelten Verteilungskurve diejenigen für andere Laufzeiten konstruieren, nur

---

<sup>2)</sup> Lösungen der Differentialgleichung vergl. z. B. Riebesell (Lit. 3), Biometrik, S. 795 ff.

dann können wir aus einer Verteilungskurve die Art der ganzen Geschiebebewegung beschreiben, wenn wir ihren Sinn kennen.

2. *Der logarithmische Ansatz.* Während die wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung der Pearson'schen Formel für unseren Fall aussichtslos ist, scheint sie beim logarithmischen Ansatz viel eher möglich. Bei diesem Ansatz wird nämlich in der fertigen Binomialformel

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

die Variable  $z$  ersetzt durch den Ausdruck

$$z = a \cdot \lg(x - x_0)^3).$$

Dieses Verfahren wurde meines Wissens erstmalig von Galton vorgeschlagen und gestattet in all den Fällen eine sinngemäße Beschreibung des Problems, wenn eine Wirkung eine Rolle spielt, die zur Anzahl aller bereits erfolgten günstigen Fälle proportional ist. In unserem Falle müßte also die Wahrscheinlichkeit, weiterzulaufen oder liegenzubleiben, proportional dem seit dem Einwurf zurückgelegten Weg, resp. der seit dem Einwurf vergangenen Zeit sein. So vernünftig diese Annahme z. B. im Falle des Gesteinszerfalles bei Grassberger (Lit. 6) erscheint, so widersinnig scheint sie in unserem Falle, da man auf logischem Wege zwischen der Wahrscheinlichkeit, weiterzulaufen und dem totalen zurückgelegten Weg keinen Zusammenhang finden kann. So wollen wir also die Frage stellen, wie man bei konstanter Wahrscheinlichkeit eine unsymmetrische Verteilungskurve bekommen kann. Das Galton'sche Brett, das wohl die beste Veranschaulichung der Annahmen für die Binomialkurve bildet, soll auch uns im folgenden als Bild dienen, mit dessen Hilfe eine neue Wahrscheinlichkeitsfunktion gefunden werden soll.

---

<sup>3)</sup> Eine gute Beschreibung des Rechenganges vergl. z. B. im Buche von Gibrat (Lit. 5).

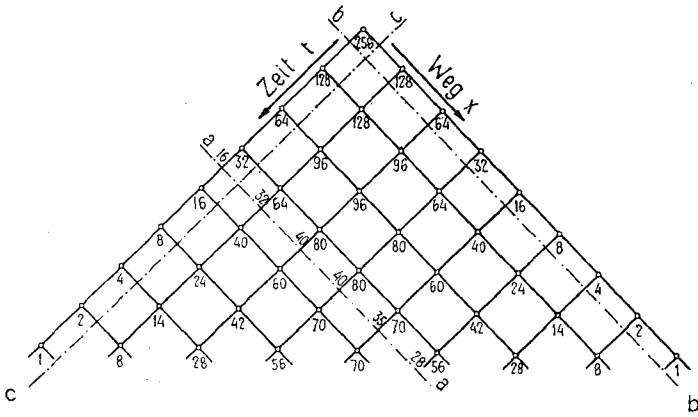


Fig. 1. *Wahrscheinlichkeiten im Galton'schen Brett.*

Die Zahlen geben die Wahrscheinlichkeit, daß der betreffende Punkt des Feldes getroffen wird, in  $1/256$ steln.



## Bezeichnungen.

- $x$  relatives Längenmaß (gemessen in mittleren Einzellaufwegen).  
 $\xi_0$  mittlerer Einzellaufweg (gemessen in Metern).  
 $\xi$  absolutes Längenmaß (gemessen in Metern).  
 $X$  einer Anzahl von Steinen gemeinsamer Laufweg (gemessen in mittleren Einzellaufwegen).  
 $t$  relatives Zeitmaß (gemessen in mittleren Einzelwartezeiten).  
 $\vartheta_0$  mittlere Einzelwartezeit (gemessen in Sec.).  
 $\vartheta$  absolutes Zeitmaß (gemessen in Sec.).  
 $T$  einer Anzahl von Steinen gemeinsame Laufzeit (gemessen in mittleren Einzelwartezeiten).  
 $\Theta$  einer Anzahl von Steinen gemeinsame Laufzeit in Sec.  
 $f$  relatives Füllungsmaß (gemessen in mittleren Einzelfüllmengen).  
 $q$  absolute Füllmenge (gemessen in gr).  
 $q_0$  mittlere Einzelfüllmenge (gemessen in gr).  
 $p$  allgemeine Bezeichnung für eine Verteildichte.  
 $p_x$  Buchstabenindex bedeutet im allgemeinen die Gerade, längs der die Verteilung untersucht wird. Im angeführten Falle meinen wir z. B. die Verteilung längs einer Parallelen zur  $t$ -Axe im Abstände  $x$  von dieser.  
 $p(x, t)$  ist die Verteilungsdichte in der  $x, t$ -Ebene an der Stelle  $x, t$ .  
 $p(x)$  ist die Verteilungsdichte längs einer Geraden in Funktion von  $x$ .  
 $\bar{p}_T(x)$  definiert in Gleichung 33.  
 $\bar{\bar{p}}_T(x)$  definiert in Gleichung 35.  
 $p_T^*(x)$  Stern bezeichnet Größen in einem Verteilungsvorgang, der mit einer Ruhephase beginnt.  
 $M_n$  das  $n$ -te Moment einer Verteilung bezogen auf den Nullpunkt, gemessen in mittleren Einzellaufwegen.  
 $M_{ns}$  das entsprechende Moment bezogen auf den Schwerpunkt.  
 $\mu_n$  das  $n$ -te Moment einer Verteilung bezogen auf den Nullpunkt, gemessen in Metern.  
 $\mu_{ns}$  das entsprechende Moment, bezogen auf den Schwerpunkt.  
 $\sigma$  das Schwankungsmaß.  
 $\pi(\xi)$  ist die Verteilungsdichte bei Verwendung absoluter Maße.  
 $S_x$  Summenfunktion, definiert in Gleichung 20.  
 $x_e$  Index  $e$  besagt, daß sich die Größe auf das Kanalende bezieht.  
 $\xi_0'$  ein indirekt bestimmter Wert  $\xi_0$ .  
 $J_n$   $n$ -te Bessel'sche Funktion.  
 $S_n$  Hilfsfunktion dazu.  
 $E$  Erwartungswert, vergl. I. Teil, Abschnitt 9.  
 $v_r$  Reisegeschwindigkeit, gemessen in mm/sec.  
 $A_r$  wirksame Sohlenschichtdicke.  
 $r$  ihr Gewicht in kg/m<sup>2</sup>.  
 $g$  Geschiebetrieb in kg/m sec.

# I. Teil. Die Verteilungsaufgabe.

## 1. Grundlagen des Verteilungsgesetzes.

Beobachten wir die Bewegung eines einzelnen Steines, der sich auf einer Kieselsohle bewegt, so fällt zunächst auf, daß er nach einer gewissen Bewegungsperiode plötzlich an einer geeigneten Stelle der Sohle, die ihm gerade etwas Schutz vor dem Angriff des Wassers bietet, liegen bleibt, um erst nach einer u. U. recht langen Zeit wieder in Bewegung zu kommen. Diese Ruhezeiten pflegen erfahrungsgemäß bei nicht allzu intensiver Geschiebebewegung ein Vielfaches der Laufzeiten zu sein, sodaß es für eine Wahrscheinlichkeitsuntersuchung ohne weiteres gangbar erscheint, die Zeiten, die während des Laufens verstreichen, gegenüber denen der Ruheperiode zu vernachlässigen. Daraus ergibt sich die Gliederung des Laufvorganges in Abschnitte mit Zeitfortschritt ohne Wegfortschritt (Ruhephase) und solche mit Wegfortschritt ohne Zeitfortschritt (Bewegungsphase).

Wie schon angedeutet, denken wir uns ein Galton'sches Brett, bei dem eine Bewegung nach links einen Zeitfortschritt  $t$  und eine solche nach rechts einen Wegfortschritt  $x$  bedeutet (vergl. Fig. 1). Jeder Stein unserer Geschiebebewegung beschreibt in diesem System nach bekannter Art einen gebrochenen Linienzug, um bei einem bestimmten Weg  $x$  zum ersten Mal die Linie  $t = T$  (gleich der gemeinsamen Laufzeit der Steine) zu treffen. Man sieht sofort, daß diese Linie eine Parallele zur  $x$ -Axe ist. Wir müssen also die Verteilung längs einer Geraden parallel zur  $x$ -Axe untersuchen; wir nennen diese die Fanggerade.

Nun müssen wir unser Galton'sches Brett noch genauer definieren, d. h. wir müssen angeben, wie groß in jedem Punkte des Feldes die Wahrscheinlichkeit ist, daß der Linienzug sich von dort in der  $x$ -Richtung fortsetzt. Die Wahrscheinlichkeit für die Fort-

setzung in der  $t$ -Richtung ergibt sich dann als Differenz zu 1. Wir erinnern uns, daß unserem Versuche ein stationärer Normalabfluß zu Grunde liegt, womit gesagt ist, daß alle Querschnitte einander gleichwertig und die Wassergeschwindigkeiten von der Zeit unabhängig sind. Daraus ergibt sich als einzige plausible Annahme für unser Galton'sches Brett diejenige konstanter Wahrscheinlichkeit (Homogenität). Da der Weg  $x$  und die Zeit  $t$  zwei Größen ganz verschiedener Dimension sind, steht es uns frei, die Einheiten nach beiden Richtungen beliebig zu wählen. Wir machen daher für ihre Größe die Bedingung, daß die auf dem ganzen Feld konstante Wahrscheinlichkeit in der  $x$ -Richtung weiterzulaufen  $\frac{1}{2}$  werden soll, wobei dann die Wahrscheinlichkeit in der  $t$ -Richtung weiterzulaufen auch  $\frac{1}{2}$  wird. Die Zulässigkeit dieser Annahme wird später noch bewiesen.

Fassen wir kurz zusammen, so können wir die Eigenschaften unseres Galton'schen Brettes wie folgt festlegen:

1. Die beiden Bewegungsrichtungen bedeuten einen Wegfortschritt ohne Zeitfortschritt, resp. einen Zeitfortschritt ohne Wegfortschritt.
2. Das Wahrscheinlichkeitsfeld ist homogen.
3. Die Größe der Einheiten für Zeit und Weg müssen so gewählt sein, daß die über das ganze Brett konstante Wahrscheinlichkeit für jede der beiden Richtungen  $\frac{1}{2}$  wird.
4. Die Fanggerade ist eine im Endlichen, event. sogar nahe dem Nullpunkt gelegene Parallele zur Wegaxe.

## 2. Der Grenzübergang.

Da sich das System bis jetzt in nichts von dem zur Binomialkurve führenden unterscheidet (auch in diesem sind natürlich Fanggeraden möglich, die parallel zur einen Axe stehen), können wir auch kein anderes Gesetz erwarten. Jenes Gesetz bekommt man dadurch, daß man die Fanggerade sich sehr weit vom Nullpunkt entfernen läßt und nun von der aus sehr vielen Punkten bestehenden Verteilung zur kontinuierlichen Kurve übergeht, indem man die Punktzahl unendlich groß werden läßt (Grenzübergang!). Es ist

also klar, daß diese Kurve auch erst bei einer großen Zahl von Einzelschritten gilt (d. h. erst in großer Entfernung vom Nullpunkt). Daß auch für die von uns gewählte Richtung der Fanggeraden in großem Abstände vom Nullpunkt die Verteilungskurve symmetrisch wird, und dieselbe Form erhält, wie für die normale Fanggerade senkrecht zur Winkelhalbierenden, ist leicht einzusehen. Die bei unserem Problem im Versuch festgestellten Verteilungskurven sind aber deutlich unsymmetrisch, sodaß ein Grenzübergang in großer Entfernung vom Nullpunkte auf keinen Fall die richtige Kurve geben kann. Betrachten wir nun einmal die Figur 1, in der jede Zahl die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß ein Stein die betreffende Stelle passiert. Um ein Beispiel herauszunehmen, betrachten wir als Fanggerade eine Linie, die zwischen der 4. und 5. Reihe parallel zur Wegaxe verläuft (in der Fig. 1 mit  $a-a$  bezeichnet). Die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Wege zur betrachteten Zeit ergeben sich, wie leicht einzusehen ist, proportional zu den Zahlen

16; 32; 40; 40; 35; 28; ...

Diese Verteilung ist sicher unsymmetrisch, wie übrigens alle benachbarten. Da nämlich die Zahl 40 zweimal auftritt, müßte das Maximum bei einer symmetrischen Kurve in ihrer Mitte liegen. Dann müßten aber die Zahlen 32 und 35 resp. 16 und 28 auch gleich sein, damit die Verteilung symmetrisch würde. Es liegt daher nahe, anzunehmen, daß es sich bei unserer unsymmetrischen Wahrscheinlichkeitsverteilung um Vorgänge mit wenigen Einzelschritten handelt im Gegensatz zu dem Gauss'schen Fall, der sich auf einer großen Zahl von Einzelschritten aufbaut.

Die große Schwierigkeit besteht aber darin, daß wir für die zu findende Kurve (vergl. nebenstehende Textfigur 2) in dem Bereiche mit großen Ordinaten nur einige wenige Punkte haben, die es direkt unmöglich erscheinen lassen, einen einwandfreien Grenzübergang durchzuführen. So schwierig es aber erscheint, auf einfache Art und Weise die ganze Verteilung auf dem Brett durch ein kontinuierliches Gesetz darzustellen, so einfach läßt sich eine Teilfrage daraus beantworten. Wir fragen nämlich einmal nach der Verteilung der Steine nach einer unendlich kleinen Zeit, resp. nach den Zeiten, in

denen die Steine zum ersten Mal eine Bewegung ausführen. Für beide Verteilungen ergeben sich die selben Zahlenwerte, nämlich die der Fanggeraden  $b-b$  und  $c-c$ :

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}; \dots$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Wahrscheinlichkeit für das Liegenbleiben in jedem Punkte genau halb so groß ist, wie diejenige, daß

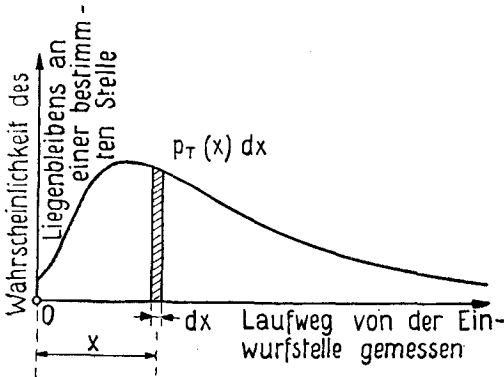


Fig. 2. Verteilung der Steine zur Zeit  $T$ .

der Punkt überhaupt erreicht wird. Um für diese Reihe ein kontinuierliches Gesetz zu finden, wollen wir zuerst eine ihr wesentliche Eigenschaft zeigen. Betrachten wir zu diesem Zweck beispielsweise den Schnitt  $b-b$ . In diesem gibt jede Zahl die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß der Stein in dem betreffenden Abstand vom Nullpunkt zum ersten Mal liegen bleibt. Es ist also die Wahrscheinlichkeit des Liegenbleibens im Ausgangspunkt  $\frac{1}{2}$ , im 2. Punkt  $\frac{1}{4}$ , im 3. Punkt  $\frac{1}{8}$  und im  $n$ -ten Punkt  $\frac{1}{2^n}$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß der Stein in der stets betrachteten ersten Phase über den  $n$ -ten Punkt hinausläuft, ist aber auch  $\frac{1}{2^n}$ . Nach der Annahme der Unabhängigkeit der einzelnen Entscheidungen von den folgenden und vorhergehenden (unverkettete Wahrscheinlichkeiten) können wir uns nun alle Wahrscheinlichkeiten der Punkte mit einer Schrittzahl größer als  $n$  auf zwei Arten gebildet denken:

Einmal gehören diese Punkte in die oben erwähnte Reihe. Die Wahrscheinlichkeit  $p$  des erstmaligen Sitzenbleibens im Punkte mit der Schrittzahl  $n+k$  ist daher

$$p = \frac{1}{2^{(n+k)}}.$$

Zum andern haben wir oben festgestellt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß ein Stein über den Punkt  $n$  hinausläuft,  $2^{-n}$  beträgt. Wir können uns also die ganze Verteilung hinter Punkt  $n$  so gebildet denken, daß  $2^{-n}$  Steine in dem Punkte  $n$  zu laufen beginnen. Die Wahrscheinlichkeit  $p_1$  für das Sitzenbleiben in den folgenden Punkten von der Ordnungszahl  $n + k$  beträgt somit

$$(1) \quad p_1 = 2^{-n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{(n+k)}} = p.$$

Wir sehen also, daß diese beiden Auffassungen zu demselben Resultate führen. Diese Eigenschaft unserer Reihe ist, wie schon angedeutet wurde, wesentlich für den Fall unverketteter Wahrscheinlichkeiten.

Suchen wir nun für unsere Reihe eine stetige Funktion, so wird sie dieser Bedingung auch genügen müssen. Für den Fall der stetigen Funktion  $p(x)$  lautet die Bedingung ganz analog

$$(2) \quad p(a+x) = \left[ \int_a^{\infty} p(x) dx \right] p(x).$$

Hierin ist der Klammerausdruck wieder die Anzahl der Steine, die über  $a$  hinauslaufen. Man sieht leicht, daß diese Bedingung durch die Exponentialfunktion

$$(3) \quad p(x) dx = e^{-x} dx$$

erfüllt wird, die einen ganz ähnlichen Charakter hat, wie die zu ersetzende geometrische Reihe. Da

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

ist, ist auch die Bedingung erfüllt, daß die Summe aller Wahrscheinlichkeiten irgendwo sitzenzubleiben gleich 1 sein muß. Es soll also im Folgenden für die Verteilung der Wahrscheinlichkeit dafür, im Punkte  $x$  die erste Bewegungsphase abzuschließen, diese Exponentialfunktion benützt werden.

Im Abschnitt 1 haben wir angenommen, daß bei geeigneter Wahl der Einheiten für Weg und Zeit die Wahrscheinlichkeit zu

ruhen oder zu laufen in jedem Punkte gleich  $\frac{1}{2}$  ist. Wir dürfen daher ganz analog für die Wahrscheinlichkeit der Wartezeiten in der ersten Ruhephase das Gesetz

$$p(t) dt = e^{-t} dt \quad (4)$$

einführen.

In der Einleitung sagten wir, daß wir vernünftigerweise die Wahrscheinlichkeit, zu laufen oder liegenzubleiben auf dem Galton-schen Brett überall gleich annehmen müssen. Die Funktionen Gl. (3) und Gl. (4) geben daher auch für das Ende jeder beliebigen andern Lauf- resp. Ruhephase die Verteilung derjenigen Steine, die zu Anfang der Phase im gleichen Nullpunkt waren. Sind die betrachteten Steine zu Anfang der Phase in  $x_a$  resp.  $t_a$ , so bestimmt sich die Verteilung am Ende der Phase bei einer Laufphase zu

$$p(x) dx = e^{-(x-x_a)} dx \quad (5)$$

und bei einer Ruhephase zu

$$p(t) dt = e^{-(t-t_a)} dt \quad (6)$$

wobei sinngemäß  $x_a \leq x \leq \infty$  resp.

$t_a \leq t \leq \infty$  sein muß.

Um diese Exponentialfunktion, die für unsere weiteren Untersuchungen die Grundlage bildet, besser kennen zu lernen, wollen wir zunächst einmal den Schwerpunkt der Verteilungskurve berechnen. Zu diesem Zwecke bestimmen wir das erste Moment der Kurve bezogen auf den Nullpunkt

$$M_{1(x)} = \int_0^{\infty} x \cdot p(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} \cdot dx = 1! = 1^1). \quad (7)$$

Daraus berechnet sich der Abstand  $x_s$  des Schwerpunktes vom Nullpunkte

$$x_s = \frac{\int_0^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx}{\int_0^{\infty} p(x) dx} = \frac{1!}{1} = 1. \quad (8)$$

Ganz entsprechend erhalten wir für die Wartezeiten

---

1) Vergl. hierzu z. B. Peirce, Formel 493, Lit. 13.

$$(9) \quad M_1(t) = \int_0^{\infty} t \cdot p(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t} \cdot dt = 1! = 1$$

und daraus wieder den Abstand  $t_s$  des Schwerpunktes vom Nullpunkte

$$(10) \quad t_s = \frac{\int_0^{\infty} t \cdot p(t) dt}{\int_0^{\infty} p(t) dt} = \frac{1!}{1} = 1.$$

Wir sehen also, daß wir bei Verwendung des Gesetzes Gl. (3) und (4) den Mittelwert des Laufweges eines Steines in einer Phase als Einheit für die Längen und den Mittelwert der Wartezeiten in einer Phase als Einheit für die Zeit einführen müssen. Wir nennen im Folgenden diese Werte „Einzelaufweg“ und „Einzelwartezeit“. Andererseits erhalten wir dann bei gegebener Verteilung in den Einheiten für Länge und Zeit die mittleren Einzelaufwege und Einzelwartezeiten.

Man kann leicht sehen, daß der Schwerpunkt der ursprünglichen geometrischen Reihe, die wir durch die Exponentialfunktion ersetzt haben, auch im Abstände 1 vom Nullpunkt liegt. Es ist nämlich für die Reihen in Schnitt  $b-b$  und  $c-c$

$$M_1 = \sum x \cdot p(x) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{16} + \dots$$

Nun ist<sup>2)</sup>

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

Setzen wir  $x = 1/2$ , so wird

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit  $1/4$ , so ist

$$\frac{1}{4} \cdot 4 = \underline{1} = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{32} + \dots = \underline{\sum x \cdot p(x)}$$

was zu beweisen war.

Nun soll noch gezeigt werden, daß die Annahme der Wahrscheinlichkeit von  $1/2$  und  $1/2$  für Liegen oder Laufen auf das Re-

<sup>2)</sup> Vergl. z. B. Peirce, Formel 758, Lit. 13.



sultat keinen Einfluß hat. Nehmen wir also die Wahrscheinlichkeit für Laufen in jedem beliebigen Punkt mit  $b$  und diejenige für Liegen mit  $a$  an, wobei  $a + b = 1$  ist. Untersuchen wir einen unendlich benachbarten Parallelschnitt zur Wegaxe, so sind seine einzelnen Punkte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten behaftet (vergl. Fig. 3):  $a, ab, ab^2, ab^3, \dots, ab^n, \dots$  wobei wir die Zählung der Glieder mit 0 beginnen. Die Summe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a b^n = a \sum_{n=0}^{\infty} b^n = a \frac{1}{(1-b)} = 1$$

und das erste Moment  $M_1$  wird

$$\begin{aligned} M_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a \cdot b^n = a \sum_{n=0}^{\infty} n b^n = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b^{n+k} = a \sum_{n=1}^{\infty} b^n \sum_{k=0}^{\infty} b^k = \\ &= a \sum_{n=1}^{\infty} b^n \frac{1}{(1-b)} = \sum_{n=1}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b} - 1 = \frac{b}{1-b} = \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Da wir es wieder mit einer geometrischen Reihe zu tun haben,

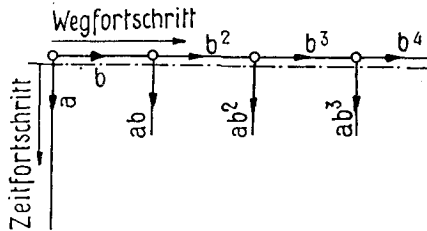


Fig. 3.

können wir mit demselben Rechte wie früher für die Ersatzkurve einen Exponentialansatz machen. Allgemein sei gesetzt

$$p(x) dx = A \cdot e^{-ax} dx.$$

Die beiden Konstanten ergeben sich aus den beiden Momenten

$$M_0 = \int_0^{\infty} p(x) dx = \frac{A}{a} = 1.$$

$$M_1 = \int_0^{\infty} x \cdot p(x) dx = \frac{A}{a^2} = \frac{b}{a} = \frac{1}{a} = \frac{1}{A}.$$

Unser Gesetz lautet also

$$p(x) dx = \frac{a}{b} e^{-\frac{a}{b} x} \cdot dx.$$

Führen wir nun als neue Einheit der Länge den mittleren Einzelaufweg  $M_1 = \frac{b}{a}$  ein, so wird mit der neuen Variablen  $y$

$$y = \frac{a}{b} \cdot x, \quad dy = \frac{a}{b} dx$$

$$p(x) dx = \frac{a}{b} e^{-y} \frac{b}{a} dy = e^{-y} dy,$$

und das ist dasselbe, was wir mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  erhielten. Damit ist also nachgewiesen, daß es für unsere weiteren Überlegungen vollständig genügt, die Wahrscheinlichkeiten für Laufen und Liegenbleiben je mit  $\frac{1}{2}$  anzunehmen, indem alle anderen Fälle durch bloße Änderung des Maßstabes in diesen Fall übergeführt werden können.

Im Folgenden werden wir stets zu unterscheiden haben, ob Längen resp. Zeiten in mittleren Einzelaufwegen resp. Einzelwartezeiten gemessen sind oder in Metern oder Sekunden. Der Einfachheit halber wollen wir bei Verwendung der Mittelwerte als Einheiten von „relativen“ Längen und Zeiten sprechen im Gegensatz zu den absoluten Maßen in m und sec. Auch in den Formeln wollen wir den Unterschied schon äußerlich zum Ausdruck bringen, indem wir die relativen Maße mit  $x$  und  $t$  bezeichnen, im Gegensatz zu  $\xi$  und  $\vartheta$  für die absoluten Werte.

Bezeichnen wir ferner die Mittelwerte für Einzelaufweg und Einzelwartezeit mit  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$ , so können wir die zwei folgenden Beziehungen aufstellen:

$$(11) \quad \begin{cases} \xi = \xi_0 \cdot x \\ \vartheta = \vartheta_0 \cdot t. \end{cases}$$

Es genügt jetzt, alle Überlegungen an den relativen Größen durchzuführen. Die Umrechnung auf die absoluten Werte in m und sec. kann dann nachträglich mit Hilfe der beiden Formeln (11) erfolgen.

### 3. Ableitung des Verteilungsgesetzes der Steine nach einer bestimmten Zeit T.

Betrachten wir wieder den Vorgang auf dem Galton'schen Brett, so können wir die Bewegung jedes einzelnen Steines durch eine Zickzacklinie darstellen. Hierbei bedeutet jedes Linienstück in Rich-

tung der Zeitaxe einen Zeitfortschritt und jedes Liniestück in Richtung der Wegaxe einen Wegfortschritt. Während man nach der gewöhnlichen Methode von einem gewissen Punkt ausgehend (z. B. vom Nullpunkt aus) alle Steine eine bestimmte Anzahl Einzelschritte laufen läßt und nachher die Verteilung dieser Steine untersucht, die alle gleich viele Einzelschritte gemacht haben, wollen wir untersuchen, wie die Verteilung der Steine ausfällt, wenn jeder am ersten, zweiten, . . .  $n$ -ten Knickpunkt seiner Bahn angelangt ist. (Wir sagten ja, die Bahn jedes Steines sei eine Zickzacklinie; sie hat daher Ecken oder Knickpunkte.)

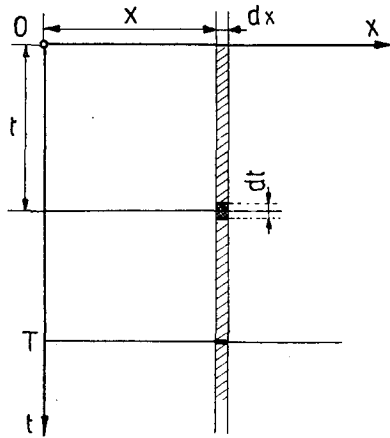


Fig. 4.

In der Einleitung sagten wir, daß die Steine zu Beginn ihrer Bewegung in das Wasser geworfen wurden, um dann eine gewisse Zeit der bewegenden Wirkung des Wassers ausgesetzt zu bleiben. Die Steine sind also im ersten Augenblick des Vorganges, d. h. wenn sie den Boden zuerst berührten, sicher in Bewegung, und wir dürfen also annehmen, daß jeder Stein mit einer Bewegungsphase beginnt. Nach vollendeter Bewegungsphase folgt die erste Ruhephase, und wir wollen zuerst einmal zeigen, welches die Verteilung der Steine nach dieser ersten Doppelphase der Bewegung ist. Die erste Bewegungsphase spielt sich längs der Wegaxe ab, und zwar haben wir schon im vorigen Abschnitt gezeigt, daß am Ende die Verteilung längs der  $x$ -Axe durch das Gesetz Gl. (3)

$$p(x) dx = e^{-x} dx$$

dargestellt werden kann. Betrachten wir nun ein Element  $dx$  im Abstände  $x$  vom Nullpunkt, so werden sich die darauf befindlichen  $e^{-x}dx$ -Steine während der folgenden Ruhephase längs einem rechteckigen Streifen über  $dx$  senkrecht zur Wegaxe und also parallel zur Zeitaxe nach demselben Exponentialgesetz weiterverteilen, so daß die flächenhafte Verteilung der Steine nach der ersten Doppelphase der Bewegung jedes einzelnen Steines durch folgendes Gesetz dargestellt werden kann (vergl. hierzu Fig. 4).

$$(12) \quad p(x, t) dx dt = e^{-x-t} dx dt.$$

Jetzt könnten wir auch die Verteilung nach der zweiten, nach der  $n$ -ten Doppelphase untersuchen, doch interessiert uns das nicht besonders, suchen wir doch letzten Endes die Verteilung zu einer bestimmten Zeit  $T$ .

Zu diesem Zwecke werden wir aber die Steine einteilen in solche, die die Zeit  $T$  in der ersten Doppelphase (oder, was dasselbe ist, in der ersten Ruhephase) treffen, in solche, die  $T$  in der zweiten, in der dritten, ... in der  $n$ -ten Doppelphase treffen.

Betrachten wir Fig. 4, so sehen wir ohne weiteres, daß von allen Steinen diejenigen  $T$  in der ersten Doppelphase treffen, deren  $t$  ( $t$  ist die Koordinate des Endpunktes der Doppelphase) größer ist als  $T$ , denn nur diese schneiden auf ihrer Bahn die  $T$ -Gerade. Andererseits können wir leicht aus derselben Figur den von der ersten Doppelphase resultierenden Anteil der Steine ablesen, die zur Zeit  $T$  in  $dx$  im Abstände  $x$  vom Nullpunkt liegen. Es sind nämlich alle diejenigen Steine des Streifens  $dx$  (in der Fig. 4 schraffiert), deren  $t$  größer ist als  $T$ . Ihre Gesamtzahl ist

$$p_{T_1}(x) dx = \int_{t=T}^{\infty} e^{-t-x} dx dt = e^{-x} dx e^{-T} = e^{-x-T} dx.$$

Hierin bedeutet  $p_{T_1}(x)dx$  die Anzahl der Steine auf der Länge  $dx$  der Geraden  $T$  (Index  $T$ ) im Abstände  $x$  von der Einwurfstelle, die gerade ihre erste Ruhephase beendet haben (Index 1).

Nun wollen wir diejenigen Steine betrachten, die in der  $(n+1)$ ten Ruhephase die Zeit  $T$  treffen. Fig. 5 zeigt die Bahn eines solchen Steines. Die eingekreisten Punkte sind die Endpunkte der einzelnen Doppelphasen und haben als Punkte der Weg-Zeit-

Ebene die Koordinaten  $x$  und  $t$ , die als Index die Nummer der letzten Doppelphase besitzen. Zunächst können wir für diese Zwischenkoordinaten folgende Bedingungen angeben:

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1}$$

$$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < T < t_{n+1}.$$

Der Stein, dessen Bewegung wir in Fig. 5 verfolgt haben, trifft die Gerade  $T$  im Punkte  $x_{n+1} = x$ , und wir stellen nun die Teilfrage: Welches ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Stein gerade auf diesem Wege vom Nullpunkt ausgehend im Punkte  $x$  die Linie  $T$  trifft?

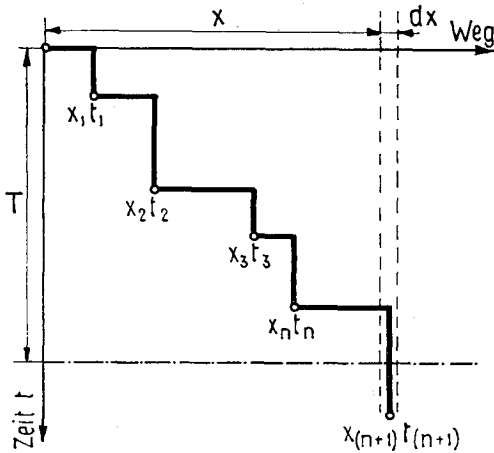


Fig. 5.

Wenn wir vorschreiben, daß der Stein den Weg beschreibe, der in Fig. 5 dargestellt ist, so muß er z. B. seine erste Doppelphase im Punkt 1 mit den Koordinaten  $x_1$  und  $t_1$  abschließen. Fassen wir Punkt 1 als mathematischen Punkt auf, so ist natürlich die Wahrscheinlichkeit, ihn zu treffen, gleich Null. Wir müssen vielmehr, um überhaupt von Wahrscheinlichkeiten sprechen zu können, einen ganzen Bereich angeben können, der die Koordinaten  $x_1$  und  $t_1$  hat, und das ist das Flächenelement  $dx_1 dt_1$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß der Stein dieses Flächenelement trifft, haben wir oben schon angegeben und zwar mit

$$e^{-x_1 - t_1} dx_1 dt_1.$$

Die Wahrscheinlichkeit, diesen Punkt zu treffen, können wir aber

auch auffassen als die Anzahl der Steine, die nach der ersten Doppelphase im Element  $dx_1 dt_1$  liegen. Diese Steine laufen nun ihre zweite Doppelphase durch. Der folgende Teil beendet diese zweite Doppelphase im Flächenelement  $dx_2 dt_2$  mit den Koordinaten  $x_2$  und  $t_2$

$$e^{-x_1-t_1} dx_1 dt_1 e^{-(x_2-x_1)-(t_2-t_1)} dx_2 dt_2 = e^{-x_2-t_2} dx_1 dt_1 dx_2 dt_2.$$

Entsprechend erhalten wir die Anzahl der Steine, die auf dem vorgeschriebenen Wege nach der  $(n + 1)$  ten Doppelphase in  $dx_{(n+1)} dt_{(n+1)}$  mit den Koordinaten  $x_{(n+1)}$  und  $t_{(n+1)}$  ankommen zu

$$e^{-x_{n+1}-t_{n+1}} dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n+1} dt_1 dt_2 dt_3 \dots dt_{n+1}.$$

Um nun alle Steine zu bekommen, die nach der  $(n + 1)$  ten Doppelphase im Element  $dx_{n+1} dt_{n+1}$  liegen, müssen wir über alle möglichen Wege vom Nullpunkt bis zum Element integrieren. Zu diesem Zwecke fassen wir alle verschiedenen  $x$  und  $t$  als unabhängige Variable auf und integrieren zunächst über  $x_1$  in den Grenzen von 0 bis  $x_2$  und über  $t_1$  von 0 bis  $t_2$ , da  $x_1 < x_2$  resp.  $t_1 < t_2$  ist.

Damit haben wir alle möglichen Lagen von Punkt 1 erschöpft und können nun Punkt 2 variieren lassen. Dies machen wir ganz analog durch Integration über  $x_2$  von 0 bis  $x_3$  resp. über  $t_2$  von 0 bis  $t_3$ . Genau gleich geht die Integration über die Koordinaten aller anderen Zwischenpunkte bis zum Punkte  $(n - 1)$ , für den wir über  $x_{n-1}$  von 0 bis  $x_n$  und über  $t_{n-1}$  von 0 bis  $t_n$  integrieren. Beim Punkte  $n$  tritt eine kleine Unregelmäßigkeit auf, indem wir über  $t_n$  nicht von 0 bis  $t_{n+1}$ , sondern nur von 0 bis  $T$  integrieren müssen, da ja  $t_n < T < t_{n+1}$  ist. Über  $x_n$  geht die Integration ganz normal von 0 bis  $x_{n+1}$ . Wir können also für die Summe aller Steine, die in der  $(n + 1)$  ten Doppelphase die  $T$ -Linie treffen und nach derselben im Element  $dx_{n+1} dt_{n+1}$  liegen, anschreiben:

$$\int_{x_n=0}^{x_{(n+1)}} \int_{t_n=0}^T \dots \int_{x_1=0}^{x_2} \int_{t_1=0}^{t_2} e^{-x_{n+1}-t_{n+1}} dx_1 dx_2 \dots dx_{n+1} dt_1 \dots dt_{n+1}$$

oder etwas anders geordnet

$$\left\{ e^{-x_{n+1}} dx_{n+1} \int_{x_n=0}^{x_{n+1}} dx_n \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_{x_1=0}^{x_2} dx_1 \right\} \left\{ e^{-t_{n+1}} dt_{n+1} \int_{t_n=0}^T dt_n \int_{t_{n-1}=0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_1=0}^{t_2} dt_1 \right\}$$

Beginnen wir nun mit der Auflösung der Integrale in der ersten

Klammer, und zwar mit dem innersten Integral, das den Wert

$$\int_{x_1=0}^{x_2} dx_1 = [x_1]_0^{x_2} = x_2 \quad \text{hat.}$$

Das nächste gibt

$$\int_{x_2=0}^{x_3} x_2 dx_2 = \left[ \frac{x_2^2}{2} \right]_0^{x_3} = \frac{x_3^2}{2} = \frac{x_3^2}{2!}.$$

Weiter wird

$$\int_{x_3=0}^{x_4} \frac{x_3^2}{2!} dx_3 = \left[ \frac{x_3^3}{3!} \right]_0^{x_4} = \frac{x_4^3}{3!}$$

und das vorletzte

$$\int_{x_{(n-1)}=0}^{x_n} \frac{x_{n-1}^{n-2}}{(n-2)!} dx_{(n-1)} = \left[ \frac{x_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \right]_0^{x_n} = \frac{x_n^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Hieraus ergibt sich der Wert der ersten Klammer zu

$$\left\{ e^{-x_{n+1}} dx_{n+1} \int_{x_n=0}^{x_{n+1}} \frac{x_n^{n-1}}{(n-1)!} dx_n \right\} = e^{-x_{n+1}} \frac{x_{n+1}^n}{n!} dx_{n+1}.$$

Die zweite Klammer berechnet sich ganz analog, wir wollen daher gleich das vorletzte Integral anschreiben

$$\int_{t_{(n-1)}=0}^{t_n} \frac{t_{n-1}^{n-2}}{(n-2)!} dt_{n-1} = \left[ \frac{t_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \right]_0^{t_n} = \frac{t_n^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Daraus der ganze Klammerausdruck

$$\left\{ e^{-t_{n+1}} dt_{n+1} \int_{t_n=0}^T \frac{t_n^{n-1}}{(n-1)!} dt_n \right\} = e^{-t_{n+1}} \frac{T^n}{n!} dt_{n+1}.$$

Somit haben wir also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Stein in der  $(n+1)$  ten Doppelphase die  $T$ -Linie trifft und nach derselben im Element  $dx_{n+1} dt_{n+1}$  liegt, als Produkt der beiden Klammerwerte bestimmt zu

$$e^{-x_{n+1}-t_{n+1}} \frac{x_{n+1}^n}{n!} \frac{T^n}{n!} dx_{n+1} dt_{n+1}.$$

Vergleichen wir Fig. 5, so sehen wir, daß wir die Anzahl derjenigen Steine, die die  $T$ -Linie in der  $(n+1)$  ten Doppelphase im Element  $dx$  treffen, nun leicht bestimmen können, indem wir  $x_{n+1}$  gleich  $x$  setzen und  $t_{n+1}$  alle Werte von  $T$  bis  $\infty$  annehmen lassen.

$$\int_{t_{n+1}=T}^{\infty} e^{-x-t_{n+1}} \frac{x^n T^n}{n! n!} dx dt_{n+1} = e^{-x} \frac{x^n T^n}{n! n!} dx \int_{t_{n+1}}^{\infty} e^{-t_{n+1}} dt_{n+1} \\ = e^{-x-T} \frac{x^n T^n}{n! n!} dx.$$

Lassen wir hierin  $n$  den Wert 0 annehmen, so erhalten wir die Anzahl derjenigen Steine, die das Element nach der ersten Doppelphase erreichen. Wir müssen daher, um alle Steine zu erhalten, die direkt nach derjenigen Doppelphase das betrachtete Element erreichen, in der sie die  $T$ -Linie treffen,  $n$  von 0 bis Unendlich variieren und die einzelnen Werte addieren:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-x-T} \frac{x^n T^n}{n! n!} dx = \\ (13) \quad p_T(x) dx = e^{-x-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n T^n}{n! n!} dx.$$

Der erste Faktor der Funktion ist uns schon gut bekannt als Verteilung der Steine nach einer Doppelphase [Gl. (12)]. Der Klammerausdruck ist dem Mathematiker wohl bekannt als nullte Bessel'sche Funktion mit rein imaginärem Argument, üblicherweise bezeichnet als  $J_0(i \cdot 2 \sqrt{xT})$ . Sie erinnert im Aufbau etwas an die Exponentialfunktion und hat auch einen ähnlichen Verlauf, steigt aber etwas langsamer.

Für die Auswertung ist es oft angenehmer, die Formel etwas umzuformen. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir den ersten Faktor mit  $e^{2\sqrt{xT}}$ , während wir den zweiten durch denselben Wert dividieren. Dann wird

$$(14) \quad p_T(x) \cdot dx = e^{-(\sqrt{x}-\sqrt{T})^2} \frac{J_0(i 2 \sqrt{xT})}{e^{2\sqrt{xT}}} dx = e^{-(\sqrt{x}-\sqrt{T})^2} \cdot F_0(2 \sqrt{xT}) dx.$$

Jetzt erkennen wir leicht in dem ersten Ausdruck die Gauss'sche Verteilungsfunktion. Der zweite Faktor ist nur von  $\sqrt{xT}$  abhängig



und zwar ist er für  $\sqrt{xT} = 0$  gleich 1, um bei zunehmendem Argument langsam abzunehmen und gegen 0 zu konvergieren. Das Diagramm Tafel I gibt den Verlauf der Funktion am besten.

Kennen wir den Wert  $T$ , der einem bestimmten Zeitpunkt entspricht, so können wir also jetzt für diesen die Verteilung der Steine mit Hilfe der oben erwähnten Tafel und einer solchen der Exponentialfunktion  $e^{-y}$ , die ja in sehr vielen Tabellenwerken zu finden ist, leicht aufstellen und aufzeichnen.

#### 4. Diskussion der Verteilungsfunktion.

Eine der hervorstechendsten Eigenschaften der Funktion Gl. (13) und (14) ist die Symmetrie in  $x$  und  $T$ . Wir wollen gleich zeigen, daß wir diese Symmetrie auf zwei verschiedene Arten deuten

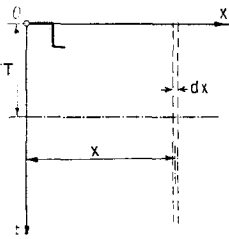


Fig. 6.

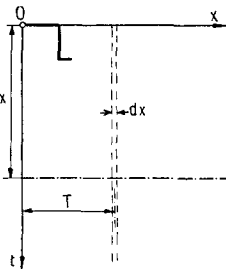


Fig. 7.

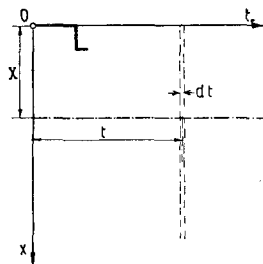


Fig. 8.

können. Zunächst sei in Figur 6 noch einmal die ursprüngliche Bedeutung von  $p_T(x)$  gegeben. Es sei  $dx$  ein Element der Geraden  $T$  im Abstand  $x$  von der  $t$ -Achse. Haben wir nun eine Verteilung längs dieser Geraden, so ist  $p_T(x) dx$  die Anzahl der Steine auf dem Element  $dx$ .

Die erste Möglichkeit für die Deutung der Symmetrie wird durch Figur 7 veranschaulicht. In dieser ziehen wir wieder eine Fanggerade parallel zur  $x$ -Achse, aber im Gegensatz zu früher im Abstand  $x$  von der  $x$ -Achse. Betrachten wir auf dieser Geraden wieder ein Element  $dx$ , das aber nunmehr im Abstände  $T$  von der  $t$ -Achse liegt, so ist die Verteilungsdichte im neuen Element  $dx$  gleich wie im Element  $dx$  der Figur 6. Wir können also sagen, daß die Verteilungsdichten auf Geraden parallel zur  $x$ -Achse bezogen auf Ele-

mente  $dx$  jeweils in Punkten gleich sind, die zur Winkelhalbierenden zwischen den beiden Axen symmetrisch liegen. Wesentlich ist dabei, daß wir die Verteilung unserer Ableitung gemäß längs Geraden betrachten, die parallel zu derjenigen Axe liegen, in deren Richtung der erste Schritt erfolgt ist.

Wenn wir eine zweite Möglichkeit für die Deutung der Symmetrie finden wollen, muß diese letztere Bedingung berücksichtigt werden. Diese zweite Möglichkeit besteht nun darin, daß man die Bedeutung der Axen vertauscht, wie es Figur 8 andeutet. Es handelt sich hier nämlich um einen Transportvorgang, bei dem jeder Stein mit einer Ruhephase beginnt. Also müssen alle betrachteten Steine zur Zeit 0 im Punkte 0 stillliegen. Dann lassen wir die bewegende Wirkung des Wassers beginnen und registrieren, wann jeder einzelne Stein den Querschnitt im Abstand  $X$  vom Nullpunkt passiert. Da wir mit relativen Maßen messen, ist es natürlich ohne weiteres zugänglich, das Element mit  $dt$  statt mit  $dx$  zu bezeichnen. Wir können also allein auf der Symmetrie unserer Formel aufbauend folgenden Satz aussprechen:

Die zeitliche Verteilung  $p_X(t) dt$ , mit der eine Anzahl anfänglich in einem bestimmten Punkte ruhende Steine den Endpunkt einer bestimmten Strecke  $X$  erreichen, ist gleich der örtlichen Verteilung  $p_T(x) dx$  derselben Anzahl Steine zur Zeit  $T$ , nachdem sie zur Zeit 0 im Querschnitt 0 ins Wasser geworfen worden sind. Bei unserer speziellen Untersuchung spielt diese Symmetrie zwar keine Rolle, doch kann es unter Umständen interessant sein, diese beiden Deutungen der Symmetrie zu kennen.

Unsere  $p_T$ -Kurve gibt uns die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Stein zur Zeit  $T$  an einer bestimmten Stelle  $x$  liegt. Integrieren wir nun diese Wahrscheinlichkeiten über die ganze Länge von 0 bis  $\infty$ , so muß die Wahrscheinlichkeit irgendwo zu liegen gleich 1 sein. Es ist in der Tat<sup>3)</sup>

$$(15) \quad \int_0^{\infty} p_T \cdot dx = e^{-T} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx \right\} = e^{-T} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left[ \frac{n!}{n!} \right] \right\} \\ = e^{-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} = e^{-T} \cdot e^T = 1.$$

<sup>3)</sup> Vergl. hierzu z. B. Peirce, Formel 493, Lit. 13.

Daß das Integral Gl. (15) den Wert 1 hat, dürfen wir als eine erste Kontrolle unserer Ableitung ansehen; später werden noch weitere folgen.

Um die Verteilungsfunktion zahlenmäßig besser kennen zu lernen, wollen wir nun zunächst den Schwerpunkt der Verteilung bestimmen, und damit den mittleren Laufweg der Steine in der Zeit  $T$ . Zu diesem Zwecke berechnen wir das erste Moment der Verteilung bezogen auf den Nullpunkt

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \int_0^{\infty} p_T(x) \cdot x \cdot dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n e^{-T}}{n! n!} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{n+1} \cdot dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n e^{-T}}{n! n!} (n+1)! = \\
 &= e^{-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n \cdot (n+1)}{n!} = e^{-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dT} \frac{(T^{n+1})}{n!} = \\
 &= e^{-T} \frac{d}{dT} T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \\
 &= e^{-T} \cdot \frac{d}{dT} (T \cdot e^T) = e^{-T} \cdot e^T + e^{-T} \cdot T \cdot e^T \\
 M_1 &= \int_0^{\infty} p_T(x) \cdot x \cdot dx = 1 + T. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Aus  $M_1$  erhalten wir die Lage des Schwerpunktes ohne weiteres durch Division durch

$$\int_0^{\infty} p_T(x) dx = 1.$$

Es ist also

$$x_s = 1 + T. \tag{17}$$

Der nächste Ausdruck, den wir bilden wollen, ist

$$\begin{aligned}
 M_2 &= \int_0^{\infty} p_T(x) \cdot x^2 \cdot dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n \cdot e^{-T}}{n! n!} \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{n+2} \cdot dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n \cdot e^{-T}}{n! n!} (n+2)! = \\
 &= e^{-T} \frac{d^2}{dT^2} \left( T^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \right) = e^{-T} \frac{d^2}{dT^2} (T^2 e^T) = \\
 &= e^{-T} \frac{d}{dT} [e^T (2T + T^2)] \\
 &= e^{-T} [e^T (2T + T^2 + 2 + 2T)]
 \end{aligned}$$

$$(18) \quad M_2 = \int_0^{\infty} p_T(x) \cdot x^2 \cdot dx = 2 + 4T + T^2.$$

Daraus erhalten wir das Schwankungsmaß  $\sigma_x$  um den Schwerpunkt mit  $x_s = T + 1$  zu

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{\int_0^{\infty} p_T(x) \cdot [x - T - 1]^2 \cdot dx}{\int_0^{\infty} p_T(x) \cdot dx} = \\ &= \frac{\int_0^{\infty} p_T(x) \cdot x^2 \cdot dx - 2(T+1) \int_0^{\infty} p_T(x) \cdot dx + (T+1)^2 \int_0^{\infty} p_T(x) \cdot dx}{1} = \\ &= (2 + 4T + T^2) - 2(T+1)(T+1) + (T+1)^2 \cdot 1 = \\ &= 2 + 4T + T^2 - T^2 - 2T - 1 \end{aligned}$$

$$(19) \quad \sigma_x^2 = (2T + 1).$$

Außer dem mittleren Weg und dem Schwankungsmaß interessiert uns bei einer Häufigkeitskurve in erster Linie noch die Summenfunktion, also das Integral

$$S_x = \int_0^x p_T(x) \cdot dx = \int_0^x e^{-x-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n T^n}{n! n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-T} \frac{T^n}{n!} \int_0^x e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx$$

Nun wollen wir zuerst den Wert dieses Integrals bestimmen, und zwar wird<sup>4)</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx &= \left[ -\frac{x^n e^{-x}}{n!} \right]_0^x + \frac{n}{n!} \int_0^x x^{n-1} e^{-x} dx = \\ &= \left[ -\frac{x^n}{n!} e^{-x} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} e^{-x} - \dots - \frac{x^0}{0!} e^{-x} \right]_0^x = \\ &= -e^{-x} \left[ \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{x^0}{0!} \right] + e^0 (0 + 0 + \dots + 1) = \\ &= 1 - e^{-x} \left[ \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{x^0}{0!} \right]. \end{aligned}$$

Setzen wir diesen Wert in den Ausdruck für  $S_x$  ein, so erhalten wir

<sup>4)</sup> Vergl. z. B. Peirce, Formel No. 403.

$$\begin{aligned}
 S_x &= \int_0^x p_T(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-T} \frac{T^n}{n!} \left\{ 1 - e^{-x} \left( \frac{x^n}{n!} + \dots + 1 \right) \right\} \\
 &= e^{-T} \cdot e^T - e^{-x-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 \right) \\
 S_x &= \int_0^x p_T(x) dx = 1 - e^{-x-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 \right). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Da sich dieser Ausdruck nur sehr schwer tabellarisch darstellen läßt, eignet er sich für den häufigen Gebrauch nicht. Insbesondere scheint es im Gegensatz zur Gauss'schen Verteilung unmöglich, den Wert  $S_x$  als eine Funktion von einer einfachen Kombination von  $x$  und  $T$  darzustellen. Wir werden also bei der Auswertung empirisch bestimmter Verteilungen anders vorgehen müssen, als wir es von der Binomialkurve her gewöhnt sind. Während nämlich dort fast ausschließlich mit Hilfe des Wertes  $S_x$  gearbeitet wird, werden wir in der Hauptsache die Momente  $M_1$  und  $M_2$  brauchen, wie später gezeigt wird.

## 5. Zusammenhang zwischen der Verteilungsfunktion und der Binomialkurve.

Um den gesuchten Zusammenhang zu finden, müssen wir uns zuerst vergegenwärtigen, welche eigentlich die wesentlichen Grundlagen in der Ableitung der Binomialkurve sind.

Wie schon in früheren Abschnitten gesagt, geht man bei der Ableitung der Binomialkurve von demselben Galton'schen Brett aus, das auch wir verwendet haben. In diesem Verteilungsfelde werden Fanggerade betrachtet, die sehr weit vom Nullpunkt entfernt sind (erste Einschränkung). Auf diesen untersucht man die Gegend der größten Ordinaten (zweite Einschränkung) und geht für diese Gegend auf ein kontinuierliches Verteilungsgesetz über. Das von uns abgeleitete Verteilungsgesetz Gl. (13) und (14) macht diese beiden Einschränkungen nicht. Es muß also möglich sein, durch Einführung dieser Einschränkungen in unsere (sagen wir allgemeinere) Formel, die Binomialkurve zu erhalten.

Die erste Einschränkung heißt in unserem Falle, daß  $T$  sehr groß ist. Die zweite heißt, daß  $x$  auch groß ist und zwar hat es dieselbe Größenordnung wie  $T$ . Um das Gesetz der Binomialkurve zu erhalten, müssen wir das Schwankungsmaß  $s_x$  als Längeneinheit einführen, und setzen demnach

$$(21) \quad x = T + \sqrt{2T} \cdot y = T \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{T}} y \right).$$

Hierbei ist zu beachten, daß wir den Mittelwert zu  $(T + 1)$  und das Schwankungsmaß zu  $\sqrt{2T + 1}$  ermittelt haben, daß wir aber 1 gegenüber dem großen Werte  $T$  vernachlässigen dürfen, sodaß  $(T + 1) \approx T$  und  $\sqrt{2T + 1} \approx \sqrt{2T}$  wird.  $y$  ist eine neue Variable. Bevor wir aber diesen Wert in die Verteilungsfunktion einsetzen, wollen wir zuerst in der Gl. (13) die Bessel'sche Funktion für große Werte von  $\sqrt{xT}$  entwickeln. Es ist nämlich nach der halbkonvergenten Reihe von Hankel<sup>5)</sup> zu setzen

$$J_p(r \cdot i^{\pm \varrho}) \approx \frac{e^y}{\sqrt{2\pi r}} i^{\pm(p + \frac{1-\varrho}{2} - \xi)}. S_p(2ri^{\pm(1+\varrho)})$$

und in unserem Falle, wo  $\xi = 0$ ;  $y = r = 2\sqrt{xT}$ ;  $\varrho = 1$  und  $p = 0$  ist, wird

$$J_0(i \cdot 2\sqrt{xT}) \approx \frac{e^{2\sqrt{xT}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{xT}}} i^{\pm(0+0+0)}. S_p(2ri^{\pm(1+\varrho)})$$

und da  $S_p = 1$  für großes  $r$  ist, wird

$$J_0(i2\sqrt{xT}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n T^n}{n! n!} \approx \frac{e^{2\sqrt{xT}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{xT}}}.$$

Setzen wir das in Gl. (14) ein, so wird

$$p_T(x) dx \approx e^{-(\sqrt{x} - \sqrt{T})^2} \cdot \frac{dx}{e^{2\sqrt{xT}}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{xT}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{xT}}} = \frac{e^{-(\sqrt{x} - \sqrt{T})^2}}{\sqrt{4\pi\sqrt{xT}}} dx.$$

Hierin setzen wir für  $x$  den Wert  $T \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot y \right)$  (vergl. oben) und erhalten für große  $T$

<sup>5)</sup> Vergl. z. B. Jahnke-Emde, S. 203—204, Lit. 14.

$$\sqrt{x} = \sqrt{T} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{T}} y\right)^{1/2} \approx \sqrt{T} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{T}} y\right) = \sqrt{T} + \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Hieraus wird

$$\sqrt{x} - \sqrt{T} = \frac{y}{\sqrt{2}}; \quad \underline{(\sqrt{x} - \sqrt{T})^2 = \frac{y^2}{2}}.$$

Andererseits erhalten wir aus dem Ausdruck für  $\sqrt{x}$

$$\sqrt{xT} = T \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{T}} y\right)$$

$$\underline{\sqrt{xT}} \approx \sqrt{T} \left(1 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{T}} y\right) = \sqrt{T} + \frac{y}{\sqrt{8}} \approx \underline{\sqrt{T}}$$

für großes  $T$ . Setzen wir die beiden unterstrichenen Ausdrücke ein, so wird

$$(22) \quad p_T(x) dx = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{4\pi} \sqrt{T}} \sqrt{2T} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Wir sehen also, daß durch Berücksichtigung der Größe von  $T$  unsere Verteilungsfunktion in der Nähe der größten Ordinaten in die klassische Form der Gauss'schen Kurve übergeht. Das heißt aber nichts anderes, als daß unsere Verteilungsfunktion die Binomialkurve als Grenzfall in sich schließt. Diese Tatsache dürfen wir als eine sehr gute Kontrolle und Bestätigung unserer Ableitung auffassen, da sich ja bekanntlich die Binomialkurve in Wahrscheinlichkeitsproblemen als Verteilungsfunktion schon vielfach bewährt hat.

## 6. Zusammenhang zwischen der Verteilungsfunktion und der Poissonschen Wahrscheinlichkeitsverteilung<sup>6)</sup>.

Die Poisson'sche Verteilung seltener Ereignisse läßt sich etwa folgendermaßen formulieren:

Ist die durchschnittliche Trefferzahl  $d$  sehr klein gegenüber der Beobachtungszahl  $n$ , so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Trefferzahl gleich  $r$  ausfällt

<sup>6)</sup> Die Lektüre dieses Kapitels ist für das Verständnis der weiteren nicht unbedingt nötig.

$$P_r = \frac{d^r}{r!} e^{-d}.$$

Dieser Ausdruck  $P_r$  hat nur dann nicht sehr kleine Werte, wenn  $r$  sich nicht allzuweit von der durchschnittlichen Trefferzahl  $d$  entfernt und gilt auch nur in der Umgebung von  $d$ , da in der Ableitung angenommen ist, die Beobachtungszahl  $n$  sei sehr groß gegenüber der Trefferzahl  $r$ .

Vergleichen wir unsere Formeln Gl. (13) und (14) mit der Binomialkurve, so sehen wir leicht ein, daß der großen Zahl von Einzelschritten bei der Binomialkurve die Einführung ungleich großer Einzelschritte bei uns entspricht. Es scheint, daß diese beiden Anordnungen als Hilfsmittel für den Grenzübergang gleichwertig sind.

Wollen wir nun auf die Poisson'sche Formel kommen, so müssen wir dieser Überlegung folgend in der Zeitrichtung, in der wir nach Poisson sehr viele, kleine Schritte ausführen müssen, unsere variable Schrittgröße anwenden, während wir in der Wegrichtung lauter gleiche Schritte annehmen müssen, genau wie bei Poisson. Führen wir nach diesen Gesichtspunkten die Ableitung der Wahrscheinlichkeitsverteilung neu durch, und suchen wir wieder die nunmehr auf einzelne Punkte beschränkte Verteilung der Steine zur Zeit  $T$ .

Zunächst ist für alle Steine (die Überlegungen wollen wir an unserem Beispiel der laufenden Steine durchführen, unabhängig davon, ob sie nachher hierbei wirklich Anwendung finden)  $x$  und  $t$  gleich Null. Wir beginnen mit einer Ruhephase<sup>7)</sup>.  $p_0(t_0)$  gibt die Verteilung der Enden dieser ersten Ruhephase. Es ist

$$x = 0 \\ p_0(t_0) \cdot dt_0 = e^{-t_0} \cdot dt_0$$

und die Anzahl derjenigen Steine, die die Zeit  $T$  im Punkte  $x = 0$  erleben, deren  $t_0$  also größer als  $T$  ist, ergibt sich zu

$$\int_T^\infty p_0(t_0) dt_0 = \int_T^\infty e^{-t_0} dt_0 = e^{-T}.$$

---

<sup>7)</sup> Der Beginn mit einer Ruhephase ist, wie später leicht einzusehen ist, für die Ableitung unwesentlich im Gegensatz zu Kap. 3, wo die Art des ersten Schrittes maßgebend ist.



Nun kommt die erste Bewegungsphase, in der alle Steine von  $x = 0$  bis  $x = 1$  laufen. Die zeitliche Verteilung ist dabei natürlich dieselbe geblieben. Nun folgt die zweite Ruhephase, aber nur für die Steine mit  $t_0$  kleiner als  $T$ . Nachher ist

$$x = 1$$

und nach Gl. (6) für alle Steine mit  $t_1 < T$  die Verteilungsdichte  $p_1(t_1) dt_1$

$$\begin{aligned} p_1(t_1) dt_1 &= \int_{t_0=0}^{t_1} p_0(t_0) dt_0 e^{-(t_1-t_0)} dt_1 = \int_{t_0=0}^{t_1} e^{-t_0} \cdot dt_0 \cdot e^{-(t_1-t_0)} dt_1 = \\ &= \int_{t_0=0}^{t_1} e^{-t_1} \cdot dt_1 dt_0 = t_1 e^{-t_1} dt_1 \end{aligned}$$

und für die Steine mit  $t_1 > T$  wird die Verteilungsdichte  $p_1'(t_1) dt_1$

$$\begin{aligned} p_1'(t_1) dt_1 &= \int_{t_0=0}^T p_0(t_0) dt_0 e^{-(t_1-t_0)} dt_1 = \int_{t_0=0}^T e^{-t_0} \cdot dt_0 \cdot e^{-(t_1-t_0)} dt_1 = \\ &= \int_{t_0=0}^T e^{-t_1} dt_1 dt_0 = T e^{-t_1} dt_1. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Anzahl derjenigen Steine, die die Zeit  $T$  im Punkte 1 erleben zu

$$\int_T^\infty p_1'(t_1) dt_1 = \int_T^\infty T \cdot e^{-t_1} dt_1 = T e^{-T}.$$

Nun folgt die zweite Bewegungsphase; nach dieser ist

$$x = 2.$$

Nach der darauf folgenden Ruhephase erhalten wir die zeitliche Verteilung  $p_2(t_2) dt_2$  ähnlich wie oben für die Steine mit  $t_2 < T$

$$\begin{aligned} p_2(t_2) dt_2 &= \int_{t_1=0}^{t_2} p_1(t_1) dt_1 e^{-(t_2-t_1)} dt_2 = \int_{t_1=0}^{t_2} t_1 e^{-t_1} dt_1 e^{-(t_2-t_1)} dt_2 = \\ &= \int_{t_1=0}^{t_2} t_1 e^{-t_2} dt_2 dt_1 = \frac{t_2^2}{2!} e^{-t_2} dt_2 \end{aligned}$$

und für die Steine mit  $t_2 > T$  wird die Verteilungsdichte  $p_2'(t_2) dt_2$

$$\begin{aligned} p_2'(t_2) dt_2 &= \int_{t_1=0}^T p_1(t_1) dt_1 e^{-(t_2-t_1)} dt_2 = \int_{t_1=0}^T t_1 e^{-t_1} dt_1 e^{-(t_2-t_1)} dt_2 = \\ &= \int_{t_1=0}^T t_1 e^{-t_2} dt_2 dt_1 = \frac{T^2}{2!} e^{-t_2} dt_2 \end{aligned}$$

und die Anzahl derjenigen Steine, die die Zeit  $T$  im Punkte 2 erleben, wird

$$\int_T^\infty p_2'(t_2) dt_2 = \int_T^\infty \frac{T^2}{2!} e^{-t_2} dt_2 = \frac{T^2}{2!} e^{-T}.$$

Ganz analog sind zur Zeit  $T$  im Punkte  $r$

$$(23) \quad \int_T^\infty p_r'(t_r) dt_r = \frac{T^r}{r!} e^{-T}$$

Steine und dies ist genau der Ausdruck der Poisson'schen Formel.

Die Gleichung (23) läßt sich zwar nicht aus unserer fertigen Formel (13) ableiten, aber doch mit Hilfe der Methode der veränderlichen Schrittgröße [Gl. (3) und (4) resp. (5) und (6)], die die Grundlage unserer Formeln (13) und (14) bildet. Wir dürfen also darin, daß wir so die Poisson'sche Formel finden können, wenigstens eine Bestätigung unserer Methode und unserer Annahmen sehen.

Aus unserer Ableitung der Poisson'schen Formel sehen wir sehr schön ihren Geltungsbereich im Gegensatz zu dem unserer neuen Formel Gleichung (13) und (14).

## 7. Auswertung der Zahlenbeispiele.

Wie in der Einleitung bereits gesagt, sind in den Versuchen über Geschiebepbewegung Verteilungskurven von einzeln kenntlich gemachten Geröllen aufgenommen worden. D. h., wir kennen jeweils für eine Anzahl gleichwertiger Steine die gemeinsame Laufzeit  $\Theta$  in Sekunden, sowie für jeden einzelnen den zugehörigen Laufweg  $\xi$  in Metern. Um nun für so eine Verteilung die unserer Gleichung (13) oder (14) entsprechende Funktion angeben zu können, müssen wir auf irgend eine Art und Weise noch die Größen  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  bestimmen,

da ja sowohl Gl. (13) wie Gl. (14) nur die relativen Größen  $x$  und  $T$  enthalten [vergl. Gl. (11)]. Wir sagten bereits bei der Diskussion der Gleichungen, wir würden im Gegensatz zur Gauss'schen Verteilungsfunktion nicht mit dem Integralwert arbeiten, sondern zur Bestimmung der beiden gesuchten Konstanten die Momente  $M_1$  und  $M_2$  zu Hilfe ziehen. Schreiben wir die Momente in relativen Maßen an:

$$M_1 = \int_0^{\infty} p_T(x) \cdot x \cdot dx = 1 + T \quad (16)$$

$$M_2 = \int_0^{\infty} p_T(x) x^2 dx = [2 + 4T + T^2]. \quad (18)$$

Nach Gl. (11) setzen wir ohne weiteres

$$x = \frac{\xi}{\xi_0} \quad \text{und} \quad T = \frac{\Theta}{\mathfrak{g}_0}$$

Daraus ist leicht abzuleiten

$$x^2 = \frac{\xi^2}{\xi_0^2} \quad \text{und} \quad dx = \frac{d\xi}{\xi_0}.$$

Und nun zur Umrechnung der Funktion  $p_T(x) dx$ . Wir definieren eine neue Funktion  $\pi_T(\xi) d\xi$  derart, daß

$$p_T(x) dx = \pi_T(\xi) d\xi$$

wird. Aus der oben angegebenen Relation zwischen  $dx$  und  $d\xi$  ergibt sich direkt

$$p_T(x) \frac{d\xi}{\xi_0} = \pi_T(\xi) d\xi$$

oder gekürzt

$$p_T(x) = \xi_0 \pi_T(\xi). \quad (24)$$

Setzen wir diese Größe ein, so lauten die Ausdrücke für die beiden ersten Momente

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^{\infty} p_T(x) x dx = \int_0^{\infty} \xi_0 \pi_T(\xi) \frac{\xi}{\xi_0} \frac{d\xi}{\xi_0} = \frac{1}{\xi_0} \int_0^{\infty} \pi_T(\xi) \xi d\xi = \\ M_1 &= \frac{1}{\xi_0} \int_0^{\infty} \pi_T(\xi) \xi d\xi = 1 + T = 1 + \frac{\Theta}{\mathfrak{g}_0} \end{aligned} \quad (25)$$

und

$$M_2 = \int_0^\infty p_T(x) x^2 dx = \int_0^\infty \xi_0 \pi_T(\xi) \frac{\xi^2}{\xi_0^2} \frac{d\xi}{\xi_0} = \frac{1}{\xi_0^2} \int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi^2 d\xi =$$

$$(26) \quad M_2 = \frac{1}{\xi_0^2} \int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi^2 d\xi = 2 + 4T + T^2 = 2 + 4 \frac{\Theta}{g_0} + \frac{\Theta^2}{g_0^2}.$$

Aus den beiden Gleichungen (25) und (26) lassen sich  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  berechnen. Gl. (25) gibt

$$\int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi d\xi = \xi_0 \left(1 + \frac{\Theta}{g_0}\right)$$

$$\int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi d\xi + \xi_0 = \xi_0 \left(2 + \frac{\Theta}{g_0}\right).$$

Quadrieren wir die letzte Gleichung

$$\xi_0^2 + 2 \xi_0 \int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi d\xi + \left[ \int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi d\xi \right]^2 = \xi_0^2 \left(4 + 4 \frac{\Theta}{g_0} + \frac{\Theta^2}{g_0^2}\right).$$

Aus Gl. (26) erhalten wir

$$2 \xi_0^2 + \int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi^2 d\xi = \xi_0^2 \left(4 + 4 \frac{\Theta}{g_0} + \frac{\Theta^2}{g_0^2}\right).$$

Setzen wir die beiden linken Seiten einander gleich

$$\xi_0^2 - 2 \xi_0 \int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi d\xi + \left[ \int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi^2 d\xi - \left\{ \int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi d\xi \right\}^2 \right] = 0.$$

Bezeichnen wir die beiden Integralwerte, die jetzt in absoluten Einheiten gemessen sind, analog den früheren Bezeichnungen mit  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , so wird

$$\xi_0^2 - 2 \xi_0 \mu_1 + [\mu_2 - \mu_1^2] = 0$$

$$(27) \quad \xi_0 = \mu_1 \pm \sqrt{2\mu_1^2 - \mu_2}.$$

Für die Bestimmung von  $\vartheta_0$  schreiben wir wieder die Gleichung (25) an

$$\frac{\mu_1}{\xi_0} = 1 + \frac{\Theta}{g_0}$$

oder

$$\frac{\mu_1 - \xi_0}{\xi_0} = \frac{\Theta}{g_0} = \frac{\mp \sqrt{2\mu_1^2 - \mu_2}}{\mu_1 \pm \sqrt{2\mu_1^2 - \mu_2}} = \frac{1}{\frac{\mu_1}{\mp \sqrt{2\mu_1^2 - \mu_2}} - 1}$$

daraus

$$g_0 = \Theta \left[ \frac{\mu_1}{\mp \sqrt{2\mu_1^2 - \mu_2}} - 1 \right] = \Theta \left[ \frac{1}{\mp \sqrt{2 - \frac{\mu_2}{\mu_1^2}}} - 1 \right]. \quad (28)$$

Diese beiden Werte lassen sich leicht kontrollieren, indem sie in der Gleichung (26) (für  $M_2$ ) eingesetzt diese befriedigen müssen, was sie tatsächlich auch tun.

Bezüglich des Vorzeichens der Klammerwerte in Gl. (27) und (28) kann man vorschreiben, daß sowohl  $\xi_0$  wie  $g_0$  als Maßzahlen positiv sein müssen. Aus Gl. (28) sehen wir, daß  $g_0$  nur positiv werden kann, wenn wir das untere Vorzeichen einsetzen. Da nämlich  $\Theta$  positiv ist, muß auch die Klammer positiv sein, was sie nur werden kann, wenn auch die Wurzel positiv ist. Damit lauten die beiden Gleichungen

$$\xi_0 = \mu_1 - \sqrt{2\mu_1^2 - \mu_2} \quad (27a)$$

$$g_0 = \Theta \left[ \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{\mu_2}{\mu_1^2}}} - 1 \right]. \quad (28a)$$

Etwas anders werden die Ausdrücke, wenn man statt des zweiten Momentes bezogen auf den Nullpunkt das entsprechende Moment bezogen auf den Schwerpunkt verwendet. In diesem Falle ist:

$$M_1 = \int_0^\infty p_T(x) x dx = \frac{1}{\xi_0} \int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi d\xi = 1 + \frac{\Theta}{g_0} \quad (25)$$

und

$$\begin{aligned} M_{2s} &= \int_0^\infty p_T(x) [x - x_s]^2 dx = \frac{1}{\xi_0^2} \int_0^\infty \pi_T(\xi) [\xi - \xi_s]^2 d\xi = \\ &= 1 + 2T = 1 + 2 \frac{\Theta}{g_0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Wieder erhalten wir aus den beiden Gleichungen durch einfache Umformung

$$\begin{aligned} 2\xi_0 \int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi d\xi &= 2\xi_0^2 + 2\xi_0^2 \frac{\Theta}{g_0} \\ \int_0^\infty \pi_T(\xi) \cdot [\xi - \xi_s]^2 d\xi &= \xi_0^2 + 2\xi_0^2 \frac{\Theta}{g_0} \end{aligned}$$

und durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten

$$\xi_0^2 - \xi_0 \cdot 2 \int_0^\infty \pi_T(\xi) \xi d\xi + \int_0^\infty \pi_T(\xi) \cdot [\xi - \xi_0]^2 d\xi = 0$$

oder unter Verwendung der früheren Bezeichnungen

$$\xi_0^2 - 2\mu_1 \xi_0 + \mu_{2s} = 0$$

woraus wir erhalten

$$(30) \quad \xi_0 = \mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - \mu_{2s}}.$$

Bestimmen wir wieder  $\vartheta_0$  aus der Gleichung (25)

$$\frac{1}{\xi_0} \mu_1 = 1 + \frac{\Theta}{\vartheta_0}$$

woraus

$$(31) \quad \vartheta_0 = \Theta \frac{1}{\frac{\mu_1}{\xi_0} - 1} = \Theta \frac{\xi_0}{\mu_1 - \xi_0} = \Theta \frac{\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - \mu_{2s}}}{\mp \sqrt{\mu_1^2 - \mu_{2s}}}$$

$$= \Theta \left[ \mp \frac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2 - \mu_{2s}}} - 1 \right] = \Theta \left[ \frac{1}{\mp \sqrt{1 - \frac{\mu_{2s}}{\mu_1^2}}} - 1 \right].$$

Aus denselben Überlegungen wie bei den Formeln (27) und (28) müssen auch bei den Formeln (30) und (31) die unteren Vorzeichen vor den Wurzelausdrücken eingesetzt werden. So erhalten wir die endgültigen Gleichungen

$$(30a) \quad \xi_0 = \mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - \mu_{2s}}$$

$$(31a) \quad \vartheta_0 = \Theta \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu_{2s}}{\mu_1^2}}} - 1 \right].$$

Aus Gl. (30 a) sehen wir, daß eine positive Lösung für  $\xi_0$  nur möglich ist, wenn

$$\mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - \mu_{2s}} > 0$$

oder

$$\mu_1 > \sqrt{\mu_1^2 - \mu_{2s}}$$

$$\mu_1^2 > \mu_1^2 - \mu_{2s}$$

oder wenn

$$\mu_{2s} > 0$$

ist, was es als quadratisches Moment immer ist.

Aus Gl. (31 a) erhalten wir ein positives  $\vartheta_0$ , wenn

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu_{2s}}{\mu_1^2}}} - 1 \right] > 0$$

oder

$$1 > + \sqrt{1 - \frac{\mu_{2s}}{\mu_1^2}}.$$

Dies ist sicher der Fall, da sowohl  $\mu_1^2$  wie  $\mu_{2s}$  positiv sind. Damit eine reelle Lösung möglich ist, muß

$$\mu_1^2 > \mu_{2s} \quad (32)$$

sein, was eine wesentliche Eigenschaft unserer Kurve darstellt. Verteilungen, die dieser Bedingung nicht genügen, lassen sich durch die Formeln Gl. (13) und (14) nicht darstellen.

Aus Gl. (28) können wir ganz analog ableiten, daß für ein reelles  $\vartheta_0$

$$1 > \sqrt{2 - \frac{\mu_2}{\mu_1^2}}$$

sein muß.

Schreiben wir den Ausdruck anders, so muß

$$1 > \sqrt{1 - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\mu_1^2}}$$

sein. Da aber  $\mu_2 - \mu_1^2$  nichts anderes ist als  $\mu_{2s}$ , sagt diese Bedingung nichts Neues aus.

Es empfiehlt sich, die Ausdrücke Gl. (30 a) und (31 a) zu verwenden, nicht etwa weil sie einfacher wären, sondern weil die Zahlen kleiner sind, und die aus der Ausrechnung sich ergebenden Rechengenauigkeiten wesentlich heruntergedrückt werden können (es entspricht das der Wahl günstiger oder ungünstiger Grundsysteme bei der Berechnung statisch unbestimmter Aufgaben).

In den vorstehenden Formeln bedeuten:

- $x$  den Laufweg eines Steines gemessen in mittleren Einzellaufwegen.
- $\xi$  den Laufweg eines Steines gemessen in Metern.
- $\xi_0$  den mittleren Einzellaufweg in Metern.
- $T$  die gemeinsame Laufzeit gemessen in mittleren Einzelleizeit.
- $\theta$  die gemeinsame Laufzeit in Sekunden.

- $\vartheta_0$  die mittlere Einzelliegezeit in Sekunden.  
 $M_n$  das  $n$ -te Moment der Verteilung bezogen auf den Nullpunkt gemessen in mittleren Einzellaufwegen.  
 $M_{ns}$  das entsprechende Moment bezogen auf den Schwerpunkt.  
 $\mu_n$  das  $n$ -te Moment der Verteilung bezogen auf den Nullpunkt gemessen in Metern.  
 $\mu_{ns}$  das entsprechende Moment bezogen auf den Schwerpunkt.

Damit ist die erste Aufgabe, die sich im Zusammenhang mit den Formeln Gl. (13) und (14) in praktischen Fällen stellt, gelöst. Es ist nämlich die Bestimmung der Konstanten  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$ , nach denen sich eine bestimmte Art von Steinen in einem bestimmten Wasserabfluß bewegt. Mit Hilfe dieser Konstanten können wir dann für jeden beliebigen Zeitpunkt  $T$  oder  $\Theta$  vom Beginn der Bewegung aus gemessen die Verteilung einer beliebigen Anzahl von Steinen voraussagen. Wir brauchen nämlich nur in die Gleichung (13) oder (14) unsere neu gewonnenen Konstanten  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$ , sowie den dem gesuchten Zeitpunkt entsprechenden Wert  $T$  einzusetzen und erhalten direkt für jedes  $x$  die Verteilungsdichte.

Unsere Konstanten lassen uns aber sofort die früher schon besprochene „mittlere Reisegeschwindigkeit“ bestimmen. Wir definierten diesen Begriff schon in der Einleitung als Quotient einer gegenüber dem Einzellaufwege sehr langen Laufstrecke durch die zugehörige Laufzeit. Nun besitzen wir in  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  die Größe des mittleren Einzellaufweges resp. der mittleren Einzelliegezeit. Betrachten wir also einen großen Laufweg  $L$ , so können wir diesen durch den mittleren Einzellaufweg ausdrücken als  $L = n \xi_0$ , wobei  $n$  eine sehr große Zahl ist. Die zugehörige Zeit  $Z$  können wir analog als  $Z = n_1 \vartheta_0$  anschreiben. Nun ist es eine bekannte Tatsache, daß der relative Fehler eines Mittelwertes umso kleiner wird, aus je mehr Werten er gebildet ist. Lassen wir also  $L$  und  $Z$  immer größer werden, so nähern sich  $n$  und  $n_1$  immer mehr der tatsächlich vorhandenen Zahl von Einzelschritten (Doppelphasen) in der betrachteten Strecke, und im Grenzfall wird

$$\frac{n}{n_1} \cong 1.$$

In demselben Grenzfall bestimmt sich aber definitionsgemäß auch die mittlere Reisegeschwindigkeit zu



$$v_r = \frac{L}{Z} = \frac{n \cdot \xi_0}{n_1 \cdot g_0} = \sim \frac{\xi_0}{g_0}.$$

Wir bekommen also unsere mittlere Reisegeschwindigkeit als Verhältnis des mittleren Einzellaufweges zur mittleren Einzelliagezeit. Betrachten wir die durchgerechneten Beispiele, so sehen wir, daß dieser Wert stets kleiner ausfällt als derjenige, den wir durch Division des mittleren Laufweges durch die gemeinsame Laufzeit erhalten. Dieser letztere Wert, den man ohne Kenntnis unserer Formeln ohne weiteres als die mittlere Reisegeschwindigkeit ansprechen würde, nähert sich der letzteren immer mehr, je größer die gemeinsame Laufzeit gegenüber der Einzellaufzeit, d. h. je größer  $T$  ist.

Die nächste Aufgabe besteht in der Berechnung der Verteilungskurven bei gegebenen Konstanten. Auch diese Aufgabe ist in Zahlenbeispielen durchgeführt, indem zu den zuerst berechneten Konstanten nachher die theoretische Kurve eingezeichnet wurde, die den direkten Vergleich mit der tatsächlich vorhandenen Verteilung zuläßt.

Für diese Bestimmung gehen wir von Gl. (14) aus. Durch Kombination der beiden Faktoren, deren erster die Gauss'sche Exponentialfunktion ist, und deren zweiter aus der Tafel I abgelesen werden kann, erhalten wir direkt für die verschiedenen  $x$ -Werte die Verteilungsdichten. Hierbei muß aber berücksichtigt werden, daß die so erhaltene Verteilungsdichte die Anzahl der vorhandenen Steine bezogen auf die Länge  $\xi_0$  darstellt. Wollen wir also die Anzahl Steine pro Meter angeben, so müssen wir den nach der Formel berechneten Wert für  $p_T(x)$  durch  $\xi_0$  dividieren, wie dies in den Beispielen durchgeführt ist. Daß wir, um die tatsächliche Anzahl der Steine auf jeden Meter zu bekommen, den Wahrscheinlichkeitswert mit der Gesamtzahl der betrachteten Steine multiplizieren müssen, dürfte selbstverständlich sein.

## 8. Unvollständige Verteilung.

Neben den eigentlichen Grundaufgaben, die schon in den Abschnitten 3, 4 und 7 behandelt wurden, treten aber bei der Auswertung praktischer Beispiele stets gewisse Spezialfälle ein, die

auch spezielle Schwierigkeiten bereiten. Im Falle unserer Verteilungen z. B. ist es nicht ohne weiteres, und besonders nicht ohne gewisse Annahmen möglich, die Momente zu berechnen, wenn ein Teil der betrachteten Steine in der Zeit  $T$  schon die ganze Meßstrecke von 41 m durchlaufen und sich im Ablagerungssilo deponiert hat. Wir können von diesen Steinen nur sagen, daß sie sicher weiter gelaufen wären als 41 m. Wie weit sie aber in einer längeren Rinne über die 41 m hinausgelaufen wären, läßt sich nicht angeben. Es wäre also gewiß falsch, als Laufweg dieser Steine 41 Meter anzunehmen, da dies sicher zu wenig ist. Die im Silo abgelagerten Steine einfach aus der Betrachtung wegzulassen, wäre noch falscher, da man ihnen, die gerade die größten Wege zurückgelegt haben, damit den mittleren Weg aller anderen Steine zuschreiben würde, also noch weniger als 41 Meter.

Da wir also nicht angeben können, wo diese Steine liegen würden, wenn sie weitergelaufen wären, so wollen wir wenigstens versuchen, auszurechnen, wie groß die Momente dieser Steine wären, wenn sie genau nach dem Verteilungsgesetz liegen würden und wenn die Konstanten der Verteilung schon bekannt wären. Ist nämlich  $x_e$  die Wegkoordinate des Kanalendes, so müssen wir einfach die Momente des Kurventeiles von  $x_e$  bis  $\infty$  bestimmen.

Zunächst das null-te Moment ergibt sich zu

$$M_{0e} = \int_{x_e}^{\infty} p_T(x) \cdot dx = \int_{x_e}^{\infty} e^{-x-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{T^n}{n!} dx$$

und dies ist nach Formel Gl. (20)

$$M_{0e} = e^{-x_e-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left[ \frac{x_e^n}{n!} + \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 \right].$$

Das erste Moment ergibt sich wie folgt

$$\begin{aligned} M_{1e} &= \int_{x_e}^{\infty} p_T(x) \cdot x \cdot dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_e}^{\infty} e^{-x-T} \frac{x^{n+1}}{n!} \frac{T^n}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-T} \frac{T^n}{n!} \int_{x_e}^{\infty} e^{-x} \frac{x^{n+1}}{n!} dx. \end{aligned}$$

Die Lösung des Integrals z. B. nach Peirce, Formel 403, gibt:

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-T} \frac{T^n}{n!} \left[ e^{-x_e} \left( \frac{x_e^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x_e^n}{n!} + \dots + 1 \right) \right] (n+1) \\
 &= e^{-x_e - T} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x_e^{n+1}}{(n+1)!} + \dots + 1 \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x_e^{n+1}}{(n+1)} + \dots + 1 \right) n \right\} \\
 &= e^{-x_e - T} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x_e^n}{n!} + \dots + 1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Unter Zusammenziehung des ersten und dritten Gliedes wird

$$= x_e \cdot p_T(x_e) + M_{0e} e^{-x_e - T} \left\{ x_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} + T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n-1}}{n-1!} \left( \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 \right) \right\}$$

und unter Verwendung der Bezeichnung

$$\bar{p}_T(x_e) = e^{-x_e - T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} \quad (33)$$

wird

$$M_{1e} = M_{0e}(1 + T) + x_e \{ p_T(x_e) + \bar{p}_T(x_e) \}.$$

Die Lage des Gesamtschwerpunktes ergibt sich daraus und nach Gl. (17)

$$x_s = T + 1 = \frac{M_{1e} + \int_0^{x_e} x \cdot p_T(x) dx}{\int_0^{\infty} p_T(x) dx} = \frac{M_{1e} + \int_0^{x_e} x \cdot p_T(x) dx}{1}$$

$$(T + 1)(1 - M_{0e}) = \int_0^{x_e} x \cdot p_T(x) dx + x_e \{ p_T(x_e) + \bar{p}_T(x_e) \}.$$

Daraus können wir nunmehr den Schwerpunktsabstand  $x_s = (T + 1)$  neu ausdrücken

$$(T + 1) = \frac{\int_0^{x_e} x \cdot p_T(x) dx}{\int_0^{x_e} p_T(x) dx} + x_e \frac{p_T(x_e) + \bar{p}_T(x_e)}{\int_0^{x_e} p_T(x) dx}. \quad (34)$$

In dieser Form fällt auf, daß der Schwerpunktsabstand als Summe von zwei Teilen auftritt, von denen der erste nichts anderes ist als

der Schwerpunktsabstand aller Steine, die in der Versuchsstrecke liegen geblieben sind. Das zweite Glied gibt dann die Verschiebung dieses Punktes durch das Hinzutreten der übrigen Steine.

Es soll an dieser Stelle noch besonders darauf hingewiesen werden, daß diese Formel noch ohne jede Einschränkung streng gilt.

Und nun noch das zweite Moment

$$\begin{aligned} M_{2e} &= \int_{x_e}^{\infty} p_T(x) \cdot x^2 \cdot dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_e}^{\infty} e^{-x-t} \frac{x^{n+2}}{n!} \frac{T^n}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-T} \frac{T^n}{n!} \int_{x_e}^{\infty} e^{-x} \frac{x^{n+2}}{n!} dx \end{aligned}$$

Die Lösung des Integrals z. B. nach Peirce, Formel 403, gibt

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-T} \frac{T^n}{n!} \left[ e^{-x_e} \left( \frac{x_e^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x_e^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x_e^n}{n!} + \dots + 1 \right) \right] (n+2)(n+1) \\ &= e^{-x_e - T} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n+2}}{(n+2)!} (n+2)(n+1) \right. \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n+1}}{(n+1)!} n(n+1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2(n+1) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x_e^n}{n!} + \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 \right) n(n-1) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x_e^n}{n!} + \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 \right) \cdot 4n \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x_e^n}{n!} + \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 \right) \cdot 2 \right\} \end{aligned}$$

Nun wollen wir versuchen, die einzelnen Summen wieder durch Funktionen  $p$  auszudrücken

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n+2}}{(n+2)!} (n+2)(n+1) &= x_e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^n}{n!} = x_e^2 \cdot \frac{p_T(x_e)}{e^{-x_e - T}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n+1}}{(n+1)!} n(n+1) &= x_e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} = x_e^2 \cdot \frac{\bar{p}_T(x_e)}{e^{-x_e - T}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2(n+1) &= 2x_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^n}{n!} = 2x_e \cdot \frac{p_T(x_e)}{e^{-x_e - T}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x_e^n}{n!} + \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 \right) n(n-1) \\ &= x_e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n-2}}{(n-2)!} + T x_e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \frac{x_e^{n-2}}{(n-2)!} + \\ & \quad + T^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n-2}}{(n-2)!} \left( \frac{x_e^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{x_e^{n-3}}{(n-3)!} + \dots + 1 \right) = \end{aligned}$$

Führen wir nun noch die neue Bezeichnung ein

$$\bar{\bar{p}}_T(x_e) = e^{-x_e - T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n-2}}{(n-2)!} \quad (35)$$

so wird der Integralwert

$$\begin{aligned} &= x_e^2 \frac{\bar{\bar{p}}_T(x_e)}{e^{-x_e - T}} + T \cdot x_e \frac{\bar{p}_T(x_e)}{e^{-x_e - T}} + T^2 \frac{M_{0e}}{e^{-x_e - T}} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x_e^n}{n!} + \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 \right) 4n = 4x_e \frac{\bar{p}_T(x_e)}{e^{-x_e - T}} + 4T \frac{M_{0e}}{e^{-x_e - T}} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left( \frac{x_e^n}{n!} + \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 \right) \cdot 2 = 2 \frac{M_{0e}}{e^{-x_e - T}} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Werte können wir jetzt das zweite Moment ausdrücken

$$\begin{aligned} M_{2e} &= x_e^2 \cdot p_T(x_e) + x_e^2 \bar{p}_T(x_e) + 2x_e p_T(x_e) + x_e^2 \bar{\bar{p}}_T(x_e) + T x_e \bar{p}_T(x_e) + \\ & \quad + T^2 \cdot M_{0e} + 4x_e \bar{v}_T(x_e) + 4 \cdot T \cdot M_{0e} + 2M_{0e} \end{aligned}$$

oder etwas anders geordnet

$$= M_{0e} [T^2 + 4T + 2] + x_e^2 [p_T(x_e) + \bar{v}_T(x_e) + \bar{\bar{p}}_T(x_e)] + x_e [2p_T(x_e) + (T+4)\bar{p}_T(x_e)]$$

Nach Gleichung (18) ist das zweite Moment der ganzen Verteilung

$$\begin{aligned} M_2 &= 2 + 4T + T^2 = M_{2e} + \int_0^{x_e} x^2 \cdot p_T(x) \cdot dx \\ &= M_{0e} [T^2 + 4T + 2] + \int_0^{x_e} x^2 \cdot p_T(x) dx + x_e^2 [p_T(x_e) + \bar{p}_T(x_e) + \bar{\bar{p}}_T(x_e)] \\ & \quad + x_e [2p_T(x_e) + (T+4)\bar{p}_T(x_e)]. \end{aligned}$$

Nehmen wir das erste Glied der rechten Seite auf die linke, so wird

$$\begin{aligned} [T^2 + 4T + 2](1 - M_{0e}) &= [T^2 + 4T + 2] \left( \int_0^{x_e} p_T(x) dx \right) = \\ &= \int_0^{x_e} x^2 \cdot p_T(x) dx + x_e^2 [p_T(x_e) + \bar{p}_T(x_e) + \bar{\bar{p}}_T(x_e)] + x_e [2p_T(x_e) + (T+4)\bar{p}_T(x_e)] \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir neuerdings das zweite Moment

$$(36) \quad M_2 = [T^2 + 4T + 2] =$$

$$= \frac{\int_0^{x_e} x^2 \cdot p_T(x) dx}{\int_0^{x_e} p_T(x) dx} + \frac{x_e^2 [p_T(x_e) + \bar{p}_T(x_e) + \bar{\bar{p}}_T(x_e)] + x_e [2p_T(x_e) + (T+4)\bar{p}_T(x_e)]}{\int_0^{x_e} p_T(x) dx}$$

In dieser Form besteht das zweite Moment wieder wie  $M_1$  aus zwei Teilen, von denen der erste das Moment aller in der Versuchsstrecke sich befindenden Gerölle bedeutet, während der zweite die Korrektur durch diejenigen Steine gibt, die weiter gelaufen sind als 41 m. Auch diese Formel ist ohne jede Einschränkung streng gültig.

Die beiden Gleichungen (34) und (36) sind zusammen die geeignete Grundlage zur Auswertung von Versuchen, bei denen ein Teil der Gerölle über das Ende der Versuchsstrecke hinausgelaufen ist. Während es aber bei vollständig gegebenen Verteilungen zur Bestimmung der Konstanten genügte, die Momente  $M_1$  und  $M_2$  zu kennen, muß in dem vorliegenden Falle auch noch  $M_0$  gegeben sein, das jetzt nicht mehr gleich 1 ist, da ja eben nicht alle Gerölle in der Meßstrecke liegen.

Eine gewisse Schwierigkeit bilden in der Auswertung die Werte  $p$ , und zwar dann, wenn die Konstanten der Verteilungsfunktion gesucht sind, indem zur Berechnung dieser Werte beide Konstanten der Verteilung geschätzt werden müssen, was den Rechenvorgang sehr langwierig gestaltet.

Wir wollen unsere Untersuchungen auf diejenigen Aufnahmen beschränken, bei denen wenigstens der größte Teil der Gerölle in der Versuchsstrecke gefunden worden ist. Die anderen Aufnahmen sollen als ungeeignet nicht ausgewertet werden. In diesen Fällen ist aber

$$\int_{x_e}^{\infty} p_T(x) dx = M_{0e} \lll 1$$

und damit

$$x_e \ggg 1$$

und da der Schwerpunktsabstand  $x_s$

$$x_s = T + 1 < x_e$$

wird auch

$$T < x_c.$$

Unter diesen Umständen können wir die  $p$ -Werte mit Hilfe der halbkonvergenten Reihe von Hankel bestimmen. Man bezeichnet nämlich (vergl. z. B. Jahnke-Emde, S. 194)

$$J_n(2i\sqrt{t}) = (i\sqrt{t})^n \left[ \frac{1}{n!} + \frac{t}{1!(n+1)!} + \frac{t^2}{2!(n+2)!} + \dots \right]$$

und für diese Bessel'sche Funktion  $J_n$  gibt die halbkonvergente Reihe von Hankel (vergl. Jahnke-Emde, S. 204, Lit. 14) den Näherungswert

$$J_n(ri^{\pm\varrho}) \approx \frac{e^y}{\sqrt{2\pi r}} i^{\pm(n + \frac{1-\varrho}{2} - \xi)} S_n(2ri^{\pm(1+\varrho)}).$$

Hierin ist

$$ri^{\pm\varrho} = \frac{\pi}{2} \xi \pm iy.$$

Da wir es in unserem Falle mit einem rein imaginären Argument zu tun haben, wird

$$r = y = 2\sqrt{Tx}, \quad \varrho = +1, \quad \xi = 0.$$

Das eingesetzt, erhalten wir

$$\begin{aligned} J_n(2i\sqrt{Tx}) &\approx \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \cdot i^{\pm(n + \frac{1-1}{2} - 0)} S_n(2yi^{\pm(1+1)}) \\ &\approx \frac{e^{2\sqrt{xT}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{xT}}} i^n S_n(-4\sqrt{Tx}) \\ &= (i\sqrt{xT})^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xT)^k}{k!(n+k)!}. \end{aligned}$$

Nun wollen wir zuerst den Ausdruck  $p_T(x_e)$  ausrechnen. Es wird

$$\begin{aligned} p_T(x_e) &= e^{-x_e - T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_e^n T^n}{n! n!} = e^{-x_e - T} J_0(2i\sqrt{Tx_e}) = \\ p_T(x_e) &\approx \frac{e^{2\sqrt{x_e T}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{x_e T}}} \cdot S_0(-4\sqrt{Tx_e}) \cdot e^{-x_e - T} \end{aligned}$$

und ganz analog

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_T(x_e) &= e^{-x_e - T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} \\
 &= e^{-x_e - T} \sqrt{\frac{T}{x_e}} \frac{1}{i} (i\sqrt{Tx_e}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x_e^n}{n! (n+1)!} \\
 &= e^{-x_e - T} \sqrt{\frac{T}{x_e}} \frac{1}{i} J_1(2i\sqrt{Tx_e}) \\
 \bar{p}_T(x_e) &= e^{-x_e - T} \sqrt{\frac{T}{x_e}} \frac{1}{i} \frac{e^{2\sqrt{x_e T}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{x_e T}}} i S_1(-4\sqrt{Tx_e})
 \end{aligned}$$

und endlich

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{p}}_T(x_e) &= e^{-x_e - T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \frac{x_e^{n-2}}{(n-2)!} \\
 &= e^{-x_e - T} \left( \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right)^2 \frac{1}{i^2} (i\sqrt{Tx_e})^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x_e^n}{n! (n+2)!} \\
 &= e^{-x_e - T} \left( \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right)^2 \frac{1}{i^2} J_2(2i\sqrt{Tx_e}) \\
 \bar{\bar{p}}_T(x_e) &= e^{-x_e - T} \left( \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right)^2 \frac{1}{i^2} e \frac{e^{2\sqrt{x_e T}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{x_e T}}} i^2 S_2(-4\sqrt{Tx_e}).
 \end{aligned}$$

Etwas schwieriger ist die Berechnung des Wertes  $M_{0e}$ , doch sieht man den einzuschlagenden Weg sofort, wenn man den Ausdruck in eine unendliche Zahl von Reihen auflöst. Dann ist

$$\begin{aligned}
 M_{0e} &= e^{-x_e - T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \left[ \frac{x_e^n}{n!} + \frac{x_e^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x_e^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + 1 \right] \\
 &= e^{-x_e - T} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n x_e^n}{n! n!} + \sqrt{\frac{T}{x_e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{Tx_e} x_e^n \sqrt{Tx_e}^{n-1}}{n! (n-1)!} + \dots \right] \\
 &= e^{-x_e - T} \left[ J_0(2i\sqrt{Tx_e}) + \sqrt{\frac{T}{x_e}} \frac{1}{i} J_1(2i\sqrt{Tx_e}) + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{T}{x_e}}^2 \frac{1}{i^2} J_2(2i\sqrt{Tx_e}) + \dots \right] \\
 &= e^{-x_e - T} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{T}{x_e}} \frac{1}{i^n} J_n(2i\sqrt{Tx_e}) \\
 &\approx e^{-x_e - T} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{T}{x_e}} \frac{1}{i^n} i^n \frac{e^{2\sqrt{x_e T}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{x_e T}}} S_n(-4\sqrt{Tx_e}) \\
 &\approx e^{-x_e - T} \frac{e^{2\sqrt{x_e T}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{x_e T}}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{T}{x_e}} S_n(-4\sqrt{Tx_e}).
 \end{aligned}$$



Aus den Diagrammen Jahnke-Emde, S. 284, sehen wir, daß die  $J_p(ix)$  mit zunehmendem  $p$  bei konstantem  $x$  immer kleiner werden.

Da außerdem  $\frac{T}{x} < 1$  ist (vergl. oben), nehmen die Glieder der Reihe immer mehr ab und konvergieren gegen Null. Für die ersten Glieder dürfen wir aber unter den obwaltenden Umständen im Ausdruck für  $S_n$  (vergl. z. B. Jahnke-Emde, S. 203)

$$S_n(x) = 1 + \frac{4n^2}{1!4x} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!(4x)^2} + \dots$$

nach dem ersten Glied abbrechen und setzen

$$S_n(x) \approx 1.$$

Da die späteren Glieder der Reihe für  $M_{0e}$  sowieso klein sind gegen die ersten Glieder, begehen wir einen kleinen Fehler, wenn wir auch in diesen  $S_n$  gleich 1 setzen. Dann wird

$$M_{0e} \approx e^{-x_e - T} \frac{e^{2\sqrt{x_e T}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{x_e T}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right)^n$$

$$M_{0e} \approx e^{-x_e - T} \frac{e^{2\sqrt{x_e T}}}{\sqrt{4\pi\sqrt{x_e T}}} \left[ \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{T}{x_e}}} \right]. \quad (37)$$

Da dieser Wert  $M_{0e}$  uns in praktischen Fällen bekannt ist und die Werte  $p$  nicht, wollen wir die letzteren durch den ersteren auszudrücken versuchen. Es wird, wenn wir auch in den Werten  $p$  die Reihe  $S$  gleich 1 setzen

$$\left\{ \begin{array}{l} p_T(x_e) \approx \left[ 1 - \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right] M_{0e} \\ \bar{p}_T(x_e) \approx \sqrt{\frac{T}{x_e}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right] M_{0e} \\ \bar{\bar{p}}_T(x_e) \approx \left( \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right)^2 \left[ 1 - \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right] M_{0e} \end{array} \right. \quad (38)$$

Setzen wir diese Näherungsausdrücke in den beiden Gleichungen (34) und (36) ein, so erhalten wir die neuen Gleichungen

$$M_1 = T+1 = \frac{\int_0^{x_e} x \cdot p_T(x) dx}{\int_0^{x_e} p_T(x) dx} + x_e \frac{M_{0e}}{1-M_{0e}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right] \left[ 1 + \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right]$$

$$(39) \quad M_1 = T+1 = \frac{\int_0^{x_e} x \cdot p_T(x) dx}{\int_0^{x_e} p_T(x) dx} + \frac{M_{0e}}{1-M_{0e}} (x_e - T)$$

$$M_2 = 2+4T+T^2 =$$

$$= \frac{\int_0^{x_e} x^2 \cdot p_T(x) dx}{\int_0^{x_e} p_T(x) dx} + \frac{M_{0e}}{1-M_{0e}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right] \left\{ x_e^2 \left[ 1 + \sqrt{\frac{T}{x_e}} + \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right] + \right.$$

$$\left. + x_e \left[ 2 + (T+4) \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right] \right\}$$

$$= \frac{\int_0^{x_e} x^2 \cdot p_T(x) dx}{\int_0^{x_e} p_T(x) dx} + \frac{M_{0e}}{1-M_{0e}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right] x_e \left\{ \left( 1 + \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right) (x_e + T) + \right.$$

$$\left. + \left( 2 + 4 \sqrt{\frac{T}{x_e}} \right) \right\}$$

$$(40) \quad M_2 = 2+4T+T^2 =$$

$$= \frac{\int_0^{x_e} x^2 \cdot p_T(x) dx}{\int_0^{x_e} p_T(x) dx} + \frac{M_{0e}}{1-M_{0e}} \left\{ (x_e^2 - T^2) + (2x_e + 2\sqrt{x_e T} - 4T) \right\}$$

Für die praktische Auswertung müssen wir nun die beiden Gleichungen (39) und (40) noch auf absolutes Maß umrechnen.

$$\frac{\Theta}{\vartheta_0} + 1 = \frac{1}{\xi_0} \frac{\int_0^{\xi_e} \xi \cdot \pi_T(\xi) d\xi}{\int_0^{\xi_e} \pi_T(\xi) d\xi} + \frac{M_{0e}}{1-M_{0e}} \left( \frac{\xi_e}{\xi_0} \frac{\Theta}{\vartheta_0} \right).$$

Aufgelöst nach  $\frac{\Theta}{\vartheta_0}$  lautet die Gleichung, da  $1 - M_{0e} = \int_0^{\xi_e} \pi_T(\xi) d\xi$

$$\frac{\Theta}{\vartheta_0} \left\{ \frac{1}{1 - M_{0e}} \right\} = \frac{1}{\xi_0} \left\{ \frac{\int_0^{\xi_e} \xi \cdot \pi_T(\xi) d\xi}{\int_0^{\xi_e} \pi_T(\xi) d\xi} + \frac{M_{0e}}{1 - M_{0e}} \cdot \xi_e \right\} - 1$$

$$\frac{\Theta}{\vartheta_0} = \frac{1}{\xi_0} \left\{ \int_0^{\xi_e} \xi \cdot \pi_T(\xi) d\xi + M_{0e} \cdot \xi_e \right\} - (1 - M_{0e}) \quad (41)$$

und die Gleichung (40) lautet

$$2 + 4 \frac{\Theta}{\vartheta_0} + \frac{\Theta^2}{\vartheta_0^2} = \frac{1}{\xi_0^2} \frac{\int_0^{\xi_e} \xi^2 \pi_T(\xi) d\xi}{\int_0^{\xi_e} \pi_T(\xi) d\xi} + \frac{M_{0e}}{1 - M_{0e}} \left\{ \frac{\xi_e^2}{\xi_0^2} - \frac{\Theta^2}{\vartheta_0^2} + 2 \frac{\xi_e}{\xi_0} + 2 \frac{\sqrt{\xi_e \Theta}}{\sqrt{\xi_0} \vartheta_0} - 4 \frac{\Theta}{\vartheta_0} \right\}$$

woraus

$$\left( 2 + 4 \frac{\Theta}{\vartheta_0} + \frac{\Theta^2}{\vartheta_0^2} \right) \frac{1}{(1 - M_{0e})} = \frac{\int_0^{\xi_e} \xi^2 \pi_T(\xi) d\xi}{\xi_0^2 \int_0^{\xi_e} \pi_T(\xi) d\xi} + \frac{M_{0e}}{1 - M_{0e}} \left\{ \frac{\xi_e^2}{\xi_0^2} + 2 \frac{\xi_e}{\xi_0} + 2 + \frac{\sqrt{\xi_e \Theta}}{\sqrt{\xi_0} \vartheta_0} \right\}$$

$$2 + 4 \frac{\Theta}{\vartheta_0} + \frac{\Theta^2}{\vartheta_0^2} = \frac{\int_0^{\xi_e} \xi^2 \pi_T(\xi) d\xi}{\xi_0^2} + M_{0e} \left\{ \left( \frac{\xi_e}{\xi_0} + 1 \right)^2 + 1 + 2 \sqrt{\frac{\xi_e \Theta}{\xi_0} \vartheta_0} \right\}. \quad (42)$$

In diesen beiden Gleichungen (41) und (42) sind alle Längen in Metern und alle Zeiten in Sekunden einzusetzen.  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  sind gesucht, alle anderen Größen sind gegeben. Da die Gleichungen zu kompliziert sind, um die beiden Unbekannten explizit auszudrücken, gehen wir am besten so vor, daß wir z. B.  $\xi_0$  schätzen und aus der Gleichung (41) das zugehörige  $\vartheta_0$  berechnen. Nun müssen wir  $\xi_0$  so lange variieren, bis die beiden Werte auch die Gleichung (42) befriedigen.

## 9. Der Erwartungswert.

Bevor wir im nächsten Abschnitt in die Auswertung der Zahlenbeispiele eintreten wollen, sei noch ein weiterer Wert eingeführt, der für die Anwendung der Theorie von gewisser Bedeutung ist. Verschiedene Autoren benützen die Bezeichnung „Erwartungswert“ für den Mittelwert, indem sie damit sagen wollen, daß der Mittelwert

derjenige sei, der bei der vorhandenen Wahrscheinlichkeit „zu erwarten“ ist. Verteilen sich nämlich die Schritte in der Weg- und Zeitaxe genau nach Maßgabe der Wahrscheinlichkeiten, so erhalten wir für einen genau nach diesem Schema laufenden Stein im Gauss-schen Fall als Weg den Mittelwert  $\mu_1$ .

Nicht so klar verhält sich die Sache bei unserer Funktion. Bezeichnen wir wieder als Erwartungswert denjenigen, der den Wahrscheinlichkeiten entspricht, so erhalten wir diesen Wert am einfachsten, indem wir einen Stein während der Laufzeit  $\Theta$  stetig mit der Reisegeschwindigkeit  $v_r$  bewegt denken und erhalten den Erwartungswert

$$(43) \quad \underline{\underline{E}} = \Theta \cdot v_r = \Theta \frac{\xi_0}{g_0} = T \xi_0 = \left\{ \mu_1 - \sqrt{2\mu_1^2 - \mu_2} \right\} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2 - \frac{\mu_2}{\mu_1^2}}} - 1} =$$

$$= \left\{ \frac{\mu_1 - \sqrt{2\mu_1^2 - \mu_2}}{\mu_1 - \sqrt{2\mu_1^2 - \mu_2}} \right\} \sqrt{2\mu_1^2 - \mu_2} = \underline{\underline{\sqrt{2\mu_1^2 - \mu_2} = \sqrt{\mu_1^2 - \mu_{2s}}}}$$

Dieser Wert  $E$  nimmt nun proportional mit  $\Theta$  zu und muß im Grenzfall für unendlich große Schrittzahl oder vielmehr für unendlich großes  $T$  gegen  $\mu_1$  konvergieren. Wir formen um

$$E = \mu_1 \sqrt{1 - \frac{\mu_{2s}}{\mu_1^2}}$$

und müssen nun zeigen, daß  $\frac{\mu_{2s}}{\mu_1^2}$  bei unendlich wachsendem  $T$  gegen Null konvergiert. Nach Gl. (16) ist

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \xi_0(1 + T) \\ \mu_1^2 &= \xi_0^2(1 + T)^2 \end{aligned}$$

und nach Gl. (19)

$$\mu_{2s} = \xi_0^2(2T + 1).$$

Für sehr große  $T$  können wir setzen

$$\frac{\mu_{2s}}{\mu_1^2} = \sim \frac{\xi_0^2}{\xi_0^2} \frac{2T}{T^2} = \frac{2}{T}$$

was für unendlich wachsendes  $T$  gegen Null konvergiert, wie zu beweisen war.

Wollen wir mit diesem Erwartungswert  $E$  arbeiten, so müssen wir die zugehörige Streuung kennen. Gehen wir aus vom Schwerpunkt mit der Abszisse  $\mu_1$  und dem quadratischen Moment  $\mu_{2s}$ . Aus diesen finden wir das quadratische Moment um den Erwartungswert

$$\begin{aligned} \underline{\mu_{2E}} &= \mu_{2s} + \{ \sqrt{\mu_1^2 - \mu_{2s}} - \mu_1 \}^2 & (44) \\ &= \mu_{2s} + \left\{ \mu_1^2 - \mu_{2s} - 2\mu_1 \sqrt{1 - \frac{\mu_{2s}}{\mu_1^2}} + \mu_1^2 \right\} \\ &= \underline{2\mu_1^2 \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_{2s}}{\mu_1^2}} \right\} = 2\mu_1 \{ \mu_1 - E \}.} \end{aligned}$$

Drücken wir nun die beiden Ausdrücke  $E$  und  $\mu_{2E}$  durch  $\xi_0 T$  aus, so wird

$$\underline{E = T \cdot \xi_0} \quad (45)$$

und

$$\underline{\mu_{2E} = 2\xi_0^2(1+T)(1+T-T) = \xi_0^2(2T+2) = \underline{\mu_{2s} + \xi_0^2}.} \quad (46)$$

In der Fehlertheorie definieren wir den Fehler einer Einzelmessung als die Differenz zwischen dieser Messung und dem wahren Wert der zu messenden Größe. Leider ist uns meistens dieser wahre Wert der Größe unbekannt (denn sonst müßten wir sie ja nicht erst messen) und so ist man gezwungen, mit dem wahrscheinlichen Fehler als Differenz zwischen dem gemessenen Wert und dem „wahrscheinlichsten Wert“ zu arbeiten. Haben wir es mit einer symmetrischen Wahrscheinlichkeit, insbesondere z. B. mit einer Gauss'schen Verteilung zu tun, dann ergibt sich sehr einfach und plausibel der Mittelwert als der wahrscheinlichste. Welches ist aber der wahrscheinlichste Wert in unserer wesentlich unsymmetrischen Verteilung?

Hierauf gibt es je nach der Fragestellung zwei verschiedene Antworten. Fragen wir nämlich nach dem wahrscheinlichsten Laufweg in unserer Verteilung, bei der jeder Stein mit einer Bewegungsphase beginnt, dann lautet die Antwort auf den Schwerpunkt  $\mu_1$ . Fragen wir aber allgemein nach dem wahrscheinlichsten Wege während einer *beliebigen* Zeit  $T$ , so ist es der Erwartungswert  $E$ . In diesem Falle abstrahieren wir von der Bedingung, daß  $T$  mit dem Zeitpunkte einer Bewegungsphase beginnen müsse und kümmern

uns überhaupt nicht darum, ob die Bewegung in Einzelschritten oder kontinuierlich erfolgt. Wie man zu diesem Resultate kommt, soll gleich gezeigt werden.

Jede Verteilung ist definiert durch die Einheiten  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$ , in Verbindung z. B. mit der Dauer  $T$  des Vorganges. Nun können wir uns für ein bestimmtes  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  für alle verschiedenen  $T$  die Verteilungen aufgetragen denken und finden, daß mit zunehmendem  $T$  die Streuung  $\sqrt{\mu_2}$  gegenüber dem Mittelwert  $\mu_1$  immer kleiner wird und schließlich im Grenzwert verschwindet. Wir können also für unendliches  $T$  den wahrscheinlichsten Wert angeben und zwar als den Mittelwert. Dieser Wert ist

$$\mu_{1\theta} = \frac{\xi_0}{\vartheta_0} \Theta$$

für gegenüber  $\vartheta_0$  großes  $\Theta$ .

Um den wahrscheinlichsten Wert auch für kleinere  $\Theta$  zu erhalten, müssen wir durch eine plausible Maßnahme auch für das neue  $\Theta$  die Streuung zum Verschwinden bringen. Bedingung ist aber dabei, daß das oben berechnete  $\mu_{1\theta}$  dabei sich nicht ändert. Lassen wir zu diesem Zwecke  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  kleiner werden, und zwar so, daß  $\frac{\xi_0}{\vartheta_0}$  seinen Wert nicht ändert, so werden alle Werte  $T = \frac{\Theta}{\vartheta_0}$  größer, und wir können dann den Ausdruck  $\mu_{1\theta}$  für beliebig kurze Zeiten anwenden. Wir sehen also, daß tatsächlich der Wert

$$\mu_{1\theta} = \frac{\xi_0}{\vartheta_0} \Theta = \xi_0 T = E$$

der wahrscheinlichste Wert des Weges für eine beliebige Zeit  $\Theta$  ist, wenn diese beliebig beginnt. Der Erwartungswert  $E$  hat damit also eine viel allgemeinere Bedeutung als der Mittelwert, der nur für diejenigen Zeiten  $T$  gilt, die mit einer Bewegungsphase beginnen.

## 10. Resultate der Zahlenbeispiele.

In der Einleitung wurde gesagt, daß die vorliegenden Verteilungen der Steine einer bestimmten Kategorie das Verhalten eben dieser Kategorie unter den obwaltenden Umständen beschreiben sollen. Die vorstehenden Ableitungen geben uns nun die Möglich-

keit, mittels der Größen  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  sowie  $T$  jede Verteilung mittels drei Zahlen zu beschreiben und zu charakterisieren. Es wird nun die Aufgabe der vorliegenden Auswertung sein, zu zeigen, wie sich die Größen  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  ( $T$  ist ja willkürlich gewählt worden) der verschiedenen Steinkategorien unter verschiedenen hydraulischen Umständen verhalten.

Bei dem Großteil der Versuche handelt es sich um solche mit einer Sohle aus „einheitlichem“ Material mit 24—34 mm mittlerem Korndurchmesser. Dieses Material wurde durch Aussieben natürlichen Flußschotters mit quadratmaschigen Sieben erhalten und darf vom siebtechnischen Standpunkt aus als einheitlich betrachtet werden. Nun fällt aber dem Beobachter auf, daß die Steine eines solchen Schotters sehr verschiedene Formen aufweisen, und so drängte sich die Frage nach dem gegenseitigen Verhalten der verschiedenen Formen auf.

Angeregt durch die Arbeit von Zingg (Lit. 9, S. 52 ff.), wurden zunächst die Formen der Gerölle durch das Verhältnis der Axen eines Ersatzellipsoides beschrieben. Nun zeigten aber Vorversuche, daß das Verhältnis vom größten zum mittleren Durchmesser der Gerölle keine Rolle spielt, sondern nur das Verhältnis vom mittleren zum kleinsten Durchmesser. Wenn wir uns nun noch vergegenwärtigen, daß der mittlere Durchmesser  $d_b$  durch Aussieben schon innerhalb enger Grenzen konstant ist, genügt es also, zu untersuchen, wie die Gerölle mit verschiedenem kleinstem Durchmesser  $d_c$  sich zueinander verhalten. Nun wurden durch Aussieben mit Schlitzsieben, die bekanntlich nach kleinstem Durchmesser scheiden, in Anlehnung an die oben erwähnte Arbeit von Zingg folgende drei Klassen unterschieden

1. kugelig  $34 > d_c > 24$  mm
2. mittel  $24 > d_c > 17$  mm
3. flach  $17 > d_c > 0$  mm.

Hierbei sind die Kategorien 1 und 3 sehr ausgesprochene Formen, während 2 eine Mischklasse aller Übergangsformen bildet.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, war bei den Versuchen eine Anzahl von Geröllen durch Färben kenntlich gemacht worden. Diese farbigen Gerölle wurden zu einer bestimmten Zeit im Be-

schickungsquerschnitt ins Wasser geworfen. Eine bestimmte Zeit ( $\Theta$ ) später wurde der Versuch abgestellt, und die Gerölle mit Hilfe ihrer Färbung wieder aus der Sohle herausgesucht und ihre einzelnen Laufwege aufgenommen. Auf diese Art entstanden für die einzelnen Formklassen die Verteilungskurven.

Wie die Theorie der vorigen Kapitel zeigt, müssen wir zwischen vollständigen Verteilungen, bei denen alle Steine in der Versuchsstrecke liegen geblieben sind, und unvollständigen unterscheiden, bei denen ein Teil der Steine bis in den Silo gelaufen ist. Die vollständigen Verteilungen wurden nach den Formeln Gl. (30 a) und (31 a) ausgewertet, wie es die sechs beigegefügt Beispiele zeigen. (Vergl. Tafeln II bis XIX.) Diese Beispiele wurden so gewählt, daß möglichst verschiedene  $T$ -Werte vertreten sind. Im übrigen haben sie keinen besonderen Zusammenhang. In den Tafeln II bis VII sind zunächst für die Verteilungen in den Kolonnen 1 bis 7 die Werte

$$\mu_1 = \sum_0^{\infty} \xi \cdot \pi_T(\xi) \Delta \xi \quad \text{und} \quad \mu_{2s} = \sum_0^{\infty} \xi_s^2 \pi_T(\xi) \Delta \xi$$

berechnet. Aus diesen Werten sind jeweils unten mit Hilfe der Laufzeit  $\Theta$  und Gl. (30 a) und (31 a)  $\xi_0$ ,  $\vartheta_0$  und  $T$  berechnet und in den Kolonnen 8 bis 13 die Ordinaten der Verteilungsfunktion. Nach Gleichung (14) ist der Wert der Kolonne 13 die Verteilungsdichte, bezogen auf die Länge  $x = 1$ . Kolonne 15 rechnet diese Verteilungsdichten auf die Bezugslänge von 2 m um, wodurch diese Werte direkt mit den gemessenen Dichten (gemessene  $\pi(\xi)$ ) vergleichbar werden. Dieser Vergleich ist in den Tafeln VIII bis XIII graphisch durchgeführt. Kolonne 14 gibt die bei geradliniger Verbindung der gerechneten  $p(x)$ -Werte in den betreffenden Zwischenstrecken zu erwartenden Steine. Diese Werte sind in den Tafeln XIV bis XIX als Summenlinien aufgetragen und mit den entsprechenden gemessenen Werten verglichen. Hierbei bedeutet die Ordinate im Punkte mit der Abszisse  $\xi$  die Wahrscheinlichkeit für den Stein, vor dem Punkt  $\xi$  zu liegen. Diese Wahrscheinlichkeit ist  $\sum_0^{\xi} \pi(\xi) \Delta \xi$  für die gemessenen und  $\sum_0^x \frac{2}{\xi_0} p(x) \Delta x$  für die gerechneten Werte.

Diejenigen Verteilungen, bei denen ein Teil der Steine über das Ende der Versuchsstrecke hinaus in den Silo gelaufen sind, wurden



nach den Formeln Gl. (41) und (42) nach dem dort beschriebenen Verfahren bestimmt.

Tafel XX gibt für alle Versuche mit einer Sohle aus einheitlichem Geschiebe von 24 bis 34 mm Korn die so bestimmten Werte  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$ . Es fällt auf, daß bei einer Reihe von Verteilungen die Werte fehlen. Ist das betreffende Feld durch ein  $u$  ausgefüllt, so will das sagen, daß die Verteilung „ungenügend“ sei, und zwar liegen entweder alle Steine am Anfang der Meßstrecke derart konzentriert, daß ihre Lage durch das System der Einteilung zu schlecht definiert ist, oder es sind mehr als 20 % der Steine im Silo am Ende der Versuchsstrecke gefunden worden, in welchem Falle die Näherungsrechnung von Abschnitt 8 nicht mehr genügt. Andere Felder sind mit  $i$  bezeichnet, was „imaginär“ bedeutet. Dies will sagen, daß die Bedingung unter (32) nicht erfüllt ist. Nun stellt sich die Frage, ob wir aus der Tatsache, daß in einzelnen Verteilungen diese Bedingung nicht erfüllt ist, schließen müssen, daß der ganze Vorgang sich nach anderen Gesetzen abspielt als nach den unseren Formeln zu Grunde gelegten. Dieser Schluß wäre wohl etwas zu radikal. Vielmehr dürfen wir annehmen, daß wir es hier mit einem Einfluß der in verschiedenen Versuchen recht stark ausgeprägten Kiesbänke zu tun haben. Besonders in Versuchen, bei denen in der oberen Versuchsstrecke die Bänke weniger stark ausgeprägt sind als in der unteren, tritt so ein Effekt ein. Eine zweite Erklärung könnte man darin finden, daß die einzelnen Steinkategorien nicht einheitlich zusammengesetzt sind, sondern selbst Gemische bilden. Doch müßte dieser Einfluß dann bei allen Verteilungen der betreffenden Kategorie eintreten, was aber nicht der Fall ist. Wir wollen daher das Hauptgewicht auf die erste Erklärung legen.

Die Tatsache, daß nur einzelne imaginäre Fälle auftreten, können wir aber auch noch etwas anders ausdrücken. Bekanntlich bekommt man die Verteilungskurven irgend einer Wahrscheinlichkeitsverteilung erst gut, wenn diese Verteilung durch eine sehr große Anzahl von Individuen gebildet wird. Wir könnten nun aus der Tatsache einzelner imaginärer Fälle und auch aus einer später noch festzustellenden starken Streuung der errechneten  $\xi_0$ - und  $\vartheta_0$ -Werte auf eine zu kleine Anzahl der verwendeten Steine schließen, doch ist an früherer Stelle schon darauf hingewiesen worden, daß aus praktischen

Versuchsgründen (Störung des Versuches) eine Vermehrung der Steine ungünstig gewesen wäre. (Vergl. auch S. 62—63.)

Aus  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  ist durch Division der Wert  $\nu$ , gebildet und in einer weiteren Kolonne der Tabelle Tafel XX aufgetragen. Diese drei Werte wollen wir auf ihren Verlauf hin untersuchen. Zunächst  $\xi_0$ . Während  $\vartheta_0$  sehr großen Schwankungen unterworfen ist, liegen alle  $\xi_0$ -Werte zwischen 0,64 und 11,28, die meisten zwischen 1 und 3. Nun muß untersucht werden, wie die einzelnen Formklassen der Steine sich unterscheiden und ob  $\xi_0$  von dem Geschiebetrieb abhängig ist. In zweiter Linie ist noch zu untersuchen, ob event. irgendwelche hydraulische Größen einen Einfluß auf  $\xi_0$  haben, z. B. die spezifische Wassermenge oder das Gefälle.

Es wurde nun versucht, die Werte  $\xi_0$  in Funktion des spezifischen Geschiebetriebes  $g$ , d. h. des sekundlichen Geschiebetriebes bezogen auf die Breitereinheit<sup>8)</sup> und in Funktion der mittleren Wassertiefe  $t_m$  aufzutragen. Beide Auftragungen ergaben eine deutliche Trennung der drei Formklassen, indem die  $\xi_0$ -Werte von flach gegen kugelig zunehmen. Innerhalb der einzelnen Formklassen fällt eine große Streuung der Werte auf, jedoch fehlt jeder systematische Gang der  $\xi_0$  mit  $g$  und  $t_m$ . Da die Wassertiefe mit zunehmender Wassermenge zunimmt, ist auch eine Abhängigkeit der  $\xi_0$ -Werte von dieser letzteren nicht zu erwarten.

Da wir keine Größe finden, von der  $\xi_0$  eine systematische Abhängigkeit zeigt, sehen wir uns zur Feststellung gezwungen, daß der Wert  $\xi_0$  jeder Formklasse auf einer Sohle von Geröllen mit 24 bis 34 mm Durchmesser eine Konstante ist. Die Abweichungen der einzelnen Meßwerte untereinander sind dabei nur zufällige Fehler, Streuung. Jetzt bleibt uns noch die Aufgabe, den wahrscheinlichsten Wert für jede Formklasse zu bestimmen. Wir berechnen diese als Mittelwerte

$\bar{\xi}_0 = \frac{1}{n} \sum \xi_0$	flach	mittel	kugelig
	1,673 m	3,39 m	3,76 m

Bevor wir aus diesen Zahlen weitere Schlüsse ziehen, wollen wir dieselben Untersuchungen an  $\vartheta_0$  und  $\nu$  durchführen. Beginnen wir

<sup>8)</sup> Vergl. Lit. 8.

mit  $v_r$ , der Reisegeschwindigkeit. Diese schwankt im Gegensatz zu  $\xi_0$  sehr stark mit dem Geschiebetrieb. In Tafel XXI ist  $v_r$  in Funktion des Geschiebetriebes  $g$  aufgetragen und zwar in logarithmischem Maßstabe. Hieraus sehen wir deutlich zweierlei: Einmal trennen sich die drei Kategorien (flach — mittel — kugelig) deutlich, und weiter lassen sich jeweils die Punkte einer jeden Gruppe durch eine Gerade mit der Neigung  $2/3$  ausgleichen. Das heißt aber nichts anderes, als daß  $\frac{v_r}{g^{2/3}}$  für jede Formklasse eine Konstante ist. Wir haben daher diese Werte ausgerechnet und in Tabelle Tafel XX eingetragen. Die Auftragung dieser Größe in Funktion von  $g$  und  $t_m$  zeigt auch keine Abhängigkeit. Daher sollen auch für diese Größen die Mittelwerte berechnet werden. Diese werden

	flach	mittel	kugelig
$\left(\frac{v_r}{g^{2/3}}\right) = \frac{1}{n} \sum \left[ \frac{v_r}{g^{2/3}} \right]$	15,91	24,76	48,6

Wenn  $\xi_0$  und  $\frac{v_r}{g^{2/3}}$  für die einzelnen Formklassen konstante Werte haben, so muß dies auch für  $\vartheta_0 \cdot g^{2/3}$  zutreffen, da  $\xi_0 = \vartheta_0 \cdot v_r$  ist. Daher sind in Tabelle Tafel XX auch die Werte  $\vartheta_0 \cdot g^{2/3}$  für alle Versuche ausgerechnet und wieder in Funktion von  $g$  und  $t_m$  aufgetragen worden. Auch hier sind systematische Abhängigkeiten bei der großen Streuung nicht feststellbar, daher bilden wir wieder Mittelwerte. Diese neu gebildeten Mittel sind natürlich infolge Rechenungenauigkeiten mit den früher für  $\xi_0$  und  $\frac{v_r}{g^{2/3}}$  gebildeten in der Formel  $\xi_0 = \vartheta_0 \cdot v_r$  nicht ganz verträglich, sodaß wir vorziehen, als „wahrscheinlichsten Wert“ für  $\vartheta_0 \cdot g^{2/3}$  den aus den früheren Mittelwerten gebildeten Ausdruck

$$[\vartheta_0 g^{2/3}] \approx \frac{\frac{1}{n} \sum \xi_0}{\frac{1}{n} \sum \frac{v_r}{g^{2/3}}}, \quad \text{einzusetzen,}$$

der für die drei Formklassen die folgenden Zahlenwerte annimmt

flach	mittel	kugelig
105,1	137,0	77,4

Betrachten wir zunächst die Werte  $[\vartheta_0 g^{2/3}]$ , so fällt auf, daß die drei Werte sehr nahe beieinander liegen, außer dem Wert für die kugeligen Steine, bei dem aber am wenigsten brauchbare Messungen vorliegen. Wir sind also versucht, anzunehmen, der Wert  $[\vartheta_0 g^{2/3}]$  sei für alle drei Formklassen gleich. Dem wahren Werte kommen wir am nächsten durch Mittelbildung, wobei wir jedem Einzelmittel als Gewicht die Anzahl der eingeschlossenen Messungen zuordnen.

$$\frac{\sum p [\vartheta_0 g^{2/3}]}{\sum p} = \frac{18 \cdot 105,1 + 14 \cdot 137,0 + 9 \cdot 77,4}{18 + 14 + 9} = \frac{4506}{41} = \underline{110}.$$

Mit diesem Ausdruck gehen wir nun wieder in unsere Tabelle Tafel XX und berechnen für jeden Versuch den Wert  $\vartheta_0' = \frac{110}{g^{2/3}}$ .

Kennen wir  $\vartheta_0'$ , so brauchen wir für die Berechnung des zugehörigen  $\xi_0'$  nur noch eine Gleichung, und wir nehmen dafür am besten diejenige für  $\mu_1$ , da die Bestimmung von  $\mu_1$  bei wenig Messungen genauer ist, als die von  $\mu_2$  oder  $\mu_{2s}$ . In den Fällen mit vollständiger Verteilung in der Meßstrecke wollen wir von Gl. (25) ausgehend  $\xi_0'$  bestimmen als

$$\xi_0' = \frac{\mu_1}{1 + \frac{\Theta}{\vartheta_0'}} = \frac{\mu_1}{1 + T'}.$$

In den Verteilungen, bei denen ein Teil der Steine die Versuchsstrecke bereits verlassen hat, erhalten wir nach Gl. (41)

$$\xi_0' = \frac{\mu_{1e} + M_{0e} \cdot \xi_e}{1 + \frac{\Theta}{\vartheta_0'} - M_{0e}} = \frac{\mu_{1e} + M_{0e} \cdot \xi_e}{1 + T' - M_{0e}}.$$

Auch die so berechneten Werte  $\xi_0'$  sind in Tabelle XX eingetragen. Während schon die  $\xi_0$  für jede der drei Formklassen konstant schienen (allerdings bei sehr großen Schwankungen der Einzelwerte), sehen wir für den Wert  $\xi_0'$  diese Tendenz noch viel deutlicher. Wieder ist eine Abhängigkeit der  $\xi_0'$  vom Geschiebetrieb  $g$  und der Wassertiefe  $t_m$  nicht zu finden. Gegenüber dem direkt bestimmten  $\xi_0$  schwanken nun aber die  $\xi_0'$ -Werte viel weniger und es sollen daher wieder die Mittelwerte gebildet werden. Diese sind

	flach	mittel	kugelig
$\overline{\xi_0'} = \frac{1}{n} \sum \xi_0'$	1,65 m	2,66 m	5,01 m.

Vergleichen wir nun diese mittleren  $\overline{\xi_0'}$  mit den entsprechenden  $\overline{\xi_0}$ , so sehen wir hier ein noch deutlicheres Anwachsen der Werte von flach nach kugelig. Andererseits weisen die  $\xi_0'$ , die ja auch punktweise aus den Messungen gerechnet wurden, viel weniger Streuung auf als die  $\xi_0$ , sodaß wir den eingeschlagenen Weg als aussichtsreich bezeichnen dürfen. Nun müssen wir aus den Werten  $\xi_0'$  und  $\vartheta_0'$  noch die entsprechenden Werte  $v_r'$  (Reisegeschwindigkeit) rechnen. Diese werden direkt aus den Mittelwerten berechnet zu

	flach	mittel	kugelig
$v_r' = \frac{\xi_0'}{\vartheta_0'}$	14,1 $g^{2/3}$	23,0 $g^{2/3}$	42,5 $g^{2/3}$ mm/s.

Wir stellen zunächst die gute Übereinstimmung mit den  $v_r$ -Werten fest mit Ausnahme desjenigen für die kugeligen. Dabei ist aber zu sagen, daß gerade bei dieser Kategorie im Mittel von  $v_r'$  fünf Werte einbezogen sind, die bei der Bestimmung von  $v_r$  als „imaginär“ ausschieden. Wir sehen gerade aus diesem Beispiel deutlich, wie unzuverlässig das Arbeiten mit dem zweiten Moment wird, wenn nur wenig Messungen vorhanden sind.

Nun wollen wir uns fragen, was diese Resultate bedeuten:

1. Der mittlere Einzellaufweg  $\xi_0'$  ist für alle Steine einer jeden Formklasse ein Festwert, also unabhängig vom Abflußzustand. Immerhin scheinen gewisse Versuche, insbesondere bei  $g = 0,3 \div 0,61$  l/ms systematisch etwas tiefere Werte zu geben und wir gehen wohl nicht fehl, wenn wir vermuten, daß dies mit einer etwas anderen Ausbildung der Sohle zusammenhängt (Bankbildung).

2. Die mittlere Einzelliegezeit  $\vartheta_0'$  ist für die verschiedenen Formklassen gleich, und zwar umgekehrt proportional der Größe  $g^{2/3}$ , die auch bei der Berechnung der Größe des Geschiebetriebes (vergl. Lit. 8) eine Rolle zu spielen scheint. Die gefundene Konstante  $\vartheta_0 \cdot g^{2/3} = 110$  ist großen zufälligen Schwankungen unterworfen.

3. Die Reisegeschwindigkeit  $v_r'$  der Steine schließt diese Einflüsse von 1. und 2. in sich. Die kugeligen Gerölle laufen demnach ca. dreimal schneller als die flachen. Die Reisegeschwindigkeit wächst proportional mit  $g^{2/3}$ .

Aus der dritten Feststellung können wir noch eine interessante Schlußfolgerung ziehen. In unseren Versuchen, in denen die Zusammensetzung des Versuchsmaterials (also nicht die der gefärbten Gerölle, sondern aller anderen) eine starke Bevorzugung der mittleren Kategorie zeigt bei kleinen Zusätzen an flachen und kugeligen, können wir in erster Näherung als Reisegeschwindigkeit des ganzen Gemisches den oben gefundenen Mittelwert  $v' = 0,0230 g^{2/3}$  m/s einsetzen. Wenn wir nun noch berücksichtigen, daß die pro lfm Breite transportierte Geschiebemenge  $g$  beträgt, erhalten wir die Dicke  $\Delta$  der von der Bewegung erfaßten Schicht zu

$$\Delta = \frac{g}{0,0230 \cdot g^{2/3}} = \frac{g^{1/3}}{0,0230} \text{ mm.}$$

Hierbei sind nun drei Fälle möglich, nämlich

1.  $\Delta$  ist größer als die Dicke der obersten Steinschicht,
2.  $\Delta$  ist gleich der Dicke der obersten Steinschicht,
3.  $\Delta$  ist kleiner als die Dicke der obersten Steinschicht.

1. Fall. Damit überhaupt tiefer liegende Steine von der Bewegung erfaßt werden können, müssen sich auf jeden Fall Bänke oder Dünen bilden, die eine Bewegung in beliebig dicken Schichten erlauben.

2. Fall. Dies ist der einzige Fall, in dem eine Geschiebebewegung im Beharrungszustand ohne Bänke möglich ist, jedoch sind auch in diesem Falle Sandbänke oder Dünen denkbar. Für unsere Geschiebe muß in diesem Fall  $g = 0,3$  l/ms sein.

3. Fall. Dieser zeichnet sich dadurch aus, daß die von der Bewegung erfaßten Steine unmöglich die ganze Sohle bedecken können. Vielmehr werden Schwaden von Steinen über die nicht von der Bewegung erfaßte Unterlage laufen, und zwar werden dann wohl die Schwaden durch ihre größere Rauigkeit lokal eine Konzentration des Gefälles bedingen, wodurch die übrige Sohle vor Angriff geschützt wird. Diese Konzentration von „Sohlenangriff“ kann auch darin bestehen, daß der Transport von Kies nur in einzelnen Streifen erfolgt (z. B. in der Mitte der Rinne).

Nun noch einige Worte zur Genauigkeit, mit der sich die Verteilungen bilden. An und für sich dürften wir bei der vorhandenen Anzahl von 300 bis 600 Steinen pro Verteilung die Kurven besser

erwarten, insbesondere dürften sich die  $\xi_0$ ,  $\vartheta_0$  und  $\nu$ , viel genauer ergeben. Daß die großen Streuungen besonders bei den  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  eintreten, hat andere Gründe. Einmal ist der Anfangspunkt der Bewegung nicht genau bekannt. Wohl wissen wir genau, wo die Steine ins Wasser fallen, aber wo sie das erste Mal die Sohle treffen, das können wir nicht genau angeben, und doch ist gerade das der eigentliche Anfangspunkt der Bewegung. Zweitens ist der Geschiebetrieb gewissen periodischen Schwankungen mit einer Periode von der Größenordnung des  $\Theta$  unterworfen, sodaß auch z. B. der Wert  $g$  für die Dauer von  $\Theta$  zufälligen Schwankungen von bis 50 % und mehr unterworfen ist (besonders bei kleinem  $g$ ). Berücksichtigen wir diese beiden erschwerenden Umstände, so müssen wir die erzielten Resultate als befriedigend bezeichnen.

Nachdem wir den Einzellaufweg im Mittel zu 1—5 m bestimmt haben, muß über diesen Begriff noch eine kleine Bemerkung gemacht werden. Wie wir in der Einleitung definierten, wird der Einzellaufweg von dem betreffenden Stein ohne Zwischenschaltung einer auch noch so kurzen Zeit des Liegenbleibens zurückgelegt. Dies ist aber absolut nicht so zu verstehen, daß diese ganze Strecke *in einem Sprung*, also ohne zwischendurch den Boden zu berühren, durchlaufen werde. Vielmehr setzt sich die Bewegung innerhalb einer Einzelphase aus einer ganzen Reihe kleiner Sprung- und Rollbewegungen zusammen, die sich aber unmittelbar folgen. Die Größe der einzelnen Sprünge, wie sie von Auge beobachtet werden konnten, beträgt höchstens 10—20 cm. Hieraus erklärt sich, daß der Begriff des Einzellaufweges nur negativ definiert werden kann, nämlich als diejenige Strecke, die ohne Liegenbleiben durchlaufen wird.

## 11. Resultate der Verteilung in Versuchen mit Geschiebegemisch.

Von fünf Versuchen mit Geschiebegemisch 6—40 mm Korn liegen Verteilungen derselben Gerölle mit einem mittleren Durchmesser  $d = 24$ —34 mm vor, die ganz analog denjenigen in Versuchen mit einheitlichem Geschiebe ausgewertet wurden. Die Resultate sind in Tabelle Tafel XXII zusammengestellt. Wieder sind für jeden Versuch und jede Geschiebeform die  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  aus  $\mu_1$  und

$\mu_2$  berechnet. Leider genügen die wenigen Verteilungen nicht, um eine gute Mittelbildung zu gewährleisten. Wir wollen daher nicht neu die Zusammenhänge zwischen den Konstanten suchen, sondern nur nachprüfen, ob und wie weit die früher gefundenen Zusammenhänge auch hier anwendbar sind. Zunächst die  $\xi_0$ -Werte. Vergleichen wir die Mittelwerte

	flach	mittel	kugelig
Mittel Vers. 16—39	$\xi_0 = 1,673 \text{ m}$	3,39 m	3,76 m
„ „ 51—57	$\xi_0 = 1,556 \text{ m}$	2,477 m	3,841 m

so finden wir innerhalb der zu erwartenden Streuungen Übereinstimmung. Also: Der mittlere Einzellaufweg  $\xi_0$  einer jeden Formkategorie unserer Gerölle mit  $d = 24—34 \text{ mm}$  ist im Mittel im Gemisch  $6—40 \text{ mm}$  derselbe wie im einheitlichen Korn  $24—34 \text{ mm}$ . Zeichnen wir nun aber die  $\xi_0$ -Werte in Funktion der Geschiebemenge auf, so sehen wir, daß nur bei kleinstem Geschiebetrieb von ca.  $0,08 \text{ l/ms}$  eine deutliche und systematische Trennung der Klassen festgestellt werden kann. Bei dem nächst größeren Geschiebetrieb von ca.  $0,3 \text{ l/ms}$  werden die Unterschiede schon sehr schwach, um bei  $2,6 \text{ l/ms}$  ihr System völlig zu verlieren (vergl. Tafel XXIII).

In diesem Zusammenhang ist es interessant, zu konstatieren, daß bei den beiden Versuchen 54 und 56 mit einem Geschiebetrieb von  $2,6 \text{ l/ms}$  ausgesprochene Geschiebewellen (Bänke) von  $2—3 \text{ m}$  Wellenlänge auftraten, während bei den drei übrigen Versuchen von eigentlichen Bänken nicht gesprochen werden konnte. Wenn wir aber bei Auftreten von Bänken im Gemisch für alle drei Formklassen dasselbe  $\xi_0$  finden, so scheint das mit den Erfahrungen im einheitlichen Geschiebe (Versuch 16—39) völlig in Widerspruch zu stehen. Tatsächlich ist das aber nicht der Fall, indem sich bei jenen Versuchen die Bänke erst in der unteren Hälfte der Versuchsstrecke richtig ausbildeten, während die obere Hälfte meist ziemlich glatt war. Einzig bei den Versuchen mit größtem Geschiebetrieb von ca.  $2,5 \text{ l/ms}$  begannen die Bänke schon im oberen Teil, und tatsächlich konstatieren wir nur bei Versuch 17 ein stetiges Ansteigen der  $\xi_0$  von flach nach kugelig, während bei 18, 27 und 28 die Werte nicht systematisch steigen. Versuch 39 ist nicht vollständig, daher für diesen Vergleich ungeeignet. Andererseits nehmen die  $\xi_0$ -Werte jener fünf



Versuche alle systematisch zu, sodaß wir aus dem Verhalten der  $\xi_0$  keine sichere Folgerung ziehen können.

Gehen wir nun zum Vergleich der  $\nu_r$ -Werte über, so konstatieren wir einen deutlichen Unterschied gegenüber früher. Die Werte  $\frac{\nu_r}{g_0^{3/2}}$  konnten bei einheitlichem Geschiebe für jede einzelne Formklasse für sich als konstant angesehen werden. Dies trifft jetzt nicht mehr zu, vielmehr sind diese Werte und damit auch die  $\nu_r$  selbst innerhalb jedes einzelnen Versuches für alle drei Formklassen als gleich anzusehen und wachsen mit zunehmendem Geschiebetrieb und abnehmender Wassertiefe von 5 bei 0,08 l/ms und 1,24 m Wassertiefe auf ca. 30 bei 2,6 l/ms und 0,38 m Wassertiefe. Das Verhalten dieser durch die Versuche am besten definierten Größe  $\nu_r$  ist also ein gänzlich anderes als bei den Versuchen mit einheitlichem Geschiebe.

Um den Zusammenhang mit den Resultaten der Verteilungen in den Versuchen mit einheitlichem Korn zu bekommen, wollen wir einmal versuchsweise statt der einzeln errechneten  $\xi_0$  in den Versuchen 51—57 die mittleren  $\xi_0'$ -Werte der Versuche 16—39 verwenden (vergl. Tabelle Tafel XXII, Kolonne  $\xi_0'$ ). Aus diesen  $\xi_0'$  und den Gleichungen für das erste Moment  $\mu_1$  können wir nach folgendem Schema direkt die Werte  $\nu_r'$  rechnen. Es ergibt sich nämlich aus Gl. (25) für die vollständigen Verteilungen

$$\xi_0' = \frac{\mu_1}{1 + g_0'} \quad 1 + \frac{\Theta}{g_0'} = \frac{\mu_1}{\xi_0'} \quad \frac{\Theta}{g_0'} = \frac{\mu_1}{\xi_0'} - 1 = \frac{\mu_1 - \xi_0'}{\xi_0'}$$

$$g_0' = \frac{\Theta}{\frac{\mu_1 - \xi_0'}{\xi_0'}}$$

$$\nu_r' = \frac{\xi_0'}{g_0'} = \frac{\mu_1 - \xi_0'}{\Theta}$$

und aus Gl. (41) für die unvollständigen Verteilungen

$$\xi_0' = \frac{\mu_{1e} + M_{0e} \cdot \xi_e}{1 + \frac{\Theta}{g_0'} - M_{0e}} \quad \frac{\Theta}{g_0'} = \frac{\mu_{1e} + \xi_e M_{0e}}{\xi_0'} \quad (1 - M_{0e})$$

$$\vartheta_0' = \frac{\Theta \xi_0'}{\mu_{1e} + \xi_e M_{0e} - \xi_0' (1 - M_{0e})}$$

$$v_r' = \frac{\xi_0'}{\vartheta_0'} = \frac{\mu_{1e} + \xi_e M_{0e} - \xi_0' (1 - M_{0e})}{\Theta}$$

In Tafel XXII sind diese Werte  $v_r'$  berechnet und zeigen im allgemeinen kein wesentlich anderes Verhalten als die direkt berechneten  $v_r$ , was wieder dafür spricht, daß die  $\xi_0$  auch hier bei den Versuchen mit Geschiebegemisch gleich angesetzt werden dürfen, wie bei den Versuchen mit einheitlichem Korn. Tragen wir die Werte  $v_r'$  in logarithmischem Maßstabe in Funktion von  $g$  auf, so sehen wir (vergl. Tafel XXIII), daß im Gegensatz zu früher die Punkte sich am besten durch eine unter  $45^\circ$  geneigte Gerade ausgleichen lassen, d. h. daß  $\frac{v_r'}{g}$  eine Konstante sein soll und nicht wie früher  $\frac{v_r}{g^{2/3}}$ . Unsere Tafel XXII gibt die Werte  $\frac{v_r'}{g}$  und wir sehen, daß tatsächlich die Streuung wesentlich kleiner ist als die der  $\frac{v_r}{g^{2/3}}$ . Infolge der Kleinheit der Tabelle lassen sich die Resultate auch als Zahlen gut überblicken, sodaß sich eine Auftragung erübrigt. Wir sehen, daß sich sowohl für kleine wie für große Geschiebetriebe die Zahlen gleichmäßig um den Mittelwert 17,8 gruppieren. Ob die deutliche Scheidung der Versuche 54 und 56, die zwar gleichen Geschiebetrieb, aber verschiedene Wassertiefe und damit Wassermenge aufweisen, zufällig oder systematisch ist, läßt sich infolge der kleinen Zahl der Beispiele nicht feststellen.

Aus den Werten  $\xi_0'$  und  $v_r'$  lassen sich die  $\vartheta_0'$  direkt berechnen, und wir übersehen sofort, daß der Wert  $\vartheta_0' \cdot g$  für jede Formklasse eine Konstante sein muß, die die folgende Zusammenstellung zeigt:

	flach	mittel	kugelig
$\xi_0'$	1,648 m	2,658 m	5,005 m
$\frac{v_r'}{g}$	17,8	17,8	17,8
$\vartheta_0' \cdot g = \frac{\xi_0'}{\frac{v_r'}{g}}$	0,0925	0,148	0,281

Zusammenfassend können wir feststellen, daß die  $\xi_0$ -Werte der verschiedenen Formklassen mindestens der Größenordnung nach, wahrscheinlich aber sogar genau gleich sind wie die entsprechenden  $\xi_0$ -Werte bei den Versuchen mit einheitlichem Korn. Ganz anders verhalten sich aber die  $\vartheta_0$  und  $\nu_r$ . Während diese beim einheitlichen Korn deutlich mit  $g^{2/3}$  gingen, scheinen sie hier beim Gemisch  $g$  selbst proportional. Daß dies ein tiefgreifender Unterschied ist, können wir schon daraus sehen, daß die Schichtdicke, die wir beim einheitlichen Korn proportional  $g^{1/3}$  gefunden haben, jetzt konstant wird, sodaß die an diese Abhängigkeit geknüpften Überlegungen wegfallen. Die nunmehr konstante Schichtdicke beim Gemisch errechnet sich aus Obigem zu  $\frac{1000}{17,8} = 56$  mm.

Die kleine Zahl von Messungen beim Gemisch gestattet uns leider nicht, ihr Verhalten genau zu definieren, jedoch können wir mit Sicherheit sagen, daß es ein anderes sein muß, als beim einheitlichen Korn.

*Wir können also zusammenfassend feststellen, daß das Verhalten des einzelnen Steines im bewegten Wasser nicht nur von den hydraulischen Bedingungen, sondern auch wesentlich von der Art der ihn umgebenden Sohle beeinflußt wird.*

## II. Teil. Die Füllaufgabe.

### 12. Verteilung der Einzelvorgänge.

Der ganze erste Teil der Arbeit setzt sich mit der Frage auseinander, was ein Stein tut, wenn man ihn zu einer bestimmten Zeit und an einem bestimmten Ort ins Wasser wirft. Gelöst ist diese Aufgabe mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, indem die Wahrscheinlichkeit dafür angegeben wird, daß der Stein sich eine bestimmte Zeitspanne  $T$  später um die Strecke  $x$  weiter flußabwärts befindet.

Wir wollen für unsere jetzige Betrachtung von dem Grenzfall, der Gauss'schen Verteilung, ausgehen. Wie in Kapitel 5 gezeigt wurde, ist für eine Verteilung nach der Gauss'schen Kurve ein  $T$  (gemessen in relativem Maß) notwendig, das sehr viel größer als 1 ist, d. h. mit anderen Worten, wir müssen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung betrachten, zu deren Entstehung eine sehr große Anzahl von Einzelschritten (Doppelphasen) erforderlich ist. Für diesen Fall gibt uns die Gauss'sche Kurve die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein betrachteter Stein einen bestimmten Weg  $x$  zurückgelegt hat. Im ersten Teil wurde nun gezeigt, wie sich diese Verteilungskurve der Wahrscheinlichkeit ändert, wenn das einzelne betrachtete Objekt nicht mehr eine sehr große Anzahl von Einzelschritten ausführt, sondern eine beliebig kleine Anzahl. Es war hierfür erforderlich, von der Annahme fester Einzelschrittgrößen abzugehen und die Schrittgröße variabel werden zu lassen. Statt der festen Schrittgröße bei der Gauss'schen Verteilung tritt nunmehr der Mittelwert der an sich veränderlichen Schrittgröße in Rechnung (mittl. Einzelaufweg resp. mittl. Einzelliegezeit).

Um diese Wahrscheinlichkeitsverteilung zu veranschaulichen, wurden im Versuch am oberen Ende des Kanals gleichzeitig auf einer möglichst eng begrenzten Fläche eine größere Anzahl gleich-

artiger Steine in das Wasser geworfen. Dabei muß man sich aber stets vor Augen halten, daß dieses Vorgehen an sich eigentlich schon eine Störung des Versuches bedeutet, indem die Geschiebebewegung bei ihrer normalen Ausbildung eine solche Konzentration bewegter Gerölle auf eine relativ kleine Fläche nicht kennt. Wir sind daher versuchstechnisch gezwungen, die Zahl der betrachteten gefärbten Gerölle möglichst klein zu halten, um auch die Störung des Versuches, dessen Wirkungsweise wir ja gerade mit den gefärbten Geröllen feststellen wollen, möglichst klein zu halten. Andererseits wissen wir, daß die Gesetze der Wahrscheinlichkeit erst dann sich richtig auszuwirken beginnen, wenn die Zahl der betrachteten Individuen möglichst groß ist. Wir können direkt behaupten, daß die Angabe einer Wahrscheinlichkeit für den Laufweg eines einzigen Steines uns eigentlich für die Kenntnis des von ihm tatsächlich durchlaufenen Weges gar nichts sagt. Dies läßt sich am besten durch das Beispiel des Glücksspiels erklären. Jedermann, der in einer Lotterie spielt, ist sich bewußt, daß die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, auf jeden Fall kleiner ist, als diejenige, zu verlieren. Trotzdem spielt er und spielt zwar deswegen, weil sein Einsatz (ein einzelnes Individuum) eben trotz größerer oder kleinerer Wahrscheinlichkeit auch gewinnen kann. Ebenso sagt uns der tatsächliche Laufweg eines Steines bei dem von uns betrachteten Problem des Geschiebetriebes noch gar nichts über die vorhandene Wahrscheinlichkeitsverteilung, da wir ja keine Ahnung haben, welches  $p(x) dx$  der Verteilung unser Stein gerade bildet. Tatsächlich kann der betrachtete Stein (zwar mit verschiedener Wahrscheinlichkeit) an jedem beliebigen Punkte der gesamten Wahrscheinlichkeitsverteilung liegen. Einen sichtbaren Sinn bekommt nun aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn die Zahl der betrachteten Individuen zu steigen beginnt, denn dann ordnen sie sich immer besser der für den betreffenden Fall gültigen Wahrscheinlichkeitskurve ein.

Die beiden nacheinander ausgesprochenen Gedanken widersprechen sich nun in ihrer Wirkung, indem einerseits die Zahl der betrachteten Steine klein sein soll, damit der Versuch nicht gestört wird, andererseits groß sein soll, damit ihre Verteilung ein genügend gutes Bild der Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt. Im Versuch half man sich auf die Art, daß die Steine nicht an derselben Stelle,

sondern nur im gleichen Querschnitt ins Wasser geworfen wurden und zwar möglichst gleichzeitig in den Versuchen mit großem Geschiebetransport, in denen entsprechend auch die Laufzeit  $\Theta$  relativ klein ist, während bei Versuchen mit kleinem Geschiebetrieb entsprechend dem größeren  $\Theta$  die Beschickung der Steine auf eine bestimmte Zeitspanne (ca.  $\frac{\Theta}{20}$ ) verteilt wurde. Dadurch war es möglich, den beiden sich widersprechenden Bedingungen einigermaßen gerecht zu werden.

Nun stellt sich die Frage, was wir von den aus diesen Beschickungsversuchen gemachten Erkenntnissen auf den normalen Transport bei den vorliegenden Abflußzuständen übertragen dürfen. Auf jeden Fall wird so etwas wie die bei den Beschickungsversuchen auftretenden Verteilungskurven beim normalen Transport der Steine nicht feststellbar sein. Dafür bleiben aber die Grundlagen der Bewegung, nämlich der mittlere Einzelaufweg  $\xi_0$ , die mittlere Einzel-liegezeit  $\vartheta_0$  und das Exponentialgesetz Gl. (3), für die Einzelaufwege und -liegezeiten bestehen und damit auch die Größe der mittleren Reisegeschwindigkeit.

Betrachten wir nun ein nach Länge und Breite ausgedehntes Flußstück, das überall die Abflußverhältnisse unseres Versuches haben soll, dann können wir für dieses betrachtete große Flußstück mit den in ihm enthaltenen sehr vielen einzelnen Steinen den ganzen Transportzustand mit Hilfe dieser obigen Größen leicht beschreiben. Wir wissen nämlich, daß alle diese vielen in der Sohle befindlichen Steine abwechslungsweise laufen und liegen bleiben und zwar laufen sie jedesmal im Mittel die Strecke  $\xi_0$  m und warten dann wieder  $\vartheta_0$  sec. Sie bewegen sich also im Mittel mit der mittleren Reisegeschwindigkeit  $v_r = \frac{\xi_0}{\vartheta_0}$ . Kennen wir außer diesen beiden Konstanten auch noch die pro  $m^2$  von der Bewegung erfaßten Steine, so können wir auch die Transportmenge angeben. Es wird nämlich die pro m Breite und pro sec. transportierte Geschiebemenge  $g$  in kg

$$g = r \cdot \frac{\xi_0}{\vartheta_0}$$

wenn  $r$  das Gewicht der Geschiebeschicht in  $kg/m^2$  bedeutet, die vom Geschiebetransport überhaupt erfaßt wird.

Lassen wir nun das betrachtete Flußstück immer kleiner werden, bis es schließlich auf ein Sohlenstück zusammenschrumpft, das nur eine beschränkte Anzahl von Geschiebestücken beherbergt, dann sehen natürlich die Verhältnisse ganz anders aus. Jetzt sind nicht mehr „viele“ Steine vorhanden, deren mittlere Bewegung in jedem Augenblick genügend genau durch die Mittelwerte  $\xi_0$  und  $\vartheta_0$  beschrieben wird. Vielmehr treten jetzt große Schwankungen in der sekundlichen Anzahl der Austauschvorgänge auf, und es ist anzunehmen, daß wir bei Betrachtung des einzelnen Steines als Einheit oder Individuum mit Hilfe unserer früheren Überlegung das Maß dieser Schwankungen bestimmen können. Leider ist uns kein Mittel in die Hand gegeben, um die aus diesen Überlegungen erhaltenen Resultate zu überprüfen. Betrachten wir aber statt einem kleinen Stück Sohlenfläche und der Anzahl der darauf pro Zeiteinheit sich abspielenden Austauschvorgänge ein kleines Stück eines Querschnittes, dann liegen die Verhältnisse viel günstiger. Registrieren wir nämlich in dem von uns betrachteten Querschnittselement die Durchgänge von Geschiebekörnern, so geben diese ein Maß für die örtliche Verteilung der einzelnen Austauschvorgänge, wie später noch näher gezeigt wird.

Bevor wir auf die rechnerische Untersuchung der Frage eingehen, sei zunächst die Art und Weise beschrieben, wie wir den Geschiebetransport in einem Querschnittselement messen. Es geschah dies nämlich mit Hilfe von sog. Geschiebefängern<sup>1)</sup>. Diese Geschiebefänger, meistens als viereckige Kasten mit durchlässigen Siebwänden ausgebildet, besitzen eine Öffnung von bestimmter Breite, die in der Arbeitsstellung flußaufwärts gerichtet ist. Berührt die Unterkante der Öffnung die Sohle, so befindet sich der Apparat in Arbeitsstellung und läßt alle sich in Bewegung befindlichen Steine, die auf die Öffnung zulaufen, in sich eintreten. Ein Wiederaustritt dieser Steine wird durch die sonst allseitig geschlossenen Gitterwände verhindert, während das Wasser, allerdings unter Überwindung eines gewissen Widerstandes, wieder aus dem Apparat austritt. An dieser Stelle soll nicht weiter untersucht werden, inwieweit der Apparat als solcher richtig arbeitet, d. h. ob die im Mittel

---

<sup>1)</sup> Vergl. hierzu z. B. Lit. 10—12.

sekundlich den Eingang passierende Geschiebemenge tatsächlich dem in ungestörtem Wasser vorhandenen Geschiebetrieb entspricht. Wir wollen ja tatsächlich nicht in erster Linie die Größe des Geschiebetriebes bestimmen, sondern seine Verteilung oder anders ausgedrückt seine Schwankung und machen dafür die an und für sich plausible Annahme, daß die Größe der Schwankungen durch einen eventuellen Fehler des Apparates nicht beeinflußt wird. Dies heißt tatsächlich nichts anderes, als daß wir den prozentualen Fehler des Apparates von der Größe des Geschiebetriebes unabhängig annehmen. Das ist vor allem deshalb plausibel, weil der Fehler des Apparates, bedingt durch sein hydraulisches Verhalten, nur durch eine Änderung der hydraulischen Verhältnisse beeinflußt wird. Eine lokale Variation des Geschiebetriebes kann aber keinen merkbaren Einfluß auf die hydraulischen Verhältnisse haben, da die transportierte Geschiebemasse an sich schon verschwindend klein ist gegenüber der zugehörigen Wassermasse. Weiter zeigten Eichversuche in der Versuchsanstalt für Wasserbau in Zürich (bisher unveröffentlicht), daß innerhalb der verwendeten Füllungsgrade der Fehler der benützten Apparate von eben dieser Füllung unabhängig ist (im Gegensatz zu den Feststellungen von Ehrenberger, Mühlhofer etc.). Wir wollen daher für die Auswertungen annehmen, daß die gefangenen Geschiebemengen tatsächlich dem ungestörten Geschiebetrieb entsprechen.

Die Messung mit dem Geschiebefänger besteht darin, daß dieser eine bestimmte Zeit an einem bestimmten Ort in Arbeitsstellung verbleibt, dann rasch aufgezogen und entleert wird. Nach unserer Annahme ist somit der gefangene Inhalt gleich der in der Zeit  $T$  durch ein Querschnittselement von der Breite  $B$  der Geschiebefängeröffnung an der betreffenden Stelle laufenden Geschiebemenge.

Wollen wir die Menge des bei jedem einzelnen Fangvorgang als eine vom Zufall abhängige Wahrscheinlichkeitsgröße darstellen, so müssen wir genau analog den Beispielen des ersten Teiles wieder zwei „Fortschritte“ unterscheiden, die sich gegenseitig ablösen, und von denen einer eine Vergrößerung der vom Zufall abhängigen Größe bedeutet, während der andere eine Unterbrechung des Zuwachses mit sich bringen muß. Andererseits muß diese andere Dimension das Charakteristikum für das Ende des Füllvorganges liefern. Aus diesem Schema sehen wir leicht, daß wir entsprechend der früheren Zeit-



und Wegdimension jetzt eine Zeit- und eine Fülldimension bekommen. Hierbei gibt die Zeitdimension die seit dem Beginn der betreffenden Entnahme verflossene Zeit, während die Fülldimension die Menge des seit Beginn der betreffenden Entnahme gefangenen Geschiebes gibt. Analog wie früher unterscheiden wir wieder Phasen mit Zeitzuwachs ohne Mengenzuwachs, Zeitphase (das sind also die Zeiten zwischen den einzelnen Eintritten der Steine) und Phasen mit Mengenzuwachs ohne Zeitzuwachs, Füllphase. Zeichnen wir dieses System nach Art von Fig. 1 auf, so scheint das Bild vollständig dasselbe zu sein. Ein wesentlicher Unterschied liegt aber im Beginn des Vorganges. Im Teil I fanden wir auf logischem Wege, daß der Vorgang mit einer Bewegungsphase beginnen muß, wobei die Bewegungsphase in derjenigen Dimension liegt, in der wir letzten Endes die eindimensionale Verteilung suchen. Sollte dies im vorliegenden Falle wieder gleich sein, so müßte unser Vorgang stets mit einer Füllphase beginnen. Da wir aber einen logischen Zusammenhang zwischen dem Einbringen des Korbes und dem Einlaufen des ersten Steines unter den gemachten Voraussetzungen nicht aufstellen können, trifft diese Annahme hier nicht zu, vielmehr zwingen uns unsere Überlegungen, für den Beginn des Vorganges eine Zeitphase anzunehmen. Wir müssen daher für diesen Fall die Verteilungsfunktion und ihre Eigenschaften neu bestimmen.

Um den Zusammenhang zwischen dem jetzigen und dem früheren Fall deutlicher werden zu lassen, wollen wir versuchen, diejenige Bewegungsaufgabe zu konstruieren, die der vorliegenden entspricht. Zu dem Zwecke müssen wir zunächst die analogen Elemente einander gegenüberstellen. In der Bewegungsaufgabe betrachteten wir als Einheiten, die alle unter denselben wahrscheinlichkeitstheoretischen Voraussetzungen im Nullpunkt ihre Bewegung beginnen, die einzelnen Steine. Jeder einzelne solche Stein machte trotz gleichen Umständen seinen individuellen Weg (in der Zeit  $T$ ), und die endgültige eindimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung ergab sich durch Zuordnung der einzelnen Individuen zu den von ihnen durchlaufenen Wegen. In der Füllaufgabe ist der einzelne Füllvorgang die Einheit (entspricht also dem einzelnen Stein). Dem zurückgelegten Weg entspricht die Menge der Füllung des Korbes, sodaß wir die endgültige eindimensionale Wahrscheinlichkeitsver-

teilung durch Zuordnung der einzelnen Füllvorgänge zu den in ihnen erreichten Füllungen erhalten. In beiden Vorgängen spielt die Zeit dieselbe Rolle, d. h. sie bildet die Zwischenphasen, die das Weiterlaufen resp. Weiterfüllen unterbrechen und beendet in gemeinsamem Endwert  $T$  die Ausbreitungsvorgänge.

Wir sagten, daß wir aus logischen Gründen für die jetzt zu untersuchende Füllaufgabe mit einer Ruhephase beginnen müssen. Die analoge Bewegungsausgabe beginnt also auch mit einer Ruhephase. Der Einheitlichkeit halber und um die Vergleiche mit dem früheren Fall deutlicher zu gestalten, wollen wir die Formeln und Zusammenhänge wieder für die Bewegungsaufgabe aufstellen, insbesondere da diese wesentlich anschaulicher ist. Die Resultate lassen sich dann an Hand der oben angegebenen Analogien ohne weiteres auf die Füllaufgabe anwenden.

### 13. Wahrscheinlichkeitsverteilung bei Beginn der Bewegung mit einer Ruhepause.

Der zu betrachtende Fall ist folgender: Die in ihrer Bewegung zu untersuchenden Steine sollen zu Anfang des Vorganges nicht in das bewegte Wasser geworfen werden, sondern als Teil der Sohle in derselben ruhen. Nun leiten wir den Vorgang ein, indem wir das Wasser in Bewegung bringen und während der Zeit  $T$  in Bewegung lassen. Dann stellen wir die Pumpen wieder ab und nehmen die Verteilung der bezeichneten Steine wieder auf.

So gut es im ersten Fall klar war, daß die Bewegung mit einer Bewegungsphase begann, so einleuchtend ist es, diese neue Bewegung mit einer Ruhephase beginnen zu lassen. Der auffälligste Unterschied gegen früher ist der, daß gar nicht alle Steine in Bewegung kommen, sondern eine endliche Zahl von Steinen auch zur Zeit  $T$  noch am Orte  $x = 0$  liegt. Nach der anfänglichen Ruhephase verteilen sich die Steine nämlich nach der Funktion

$$p_0 dt_0 = e^{-t_0} dt_0$$

und zur Zeit  $T$  liegen also in 0

$$(47) \quad \int_T^\infty p_0 dt_0 = \int_T^\infty e^{-t_0} dt_0 = e^{-T}.$$

Der Rest der Steine, also diejenigen, die vor der Zeit  $T$  in Bewegung geraten, beschreiben im Galton'schen Brett Zickzacklinien ähnlich wie diejenigen im Abschnitt 3, nur mit dem Unterschied, daß sie alle mit einer Ruhephase beginnen, daß also die Bewegung längs der Zeitaxe beginnt. Im übrigen verfolgen wir den Weg des Abschnittes 3 und untersuchen zunächst die Wahrscheinlichkeit für einen Stein, gerade den in Fig. 9 aufgezeichneten Weg zu beschreiben.

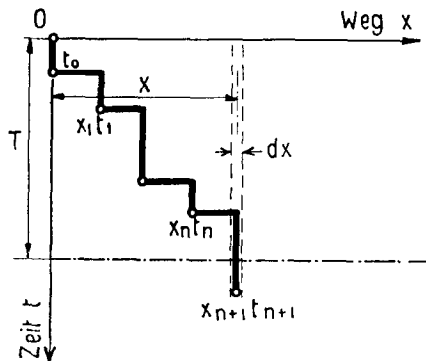


Fig. 9.

Die Grenzbedingungen für die einzelnen Zwischenkoordinaten lauten ganz analog zu früher

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$$

$$0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T < t_{n+1}$$

und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Stein genau dem Weg der Fig. 9 folgt, ist

$$e^{-t_0} dt_0 \cdot e^{-x_1 - (t_1 - t_0)} dx_1 dt_1 \cdot e^{-(x_2 - x_1) - (t_2 - t_1)} dx_2 dt_2 \cdot \dots \cdot e^{-(x_{n+1} - x_n) - (t_{n+1} - t_n)} dx_{n+1} dt_{n+1}$$

$$= e^{-x_{(n+1)} - t_{(n+1)}} \cdot dx_1 dx_2 \cdot \dots \cdot dx_{(n+1)} \cdot dt_0 dt_1 dt_2 \cdot \dots \cdot dt_{(n+1)}.$$

Hieraus bekommen wir wieder die Wahrscheinlichkeit, irgendwie in der  $(n+1)$ -ten Doppelphase die  $T$ -Linie zu treffen und nach derselben im Element  $dx_{n+1} dt_{n+1}$  liegen zu bleiben, indem wir die Zwischenkoordinaten in dem oben angegebenen Bereich variieren lassen und die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Wege addieren. Es wird diese Summe

$$\int_{x_n=0}^{x_{(n+1)}} \int_{t_n=0}^T \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} \int_{t_{n-1}=0}^{t_n} \dots \int_{x_1=0}^{x_2} \int_{t_1=0}^{t_2} \int_{t_0=0}^{t_1} e^{-x_{n+1} - t_{n+1}} dx_1 dx_2 \cdot \dots \cdot dx_{n+1} dt_0 dt_1 \cdot \dots \cdot dt_{n+1}$$

oder anders geordnet

$$\left\{ e^{-x_{n+1}} dx_{n+1} \int_{x_n=0}^{x_{n+1}} dx_n \int_{x_{n-1}=0}^{x_n} dx_{n-1} \cdots \int_{x_1=0}^{x_2} dx_1 \right\} \left\{ e^{-t_{n+1}} dt_{n+1} \int_{t_n=0}^T dt_n \int_{t_{n-1}=0}^{t_n} dt_{n+1} \cdots \int_{t_1=0}^{t_2} dt_1 \int_{t_0=0}^{t_1} dt_0 \right\}$$

Die Ausrechnung der Integrale erfolgt genau gleich wie früher und liefert

$$\begin{aligned} & \left\{ e^{-x_{(n+1)}} \frac{x_{(n+1)}^n}{n!} dx_{(n+1)} \right\} \left\{ e^{-t_{(n+1)}} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} dt_{(n+1)} \right\} = \\ & = e^{-x_{(n+1)} - t_{(n+1)}} \frac{x_{(n+1)}^n T^{n+1}}{n! (n+1)!} dx_{(n+1)} dt_{(n+1)}. \end{aligned}$$

Um nun alle diejenigen Steine zu finden, die das Element  $dx$  in  $T$  treffen, müssen wir wieder  $t_{n+1}$  von  $T$  bis  $\infty$  und  $n$  von  $0$  bis  $\infty$  variieren lassen und alle Wahrscheinlichkeiten über dieses Gebiet addieren. Hierbei geht dann wieder  $x_{n+1}$  in  $x$  als Wegkoordinate zur Zeit  $T$  über. Wir wollen im Gegensatz zu früher alle Wahrscheinlichkeiten, die sich speziell auf eine Verteilung mit Beginn mit einer Ruhephase beziehen, durch ein \* bezeichnen. Es wird also

$$\begin{aligned} p_T^*(x) dx &= \int_{t_{n+1}=T}^{\infty} e^{-x-t_{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n T^{n+1}}{n! (n+1)!} dx dt_{n+1} \\ &= e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n T^{n+1}}{n! n+1!} dx \int_{t_{n+1}=T}^{\infty} e^{-t_{n+1}} dt_{n+1} \\ &= e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n T^{n+1}}{n! n+1!} dx e^{-T} \\ (48) \quad \underline{p_T^*(x) dx} &= \underline{e^{-x-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n T^{n+1}}{n! n+1!} dx.} \end{aligned}$$

Auch bei dieser Formel ist es u. U. angenehm, dieselbe Umformung vorzunehmen wie bei Gl. (13) und wir schreiben

$$p_T^*(x) dx = e^{-(\sqrt{x} - \sqrt{T})^2} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n T^{n+1}}{n! n+1!}}{e^2 \sqrt{xT}} dx.$$

Zur abgekürzten Darstellung dieses Ausdruckes benützen wir die erste Bessel'sche Funktion mit rein imaginärem Argument

$$J_1(2i\sqrt{xT}) = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{xT}^n \sqrt{xT}^{n-1}}{n! (n-1)!} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{xT}^n \sqrt{xT}^{n+1}}{n! n+1!}$$

Daß die beiden Schreibweisen des obigen Summenausdruckes denselben Wert ergeben, zeigt folgende Überlegung. Das  $(n+1)$ -te Glied der linken Schreibweise entspricht genau dem  $n$ -ten Glied der rechten Schreibweise. Wir müssen also nur zeigen, daß das nullte Glied der linken Schreibweise identisch gleich Null ist, um nachzuweisen, daß tatsächlich beide Ausdrücke einander gleich sind. Dieses nullte Glied lautet

$$i \frac{\sqrt{xT}^0 \sqrt{xT}^{-1}}{0! (-1)!} = i \frac{1 \cdot \sqrt{xT}^{-1}}{1 \cdot \infty} = 0,$$

was zu beweisen war. Wir können also schreiben

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n T^{n+1}}{n! n+1!} = -\sqrt{\frac{T}{x}} i J_1(2i\sqrt{xT})$$

woraus

$$\begin{aligned} p_T^*(x) dx &= -e^{-(\sqrt{x}-\sqrt{T})^2} \sqrt{\frac{T}{x}} i \frac{J_1(2i\sqrt{xT})}{e^2 \sqrt{xT}} \quad (49) \\ &= +e^{-(\sqrt{x}-\sqrt{T})^2} T \left\{ -i \frac{J_1(2i\sqrt{xT})}{\sqrt{xT} e^2 \sqrt{xT}} \right\} \end{aligned}$$

Wieder erkennen wir im ersten Faktor die Gauss'sche Verteilungsfunktion, während der letzte in ähnlichem Aufbau auch in Gl. (14) auftritt. Neu und für die Auswertung etwas unbequem ist der Faktor  $\sqrt{\frac{T}{x}}$ , doch ist dieser dadurch bedingt, daß in der  $T$ -Richtung eine Integration mehr stattfand als in der  $x$ -Richtung, wodurch die Symmetrie in beiden Koordinaten gestört wurde. Noch bequemer ist die zweite Form von Gl. (49), indem der ganze Klammerausdruck in Tafel I als Funktion  $F_1(2\sqrt{xT})$  direkt abgelesen werden kann.

### 14. Diskussion der Verteilungsfunktion.

Im Gegensatz zur Funktion  $p_T(x)$  ist die Funktion  $p_T^*(x)$  nicht mehr symmetrisch in  $x$  und  $T$ . Dies hat hauptsächlich die eigentümliche Folge, daß die Verteilungsdichten in den beiden Elementen, die senkrecht zu denjenigen der Figuren 6 und 7 des Abschnittes 4 stehen, verschieden sind, während jene selbst einander gleich sind. Die dort gezeigten Symmetrien lassen sich also nicht weiter ausbauen.

Um die Funktion  $p_T^*(x)$  besser kennen zu lernen, wollen wir wieder ihre Momente bestimmen und zwar beginnen wir zunächst mit dem nullten, der einfachen Summe. Es ist das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_T^*(x) dx &= \sum_{n=0}^\infty e^{-T} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx = \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-T} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \left( \frac{n!}{n!} \right) = e^{-T} \{e^T - 1\} = 1 - e^{-T} \end{aligned}$$

und daraus das nullte Moment selbst

$$(50) \quad \underline{M_0^*} = e^{-T} + \int_0^\infty p_T^*(x) dx = e^{-T} + 1 - e^{-T} = \underline{1}$$

einschließlich derjenigen Steine, die gar nicht in Bewegung kommen. Ferner ist das erste Moment

$$\begin{aligned} M_1^* &= \int_0^\infty x p_T^*(x) dx = \sum_{n=0}^\infty e^{-T} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^{n+1}}{n!} dx = \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-T} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \left( \frac{(n+1)!}{n!} \right) = \\ (51) \quad \underline{M_1^*} &= \int_0^\infty x p_T^*(x) dx = e^{-T} T \sum \frac{T^n}{n!} = \underline{T}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich der Abstand des Schwerpunktes

$$(52) \quad \underline{x_s^*} = \frac{T}{1} = \underline{T}$$

wobei wieder diejenigen Steine einzuschließen sind, die keine Bewegung ausgeführt haben. Vergleichen wir dieses Resultat mit dem entsprechenden Wert für Gleichung (13) und (14), so sehen wir, daß jener  $T + 1$  lautete, also um die Einheit größer war.

Weiter bestimmen wir das quadratische Moment. Es ist

$$\begin{aligned}
 M_2^* &= \int_0^\infty x^2 p_T^*(x) dx = \sum_{n=0}^\infty e^{-T} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^{n+2}}{n!} dx = \\
 &= e^{-T} \sum_{n=0}^\infty \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(n+2)!}{n!} = \\
 &= e^{-T} \sum_{n=0}^\infty \frac{T^{n+1}}{n!} (n+2) \\
 &= e^{-T} \left\{ \sum_{n=0}^\infty \frac{T^{n+1}}{(n-1)!} + 2 \sum_{n=0}^\infty \frac{T^{n+1}}{n!} \right\} \\
 &= e^{-T} (T^2 \cdot e^T + 2 T e^T) \\
 \underline{M_2^*} &= \int_0^\infty x^2 p_T^*(x) dx = \underline{T^2 + 2 T}. \tag{53}
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich das Schwankungsmaß mit dem Schwerpunkt in  $T$  zu

$$\underline{\sigma_x^*} = \sqrt{\frac{1}{M_0^*} (M_2^* - M_0^* x_S^{*2})} = 1 \sqrt{(T^2 + 2 T - T^2)} = \underline{\sqrt{2 T}}. \tag{54}$$

Auch der Wert  $[\sigma_x^*]^2$  ist um die Einheit kleiner als der entsprechende Wert bei Beginn mit einer Bewegungsphase.

Auch für diese Formel wollen wir den Zusammenhang mit der Binomialkurve feststellen. Nach der halbkonvergenten Reihe von Hankel<sup>2)</sup> ist für rein imaginäres Argument  $|y| \gg 1$

$$J_p(y i^\varrho) \approx \frac{e^y}{\sqrt{2 \pi y}} i^{\pm(p - \frac{1-\varrho}{2})} S_p(2 y i^{\pm(1+\varrho)})$$

Da bei rein imaginärem Argument  $\varrho = 1$  ist, wird

$$J_1(i y) \approx \frac{e^y}{\sqrt{2 \pi y}} \frac{1}{i} S_1(-2 y) \approx \frac{e^y}{\sqrt{2 \pi y}} \cdot \frac{1}{i} \cdot 1.$$

Hieraus wird unsere Funktion Gl. (49) für große Werte  $T$  und  $x$  (beide von derselben Größenordnung)

$$\begin{aligned}
 p_T^*(x) dx &= e^{-(\sqrt{x} - \sqrt{T})^2} \sqrt{\frac{T}{x}} \frac{i}{e^2 \sqrt{x T}} \frac{e^2 \sqrt{x T}}{\sqrt{2 \pi \cdot 2 \sqrt{x T} i}} dx \\
 &= e^{-(\sqrt{x} - \sqrt{T})^2} \sqrt{\frac{T}{x}} \frac{1}{\sqrt{2 \pi \cdot 2 \sqrt{x T}}} dx
 \end{aligned}$$

<sup>2)</sup> Vergl. z. B. Jahnke-Emde, S. 203–204, Lit. 14.

Setzen wir wieder wie in Kapitel 5

$$x = T \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{T}} y \right) \quad \text{so wird für große } T \text{ wieder}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{T} = \frac{y}{\sqrt{2}} & (\sqrt{x} - \sqrt{T})^2 = \frac{y^2}{2} \\ \sqrt{xT} \approx \sqrt{T} \\ dx = \sqrt{2T} dy \end{cases}$$

woraus wir erhalten

$$p_T^*(x) dx = e^{-\frac{y^2}{2}} \sqrt{\frac{T}{T \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{T}} y \right)}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

und wenn  $y^2$  klein ist gegen  $T$  (nach Voraussetzung sind ja  $x$  und  $T$  von gleicher Größenordnung), dann wird

$$p_T^*(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

und das ist die Gauss'sche Verteilungsfunktion. Wir sehen aber, daß die Funktion  $p_T^*(x)$  viel schlechter gegen die Gauss'sche konvergiert, indem  $x^{3/4} \approx T^{3/4}$  werden muß im Gegensatz zu  $x^{1/4} \approx T^{1/4}$  bei der Funktion  $p_T(x)$ .

Der Vollständigkeit halber soll nun noch der Integralwert der Verteilung angegeben werden.

$$\int_0^x p_T^*(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x e^{-T-x} \frac{T^{n+1} x^n}{(n+1)! n!} dx.$$

Das allgemeine Glied dieser Summe berechnet sich zu

$$\int_0^x e^{-T-x} \frac{T^{n+1} x^n}{(n+1)! n!} dx = e^{-T} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^x e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx =$$

und das ist z. B. nach Peirce, Formel (403)

$$= e^{-T} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \left[ -\frac{x^n e^{-x}}{n!} + \frac{n}{n!} \int_0^x x^{n-1} e^{-x} dx \right] =$$

$$= e^{-T} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{x^k \cdot e^{-x}}{k!} \right]_0^x.$$



Hiermit erhalten wir den Integralwert zu

$$\begin{aligned} \int_0^x p_T^*(x) dx &= e^{-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \left[ 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right] = \\ &= e^{-T} [e^T - 1] - e^{-x-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \\ \underline{S_x^* = e^{-T} + \int_0^x p_T^*(x) dx = 1 - e^{-x-T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.} \quad (55) \end{aligned}$$

Auch dieser Ausdruck ist für die praktische Verwendung wieder zu unbequem und wir werden auch in diesem Falle wieder mehr mit den Momenten arbeiten, für die wir ja sehr einfache Ausdrücke erhalten haben. Besonders sei darauf hingewiesen, daß  $M_1^* = T$  ist gegenüber  $M_1 = (T + 1)$ . Wenn, wie hier, das erste Moment rein linear mit  $T$  wächst, wird in diesem Falle der Erwartungswert gleich dem Mittelwert, wobei aber stets bei den Betrachtungen alle Steine einbezogen werden müssen, insbesondere auch diejenigen, die noch gar keine Bewegung ausgeführt haben.

Betrachten wir noch einmal kurz die Grundlagen der beiden Verteilungsfunktionen, so besteht ihr Unterschied lediglich darin, daß bei der Funktion  $p_T(x)$  zur Zeit 0 alle Steine eine Bewegung ausführen, während zur Erzielung der Verteilung  $p_T^*(x)$  alle Steine in Ruhe befindlich sind. Für beide Funktionen denken wir uns alle betrachteten Steine am Anfang auf eine relativ kleine Sohlenfläche konzentriert. In der Weiterverfolgung des Verteilungsvorganges wird angenommen, daß die Fortbewegung der einzelnen Steine voneinander unabhängig und ohne wesentlichen Zeitbedarf erfolgt. Es wird also im ganzen späteren Verlauf des Verteilungsvorganges weder im ersten noch im zweiten Fall jemals vorkommen, daß alle Steine gleichzeitig eine Bewegung ausführen. Wir müssen also auch aus diesem Grunde sagen, daß die Versuchsanordnung des ersten Teiles und der entsprechende Verlauf des Verteilungsvorganges zumindest in der ersten Zeit dem natürlichen Vorgange des im Detail vollständig regellosen Geschiebetransportes nicht entspricht. Demgegenüber bedeutet die Annahme der anfänglichen gleichzeitigen Ruhe der Steine keinerlei Abweichung von dem späteren normalen Verlauf, da ja geimäß unserer Annahme die Fortbewegung der Steine

keine Zeit in Anspruch nimmt. Wir nehmen also quasi auch für später an, daß immer alle Steine in Ruhe sind und nur sprunghaft ihre Lage ändern. Es darf uns daher auch gar nicht verwundern, wenn bei Beginn mit einer Ruhephase eine Anfangsstörung nicht eintritt (Erwartungswert gleich Mittelwert), eine solche aber die anfängliche Entwicklung der Verteilung bei Beginn mit einer Bewegungsphase beherrscht. Ganz wesentlich für eine Entwicklung, die sich nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit aufbaut, ist aber die Tatsache, daß mit zunehmenden Zeiten  $T$  diese Anfangsstörungen immer mehr an Einfluß verlieren.

Auch hieraus sehen wir wieder, nunmehr aber aus den formelmäßigen Entwicklungen statt nur aus dem Gefühl, daß tatsächlich das *gleichzeitige* Einwerfen einer größeren Anzahl von Steinen in eng begrenztem Raum eine Störung des normalen Ablaufes der Transportvorgänge und damit des Versuches bedeutet, wobei allerdings unsere Formeln gestatten, diese Störung zu berücksichtigen.

## 15. Anwendung der Verteilungsfunktion $p_T^*(x)$ auf die Füllaufgabe.

Wie wir in Kapitel 12 zeigten, besteht zwischen der Füll- und Bewegungsaufgabe vollkommene Analogie, sodaß wir ohne weiteres in den Formeln die Zeit übernehmen, den Weg  $x$  aber durch die Füllung  $f$  ersetzen müssen. Hierbei bedeutet, wie früher schon erwähnt,  $f$  die Geschiebemenge, die bis zum Zeitpunkt  $t$  vom Auftreffen des Korbes auf die Sohle in diesen eingetreten ist.  $p_T^*(f)$  gibt also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Korb zur Zeit  $T$  die Füllung  $f$  besitzt.

Nach Formel (49) ist also

$$\begin{aligned} p_T^*(f) &= -e^{-(\sqrt{f} - \sqrt{T})^2} \cdot T \cdot F_1(2\sqrt{fT}) \\ &= -e^{-(\sqrt{f} - \sqrt{T})^2} \cdot T \left\{ i \frac{J_1(2i\sqrt{fT})}{\sqrt{fT} e^{2\sqrt{fT}}} \right\}. \end{aligned}$$

Außerdem ist für  $f = 0$

$$P_0^* = e^{-T}$$

und die Momente sind

$$\begin{aligned} M_0^* &= 1 \\ M_1^* &= T = \int_0^{\infty} f \cdot p_T^*(f) df \\ M_2^* &= T^2 + 2T = \int_0^{\infty} f^2 \cdot p_T^*(f) df. \end{aligned}$$

In diesen Formeln ist wieder  $f$  in mittleren Einzelfüllungen  $\varphi_0^*$  und  $T$  in mittleren Einzelwartezeiten  $\vartheta_0^*$  einzusetzen. Sind  $\varphi$  und  $\vartheta$  die Füllungen und Zeiten in gr resp. sec., so gelten die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{\vartheta}{\vartheta_0^*} \quad \text{resp.} \quad T = \frac{\Theta}{\vartheta_0^*} \\ f = \frac{\varphi}{\varphi_0^*} \end{array} \right. \quad (56)$$

und wir berechnen die Momente zu

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0^* = 1 \\ M_1^* = \frac{\Theta}{\vartheta_0^*} = T = \int_0^{\infty} \frac{\varphi}{\varphi_0^*} \cdot \varphi_0^* \pi_T^*(\varphi) \frac{d\varphi}{\varphi_0^*} = \frac{1}{\varphi_0^*} \int_0^{\infty} \varphi \pi_T^*(\varphi) d\varphi \\ M_2^* = T^2 + 2T = \int_0^{\infty} \frac{\varphi^2}{\varphi_0^{*2}} \cdot \varphi_0^* \pi_T^*(\varphi) \frac{d\varphi}{\varphi_0^*} = \frac{1}{\varphi_0^{*2}} \int_0^{\infty} \varphi^2 \pi_T^*(\varphi) d\varphi. \end{array} \right. \quad (57)$$

Quadrieren wir die Gleichung für  $M_1^*$  und dividieren wir sie durch die untere, so wird

$$\frac{T^2}{T^2 + 2T} = \frac{1}{1 + \frac{2}{T}} = \frac{\mu_1^{*2}}{\mu_2^*}$$

oder

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{T} &= \frac{\mu_2^*}{\mu_1^{*2}} \\ \frac{2}{T} &= \frac{\mu_2^*}{\mu_1^{*2}} - 1 \\ T &= \frac{2 \mu_1^{*2}}{\mu_2^* - \mu_1^{*2}} = \frac{2}{\frac{\mu_2^*}{\mu_1^{*2}} - 1} \end{aligned} \quad (58)$$

Da  $T > 0$  sein muß, haben wir wieder eine Bedingung für  $\mu_1^*$  und  $\mu_2^*$  und zwar muß sein

$$(59) \quad \mu_2^* > \mu_1^{*2}$$

Aus Gl. (58) erhalten wir

$$(60) \quad \mathcal{J}_0^* = \frac{\Theta}{T} = \frac{\Theta}{2} \left( \frac{\mu_2^*}{\mu_1^{*2}} - 1 \right)$$

und aus Gl. (57) und (58)

$$(61) \quad \varphi_0^* = \frac{\mu_1^*}{T} = \frac{\mu_1^*}{2} \left( \frac{\mu_2^*}{\mu_1^{*2}} - 1 \right).$$

Mit Hilfe der Gleichungen (60) und (61) können wir also leicht die beiden Konstanten einer gegebenen Verteilung berechnen und daraus weiter nach bekannter Methode die theoretische Verteilungskurve. Die Tafeln XXIV bis XXVI geben einige solche Beispiele.

Es handelt sich hierbei um Entnahmeserien jeweils bei einem bestimmten Abflußzustand und einer bestimmten Sohlenmischung. Die Auswertung kann nun entweder so erfolgen, daß man einfach die Gesamfangergebnisse betrachtet (unabhängig von der Kornzusammensetzung) oder so, daß die einzelnen Entnahmen analysiert und aus ihnen jeweils nur eine bestimmte Siebklasse herausgenommen und verglichen wird. Die Tafel XXIV zeigt ein Beispiel für die Verteilung der Gesamtmenge, Tafel XXV ein solches für die Gesamtmenge unter Ausschaltung der feinen Kategorien (unter 3 mm Korn) und Tafel XXVI eine Verteilung des Mengenanteils an Körnern von 12 bis 24 mm Korn. Ein Vergleich zeigt, daß alle drei Kurven im Wesen dieselben sind, und sich daher auch durch dasselbe Gesetz darstellen lassen.

Die Gl. (61) können wir noch etwas umschreiben und erhalten

$$\varphi_0^* = \frac{1}{2\mu_1^*} (\mu_2^* - \mu_1^{*2}) = \frac{\mu_{2s}^*}{2\mu_1^*}$$

wobei  $\mu_{2s}^*$  das auf den Schwerpunkt bezogene quadratische Moment bedeutet. Betrachten wir nun verschiedene Verteilungen desselben Apparates, d. h. Verteilungen mit gleichen  $\varphi_0^*$  und  $\vartheta_0^*$  aber verschiedenem  $T$ , so sehen wir, daß  $\mu_{2s}^*$  proportional mit  $\mu_1^*$  wächst und dieses nach Gl. (57) wieder mit  $\Theta$ .

Das Schwankungsmaß (Trägheitsradius) der Verteilung wächst also von Anfang an genau mit der Quadratwurzel von  $\mu_1^*$  resp.  $\Theta$ ,

wie wir es von der Verteilung im Unendlichen in der Gauss'schen Kurve schon lange kennen. Auch diese Tatsache läßt uns wieder die Verteilung bei Beginn mit einer Ruhephase als die ungestörte erscheinen.

In Tabelle Tafel XXVII sind für alle verfügbaren Verteilungen der Füllaufgabe die Konstanten  $\varphi_0^*$  und  $\vartheta_0^*$  berechnet, und wir sehen, daß für eine ganze Reihe von Versuchen diese Konstanten sowohl für einzelne Siebklassen als auch für deren Summen aufgestellt sind. Hier stellen sich eine Reihe interessanter Fragen, deren Behandlung im Folgenden angedeutet werden soll.

1. Ist es überhaupt möglich, daß die Summe von Verteilungen nach Gl. (13) und (14) oder Gl. (48) und (49) wieder eine Verteilung mit derselben Funktion, aber anderen Konstanten ergibt? Zunächst muß definiert werden, was wir unter der Summe von zwei Verteilungen verstehen. Entsprechend dem vorliegenden Beispiel, das vielleicht deutlicher als jedes andere den Begriff der Summenbildung illustriert, können wir diesen Vorgang etwa folgendermaßen beschreiben: Jede Einzelgröße der einen Verteilung (Füllung  $f$  einer Korngröße im einzelnen Füllvorgang) wird irgendeiner bestimmten Einzelgröße der andern Verteilung zugeordnet. In unserem Beispiel geschieht diese Zuordnung zur Einzelfüllung mit einer anderen Korngröße natürlicherweise dadurch, daß sich jeweils die Teilentnahmen desselben Füllvorganges entsprechen. Die Summenbildung besteht nun darin, daß die Merkmale (Einzelfüllmengen) addiert werden und aus all diesen Summen durch Ordnen nach den so entstandenen Summenwerten eine neue Verteilung gebildet wird. Aus einem ganz einfachen Beispiel können wir ohne weiteres sehen, daß diese Summe auch wieder eine Verteilung der von uns betrachteten Form sein kann. Lassen wir nämlich die beiden Einzelverteilungen einander identisch sein und jedes Einzelelement dem ihm gleichen in der anderen Verteilung entsprechen, so sehen wir, daß die Summe wieder eine Verteilung derselben Funktion mit gleichem  $\vartheta_0^*$ , aber doppelt so großem  $\varphi_0^*$  wird. Für unsere folgenden Betrachtungen wollen wir annehmen, daß die Summen der von uns betrachteten Verteilungen immer wieder Verteilungen nach Art der Funktion Gl. (48) und (49) sind und also als solche ausgewertet werden dürfen. (Außer im obigen Spezialfall gilt dies aber streng nur für die Gauss'sche Kurve.)

2. Kann man aus den Konstanten  $\varphi_0^*$  und  $\vartheta_0^*$  der ursprünglichen Verteilungen direkt auf die Konstanten der Summe schließen? Daß das nicht der Fall ist, sieht man leicht aus der Tatsache, daß wir durch verschiedene Zuordnung der Elemente von zwei Ausgangsverteilungen verschiedene Summenverteilungen erhalten können. Andererseits müssen wir aber aus dem gegenseitigen Verhalten der Konstanten der beiden Ausgangsverteilungen und denjenigen der Summe auf die Art der Zuordnung der Elemente Rückschlüsse ziehen können.

Um das oben Gesagte anschaulich zu machen, sollen folgende Grenzfälle untersucht werden:

*Fall a.* Die einzelnen Elemente sollen einander der Größe entsprechend derart zugeordnet werden, daß dem größten der einen Verteilung das größte der zweiten, dem zweitgrößten der einen das zweitgrößte der andern usw. zugeordnet wird. Die Frage ist, wie sich in diesem Falle die Konstanten der Summe zu denjenigen der Summanden verhalten.

Wir bezeichnen die beiden Ausgangsverteilungen mit dem Index  $i$  resp.  $k$ , während wir die Summe ohne besonderen Index anschreiben. Wie früher gehen wir von dem ersten und zweiten Moment der Verteilung aus. Diese sind für die Verteilung  $i$

$$\mu_{1i} = \int_0^{\infty} \pi_T(\varphi_i) \cdot \varphi_i \cdot d\varphi_i \quad ^3)$$

und für die Ausgangsverteilung  $k$

$$\mu_{1k} = \int_0^{\infty} \pi_T(\varphi_k) \cdot \varphi_k \cdot d\varphi_k.$$

Das erste Moment der Summenverteilung ergibt sich, da wir für die Summenbildung für entsprechende  $[\pi(\varphi) d\varphi]$  die  $\varphi_i$  und  $\varphi_k$  addieren müssen

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \int_0^{\infty} [\pi_T(\varphi) d\varphi] (\varphi_i + \varphi_k) = \\ &= \int_0^{\infty} [\pi_T(\varphi) d\varphi] \varphi_i + \int_0^{\infty} [\pi_T(\varphi) d\varphi] \varphi_k = \\ (62) \quad \mu_1 &= \mu_{1i} + \mu_{1k} = \sum_i \mu_{1i}. \end{aligned}$$

<sup>3)</sup> Die folgenden Überlegungen sind für jedes Verteilungsgesetz gültig, daher können wir den Stern weglassen.

Aus dieser einfachen Ableitung sehen wir, daß das erste Moment der Summenverteilung gleich der Summe der ersten Momente der Ausgangsverteilungen ist (daher auch der Name „Summenverteilung“). Es ist leicht einzusehen, daß diese Regel nicht nur für die Summe von zwei, sondern auch für diejenige von beliebig vielen Verteilungen gilt. Ebenso sehen wir, daß diese Ableitung von der Art der gegenseitigen Zuordnung der einzelnen  $\pi_T(\varphi) d\varphi$  völlig unabhängig ist und daher auch für alle drei zu behandelnden Fälle Gültigkeit besitzt.

Das zweite Moment der Ausgangsverteilungen lautet

$$\mu_{2i} = \int_0^{\infty} \varphi_i^2 \pi_T(\varphi_i) d\varphi_i$$

resp.

$$\mu_{2k} = \int_0^{\infty} \varphi_k^2 \pi_T(\varphi_k) d\varphi_k$$

Das zweite Moment der Summenverteilung ist

$$\mu_2 = \int_0^{\infty} (\varphi_i + \varphi_k)^2 [\pi_T(\varphi) d\varphi].$$

Dies ist so zu verstehen, daß wir die einzelnen  $\pi_T(\varphi) d\varphi$  aufschreiben und für  $\varphi_i$  und  $\varphi_k$  jeweils die speziell diesem  $\pi_T(\varphi) d\varphi$  entsprechenden  $\varphi$ -Werte der einzelnen Verteilungen in die Klammer einsetzen. Nun können wir zunächst das Quadrat ausrechnen und schreiben

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \int_0^{\infty} (\varphi_i^2) [\pi_T(\varphi) d\varphi] + \int_0^{\infty} (\varphi_k^2) [\pi_T(\varphi) d\varphi] + 2 \int_0^{\infty} (\varphi_i \varphi_k) [\pi_T(\varphi) d\varphi] \\ \mu_2 &= \mu_{2i} + \mu_{2k} + 2 \int_0^{\infty} (\varphi_i \varphi_k) [\pi_T(\varphi) d\varphi]. \end{aligned} \quad (63)$$

Die beiden ersten Glieder dieser Entwicklung enthalten jeweils nur das  $\varphi$  des einen Summanden und sind daher von der gegenseitigen Zuordnung der Elemente unabhängig. Erst das dritte Glied enthält beide  $\varphi$  und damit den Einfluß dieser Zuordnung. Wir müssen also für die Unterscheidung der drei Fälle nur das letzte Glied betrachten.

In unserem ersten Fall (vergl. Fig. 10) läßt sich dieses letzte Moment nicht durch die Momente der Summanden allein ausdrücken. Dafür können wir leicht etwas viel wichtigeres nachweisen, nämlich daß er das größtmögliche zweite Moment aller Summen aus den

Kurven  $i$  und  $k$  besitzt. Um das nachzuweisen, betrachten wir zwei ganz beliebige Elemente  $\pi_T(\varphi) d\varphi$ . Das erste mit den kleineren  $\varphi$ -Werten besitzt nach obiger Bezeichnung die Füllungen  $\varphi_i, \varphi_k$  und  $\varphi_i + \varphi_k = \varphi$ . Die Füllungen des zweiten seien  $\varphi_i + \Delta\varphi_i, \varphi_k + \Delta\varphi_k$  und  $\varphi + \Delta\varphi$ . Die Summe der  $\varphi_i \cdot \varphi_k$  ist (wobei wir die beiden  $\pi_T(\varphi) d\varphi$  gleich groß annehmen) vom ersten Element

$$\varphi_i \varphi_k$$

und vom zweiten

$$\varphi_i \varphi_k + \Delta\varphi_i \cdot \varphi_k + \varphi_i \cdot \Delta\varphi_k + \Delta\varphi_i \Delta\varphi_k$$

im ganzen also

$$2\varphi_i \varphi_k + \Delta\varphi_i \cdot \varphi_k + \varphi_i \cdot \Delta\varphi_k + \Delta\varphi_i \Delta\varphi_k.$$

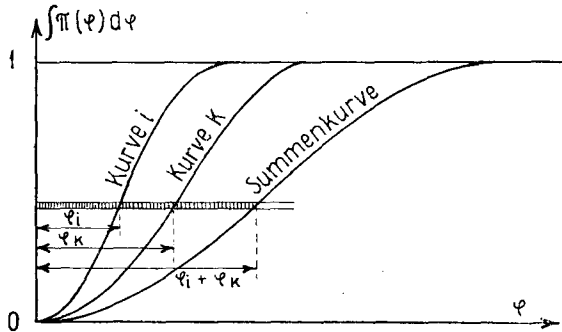


Fig. 10. Summenlinien der Kurven  $i$  und  $k$  und ihrer Summe.

Vertauschen wir nun die Zugehörigkeit der Elemente, sodaß sich  $\varphi_i$  und  $\varphi_k + \Delta\varphi_k$  resp.  $\varphi_i + \Delta\varphi_i$  und  $\varphi_k$  entsprechen, so wird die Summe der Produkte

$$2\varphi_i \varphi_k + \Delta\varphi_i \cdot \varphi_k + \varphi_i \Delta\varphi_k.$$

Da alle  $\varphi$  positive Größen sind, ist die erste Summe, die das Glied  $\Delta\varphi_i \Delta\varphi_k$  mehr aufweist, sicher größer als die zweite, und damit ist gezeigt, daß gegenüber der Zuordnung von Fall a jede Veränderung eine Verkleinerung des zweiten Momentes bedeutet.

*Fall b.* Dieser zeichnet sich dadurch aus, daß umgekehrt zu Fall a jeweils das größte  $\varphi_i$  mit dem kleinsten  $\varphi_k$ , das zweitgrößte  $\varphi_i$  mit dem zweitkleinsten  $\varphi_k$  usw. kombiniert wird. Durch genau



dieselbe Überlegung wie bei Fall a können wir daraus, daß der eine  $\Delta$ -Wert negativ einzusetzen ist, nachweisen, daß jede Vertauschung der Zuordnung eine Vergrößerung des zweiten Momentes bringt, daß also das der Fall minimalen Momentes ist (Fig. 11).

*Fall c.* Ganz besonders interessiert uns aber derjenige Zwischenfall, der einer wahllosen Zuordnung der einzelnen Elemente beider Verteilungen entspricht. Wir müssen in diesem Falle, in dem eine

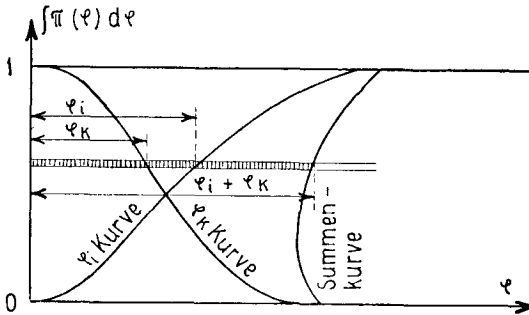


Fig. 11. Summenlinien der Kurven  $i$ ,  $k$  und deren Summe.

einfache Zuordnung der einzelnen Elemente nicht mehr angegeben werden kann, für den Ausdruck des zweiten Momentes eine doppelte Integration durchführen und erhalten unter der Voraussetzung, daß

$$\int_0^{\infty} \pi_T(\varphi_i) d\varphi_i = \int_0^{\infty} \pi_T(\varphi_k) d\varphi_k = 1$$

ist, folgende Werte für das zweite Moment

$$\mu_2 = \mu_{2i} + \mu_{2k} + 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_i \varphi_k \pi_T(\varphi_i) \pi_T(\varphi_k) d\varphi_i d\varphi_k$$

Dieses Doppelintegral können wir schreiben als

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\varphi_i \pi_T(\varphi_i) d\varphi_i) (\varphi_k \pi_T(\varphi_k) d\varphi_k) \\ &= 2 \int_0^{\infty} (\varphi_i \pi(\varphi_i) d\varphi_i) \int_0^{\infty} (\varphi_k \pi_T(\varphi_k) d\varphi_k) \\ &= 2 \left[ \int_0^{\infty} (\varphi_i \pi_T(\varphi_i) d\varphi_i) \right] \left[ \int_0^{\infty} \varphi_k \pi_T(\varphi_k) d\varphi_k \right] = 2 \mu_{1i} \mu_{1k} \end{aligned}$$

eingesetzt in obige Gleichung wird

$$(64) \quad \mu_2 = \mu_{2i} + \mu_{2k} + 2\mu_{1i}\mu_{1k}.$$

Da dieser Wert allgemeines Interesse hat, wollen wir noch das entsprechende Schwerpunktsmoment berechnen.

$$\begin{aligned} \mu_{2s} &= \mu_2 - \mu_1 \frac{\mu_1}{\mu_0} = \bullet \\ &= \mu_{2i} + \mu_{2k} + 2\mu_{1i}\mu_{1k} - \mu_{1i}^2 - 2\mu_{1i}\mu_{1k} - \mu_{1k}^2 = \\ &= \mu_{2i} + \mu_{2k} - \mu_{1i}^2 - \mu_{1k}^2 = \end{aligned}$$

$$(65) \quad \mu_{2s} = \sum_i (\mu_{2i} - \mu_{1i}^2)$$

Diese Formel ist so gefaßt, daß man sofort die Gültigkeit für beliebig viele Summanden sieht.

Jetzt wollen wir uns einmal überlegen, was die verschiedenen Fälle in unserem Beispiel eigentlich bedeuten. Zunächst Fall c. Wir definierten ihn so, daß wir sagten, die Steine einer Größe sollen nicht „wissen“, was diejenigen der anderen Größen tun. Dieser Fall ist äußerlich dadurch kenntlich, daß *sowohl die Analyse wie die Gesamtmenge* der einzelnen Proben gleichmäßig schwanken. Auf Grund dieser beiden Größen lassen sich aber auch die beiden anderen Fälle sehr leicht beschreiben. Fall a, bei dem sich die Maxima superponieren, zeigt gegenüber Fall c eine Vergrößerung der Schwankungen der Gesamtmenge, eine Verkleinerung der Schwankungen in der Analyse. Der Grenzfall von a ist also von diesem Gesichtspunkte aus eine reine Mengenschwankung bei konstanter Zusammensetzung.

Umgekehrt tendiert Fall b gegen eine reine Variabilität der Analyse bei konstanter Gesamtmenge. Jetzt wollen wir sehen, wie sich von diesem Gesichtspunkte aus die Analysen unserer Beispiele verhalten. Zu diesem Zwecke wollen wir aber zunächst die Größen  $\varphi_{0i}^*$  und  $\vartheta_{0i}^*$  für die Summenverteilung des Falles c rechnen. Nach Gl. (61) und (62) ist

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{0i}^* &= \frac{\mu_{1i}^*}{2} \left( \frac{\mu_{2i}^*}{\mu_{1i}^{*2}} - 1 \right) \\ \vartheta_{0i}^* &= \frac{\mu_{2i}^*}{2} \left( \frac{\mu_{2i}^*}{\mu_{1i}^{*2}} - 1 \right) \end{aligned} \right\}$$

Für die Summenverteilung ist nach Gl. (62) und (65)

$$\begin{aligned} \mu_1^* &= \sum_i \mu_{1i}^* \\ \mu_2^* &= \left[ \sum_i (\mu_{2i}^* - \mu_{1i}^{*2}) \right] + \mu_1^{*2} \\ \left( \frac{\mu_2^*}{\mu_1^{*2}} - 1 \right) &= \frac{\sum_i (\mu_{2i}^* - \mu_{1i}^{*2})}{\mu_1^{*2}} = \frac{\sum_i \mu_{1i}^* \left( \frac{\mu_{2i}^*}{\mu_{1i}^{*2}} - 1 \right)}{\mu_1^{*2}} \\ [\varphi_0^*] &= \frac{\mu_1^* \sum_i 2 \mu_{1i}^* \varphi_{0i}^*}{2 \mu_1^{*2}} = \frac{\sum_i \mu_{1i}^* \varphi_{0i}^*}{\sum_i \mu_{1i}^*} \end{aligned} \quad (66)$$

und

$$[\vartheta_0^*] = \frac{\vartheta \sum_i 2 \vartheta_{0i}^* \mu_{1i}^{*2}}{2 \mu_1^{*2}} = \frac{\sum_i \mu_{1i}^* \vartheta_{0i}^*}{\left[ \sum_i \mu_{1i}^* \right]^2} \quad (67)$$

$\mu_1^*$  ist für alle Fälle gleich groß,  $\mu_2^*$  bei Fall a größer, bei Fall b kleiner als hier bestimmt. Daher wird auch  $\varphi_0^*$  und  $\vartheta_0^*$  im Fall a größer, in Fall b kleiner als nach Gl. (66) und (67). In Kolonne 13 der Tabelle Tafel XXVII sind zunächst für alle Summen 24—40 mm die  $[\varphi_0^*]$ -Werte nach Gl. (66) berechnet. Kolonne 14 gibt das Verhältnis des direkt berechneten  $\varphi_0^*$  (Kolonne 9) zu diesem Wert. Wie wir sehen, liegen diese Werte alle zwischen 0,98 und 1,61 gleichmäßig verteilt um ihren Mittelwert 1,34. Damit fallen also alle diese Beispiele deutlich oberhalb des „zufälligen Wertes“ (Fall c), also gegen Fall a. Es ist also eine Tendenz des Zusammenfallens der Maxima vorhanden.

Noch viel deutlicher wird diese Tendenz, wenn wir aus den vier Sorten 3—6, 6—12, 12—24 und 24—40 mm die Summe 3—40 mm bilden. In diesem Falle wird das Verhältnis im Mittel 3,07, wobei die Einzelwerte von 2,20 bis 3,64 schwanken. Hier tritt eine so auffallende Übereinstimmung der Maxima zu Tage, daß man geradezu den Satz aussprechen kann, daß bei den Mengenschwankungen des Geschiebetriebes im Gemisch die Zusammensetzung in erster Näherung konstant bleibt.

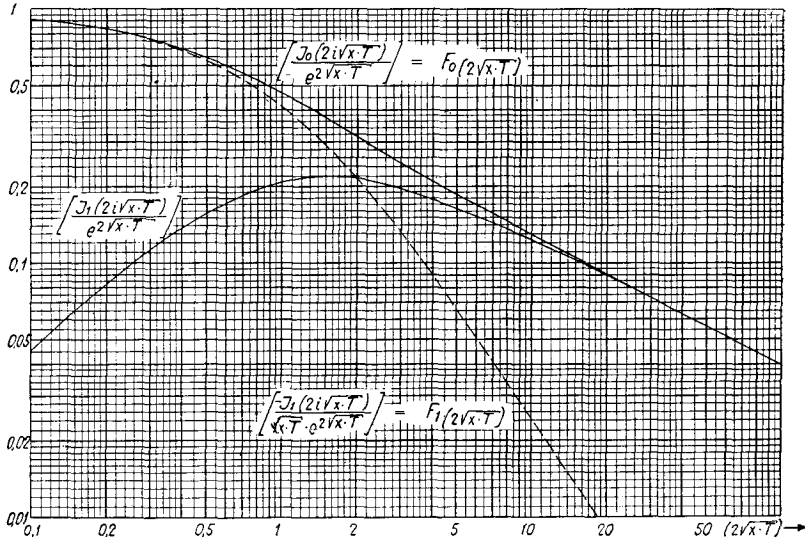
Um den Geschiebetrieb bei den verschiedenen Versuchen zu vergleichen, genügt das Zahlenmaterial eigentlich nicht. Dennoch ist eines deutlich, nämlich die Zunahme der  $\vartheta_0^*$ -Werte mit zunehmendem  $\Theta$ . Wenn diese Zunahme auch nicht groß ist, so ist sie doch deutlich genug, um mit Sicherheit festgestellt werden zu können. Diese Zunahme sollte, wenn unsere Voraussetzungen und die Grundlagen unserer Ableitungen genau stimmen würden, bei sonst gleichen Verhältnissen, nicht vorhanden sein, und wir müssen daher feststellen, daß die Theorie in diesem Falle wohl nur eine sehr rohe Annäherung bedeutet. Dies ist auch sehr leicht begreiflich, da es sich bei dem Geschiebetrieb ja um einen Vorgang mit ausgesprochen periodischen Schwankungen handelt. In diesem Fall ist natürlich die von uns vorausgesetzte reine Zufälligkeit des Weiterfüllens oder Nichtweiterfüllens gar nicht vorhanden. Wir können das auch noch anders ausdrücken, indem wir sagen, daß die Wahrscheinlichkeit des Weiterfüllens resp. Nichtweiterfüllens nicht konstant ist, sondern periodischen Schwankungen unterliegt.

Es war der große Vorteil der ersten Beispielserie mit den gefärbten Geröllen in einer Sohle aus einheitlichem Korn, daß dort die Bänke, d. h. die periodischen Schwankungen keine wesentliche Rolle spielten. Im Gegensatz dazu stehen die jetzigen Beispiele unter starkem Einfluß solcher periodischer Schwankungen. Es soll daher, nachdem gezeigt worden ist, daß unsere Auffassung des Vorganges auf gewisse Fragen sehr scharfe Antworten zu geben vermag, auf eine weitere Diskussion verzichtet werden. Soweit die Versuche sich auf die Beurteilung der verwendeten Apparate beziehen, wurden die betreffenden Untersuchungen an anderer Stelle durchgeführt und gehen nicht über den Rahmen einer normalen Fehlerbetrachtung hinaus, sodaß sich deren Wiedergabe erübrigt.

---

Tafel I.

Die Hilfsfunktionen  $F_0(2\sqrt{xT})$  und  $F_1(2\sqrt{xT})$ .



**Erklärung zu den Tafeln II–VII.**

Kolonne 2 gibt die gemessene Verteilung der Gerölle. Die Zahlen der Kolonne 3 sind denjenigen der Kolonne 2 proportional und haben die Summe 1. Bei der Wiedergabe in den Tafeln XIV–XIX sind die Werte der Kolonne 3 als Flächeninhalte von Rechtecken aufgetragen.

Kolonne 12 gibt die Werte  $F_0(2\sqrt{xT})$  zu den Werten von Kolonne 11 gemäß Tafel I.

Kolonne 14 gibt die theoretische Verteilung der Steine auf die betrachteten Intervalle. Die Werte sind mit den experimentell bestimmten der Kolonne 3 zu vergleichen und dienen zur Auftragung der theoretischen Kurve der Tafeln VIII–XIII.

Kolonne 15 gibt die theoretischen Verteilungsdichten in den Endpunkten der Intervalle bezogen auf die Länge von 2 m und dient zur Auftragung der theoretischen Kurve der Tafeln XIV–XIX.

Tafel II.

Versuch 39. Gerölle mit  $d_c < 17 \text{ mm}$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Grenze	Anzahl	$\pi(\xi)\Delta\xi$	$\xi$	$\xi\pi(\xi)\Delta\xi$	$\xi_s$	$\xi_s^3\pi(\xi)\Delta\xi$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-\sqrt{T}}$	$e^{-(\sqrt{x-\sqrt{T}})^2}$	$2\sqrt{x}\cdot T$	$F_0$	$e^{-(\sqrt{x-\sqrt{T}})^2}\cdot F_0$	$\frac{2}{\xi_0}p(x)\Delta x$	$\frac{2}{\xi_0}p(x)\Delta x$
0	36	0,1046	0,5	0,052	- 7,363	5,69	0	0,95	0,407	0	1,000	0,4070	0,0962	0,1960
1	64	0,1860	2	0,372	- 5,863	6,40	0,491	0,46	0,810	0,929	0,485	0,3930	0,1781	0,1892
3	59	0,1715	4	0,686	- 3,863	2,56	0,850	0,10	0,990	1,616	0,350	0,3470	0,1781	0,1670
5	35	0,1017	6	0,610	- 1,863	0,35	1,098	0,15	0,978	2,07	0,300	0,2930	0,1540	0,1411
7	27	0,0785	8	0,628	+ 0,137	0,01	1,298	0,35	0,885	2,45	0,272	0,2410	0,1284	0,1160
9	36	0,1047	10	1,047	+ 2,137	0,48	1,471	0,52	0,763	2,78	0,254	0,1938	0,1047	0,0934
11	21	0,0610	12	0,732	+ 4,137	1,04	1,627	0,68	0,629	3,07	0,240	0,1509	0,0830	0,0726
13	17	0,0495	14	0,694	+ 6,137	1,86	1,769	0,82	0,510	3,34	0,229	0,1169	0,0645	0,0563
15	13	0,0378	16	0,605	+ 8,137	2,50	1,900	0,95	0,406	3,59	0,220	0,0894	0,0497	0,0430
17	9	0,0262	18	0,471	+10,137	2,70	2,024	1,07	0,319	3,83	0,211	0,0673	0,0377	0,0324
19	5	0,0145	20	0,290	+12,137	2,14	2,138	1,19	0,242	4,04	0,206	0,0499	0,0282	0,0240
21	5	0,0146	22	0,321	+14,137	2,91	2,248	1,30	0,185	4,24	0,200	0,0370	0,0209	0,0178
23	5	0,0145	24	0,348	+16,137	3,79	2,354	1,40	0,141	4,45	0,195	0,0275	0,0155	0,0132
25	5	0,0145	26	0,377	+18,137	4,77	2,454	1,50	0,105	4,64	0,190	0,0199	0,0114	0,0096
27	2	0,0058	28	0,162	+20,137	2,35	2,55	1,60	0,0773	4,82	0,186	0,0144	0,0083	0,0069
29	1	0,0029	30	0,087	+22,137	1,42	2,64	1,69	0,0573	4,99	0,184	0,0105	0,0060	0,0051
31	3	0,0088	32	0,282	+24,137	5,11	2,73	1,78	0,0420	5,16	0,181	0,0076	0,0044	0,0037
33	3	0,0088	32	0,282	+24,137	5,11	2,82	1,87	0,0302	5,33	0,178	0,0054	0,0031	0,0026
35	1	0,0029	34	0,099	+26,137	1,98	2,90	1,95	0,0222	5,49	0,175	0,0039	0,0022	0,0019
37							2,98	2,03	0,0161	5,64	0,171	0,0028	0,0016	0,0013
39							3,06	2,11	0,0117	5,79	0,170	0,0020	0,0012	0,0010
41							3,14	2,19	0,0082	5,94	0,169	0,0014	0,0009	0,0007
$\infty$	344	1,0000	$\mu_1 = 7,863$		$\mu_{2s} = 48,06$									

Laufzeit  $\Theta = 5 \text{ Min.} = 300 \text{ sec.}$ 

$$\xi_0 = \mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - \mu_{2s}} = 7,863 - \sqrt{61,83 - 48,06} = 7,863 - 3,711 = \underline{4,152 \text{ m}}$$

$$T = \frac{\Theta}{\vartheta_0} = \frac{300}{335,8} = 0,895$$

$$\vartheta_0 = \Theta \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu_{2s}}{\mu_1^2}}} - 1 \right] = 300 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{48,06}{61,83}}} - 1 \right] = 300(2,119 - 1) = \underline{335,8 \text{ sec.}}$$

$$\sqrt{T} = 0,945$$

Tafel III.

Versuch 16. Gerölle mit  $17 < d_c < 24$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Grenze	Anzahl	$\pi(\xi) \Delta \xi$	$\xi$	$\xi \pi(\xi) \Delta \xi$	$\xi_s$	$\xi_s^2 \pi(\xi) \Delta \xi$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x} - \sqrt{T}$	$e^{-(\sqrt{x} - \sqrt{T})^2}$	$2\sqrt{x} \cdot T$	$F_0$	$e^{-(\sqrt{x} - \sqrt{T})^2} \cdot F_0$	$\frac{2}{\xi_0} p(x) \Delta x$	$\frac{2}{\xi_0} p(x) \Delta x$
0							0	1,30	0,185	0	1,000	0,1850	0,0594	0,1096
1	6	0,0093	2	0,019	7,082	0,47	0,545	0,75	0,571	1,416	0,377	0,2156	0,1350	0,1276
3	219	0,3403	4	1,361	5,082	8,80	0,943	0,36	0,878	2,45	0,273	0,2396	0,1401	0,1418
5	104	0,1618	6	0,971	3,082	1,53	1,217	0,08	0,994	3,16	0,236	0,2344	0,1313	0,1389
7	100	0,1556	8	1,245	1,082	0,18	1,440	0,14	0,980	3,74	0,214	0,2096	0,1151	0,1240
9	60	0,0934	10	0,934	0,918	0,08	1,631	0,33	0,896	4,25	0,200	0,1792	0,0963	0,1061
11	37	0,0576	12	0,691	2,918	0,49	1,805	0,51	0,771	4,70	0,190	0,1464	0,0783	0,0867
13	24	0,0373	14	0,522	4,918	0,90	1,961	0,66	0,648	5,10	0,182	0,1179	0,0617	0,0697
15	21	0,0327	16	0,524	6,918	1,57	2,108	0,81	0,518	5,48	0,175	0,0906	0,0475	0,0536
17	21	0,0327	18	0,589	8,918	2,60	2,244	0,94	0,415	5,84	0,169	0,0701	0,0362	0,0415
19	5	0,0078	20	0,156	10,918	0,93	2,372	1,07	0,317	6,16	0,165	0,0524	0,0271	0,0310
21	11	0,0171	22	0,376	12,918	2,85	2,494	1,19	0,242	6,36	0,162	0,0392	0,0199	0,0232
23	10	0,0156	24	0,374	14,918	3,48	2,61	1,31	0,179	6,79	0,156	0,0279	0,0143	0,0165
25	2	0,0031	26	0,081	16,918	0,89	2,72	1,42	0,133	7,07	0,154	0,0205	0,0103	0,0121
27	8	0,0124	28	0,347	18,918	4,44	2,83	1,53	0,0954	7,35	0,150	0,0143	0,0073	0,0085
29	3	0,0047	30	0,141	20,918	2,06	2,93	1,63	0,0700	7,61	0,147	0,0103	0,0052	0,0061
31	—	—	—	—	—	—	3,03	1,73	0,0498	7,87	0,145	0,0072	0,0037	0,0043
33	3	0,0046	34	0,156	24,918	2,85	3,12	1,82	0,0365	8,11	0,142	0,0052	0,0026	0,0031
35	2	0,0031	36	0,112	26,918	2,25	3,22	1,92	0,0247	8,37	0,140	0,0035	0,0017	0,0021
37	—	—	—	—	—	—	3,35	2,05	0,0150	8,71	0,137	0,0021	0,0011	0,0012
39	2	0,0031	40	0,124	30,918	2,96	3,40	2,10	0,0120	8,84	0,136	0,0016	0,0008	0,0009
41	5	0,0078	46	0,359	36,918	10,62	3,48	2,18	0,0086	9,05	0,134	0,0012	0,0008	0,0005
$\infty$	643	1,0000	$\mu_1 = 9,082$		$\mu_{2s} = 49,95$									

Laufzeit  $\Theta = 60 \text{ Min.} = 3600 \text{ sec.}$ 

$$\xi_0 = \mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - \mu_{2s}} = 9,082 \pm \sqrt{82,48 - 49,95} = 9,082 - 5,704 = \underline{3,378 \text{ m}}$$

$$T = \frac{\Theta}{\vartheta_0} = \frac{3600}{2134} = \underline{1,689}$$

$$\vartheta_0 = \Theta \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu_{2s}}{\mu_1^2}}} - 1 \right] = 3600 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{49,95}{82,48}}} - 1 \right] = 3600 (1,5923 - 1) = \underline{2134 \text{ sec.}}$$

$$\sqrt{T} = 1,300$$

Tafel IV.

Versuch 29<sub>r</sub>. Gerölle mit  $17 < d_c < 24$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
GRENZE	ANZAHL	$\pi(\xi)\Delta\xi$	$\xi$	$\xi\pi(\xi)\Delta\xi$	$\xi_s$	$\xi_s^2\pi(\xi)\Delta\xi$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-\sqrt{T}}$	$e^{-(\sqrt{x-\sqrt{T}})^2}$	$2\sqrt{x\cdot T}$	$F_0$	$e^{-(\sqrt{x-\sqrt{T}})^2}\cdot F_0$	$\frac{2}{\xi_0}p(x)\Delta x$	$\frac{2}{\xi_0}p(x)\Delta x$
0	19	0,0293	2	0,059	- 9,768	2,80	0	1,77	0,0392	0	1,000	0,0392	0,0198	0,0276
3	144	0,2220	4	0,888	- 7,768	13,40	0,594	1,18	0,247	2,10	0,299	0,0738	0,0698	0,0519
5	68	0,1049	6	0,629	- 5,768	3,50	1,028	0,74	0,577	3,64	0,216	0,1246	0,0989	0,0876
7	64	0,0986	8	0,789	- 3,768	1,40	1,326	0,44	0,824	4,69	0,190	0,1566	0,1138	0,1100
9	60	0,0925	10	0,925	- 1,768	0,29	1,569	0,20	0,961	5,55	0,174	0,1671	0,1160	0,1176
11	45	0,0694	12	0,832	+ 0,232	0,00	1,779	0,01	1,000	6,30	0,163	0,1630	0,1100	0,1147
13	67	0,1032	14	1,446	+ 2,232	0,51	1,968	0,20	0,961	6,94	0,155	0,1490	0,1098	0,1048
15	36	0,0555	16	0,888	+ 4,232	0,99	2,138	0,37	0,872	7,55	0,148	0,1290	0,0977	0,0906
17	20	0,0308	18	0,555	+ 6,232	1,20	2,298	0,52	0,763	8,13	0,142	0,1083	0,0834	0,0761
19	25	0,0385	20	0,770	+ 8,232	2,61	2,444	0,67	0,638	8,66	0,138	0,0880	0,0690	0,0619
21	24	0,0369	22	0,811	+10,232	3,86	2,584	0,81	0,517	9,15	0,134	0,0694	0,0554	0,0487
23	21	0,0323	24	0,775	+12,232	4,84	2,718	0,95	0,407	9,61	0,130	0,0529	0,0430	0,0372
25	33	0,0509	26	1,322	+14,232	10,30	2,842	1,07	0,320	10,08	0,127	0,0406	0,0329	0,0286
27	10	0,0154	28	0,431	+16,232	4,06	2,966	1,20	0,237	10,50	0,125	0,0296	0,0247	0,0208
29	8	0,0123	30	0,369	+18,232	4,09	3,08	1,31	0,179	10,90	0,123	0,0220	0,0181	0,0155
31	1	0,0015	32	0,048	+20,232	0,61	3,19	1,42	0,133	11,3	0,120	0,0160	0,0134	0,0112
33	1	0,0015	34	0,051	+22,232	0,74	3,30	1,53	0,0963	11,7	0,118	0,0114	0,0096	0,0080
35	1	0,0015	36	0,054	+24,232	0,88	3,41	1,64	0,0672	12,1	0,116	0,0078	0,0068	0,0055
37	—	—	38	—	—	—	3,51	1,74	0,0483	12,4	0,115	0,0055	0,0047	0,0039
39	1	0,0015	40	0,060	+28,232	1,20	3,61	1,84	0,0337	12,8	0,113	0,0038	0,0033	0,0027
41	1	0,0015	44	0,066	+32,232	1,56	3,70	1,93	0,0238	13,1	0,111	0,0026	0,0023	0,0018
∞	—	—	—	—	—	—	3,80	2,03	0,0162	13,5	0,110	0,0018	0,0015	0,0013
649	1,0000	$\mu_1 = 11,768$		$\mu_2 s = 58,84$										

Laufzeit  $\theta = 5 \text{ Min.} = 300 \text{ sec.}$ 

$$\xi_0 = \mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - \mu_2 s} = 11,768 - \sqrt{138,48 - 58,84} = 11,768 - 8,924 = \underline{2,844 \text{ m}}$$

$$T = \frac{\theta}{\vartheta_0} = \frac{300}{95,6} = \underline{3,14}$$

$$\vartheta_0 = \theta \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu_2 s}{\mu_1^2}}} - 1 \right] = 300 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{58,84}{138,48}}} - 1 \right] = 300 (1,3187 - 1) = \underline{95,6 \text{ sec.}}$$

$$\sqrt{T} = 1,77$$



Tafel V.

Versuch 51<sub>z</sub>. Gerölle mit  $17 < d_c < 24$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
GERÄTE	ANZAHL	$\pi(\xi) \Delta \xi$	$\xi$	$\xi \pi(\xi) \Delta \xi$	$\xi_s$	$\xi_s^3 \pi(\xi) \Delta \xi$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x - \sqrt{T}}$	$e^{-(\sqrt{x} - \sqrt{T})^2}$	$2\sqrt{x} \cdot T$	$F_0$	$e^{-(\sqrt{x} - \sqrt{T})^2} \cdot F_0$	$\frac{2}{\xi_0} p(x) \Delta x$	$\frac{2}{\xi_0} p(x) \Delta x$
0							0	2,46	0,0023	0	1,000	0,0023		0,0017
1	24	0,0382	0,5	0,019	- 9,067	3,14	0,860	1,60	0,0773	4,23	0,200	0,0155	0,0066	0,0229
3	26	0,0420	2	0,084	- 7,567	2,41	1,488	0,97	0,391	7,32	0,150	0,0586	0,0546	0,0865
5	45	0,0727	4	0,291	- 5,567	2,25	1,920	0,54	0,748	9,45	0,131	0,0980	0,1154	0,1446
7	85	0,1374	6	0,825	- 3,567	1,75	2,272	0,19	0,965	11,2	0,121	0,1168	0,1584	0,1722
9	88	0,1421	8	1,139	- 1,567	0,35	2,578	0,12	0,986	12,7	0,113	0,1115	0,1684	0,1644
11	132	0,2135	10	2,135	+ 0,433	0,04	2,848	0,39	0,859	14,0	0,108	0,0928	0,1509	0,1369
13	107	0,1730	12	2,078	+ 2,433	1,03	3,10	0,64	0,664	15,3	0,103	0,0684	0,1190	0,1009
15	68	0,1100	14	1,540	+ 4,433	2,16	3,33	0,87	0,468	16,4	0,100	0,0468	0,0850	0,0690
17	20	0,0323	16	0,516	+ 6,433	1,33	3,54	1,08	0,310	17,4	0,097	0,0301	0,0566	0,0444
19	8	0,0129	18	0,232	+ 8,433	0,92	3,74	1,28	0,194	18,4	0,094	0,0182	0,0356	0,0269
21	2	0,0032	20	0,064	+10,433	0,35	3,94	1,48	0,1109	19,4	0,092	0,0102	0,0209	0,0150
23	1	0,0016	22	0,035	+12,433	0,25	4,12	1,66	0,0633	20,3	0,090	0,0057	0,0117	0,0084
25	2	0,0033	24	0,079	+14,433	0,69	4,29	1,83	0,0351	21,1	0,088	0,0031	0,0065	0,0046
27	2	0,0032	26	0,083	+16,433	0,86	4,46	2,00	0,0183	22,0	0,086	0,0016	0,0035	0,0024
29	3	0,0049	28	0,137	+18,433	1,67	4,62	2,16	0,0095	22,8	0,084	0,0008	0,0018	0,0012
31	1	0,0016	30	0,048	+20,433	0,67	4,78	2,32	0,0046	23,4	0,083	0,0004	0,0009	0,0006
33	4	0,0065	32	0,208	+22,433	3,28	4,94	2,48	0,0021	24,4	0,081	0,0002	0,0004	0,0003
35	1	0,0016	34	0,054	+24,433	0,96	5,08	2,62	0,0011	25,0	0,080	0,0001	0,0002	0,0001
37							5,22	2,76	0,0005	25,7	0,079	0,0000	0,0001	0,0000
39							5,36	2,90	0,0002	26,4	0,078	0,0000	0,0000	0,0000
41							5,50	3,04	0,0001	27,1	0,077	0,0000	0,0000	0,0000
$\infty$	619	1,0000		$\mu_1 = 9,567$		$\mu_2 s = 24,11$							0,0000	0,0000

Laufzeit  $\Theta = 1200 \text{ sec.} = 20 \text{ Min.}$ 

$$\xi_0 = \mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - \mu_2 s} = 9,567 - \sqrt{91,53 - 24,11} = 9,567 - 8,211 = \underline{1,356 \text{ m}}$$

$$T = \frac{\Theta}{\vartheta_0} = \frac{1200}{198,3} = \underline{6,05}$$

$$\vartheta_0 = \Theta \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu_2 s}{\mu_1^2}}} - 1 \right] = 1200 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{24,11}{91,53}}} - 1 \right] = 1200 (1,1652 - 1) = \underline{198,3 \text{ sec.}}$$

$$\sqrt{T} = 2,46$$

Tafel VI.

Versuch 28 w. Gerölle mit  $d_c < 17 \text{ mm}$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Grenze	Anzahl	$\pi(\xi) \Delta \xi$	$\xi$	$\xi \pi(\xi) \Delta \xi$	$\xi_s$	$\xi_s^2 \pi(\xi) \Delta \xi$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{T}$	$e^{-(\sqrt{x} \cdot \sqrt{T})^2}$	$2\sqrt{x} \cdot T$	$F_0$	$e^{-(\sqrt{x} \cdot \sqrt{T})^2} \cdot F_0$	$\frac{2}{\xi_0} p(x) \Delta x$	$\frac{2}{\xi_0} p(x) \Delta x$
0	—	—	—	—	—	—	0	3,39	0,0000	0	1,000	0,0000	—	0,0000
1	—	—	—	—	—	—	0,948	2,44	0,0026	6,42	0,161	0,0004	0,0002	0,0007
3	7	0,0210	—	—	—	—	1,640	1,75	0,0469	11,1	0,122	0,0057	0,0055	0,0102
5	19	0,0569	4	0,084	- 9,921	2,06	2,118	1,27	0,198	14,3	0,107	0,0212	0,0242	0,0380
7	36	0,1078	6	0,341	- 7,921	3,56	2,506	0,88	0,458	17,0	0,098	0,0449	0,0594	0,0805
9	51	0,1526	8	0,862	- 5,921	3,77	2,840	0,55	0,738	19,2	0,092	0,0679	0,1011	0,1218
11	57	0,1706	10	1,526	- 3,921	2,35	3,14	0,25	0,940	21,3	0,087	0,0819	0,1350	0,1469
13	36	0,1078	12	2,047	- 1,921	0,63	3,41	0,02	1,000	23,1	0,083	0,0830	0,1480	0,1489
15	25	0,0749	14	1,509	+ 0,079	0,00	3,67	0,28	0,924	24,9	0,081	0,0749	0,1417	0,1342
17	40	0,1197	16	1,199	+ 2,079	0,32	3,90	0,51	0,771	26,4	0,078	0,0601	0,1211	0,1080
19	31	0,0928	18	2,155	+ 4,079	1,99	4,13	0,74	0,577	28,0	0,076	0,0439	0,0934	0,0788
21	16	0,0479	20	1,856	+ 6,079	3,42	4,34	0,95	0,407	29,4	0,074	0,0301	0,0664	0,0540
23	7	0,0210	22	1,052	+ 8,079	3,12	4,54	1,15	0,267	30,7	0,072	0,0192	0,0442	0,0345
25	3	0,0090	24	0,504	+10,079	2,14	4,74	1,35	0,162	32,1	0,071	0,0115	0,0275	0,0206
27	2	0,0060	26	0,234	+12,079	1,31	4,92	1,53	0,0954	33,4	0,069	0,0066	0,0162	0,0118
29	1	0,0030	28	0,168	+14,079	1,19	5,10	1,71	0,0534	34,6	0,068	0,0036	0,0091	0,0065
31	2	0,0060	30	0,090	+16,079	0,78	5,27	1,88	0,0290	35,7	0,067	0,0019	0,0049	0,0034
33	1	0,0030	32	0,192	+18,079	1,96	5,44	2,05	0,0148	36,8	0,066	0,0010	0,0026	0,0018
35	—	—	34	0,102	+20,079	1,21	5,60	2,21	0,0074	38,0	0,065	0,0005	0,0013	0,0009
37	—	—	—	—	—	—	5,76	2,37	0,0037	39,1	0,064	0,0002	0,0006	0,0004
39	—	—	—	—	—	—	5,91	2,52	0,0017	40,4	0,063	0,0001	0,0003	0,0002
41	—	—	—	—	—	—	6,06	2,67	0,0008	41,1	0,062	0,0000	0,0001	—
334	1,0000	$\mu_1 = 13,921$	$\mu_2 = 29,81$											

Laufzeit  $\theta = 6 \text{ Min.} = 360 \text{ sec.}$

$$\xi_0 = \mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - \mu_2} = 13,921 - \sqrt{193,80 - 29,81} = 13,921 - 12,806 = 1,115 \text{ m}$$

$$T = \frac{\theta}{\vartheta_0} = \frac{360}{31,4} = 11,48$$

$$\vartheta_0 = \theta \left[ \sqrt{1 - \frac{\mu_2}{\mu_1^2}} - 1 \right] = 360 \left[ \sqrt{1 - \frac{29,81}{193,80}} - 1 \right] = 360 (1,0871 - 1) = 31,4 \text{ sec.}$$

$$\sqrt{T} = 3,39$$

Tafel VII.

Versuch 18. Gerölle mit  $d_c > 24 \text{ mm}$ .

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
GRÖÖE	ANZAHL	$\pi(\xi)\Delta\xi$	$\xi$	$\xi\pi(\xi)\Delta\xi$	$\xi_s$	$\xi_s^2\pi(\xi)\Delta\xi$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-\sqrt{T}}$	$e^{-(\sqrt{x-\sqrt{T}})^2}$	$2\sqrt{x}\cdot T$	$F_0$	$e^{-(\sqrt{x-\sqrt{T}})^2}\cdot F_0$	$\frac{2}{\xi_0}p(x)\Delta x$	$\frac{2}{\xi_0}p(x)\Delta x$
0							0	4,30	0,0000	0	1,0000	0,0000		0,0000
1							0,968	3,33	0,0000	8,32	0,150	0,0000	0,0000	0,0000
3	1	0,0034	4	0,014	-16,907	0,97	1,672	2,63	0,0007	14,4	0,106	0,0001	0,0001	0,0002
5	6	0,0206	6	0,124	-14,907	4,59	2,16	2,14	0,0100	18,6	0,0935	0,0009	0,0009	0,0017
7	10	0,0344	8	0,275	-12,907	5,72	2,555	1,75	0,0464	22,0	0,0860	0,0040	0,0046	0,0075
9	16	0,0206	10	0,206	-10,907	2,45	2,90	1,40	0,1395	24,0	0,0805	0,0112	0,0142	0,0210
11	7	0,0240	12	0,288	- 8,907	1,90	3,20	1,10	0,2982	27,5	0,0765	0,0228	0,0228	0,0426
13	20	0,0687	14	0,962	- 6,907	3,28	3,48	0,82	0,512	29,9	0,0730	0,0374	0,0374	0,0700
15	28	0,0962	16	1,540	- 4,907	2,32	3,74	0,56	0,733	32,2	0,0705	0,0516	0,0516	0,0966
17	24	0,0825	18	1,486	- 2,907	0,70	3,98	0,32	0,905	34,2	0,0685	0,0620	0,1062	0,1161
19	49	0,1684	20	3,368	- 0,907	0,14	4,20	0,10	0,990	36,1	0,0665	0,0659	0,1197	0,1232
21	38	0,1307	22	2,876	+ 1,093	0,16	4,43	0,13	0,983	38,0	0,0650	0,0639	0,1212	0,1196
23	29	0,0996	24	2,392	+ 3,093	0,95	4,63	0,33	0,896	39,8	0,0635	0,0569	0,1130	0,1066
25	21	0,0722	26	1,877	+ 5,093	1,87	4,83	0,53	0,756	41,5	0,0620	0,0469	0,0780	0,0876
27	14	0,0481	28	1,347	+ 7,093	2,41	5,02	0,72	0,595	43,2	0,0610	0,0363	0,0780	0,0680
29	20	0,0688	30	2,064	+ 9,093	5,69	5,20	0,90	0,445	44,7	0,6000	0,0267	0,0590	0,0500
31	7	0,0240	32	0,768	+11,093	2,95	5,38	1,08	0,310	46,3	0,0590	0,0183	0,0421	0,0343
33	7	0,0241	34	0,820	+13,093	4,13	5,55	1,25	0,210	47,7	0,0580	0,0122	0,0285	0,0228
35	3	0,0103	36	0,371	+15,093	2,34	5,71	1,41	0,135	49,1	0,0570	0,0077	0,0186	0,0144
37	1	0,0034	38	0,129	+17,093	0,99	5,87	1,57	0,085	50,5	0,0560	0,0048	0,0117	0,0090
39							6,04	1,74	0,048	51,9	0,0555	0,0027	0,0070	0,0051
41							6,18	1,88	0,029	53,1	0,0545	0,0016	0,0040	0,0030
291	1,0000		$\mu_1 = 20,907$			$\mu_2 s = 43,56$								

Laufzeit  $\Theta = 3 \text{ Min.} = 180 \text{ sec.}$

$$\xi_0 = \mu_1 - \sqrt{\mu_1^2 - \mu_2 s} = 20,907 - \sqrt{437,10 - 43,56} = 20,907 - 19,838 = \underline{1,069 \text{ m}}$$

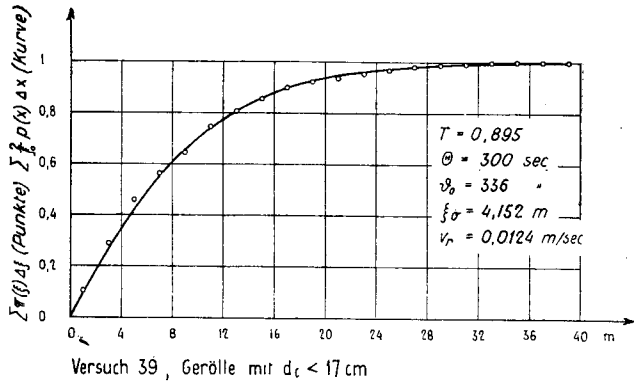
$$T = \frac{\Theta}{\vartheta_0} = \frac{180}{9,70} = 18,57$$

$$\vartheta_0 = \Theta \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu_2 s}{\mu_1^2}}} - 1 \right] = 180 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{43,56}{437,10}}} - 1 \right] = 180 (1,0539 - 1) = \underline{9,70 \text{ sec.}}$$

$$\sqrt{T} = 4,30$$

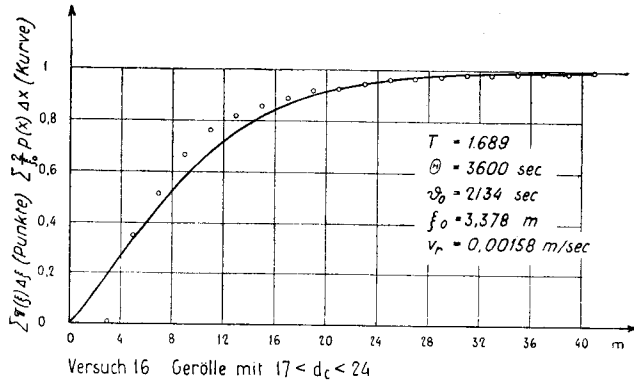
Tafel VIII.

## Summenlinie der Verteilung.



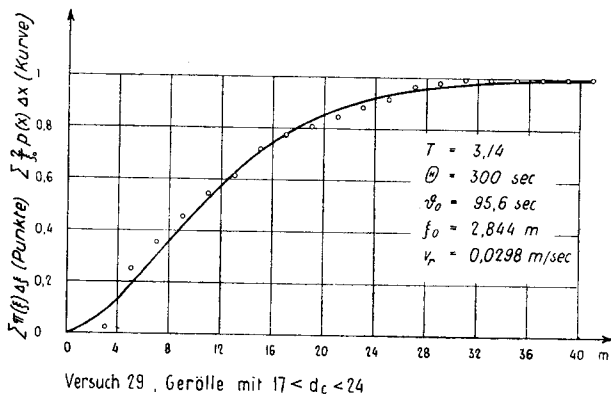
Tafel IX.

## Summenlinie der Verteilung.



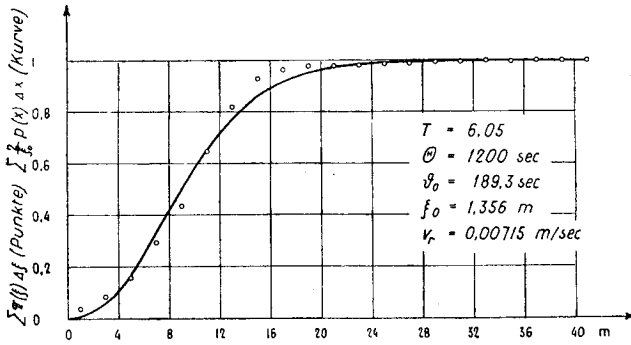
Tafel X.

## Summenlinie der Verteilung.



Tafel XI.

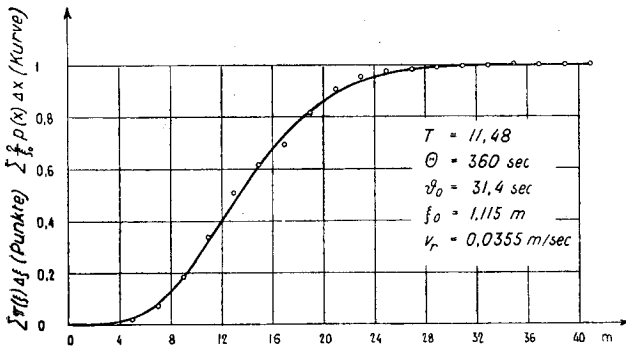
Summenlinie der Verteilung.



Versuch 51 Gerölle mit  $17 < d_c < 24$

Tafel XII.

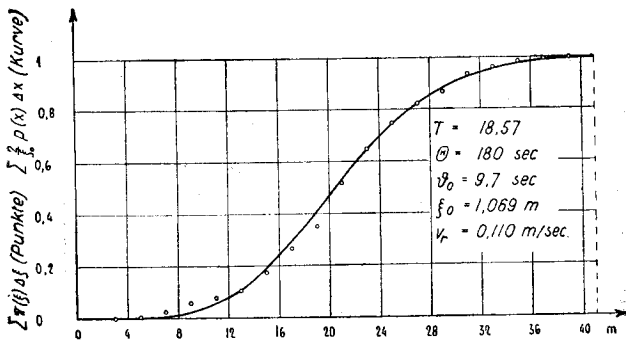
Summenlinie der Verteilung.



Versuch 28, Gerölle

Tafel XIII.

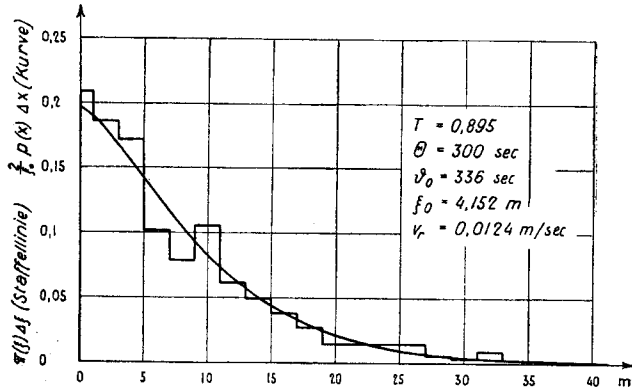
Summenlinie der Verteilung.



Versuch 18, Gerölle mit  $d_c > 24 \text{ mm}$

Tafel XIV.

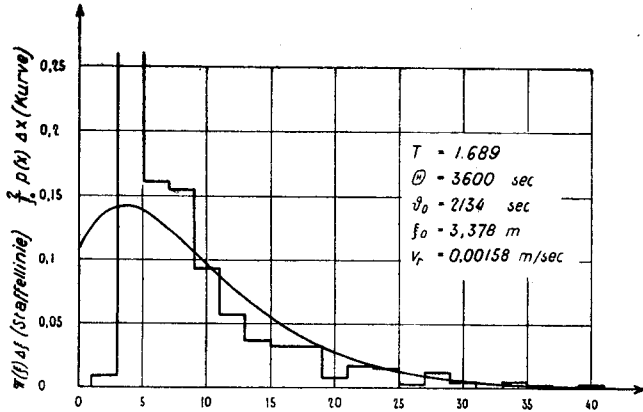
Verteilungskurve.



Versuch 39. Gerölle mit  $d_c < 17 \text{ mm}$

Tafel XV.

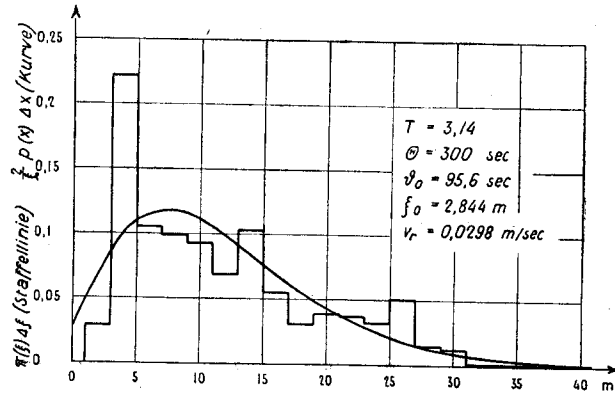
Verteilungskurve.



Versuch 6. Gerölle mit  $17 < d_c < 24 \text{ mm}$

Tafel XVI.

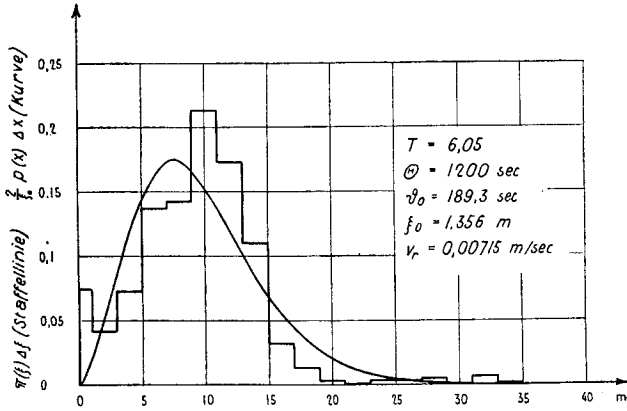
Verteilungskurve.



Versuch 29. Gerölle mit  $17 < d_c < 24 \text{ mm}$

Tafel XVII.

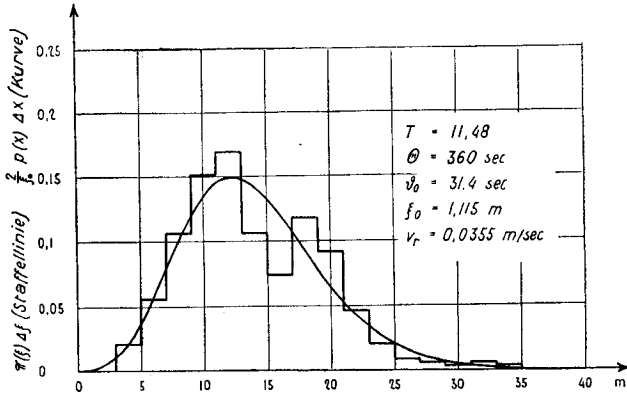
Verteilungskurve.



Versuch 51, Gerölle mit  $17 < d_r < 24 \text{ mm}$

Tafel XVIII.

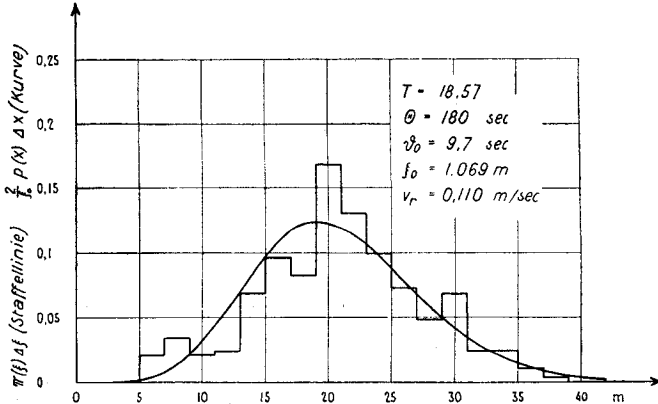
Verteilungskurve.



Versuch 28, Gerölle mit  $d_c < 17 \text{ mm}$

Tafel XIX.

Verteilungskurve.



Versuch 18, Gerölle mit  $d_c > 24 \text{ mm}$

Tafel XX. Versuche mit einheitlichem Geschiebe 24—34 mm.

Vers.	$\xi_0$	$\vartheta_0$	$v_r =$ 1000 $\xi_0/\vartheta_0$	Geschiebetrieb		$\frac{v_r}{g^{2/3}}$	$t_m$	$\vartheta_0 \cdot g^{2/3}$	$\vartheta_0' =$ $\frac{110}{g^{2/3}}$	$\xi_0'$ aus $\vartheta_0'$	
				total	spez. g						
	m	sek.	mm/s	l/s	l/s · m		m		sek.	m	
16	f m k	0,640 3,378 i	430 2134 i	1,49 1,58 —	0,020	0,010	32,1 34,0 —	0,4546	20,0 99,0 —	2360	2,37 3,59 5,64
17	f m k	1,248 2,802 3,243	36,23 53,42 28,53	34,4 52,5 113,9	5,099	2,550	18,4 28,1 60,9	0,3422	67,8 100,0 53,3	58,9	1,83 2,93 4,98
18	f m k	1,387 1,314 1,069	31,3 18,5 9,70	44,4 71,1 110,1	5,153	2,576	23,6 37,9 58,7	0,5971	58,9 34,8 18,2	58,5	2,30 3,45 5,13
19	f m k	1,272 3,165 3,733	65,7 98,23 55,91	19,36 32,2 66,9	2,340	1,170	17,4 29,0 60,1	0,6528	73,0 109 62,0	99,0	1,76 3,02 5,96
21	f m k	1,299 2,058 1,742	163,8 145,3 74,1	7,94 14,15 23,5	1,168	0,584	11,4 20,2 33,6	0,6941	114,3 101,8 52,0	157	1,26 2,19 3,28
22	f m k	1,161 i i	294 i i	3,95 — —	0,588	0,294	8,9 — —	0,7219	130 — —	249	1,02 1,78 4,07
25	f m k	u 4,917 8,964	u 7437 4111	— 0,662 2,18	0,0159	0,008	— 16,6 54,4	0,8531	— 298 165	2750	1,32 2,71 6,75
27	f m k	1,557 1,655 1,159	36,7 26,8 11,95	42,45 61,8 96,9	5,144	2,572	22,6 32,9 51,5	0,8014	69,1 50,3 22,5	58,5	2,25 3,13 4,56
28	f m k	1,115 1,484 0,8415	31,4 32,72 12,82	35,5 45,4 65,7	5,174	2,587	18,8 24,0 34,9	0,7811	59,0 61,8 24,2	58,4	1,95 2,49 3,43
29	f m k	1,526 2,844 1,795	78,1 95,6 31,05	19,51 29,8 57,0	2,326	1,163	17,6 26,9 51,4	0,8606	86,6 106 34,4	99,2	1,84 2,92 4,76
30	f m k	1,962 2,868 u	116,93 115,71 u	16,81 24,8 —	2,317	1,158	15,3 22,5 —	0,8524	129 127 —	99,8	1,70 2,48 u

i = imaginäre Lösung. u = unbrauchbar, zu wenig verteilt.



Tafel XX. (Fortsetzung).

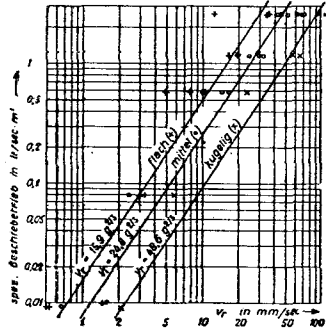
Vers.	$\xi_0$	$\vartheta_0$	$v_r =$ $1000 \xi_0 / \vartheta_0$	Geschiebetrieb		$\frac{v_r}{g^{2/3}}$	$t_m$	$\vartheta_0 \cdot g^{2/3}$	$\vartheta_0' =$ $\frac{110}{g^{2/3}}$	$\xi_0'$ aus $\vartheta_0'$	
				total	spez. g						
	m	sek.	mm/s	l/s	l/s · m		m		sek.	m	
31	f	3,485	709,6	4,92		7,0		495		1,09	
	m	3,989	402,6	9,92	1,172	0,586	14,2	0,9080	281	1,81	
	k	u	u	—			—	—	—	u	
32	f	2,136	206,3	10,33		14,7		144		1,68	
	m	4,489	267,8	16,78	1,168	0,584	24,0	0,9254	187	2,76	
	k	u	u	—			—	—	—	u	
33	f	1,209	358,2	6,16		14,0		158		1,68	
	m	i	i	—	0,585	0,292	—	0,9734	—	249	3,10
	k	u	u	—			—	—	—	u	
35	f	0,989	331	2,99		16,2		61,0		1,56	
	m	i	i	—	0,158	0,079	—	1,0176	—	598	2,35
	k	i	i	—			—	—	—	6,34	
36	f	0,935	285,3	3,28		17,7		53,1		1,65	
	m	6,146	2551,2	2,41	0,161	0,080	13,0	1,0260	475	2,58	
	k	11,284	1903,1	5,93			32,0		354	5,51	
37	f	2,065	4090,9	0,505		11,7		177		1,48	
	m	i	i	—	0,018	0,009	—	1,0922	—	2540	2,01
	k	i	i	—			—	—	—	5,04	
38	f	1,030	1901	0,542		12,5		82,3		1,29	
	m	i	i	—	0,019	0,009	—	1,0920	—	2540	2,09
	k	i	i	—			—	—	—	4,62	
39	f	4,152	335,8	12,40		6,6		630		1,28	
	m	6,301	144,3	43,7	5,166	2,583	23,3	0,3508	271	3,11	
	k	u	u	—			—	—	—	u	

i = imaginäre Lösung.

u = unbrauchbar, zu wenig verteilt.

Tafel XXI.

Der spezifische Geschiebetrieb  $g$  in Funktion der Reisegeschwindigkeit  $v_r$  in den Versuchen mit einheitlichem Korn.



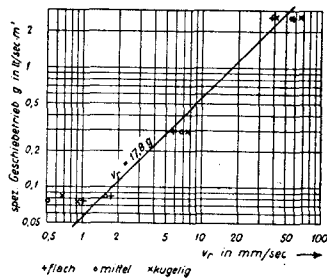
Tafel XXII.

Versuche mit Gemisch 6—40 mm.

Vers.	$\xi_0$	$\vartheta_0$	$v_r = 1000 \xi_0 / \vartheta_0$	Geschiebetrieb		$\frac{v_r}{g^{2/3}}$	Wassertiefe $t_m$	$\vartheta_0 \cdot g^{2/3}$	$\xi_0'$	$\vartheta_0'$	$v_r'$	$\frac{v_r'}{g'}$
				total	spez. g							
	m	sek.	mm/s	l/s	l/s · m		m					
51	f	0,835	142	5,88		13,2		63	1,648	316	5,22	17,6
	m	1,356	198,3	6,84	0,593	0,296	15,4	0,4682	88	2,658	461	5,75
	k	1,678	220	7,63			17,2		98	5,005	1025	4,89
53	f	1,092	627,1	1,740			9,1		120	1,648	991	1,661
	m	2,702	1716,8	1,576	0,168	0,084	8,2	0,5057	330	2,658	1673	1,588
	k	8,325	12133	0,686			3,6		2140	5,005	3160	1,582
54	f	0,742	12,74	58,2			30,8		24,1	1,648	29,6	55,7
	m	2,315	41,68	55,4	5,20	2,60	29,3	0,3821	79	2,658	48,6	54,6
	k	1,112	16,49	67,5			35,6		31,2	5,005	88,6	56,5
56	f	1,450	38,23	37,9			19,9		72,8	1,648	44,2	37,3
	m	1,470	38,55	38,1	5,29	2,620	20,0	1,018	73,3	2,658	76,4	34,8
	k	1,348	34,13	39,5			20,8		65,0	5,005	171	29,3
57	f	3,663	3581	1,022			5,7		640	1,648	1004	1,582
	m	4,541	8881	0,511	0,151	0,0755	2,9	1,244	1590	2,658	2570	1,034
	k	6,742	7422	0,907			5,1		1330	5,005	3595	1,392

Tafel XXIII.

Der spezifische Geschiebetrieb  $g$  in Funktion der Reisegeschwindigkeit  $v_r$  in den Versuchen mit Geschiebegemisch.

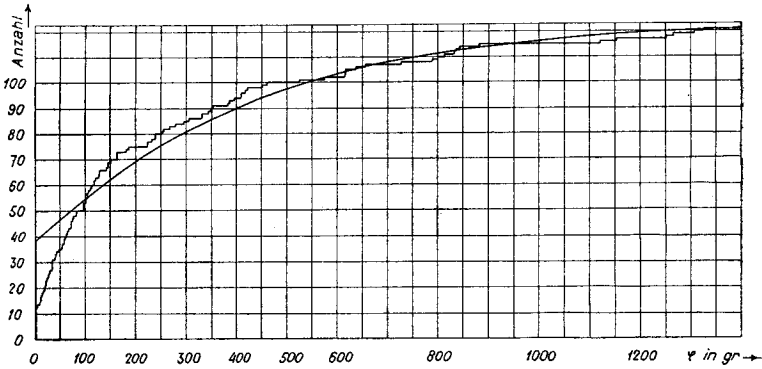


Tafel XXIV.

*Summenlinie der Verteilung.*

Versuch 62  $n_I$ , Füllaufgabe  
Material 0—40 mm

$T = 1,15$   
 $\vartheta_0 = 33,1$  Sek.  
 $\varphi_0 = 242$  gr.

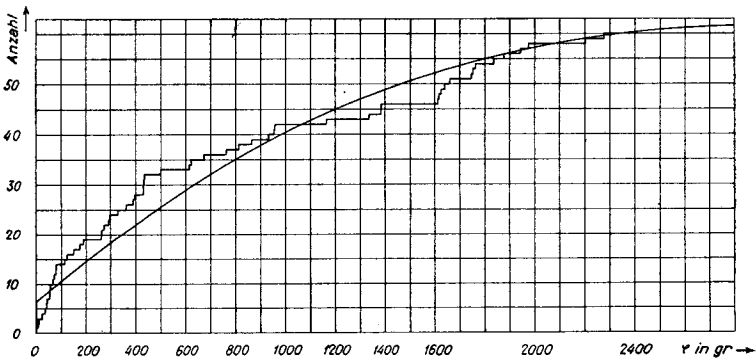


Tafel XXV.

*Summenlinie der Verteilung.*

Versuch 62  $s_{II}$ , Füllaufgabe  
Material 3—40 mm

$T = 2,30$   
 $\vartheta_0 = 32,5$  Sek.  
 $\varphi_0 = 386$  gr.

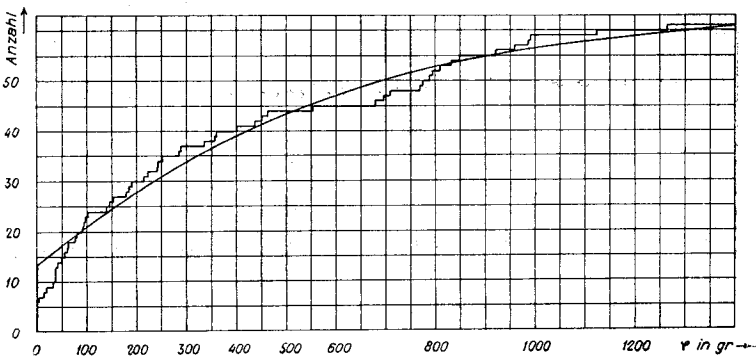


Tafel XXVI.

*Summenlinie der Verteilung.*

Versuch 62  $s_{II}$ , Füllaufgabe.  
Material 12—24 mm

$T = 1,56$   
 $\vartheta_0 = 48$  Sek.  
 $\varphi_0 = 254$  gr.



Tafel XXVII. Erklärung vergl. S. 91.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Vers.	Korn	$n \cdot \mu_1^*$	$n \cdot \mu_2^*$	$n$	$\mu_1^*$	$\mu_2^*$	$\frac{\mu_2^*}{\mu_1^*} - 1$	$\varphi_0^* = \frac{\mu_1^*}{2} [8]$	$\Theta$	$\vartheta_0^* = \frac{\Theta}{2} [8]$	$T = \frac{2}{[8]}$	$[\varphi_0^*]$	9/13
	mm	gr	gr <sup>2</sup>		gr	gr <sup>2</sup>		gr	sek	sek		gr	
62 $o_I$	0-40	47 326	53 545 900	83	570	645 000	0,986	281	75	37,0	2,03		
62 $n_I$	0-40	34 214	26 103 400	123	278	212 000	1,74	242	38	33,1	1,15		
62 $r_I$	0-40	11 349	6 379 000	83	137	76 900	3,09	212	20	30,9	0,648		
62 $p_I$	0-40	16 841	11 079 000	124	136	89 300	3,83	260	20	38,3	0,523		
62 $q_I$	0-40	30 964	37 678 600	82	377	460 000	2,236	420	38	42,5	0,895		
62 $q_{II}$	0-40	37 577	41 784 000	82	457	509 000	1,436	328	38	27,3	1,394		
62 $v_{II}$	0-40	12 237	5 756 000	83	147	69 400	2,20	162	20	22,0	0,909		
62 $s_I$	3-40	35 034	43 386 400	62	565	699 000	1,19	336	75	44,6	1,68	119	2,82
	34-40	2 003	343 800	62	32,2	5 540	4,31	69,6	75	162	0,465		
	24-34	5 630	1 162 500	62	90,8	18 750	1,27	58	75	48	1,57		
	24-40	7 633	2 247 200	62	123	36 250	1,40	86	75	52,5	1,43	61,1	1,41
	12-24	15 427	8 711 700	62	249	140 400	1,27	158	75	48	1,57		
	6-12	8 138	2 758 500	62	131	44 500	1,59	104	75	59,6	1,26		
3-6	3 837	705 900	62	61,9	11 400	1,97	61	75	74	1,02			
62 $s_{II}$	3-40	56 071	93 181 300	63	890	1 480 000	0,868	386	75	32,5	2,30	175,5	2,20
	34-40	2 421	330 800	63	38,4	5 250	2,56	49	75	96	0,782		
	24-34	9 070	2 660 500	63	144	42 200	1,04	74,9	75	39	1,92		
	24-40	11 491	4 093 200	63	182	64 900	0,960	87,5	75	36	2,08	69,6	1,26
	12-24	24 953	22 482 500	63	396	357 000	1,28	254	75	48	1,56		
	6-12	13 792	6 724 500	63	219	106 900	1,22	134	75	45,8	1,64		
3-6	5 835	1 810 800	63	92,5	28 700	2,36	109	75	88,9	0,848			
64 $u_I$	0-40	27 117	27 560 400	62	437	444 500	1,324	219	38	25,2	1,51		
64 $u_{II}$	0-40	39 120	46 534 300	62	631	751 000	0,885	280	38	16,8	2,26		
64 $v_I$	0-40	81 062	185 814 900	60	1351	3 095 000	0,690	466	75	25,9	2,90		
64 $v_{II}$	0-40	102 324	299 529 700	62	1650	4 830 000	0,774	639	75	29,0	2,58		
64 $w_I$	3-40	19 201	8 206 700	83	231,4	98 900	0,849	98,1	20	8,5	2,36	31,9	3,08
	34-40	577	42 800	83	6,95	515	9,65	33,6	20	96,5	0,207		
	24-34	2 821	317 700	83	34,0	3 830	2,31	39,3	20	23,1	0,866		
	24-40	3 398	394 700	83	40,95	4 750	1,84	37,6	20	18,4	1,09	38,4	0,98
	12-24	8 199	1 424 600	83	98,8	17 180	0,758	37,4	20	7,6	2,64		
	6-12	3 892	431 100	83	46,9	5 200	1,37	32,1	20	13,7	1,46		
3-6	2 161	159 800	83	26,1	1 925	1,83	23,9	20	18,3	1,09			

Tafel XXVII (Fortsetzung).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Vers.	Korn	$n \cdot \mu_1^*$	$n \cdot \mu_2^*$	$n$	$\mu_1^*$	$\mu_2^*$	$\frac{\mu_2^*}{\mu_1^*} - 1$	$\varphi_0^* = \frac{\mu_1^*}{2} [8]$	$\theta$	$\theta_0^* = \frac{\theta}{2} [8]$	$T = \frac{2}{[8]}$	$[\varphi_0^*]$	9/13
	mm	gr	gr <sup>2</sup>		gr	gr <sup>2</sup>		gr	sek	sek		gr	
64 <i>w<sub>II</sub></i>	3-40	26 368	20 349 100	83	317,4	245 000	1,43	227	20	14,3	1,40	62,4	3,64
	34-40	1 229	144 500	83	14,8	1 740	6,95	51,5	20	69,5	0,288		
	24-34	3 326	392 100	83	40,1	4 730	1,94	38,9	20	19,4	1,03		
	24-40	4 555	787 800	83	54,9	9 500	2,16	59,3	20	21,6	0,926	42,4	1,40
	12-24	10 923	3 203 900	83	131,8	38 600	1,23	81,0	20	12,3	1,63		
	6-12	5 366	1 012 700	83	64,7	12 210	1,92	62,1	20	19,2	1,04		
	3-6	3 050	418 900	83	36,8	5 050	2,73	50,3	20	27,3	0,732		
61 <i>D<sub>I</sub></i>	3-40	32 498	35 150 600	68	479	516 000	1,25	299	20	12,5	1,60	94,4	3,17
	34-40	1 624	165 100	68	23,9	2 430	3,25	38,8	20	32,5	0,616		
	24-34	6 750	1 663 900	68	99,3	24 500	1,49	74,0	20	14,9	1,34		
	24-40	8 374	2 434 900	68	123,1	35 800	1,36	83,6	20	13,6	1,47	67,2	1,24
	12-24	13 363	5 894 000	68	196,3	86 600	1,25	122,8	20	12,5	1,60		
	6-12	6 476	1 555 900	68	95,2	22 900	1,53	72,8	20	15,3	1,31		
	3-6	4 295	799 500	68	63,1	11 750	1,95	61,5	20	19,5	1,025		
61 <i>E<sub>I</sub></i>	3-40	44 625	86 145 000	60	745	1 437 000	1,59	593	20	15,9	1,26	178	3,33
	34-40	3 936	738 300	60	65,5	12 300	1,87	61,2	20	18,7	1,07		
	24-34	6 879	1 866 000	60	114,7	31 100	1,37	78,5	20	18,7	1,46		
	24-40	10 815	4 467 000	60	180,3	74 400	1,29	116,4	20	12,9	1,55	72,2	1,61
	12-24	17 891	13 370 500	60	298	222 500	1,51	225	20	15,1	1,325		
	6-12	10 321	5 656 600	60	172	94 400	2,19	188	20	21,9	0,915		
	3-6	5 598	2 035 900	60	93,3	33 900	2,90	135	20	29,0	0,690		
61 <i>C<sub>I</sub></i>	3-40	87 799	368 343 000	32	2740	11 500 000	0,533	730	75	20,0	3,75	232	3,15
	34-40	4 810	1 417 800	32	151	44 300	0,941	71,1	75	35,3	2,13		
	24-34	12 497	8 217 700	32	390	257 000	0,690	134,5	75	25,9	2,90		
	24-40	17 307	15 014 700	32	541	470 000	0,604	163	75	22,6	3,31	116,9	1,40
	12-24	38 628	73 231 800	32	1209	2 290 000	0,569	344	75	21,3	3,52		
	6-12	20 855	21 966 700	32	651	686 000	0,619	139,6	75	23,2	3,23		
	3-6	11 009	6 395 900	32	344	199 800	0,689	118,5	75	25,8	2,90		
61 <i>B<sub>I</sub></i>	3-40	54 873	177 357 200	32	1713	5 540 000	0,888	761	75	33,3	2,25	241	3,16
	34-40	4 075	1 322 800	32	127	41 400	1,56	99,0	75	58,5	1,28		
	24-34	9 971	5 879 000	32	312	183 600	0,885	138,0	75	33,2	2,26		
	24-40	14 046	11 724 800	32	439	366 600	0,903	198	75	33,9	2,21	126,8	1,56
	12-24	23 985	32 975 000	32	749	1 030 000	0,838	314	75	31,4	2,39		
	6-12	11 280	8 699 100	32	352	272 000	1,20	211	75	45,0	1,67		
	3-6	5 582	2 107 600	32	174	65 900	1,17	102	75	43,9	1,71		
61 <i>A<sub>I</sub></i>	3-40	16 918	17 093 400	68	249	251 000	3,05	380	10	15,2	0,656	135,1	2,81
	34-40	1 361	121 900	68	20	1 791	3,48	34,8	10	17,4	0,575		
	24-34	2 158	256 700	68	31,7	3 775	2,76	43,7	10	13,8	0,725		
	24-40	3 519	536 200	68	51,7	7 890	1,95	50,5	10	9,7	1,025	40,3	1,25
	12-24	7 264	3 351 900	68	107	49 300	3,30	176,5	10	16,5	0,606		
	6-12	3 883	1 437 800	68	57,1	21 150	5,48	156,5	10	27,4	0,365		
	3-6	2 252	511 700	68	33,1	7 540	5,88	97,3	10	29,4	0,341		

Tafel XXVII (Fortsetzung).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Vers.	Korn	$n \cdot \mu_1^*$	$n \cdot \mu_2^*$	$n$	$\mu_1^*$	$\mu_2^*$	$\frac{\mu_2^*}{\mu_1^*} - 1$	$\frac{\varphi_0^*}{2} = \frac{\mu_1^*}{2} [8]$	$\Theta$	$\frac{\vartheta_0^*}{2} = \frac{\Theta}{2} [8]$	$T = \frac{2}{[8]}$	$[\varphi_0^*]$	9/13
	mm	gr	gr <sup>2</sup>		gr	gr <sup>2</sup>		gr	sek	sek		gr	
61 $y_I$	3-40	16 523	10 197 600	66	251	154 600	1,45	182	10	7,2	1,38	57,8	3,15
	34-40	2 157	127 700	66	17,2	1 935	5,54	47,6	10	27,7	0,361		
	24-34	3 005	413 100	66	45,5	6 250	2,02	45,9	10	10,1	0,990		
	24-40	4 142	688 100	66	62,6	10 410	1,66	52,0	10	8,3	1,205	46,5	1,12
	12-24	7 019	1 704 500	66	106,3	25 800	1,28	68,0	10	6,4	1,56		
	6-12	3 600	606 700	66	54,5	9 200	2,10	57,3	10	10,5	0,953		
	3-6	1 762	163 400	66	26,7	2 480	2,48	33,1	10	12,4	0,807		
61 $x_I$	3-40	31 911	45 563 100	48	665	950 000	1,15	383	20	11,5	1,74	131,7	2,91
	34-40	2 115	306 500	48	44,0	6 380	2,29	45,9	20	22,9	0,874		
	24-34	5 325	1 248 600	48	111,0	26 000	1,11	61,5	20	11,1	1,80		
	24-40	7 440	2 503 800	48	155	52 200	1,17	90,7	20	11,7	1,71	57,1	1,59
	12-24	12 547	7 005 600	48	261,5	146 000	1,14	149	20	11,4	1,75		
	6-12	8 624	4 352 200	48	179,8	90 700	1,81	163	20	18,1	1,10		
	3-6	3 340	730 500	48	69,6	15 220	2,14	74,5	20	21,4	0,935		
61 $w_I$	3-40	13 863	12 746 000	48	289	265 200	2,18	809	20	21,8	0,918	239	3,38
	34-40	696	43 230	48	14,5	900	3,30	61,4	20	33,0	0,606		
	24-34	1 837	248 500	48	38,3	5 180	2,53	124,3	20	25,3	0,791		
	24-40	2 533	404 200	48	52,8	8 410	2,02	136,8	20	20,2	0,990	107,1	1,28
	12-24	5 467	1 821 500	48	114,0	37 970	1,92	281	20	19,2	1,04		
	6-12	3 857	1 156 900	48	80,4	24 110	2,73	281	20	27,3	0,732		
	3-6	2 003	351 300	48	41,7	7 320	3,20	171	20	32,0	0,625		
61 $u_I$	3-40	16 396	16 022 600	36	456	445 070	1,15	672	38	21,8	1,74	228	2,95
	34-40	1 070	68 800	36	29,7	1 910	1,16	44,1	38	22,0	1,72		
	24-34	2 395	395 900	36	66,6	11 000	1,48	126,6	38	28,2	1,35		
	24-40	3 465	719 500	36	96,2	19 990	1,16	143	38	22,0	1,72	101,0	1,41
	12-24	7 310	2 864 300	36	203,4	79 560	0,924	241	38	17,6	2,16		
	6-12	3 851	1 204 200	36	106,9	33 450	2,26	310	38	43,0	0,885		
	3-6	1 770	311 100	36	42,2	8 640	2,58	163	38	49,0	0,775		
61 $s_I$	3-40	13 414	9 964 700	36	372,6	276 800	0,990	474	38	18,8	2,02	149,5	3,17
	34-40	591	28 000	36	16,4	778	1,88	39,6	38	35,7	1,06		
	24-34	2 172	309 200	36	60,3	8 590	1,35	105	38	25,7	1,48		
	24-40	2 763	465 600	36	76,8	12 930	1,19	117	38	22,6	1,68	91,2	1,15
	12-24	5 692	1 739 700	36	158,1	48 330	0,940	191	38	17,9	2,13		
	6-12	3 271	646 200	36	90,9	17 950	1,18	137,3	38	22,4	1,70		
	3-6	1 697	194 900	36	47,1	5 410	1,43	86,5	38	27,2	1,40		

## Literaturverzeichnis.

### *Wahrscheinlichkeit im allgemeinen:*

1. *Czuber, E.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig 1914.
2. *Pólya, G.*, Zürich: Wahrscheinlichkeit, Fehlerausgleich, Statistik, in Abderhalden, Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden, Abt. V, Teil 2.
3. *Riebesell, Paul*, Hamburg: Biometrik und Variationsstatistik, in Abderhalden (vergl. Lit. 2), Abt. V, Teil 2.
4. v. *Mises, Richard*, Berlin: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Julius Springer, Wien, 1928.

### *Speziell für den logarithmischen Ansatz:*

5. *Gibrat, R.*: La loi de l'effet proportionnel. Librairie du Recueil Sirey s. A. 22 rue Soufflot-Paris (Ve). 1931.
6. Dr. ing. *Hans Grassberger*, Wien: Der Aufbau der Böden. Die Wasserwirtschaft, Jahrgang 1933, Heft 17—19.
7. *Derselbe*: Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Wasserführung der Gewässer. Die Wasserwirtschaft, Jahrgang 1932, Heft 1—6.

### *Geschiebetrieb:*

8. *E. Meyer-Peter, H. Favre* und *A. Einstein*, Zürich: Neuere Versuchsergebnisse über den Geschiebetrieb. Schweiz. Bauzeitung, 31. März 1934, Bd. 103, S. 147 ff.

### *Geschiebecharakterisierung:*

9. *Zingg, Th.*, Zürich: Beitrag zur Schotteranalyse. Schweiz. Min.-Petr. Mitt., Bd. XV, Heft 1, 1935.

### *Geschiebefänger:*

10. Dr. ing. *Ludwig Mühlhofer*: Untersuchung über die Schwebestoff- und Geschiebeführung des Inn nächst Kirchbichl. Die Wasserwirtschaft, Heft 1—6, Wien 1933.
11. Ministerialrat Ing. *R. Ehrenberger*, Wien: Geschiebemessungen an Flüssen mittels Auffanggeräten und Modellversuche mit letzteren. Die Wasserwirtschaft, Heft 33 und 36, Wien 1932.
12. *Derselbe*: Direkte Geschiebemessungen an der Donau bei Wien und deren bisherige Ergebnisse. Die Wasserwirtschaft, Heft 34, Wien 1931.

### *Mathematische Hilfsbücher, Tabellenwerke etc.:*

13. *Peirce, B. O.*: A short table of integrals. 3. Ed. Cop. by Ginn and company, 1929.
14. Dr. *Eugen Jahnke* und Dr. *Fritz Emde*: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. 2. Auflage. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1933.

## **Lebenslauf.**

Am 14. Mai 1904 wurde ich als Sohn des Albert und der Mileva Einstein-Marić in Bern als Bürger der Stadt Zürich geboren.

In Zürich besuchte ich die Primarschule und das kantonale Gymnasium, wo ich im Herbst 1922 die Maturitätsprüfung bestand. Anschließend studierte ich an der E. T. H. und erhielt Ende 1926 das Diplom eines Bauingenieurs. Hierauf arbeitete ich vier Jahre als Statiker in der Eisenbaufirma Aug. Klönne, Dortmund.

Im Frühling 1931 trat ich als Ingenieur in die Versuchsanstalt für Wasserbau an der E. T. H. in Zürich ein, wo ich heute noch tätig bin. Hier wurde auch die vorliegende Arbeit angeregt und es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle den beiden Herren Referenten, Herrn Prof. Dr. E. Meyer-Peter sowie Herrn Prof. Dr. G. Pólya, für die zahlreichen Anregungen bei der Durchführung der Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.