Sur les sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie clos

Author(s):
Siebenthal, Jean <<de>>

Publication Date:
1951

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000092445

Prom.-Nr. 1909

SUR LES SOUS-GROUPES FERMES CONNEXES D'UN GROUPE DE LIE CLOS

THÈSE

PRÉSENTÉE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE, ZURICH
POUR L'OBTENTION DU GRADE DE
DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

JEAN DE SIEBENTHAL

DE SAANEN (BERNE)

RAPPORTEUR: PROF. DR E. STIEFEL
CORAPPORTEUR: PROF. DR H. HOPF

1951

ORELL FÜSSLI ARTS GRAPHIQUES S.A.

ZURICH

Sur les sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie clos

Par JEAN DE SIEBENTHAL, Lausanne

Introduction

1. L'étude d'un groupe G ne peut s'achever si l'on n'en connaît pas les sous-groupes. Lorsque G est un groupe de Lie, on peut se proposer de rechercher tous les sous-groupes continus connexes de ce groupe ; en se plaçant au point de vue local, S. Lie a montré qu'on peut se ramener à un problème purement algébrique, théoriquement résoluble dès qu'on connaît les constantes de structure de G[1]. De façon plus précise, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est une base de l'anneau $R(G)$ du groupe G, avec la loi de composition $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} X_k$, on peut trouver tous les sous-groupes connexes de G qui sont des groupes de Lie au sens local en déterminant tous les sous-anneaux de $R(G)$, c'est-à-dire tous les sous-espaces R de $R(G)$ tels que $X, Y \in R$ entraînent $[X, Y] \in R$. Ainsi posé, le problème n'est pas facile à aborder.

Deux simplifications s'imposent d'emblée : d'abord, il suffit de chercher un sous-groupe dans chaque classe de sous-groupes conjugués ; ensuite, on peut se borner à la recherche des plus grands sous-groupes de G, cette expression désignant ici les sous-groupes propres connexes qui ne sont pas contenus dans un autre sous-groupe propre connexe de G.

2. Le problème envisagé est le suivant

(a) *Déterminer les sous-groupes fermés connexes d'un groupe de Lie clos* (ou compact).

Tout sous-groupe continu d'un groupe de Lie étant un groupe de Lie[2], on peut appliquer la méthode algébrique décrite ci-dessus, et déterminer

[1]) *S. Lie*, Theorie der Transformationsgruppen, t. I, p. 209 (Teubner, Leipzig 1888).

[2]) *E. Cartan*, La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs (Mém. Sc. Math., t. 42, 1930, p. 22).

tous les sous-anneaux R de $R(G)$. Cela fait, il reste à examiner si le sous-groupe fermé connexe engendré par R a même dimension que R (voir chapitre II, § 4).

Le problème algébrique basé sur les constantes de structure peut à son tour être réduit à un problème plus simple ; en effet, le groupe clos G supposé semi-simple est déterminé localement par ses paramètres angulaires[3]), qui sont $2m$ formes linéaires $\pm\mu_1(x), \ldots, \pm\mu_m(x)$, x étant un point d'un espace euclidien R^l à l dimensions, dont la métrique est donnée par la forme quadratique $\Sigma[\mu_i(x)]^2$; l'entier l est le rang du groupe. La figure constituée par l'espace R^l et par les plans $\mu_i(x) \equiv 0$ (mod. 1) est le diagramme de G[10]) ; le diagramme R^h d'un sous-groupe est alors un sous-diagramme du précédent. A ce point de vue, le problème s'énonce ainsi

(b) *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un sous-espace linéaire de R^l soit le support d'un sous-diagramme représentant un sous-groupe fermé connexe.*

Il convient de remarquer qu'un même sous-diagramme peut représenter plusieurs sous-groupes, naturellement isomorphes, dont il serait intéressant de savoir s'ils sont conjugués. Le groupe G n'est pas distingué des groupes clos qui lui sont localement isomorphes.

On peut donner au problème (b) un aspect plus intuitif ; soit $\vec{\mu}_i$ le vecteur de R^l défini par $\mu_i(x) = -\vec{\mu}_i \cdot \vec{x}$. Il existe dans l'ensemble $\pm\vec{\mu}_1, \pm\vec{\mu}_2, \ldots, \pm\vec{\mu}_m$ l vecteurs fondamentaux $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_l$ $(\vec{\varphi}_i \cdot \vec{\varphi}_j \leq 0)$ qui déterminent le diagramme et l'anneau $R(G)$; ils vérifient certaines conditions simples énoncées par *van der Waerden*[3]). Les h vecteurs $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$, fondamentaux pour le sous-groupe étudié, sont des combinaisons linéaires de $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_l$ qui vérifient encore les conditions citées. L'énoncé correspondant est

(c) *Soient $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \ldots, \vec{\varphi}_l$ l vecteurs fondamentaux du groupe clos G ; trouver h vecteurs $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ ayant les propriétés suivantes*

(1) $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ *sont des combinaisons linéaires de* $\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_l$.

(2) $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ *forment la figure fondamentale d'un groupe clos.*

---

[3]) *van der Waerden*, Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen (Math. Zeitschr., t. 37, 1933, p. 448).

(3) *Il existe dans G un sous-groupe fermé connexe admettant $\vec{\varrho}_1, \ldots, \vec{\varrho}_h$ comme figure fondamentale.*

3. A ma connaissance, le problème posé en (a) n'a jamais été abordé systématiquement au sens indiqué en (b) ou (c). Cela n'empêche nullement l'existence d'un grand nombre d'énoncés sur les sous-groupes des groupes de Lie clos ou non ; ces énoncés ouvrent diverses voies :

Les sous-groupes commutatifs maximums d'un groupe clos G ont fait l'objet d'études précises, par *E. Cartan* [4]) au point de vue infinitésimal, et par *H. Hopf* [5]) au point de vue global. La notion de sous-groupe commutatif maximum est d'ailleurs à la base de la représentation de G par son diagramme.

Les sous-groupes d'isotropie G_1 des espaces symétriques clos ont été étudiés de façon systématique par *E. Cartan* [6]), en partant des automorphismes involutifs de G dont ces sous-groupes sont caractéristiques. Je signale encore que *A. Malcev* [7]) a déterminé les sous-groupes semi-simples des groupes de Lie *complexes*, à l'aide des représentations linéaires de ces groupes.

La résolution complète du problème posé en (a) permettrait par exemple de faire une étude d'ensemble des espaces homogènes clos G/G_1, et de savoir en particulier si la classe des espaces symétriques clos contient la plupart des premiers ou non. Un autre problème pourrait être abordé : étant donné un groupe clos G et un sous-groupe fermé connexe G_1 de G, quand G_1 est-il homologue à zéro dans G (au sens de la topologie combinatoire) ? On sait d'après E. Cartan qu'un sous-groupe simple à trois paramètres n'est jamais homologue à zéro ; il en est de même de tout sous-groupe invariant fermé connexe.

Dans un autre ordre d'idées, je mentionne qu'on peut démontrer le théorème suivant : il n'y a dans le diagramme $D(G)$ d'un groupe clos G qu'un nombre fini de sous-diagrammes $D(G_1)$. De plus, toute chaîne de sous-groupes $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G$ peut être représentée dans $D(G)$ par une chaîne $D(G_1) \subset D(G_2) \subset \cdots \subset D(G)$; l'ensemble de ces chaînes est encore fini. Il serait peut-être intéressant d'étudier ces ensembles finis, et de savoir de quelles structures on pourrait les munir.

---

[4]) *E. Cartan,* La géométrie des groupes simples (Annali di Mat., t. 4, 1927, p. 212 à 214).

[5]) *H. Hopf,* Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen (Comment. Math. Helv., t. 13, 1940, p. 119—143).

[6]) *E. Cartan,* Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple (Ann. Ec. Norm. (3) XLIV, 1927, p. 345—467).

[7]) *A. Malcev,* On semi-simple subgroups of Lie groups (Bull. Acad. Sci. U. R. S. S., Sér. Math. 8, p. 143—174, 1944). D'après le résumé: Math. Rev., t. 6, p. 146.

4. Une note déjà parue indique que le problème (a) est résolu dans le cas où le rang du sous-groupe est égal au rang du groupe [8]). D'ailleurs, ce même problème est aussi résolu lorsque le rang du sous-groupe est égal à un [9]). Les pages qui suivent n'apportent pas la solution complète ; elles présentent un certain nombre de résultats généraux, appliqués à un cas particulier important.

Le chapitre I pose les notions classiques relatives à un groupe clos G, d'après *E. Stiefel* [10]) : diagramme, ensemble $\Sigma(G)$ des paramètres angulaires de G, groupe fini $\Phi(G)$ des automorphismes intérieurs de G qui laissent invariant un sous-groupe commutatif maximum donné ; j'introduis de plus la notion de diagonale du diagramme : $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_k = 0$; $\varphi_{k+1} = \cdots = \varphi_l \neq 0$, et la figure de Schläfli $\mathfrak{F}(G)$ qui représente la figure $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \ldots, \vec{\varphi}_l$ par l points reliés par certains traits.

Cela posé, j'associe (chapitre II) au groupe G et au sous-groupe G_1 un tableau

$$\mathrm{I} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 : \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1} \\ \varrho_2 : \beta_1, \ldots, \beta_{n_2} \\ \cdots \\ \varrho_h : \gamma_1, \ldots, \gamma_{n_h} \end{array} \right.$$

dans lequel $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_h$ sont h paramètres angulaires fondamentaux de G ; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1}$ sont les formes de $\Sigma(G)$ qui se réduisent à ϱ_1 dans $R^h \ldots$ Le tableau I est le principal objet de cette étude (§ 5, 6, 7). Dans ce même chapitre, je montre qu'il suffit de considérer les sous-groupes de G qui ne sont pas contenus dans un sous-groupe propre de rang maximum de G ; ce sont les sous-groupes (H). Alors, tout $\omega \in \Sigma(G)$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des formes du tableau I.

Les chapitres III et IV contiennent l'étude des sous-groupes remarquables dont le tableau I contient l paramètres angulaires fondamentaux et ceux-là seulement (sous-groupes $(H)_0$). La figure de Schläfli $\mathfrak{F}(G)$ doit être appliquée d'une certaine façon sur ce tableau (§ 9, 10, 11). La discussion fournit les résultats suivants : si le rang h de G_1 est au moins égal à 2, les seuls sous-groupes $(H)_0$ des groupes clos simples sont les sous-groupes caractéristiques d'automorphismes involutifs externes [11]),

[8]) *A. Borel et J. de Siebenthal*, C. R. Acad. Sc., t. 226, p. 1662—1664; voir aussi: Comment. Math. Helv., t. 23, 1949, p. 200—221.

[9]) *J. de Siebenthal*, C. R. Acad. Sc., t. 230, 1950, p. 910—912.

[10]) *E. Stiefel*, Comment. Math. Helv., t. 14, 1942, p. 350—380.

[11]) *E. Cartan*, cf. note 6.

à trois exceptions près : $G_2 \subset B_3$, $G_2 \subset A_6$, $G_2 \subset D_4$[12]). Les inclusions $C_4 \subset E_6$ et $D_h \subset A_{2h-1}$ ne rentrent pas dans le cas étudié.

Le cas où le rang du sous-groupe $(H)_0$ est égal à un est très différent : tout groupe clos G non abélien contient un sous-groupe $(H)_0$ de rang un, dit *sous-groupe principal*. Ce sous-groupe admet une définition indépendante du diagramme : un sous-groupe (H) de rang un est dit principal s'il contient un élément régulier dans G. Lorsque G est de l'un des types B_l $(l > 3)$, C_l $(l \geq 2)$, F_4, E_7, E_8, le sous-groupe principal est toujours maximum.

CHAPITRE I

Groupes clos

§ 1. Diagramme d'un groupe clos

1. *Toroïdes maximums.* Soit G un groupe de Lie clos connexe ; du point de vue topologique, G est un espace de Hausdorff bicompact[13]), ou compact au sens de N. Bourbaki. Pour étudier G, il convient de mettre en évidence les sous-groupes commutatifs maximums de G, ou toroïdes maximums T de G ; ils sont tous connexes et ont la même dimension (chaque T est un produit direct de l cercles) ; l'entier l est le rang du groupe G. On a les propriétés suivantes[14]) :

(a) *Etant donné un élément $a \in G$, il existe un toroïde maximum T qui contient a.*

(b) *Etant donnés deux toroïdes maximums T et T', il existe un élément $b \in G$ tel que $bTb^{-1} = T'$ (E. Cartan).*

(c) *Si a est un élément de G échangeable avec tous les éléments d'un toroïde maximum T de G, a appartient à T.*

2. *Groupe fini $\Phi(G)$.* Le normalisateur $N(T)$ du toroïde maximum T est un sous-groupe de G constitué par un nombre fini de composantes connexes ; l'une d'elles est précisément T, qui est un sous-groupe invariant de $N(T)$. Soit a un élément de $N(T)$; l'automorphisme intérieur $x \to axa^{-1}$, $x \in G$ induit une transformation de T sur lui-même ; toutes ces transformations forment un groupe fini $\Phi(G)$ isomorphe au groupe quotient $N(T)/T$. A chaque groupe clos G est ainsi associé un groupe fini $\Phi(G)$ de transformations du toroïde T.

[12]) Ces inclusions sont bien connues.

[13]) voir note 2 de l'introduction; cf. No. 9.

[14]) voir note 5 de l'introduction et *H. Hopf et H. Samelson* (Comment. Math. Helv., t. 13, No 4, Hilfssatz 4).