Zur Homologietheorie der zentralen Erweiterungen von Gruppen und von Lie-Algebren

Author(s):
Gut, Arthur

Publication Date:
1974

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000093334

Diss. Nr. 5164

Zur Homologietheorie der zentralen Erweiterungen von Gruppen und von Lie-Algebren

ABHANDLUNG

zur Erlangung
des Titels eines Doktors der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

ARTHUR GUT
dipl. Math. ETH
geboren am 4. November 1939
von Kyburg (Kt. Zürich)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. B. Eckmann, Referent
Prof. Dr. U. Stammbach, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1974

§9 Invarianten von $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$

In §7 haben wir für zentrale Erweiterungen $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ von Gruppen und Lie-Algebren mit Hilfe einer Präsentierung (P) (s.4.1) den Homomorphismus $\delta\colon H_3Q \longrightarrow (G_{ab} \otimes N)/\mu(\ker \chi_N)$ konstruiert; er ist natürlich und hängt nicht von der Wahl der Präsentierung ab. Diese Eigenschaft haben nun auch andere Abbildungen in §7, die dort samt ihren Objekten mit Hilfe der Präsentierung definiert worden sind. Um diesen Sachverhalt einheitlich zu beschreiben, betrachten wir eine beliebige Erweiterung $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ von Gruppen oder (K-freien) Lie-Algebren, die eine Präsentierung (P) besitzt; Objekte, Abbildungen oder ganze Sequenzen wollen wir als <u>Invarianten der Erweiterung</u> bezeichnen, falls sie nicht von der Präsentierung abhängen und bezüglich Morphismen

$$\begin{array}{ccccc} N_1 & \rightarrowtail & G_1 & \twoheadrightarrow & Q_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N_2 & \rightarrowtail & G_2 & \twoheadrightarrow & Q_2 \end{array}$$

von Erweiterungen natürlich sind. Es gilt der folgende Satz:

Satz 9.

1) $\frac{S}{R[S,S]}$ und $\frac{[S,S]\cap R}{[S,R]}$ sind die Invarianten N_{ab} bzw. H_2N.

2) Die lange exakte Sequenz von $Tor_*^Q(\mathbb{Z},-)$ bezüglich

$$\frac{[S,S]\cap R}{[S,R]} \hookrightarrow \frac{R}{[S,R]} \twoheadrightarrow \frac{R}{[S,S]\cap R}$$

ist eine Invariante, ausser in der Dimension 0.

3) Die lange exakte Sequenz von $Tor_*^Q(\mathbb{Z},-)$ bezüglich

$$\frac{R}{[S,S]\cap R} \rightarrowtail \frac{S}{[S,S]} \twoheadrightarrow \frac{S}{R[S,S]}$$

ist isomorph zur Eckmann-Stammbach-Sequenz, ausser in der Dimension 0.

Bei den Lie-Algebren verstehen wir unter $R[S,S]$ die Summe $R+[S,S]$, und es ist in 2) und 3) der Funktor $Tor_*^Q(K,-)$ zu verwenden.

Bemerkung zu 1). Für Lie-Algebren ist der Isomorphismus $\frac{[S,S]\cap R}{[S,R]} \cong H_2N$ nicht eine selbstverständliche Folge der Fünf-Term-Sequenz; dies wäre nur so, wenn S eine freie Lie-Algebra ist, was aber nicht der Fall zu sein braucht.

Bemerkungen zu 2) und 3). Im nachfolgenden Beweis von Satz 9 wird jeweils nur das zweite Argument von $Tor_*^Q(-,-)$ verändert; die Invarianz gilt deshalb auch für die langen exakten Sequenzen von $Tor_*^Q(M,-)$ für einen beliebigen Q-Rechtsmodul M. (Den Morphismen von Erweiterungen muss natürlich die Modulstruktur von M angepasst werden.) Der zu 3) gehörende Isomorphismus zur E.S.-Sequenz mit Koeffizienten in M besteht, wenn M über dem Grundring ($\mathbb{Z}$ bzw. K) projektiv ist.(Dann ist die absolute Homologie gleich der relativen, also die Tor-Sequenz in 3) die E.S.-Sequenz.)

<u>Beweis von Satz 9</u>. Für Gruppen und Lie-Algebren ist der Beweis gleich, weil wir nie explizit mit Elementen rechnen.

Bildet man das Tensorprodukt von $\mathbb{Z}Q$ mit $R_{ab} \rightarrowtail \mathbb{Z}G\otimes_F IF \twoheadrightarrow IG$, so erhält man die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^G(\mathbb{Z}Q, IG) \longrightarrow \mathbb{Z}Q\otimes_G R_{ab} \longrightarrow \mathbb{Z}Q\otimes_F IF \longrightarrow \mathbb{Z}Q\otimes_G IG \longrightarrow 0,$$

oder anders geschrieben

$$H_2N \rightarrowtail \frac{R}{[S,R]} \longrightarrow \mathbb{Z}Q\otimes_F IF \twoheadrightarrow \mathbb{Z}Q\otimes_G IG.$$

Unter Verwendung der Sequenz (*) in §8 erhält man hieraus die kurze exakte Sequenz

$$H_2N \rightarrowtail \frac{R}{[S,R]} \twoheadrightarrow \frac{R}{[S,S]\cap R} \quad ;$$

also gilt $H_2N \cong \dfrac{[S,S]\cap R}{[S,R]}$. Der erste Teil von 1) ist trivial.

Zum Beweis von 3) benützen wir die Sequenzen und das Diagramm am Anfang von §8; wir haben die folgenden kommutativen exakten Diagramme von Q-Linksmoduln:

$$\begin{tikzcd}
\frac{R}{[S,S]\cap R} \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & \mathbb{Z}Q\otimes_F IF \arrow[r, two heads] \arrow[d, "="] & \mathbb{Z}Q\otimes_G IG \arrow[d, two heads] \\
S_{ab} \arrow[r, tail] & \mathbb{Z}Q\otimes_F IF \arrow[r, two heads] & IQ
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\frac{R}{[S,S]\cap R} \arrow[r, tail] \arrow[d, "="'] & S_{ab} \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & N_{ab} \arrow[d, tail] \\
\frac{R}{[S,S]\cap R} \arrow[r, tail] & \mathbb{Z}Q\otimes_F IF \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathbb{Z}Q\otimes_G IG \arrow[d, two heads] \\
 & IQ \arrow[r, "="] & IQ
\end{tikzcd} \quad .$$

Die Homomorphismen in diesen zwei Diagrammen induzieren die in 3) erwähnte Tor-Sequenz und die E.S.-Sequenz samt einem Isomorphismus zwischen ihnen; wenden wir nämlich $\mathbb{Z}\otimes_Q$ - auf die obigen Diagramme an, so erhalten wir bei geeigneter Anordnung der Homomorphismen für $n\geqslant 1$ den folgenden Isomorphismus von Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Tor}^Q_{n+1}(\mathbb{Z},N_{ab}) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}^Q_{n+1}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}Q\otimes_G IG) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}^Q_{n+1}(\mathbb{Z},IQ) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}^Q_n(\mathbb{Z},N_{ab}) \\
\downarrow{=} & & \downarrow{\cong} & & \downarrow{\cong} & & \downarrow{=} \\
\mathrm{Tor}^Q_{n+1}(\mathbb{Z},N_{ab}) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}^Q_n\left(\mathbb{Z},\frac{R}{[S,S]\cap R}\right) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}^Q_n(\mathbb{Z},S_{ab}) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}^Q_n(\mathbb{Z},N_{ab}).
\end{array}$$

Damit ist 3) bewiesen.

Um 2) zu beweisen, betrachten wir einen Homomorphismus

$$\lambda:\quad \begin{array}{ccccc}
N_1 & \rightarrowtail & G_1 & \twoheadrightarrow & Q_1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
N_2 & \rightarrowtail & G_2 & \twoheadrightarrow & Q_2
\end{array}$$

von zwei Erweiterungen, welche Präsentierungen (P_i) (mit Objekten F_i,R_i,S_i) für $i=1,2$ besitzen. λ lässt sich (event. auf mehrere Arten) zu einem Morphismus $(P_1)\longrightarrow(P_2)$ hochheben, der einen Morphismus von kurzen exakten Sequenzen induziert:

$$(**)\qquad \begin{array}{ccccc}
\dfrac{[S_1,S_1]\cap R_1}{[S_1,R_1]} & \rightarrowtail & \dfrac{R_1}{[S_1,R_1]} & \twoheadrightarrow & \dfrac{R_1}{[S_1,S_1]\cap R_1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\dfrac{[S_2,S_2]\cap R_2}{[S_2,R_2]} & \rightarrowtail & \dfrac{R_2}{[S_2,R_2]} & \twoheadrightarrow & \dfrac{R_2}{[S_2,S_2]\cap R_2}.
\end{array}$$

Man sieht hieraus: Falls die in Satz 9, 2) erwähnte Tor-Sequenz für eine vorgegebene Erweiterung nicht von der Präsentierung abhängt, dann ist sie natürlich bezüglich Homomorphismen von Erweiterungen. Um nun zu zeigen, dass diese Tor-Sequenz unabhängig von der Präsentierung ist, wählen wir zu $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ zwei Präsentierungen (P_1) und (P_2) und heben die Identität der Erweiterung zu einem Morphismus $(P_1) \longrightarrow (P_2)$ hoch. Wir bekommen dann das Diagramm (**) für den Fall λ= Identität. Wir schreiben die kürzere Bezeichnung

$$(***) \qquad \begin{tikzcd} A_1' \arrow[r, tail] \arrow[d] & A_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A_1'' \arrow[d] \\ A_2' \arrow[r, tail] & A_2 \arrow[r, two heads] & A_2'' \end{tikzcd}$$

für das Diagramm (**) und erhalten das exakte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tor}_{n+1}^Q(\mathbb{Z},A_1'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_n^Q(\mathbb{Z},A_1') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_n^Q(\mathbb{Z},A_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_n^Q(\mathbb{Z},A_1'') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_{n-1}^Q(\mathbb{Z},A_1') \arrow[d] \\ \mathrm{Tor}_{n+1}^Q(\mathbb{Z},A_2'') \arrow[r] & \mathrm{Tor}_n^Q(\mathbb{Z},A_2') \arrow[r] & \mathrm{Tor}_n^Q(\mathbb{Z},A_2) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_n^Q(\mathbb{Z},A_2'') \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{n-1}^Q(\mathbb{Z},A_2'). \end{tikzcd}$$

Wegen (***)=(**) und wegen 3) und 1) lässt sich dieses für $n \geqslant 1$ so schreiben:

$$\begin{tikzcd} \hat{H}_{n+2}G \arrow[r] \arrow[d, "="] & H_n(Q,H_2N) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Tor}_n^Q\left(\mathbb{Z}, \frac{R_1}{[S_1,R_1]}\right) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{H}_{n+1}G \arrow[r] \arrow[d, "="] & H_{n-1}(Q,H_2N) \arrow[d, "="] \\ \hat{H}_{n+2}G \arrow[r] & H_n(Q,H_2N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_n^Q\left(\mathbb{Z}, \frac{R_2}{[S_2,R_2]}\right) \arrow[r] & \hat{H}_{n+1}G \arrow[r] & H_{n-1}(Q,H_2N). \end{tikzcd}$$