DISS. NR. 4146

ÜBER DAS VERALLGEMEINERTE DIRICHLETPROBLEM FÜR LINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ABHANDLUNG
ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES
DOKTORS DER MATHEMATIK
DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

VORGELEGT VON

PETER HESS
dipl. Math. ETH
geb. 1. September 1941
von Mettmenstetten (Kanton Zürich)

Angenommen auf Antrag von
PROF. DR. A. HUBER, REFERENT
PROF. DR. A. PFLUGER, KORREFERENT

HELSINKI 1969
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

Einleitung

1. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir das verallgemeinerte Dirichletproblem für eine allgemeine (nicht notwendigerweise formal selbstadjungierte oder elliptische) lineare partielle Differentialgleichung.

2. Rolf Nevanlinna hat in Vorträgen 1952—1953 sowie in seinem Artikel [23] auf den engen Zusammenhang zwischen dem verallgemeinerten Dirichletproblem für eine (nichtelliptische) formal selbstadjungierte Differentialgleichung und dem Problem der Konstruktion einer Projektion auf einen Unterraum eines Hilbertraumes in bezug auf ein zweites »indefinites» Hermitesches Skalarprodukt hingewiesen. Als erste Anwendung der von Nevanlinna ([22]—[26]) entwickelten Theorie der indefiniten Skalarprodukte hat I. S. Louhivaara ([14] und [15]) Randwertprobleme für eine spezielle gleichmässig elliptische formal selbstadjungierte Differentialgleichung behandelt. Entsprechende Resultate für allgemeinere gleichmässig elliptische formal selbstadjungierte Differentialgleichungen wurden später mit ähnlichen Methoden von S. Hildebrandt [8] im Anschluss an gewisse Untersuchungen von E. Hölder erhalten. Louhivaara gab in [17] eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Lösung des verallgemeinerten Dirichletproblems für nichtelliptische formal selbstadjungierte Gleichungen; ein sowohl notwendiges als auch hinreichendes Kriterium für dasselbe Problem leitete dann F. E. Browder [4] her.

Die erste Veröffentlichung über nicht formal selbstadjungierte (nichtelliptische) Differentialgleichungen unter Verwendung verwandter Methoden stammt von W. Littman [13].

Diese Resultate bezogen sich alle auf Differentialgleichungen der Ordnung 2 oder $2m$, die eine (in einem geeigneten Funktionenraum) beschränkte »Dirichletsche» Bilinearform erzeugen. In einer weiteren Arbeit [5] versuchte Browder, sich von diesen Einschränkungen zu befreien; er betrachtete nicht formal selbstadjungierte Gleichungen beliebiger Ordnung r.

Ju. P. Ginzburg und I. S. Iohvidov leiteten in ihrem Übersichtsartikel [7] eine neue Bedingung für die Existenz einer Projektion in bezug auf ein indefinites, nicht notwendigerweise Hermitesches Skalarprodukt her. Einer Idee von S. Hildebrandt und E. Wienholtz [9] folgend, kam S. Stenholm [28] zu ähnlichen Bedingungen.

Wegen einer Darstellung der Entwicklung der Nevanlinnaschen Theorie der indefiniten Skalarprodukte sei auf [19] verwiesen.

3. In den Kapiteln 1—3 dieser Arbeit wird das verallgemeinerte Dirichletproblem für eine nicht notwendigerweise formal selbstadjungierte lineare partielle Differentialgleichung beliebiger Ordnung r mit Randdaten ebenfalls beliebiger Ordnung t behandelt. Das sehr allgemein formulierte verallgemeinerte Dirichletproblem (Problem I) wird in eine Fragestellung (Problem III) in dem Hilbertraum der Funktionen mit homogenen Randdaten umgeformt. Für die Existenz einer Lösung von Problem III wird notwendig und hinreichend sein, dass ein gewisses Element in der Wertemenge eines dicht definierten abgeschlossenen linearen Operators des betreffenden Hilbertraumes enthalten ist. In Kapitel 2 wird deswegen die Wertemenge eines linearen Operators charakterisiert; die dabei vorkommenden Resultate verfeinern Ergebnisse von Browder [4] und Stenholm [28]. In Kapitel 3 können wir dann ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Lösbarkeit des verallgemeinerten Dirichletproblems angeben.

In Kapitel 4 werden die Resultate aus den früheren Kapiteln auf (nicht formal selbstadjungierte) gleichmässig stark elliptische Differentialgleichungen angewandt, wobei auch Differentialausdrücke mit unbeschränkten Koeffizienten zugelassen werden. Wir beweisen den bekannten Existenzsatz (den Fredholmschen Alternativsatz).

Die Frage, ob man mit dem allgemeinen Kriterium von Kapitel 3 noch andere konkrete Klassen von Differentialgleichungen behandeln kann, bleibt hier offen.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Professor Dr. I. S. Louhivaara. Für sein wohlwollendes Interesse und seine freundliche Hilfe bei der Abfassung des Manuskriptes sei ihm an dieser Stelle herzlichst gedankt. Ich möchte auch den Herren Professoren Dr. A. Huber und Dr. A. Pfluger für die wertvollen kritischen Bemerkungen beim Durchlesen der Arbeit meinen verbindlichsten Dank aussprechen.