Thèse no 4670

CATEGORIES AVEC MODELES, PREFAISCEAUX ET COALGEBRES

Thèse
présentée
à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich
pour l'obtention du
grade de Docteur ès sciences mathématiques

par

CLAUDE GRONSTEIN
mathématicien dipl. EPF
né le 11. novembre 1942
de Genève

acceptée sur proposition
du professeur B. Eckmann, rapporteur
du professeur M. Tierney, corapporteur

aku-Fotodruck
Zürich
1971

suffisantes en nous laissant naturellement guider par les conditions nécessaires que nous venons d'obtenir.

3.9. **Conditions de "stabilité" pour les pullbacks**

Soit $\underline{B}$ une catégorie ayant des colimites.
Rappelons que le foncteur F: $\underline{A}\to\underline{B}$ est sup-dense si $\forall B \in \underline{B}, \exists$ un diagramme $D:\underline{J}\to\underline{A}$ tel que $B = \varinjlim FA_j$.
On sait par ailleurs que les conditions $\bar{s}$ pleinement fidèle et $\bar{I}$ sup-dense sont équivalentes.
Nous sommes maintenant en mesure de formuler les conditions suivantes:
On va voir qu'il suffit de deux conditions sur la catégorie $\underline{A}_G$, qui se laissent même exprimer dans $\underline{A}$.
Remarquons encore que puisque $\underline{A}_G$ a un élément final, c'est-à-dire un élément (A,θ) tel que tout élément de $\underline{A}_G$ s'envoie dans (A,θ), la notion de produit fini est un cas particulier de celle du pullback.
On n'a plus alors qu'une seule condition.

Toute coalgèbre (A,θ) a donc une représentation canonique $(A,\theta)=\varinjlim \bar{I}M_i$, la colimite étant prise sur <u>toutes</u> les coalgèbres de la forme $\bar{I}M$ au-dessus de (A,θ)).

Considérons un diagramme quelconque du type

$(C,\gamma)\to(B,\beta)\leftarrow(A,\alpha)$ dans $\underline{A}_G$

et supposons que les objets (C,γ) et (A,α) aient une représentation comme colimite(en plus de leur représentation canonique), par exemple:

$(A,\alpha) = \varinjlim \bar{I}Mj,\ j\in J$

$(C,\gamma) = \varinjlim \bar{I}Nk,\ k\in K$

(les catégories d'indices J, K sont cofiltrantes quelconques.)

On peut alors former le diagramme inductif suivant: les objets sont les coalgèbres du type $\bar{I}M$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bar{I}M \arrow[r] \arrow[d] & (A,\alpha) \arrow[d] \\
(C,\gamma) \arrow[r] & (B,\beta)
\end{tikzcd}$$

et telles que $\bar{I}M$ <u>apparaisse effectivement</u> dans le diagramme de (A,α) et de (C,γ).

et les morphismes ceux rendant commutatif: $(\Leftrightarrow \forall \bar{I}\alpha : \bar{I}N \to \bar{I}M)$

$$\begin{tikzcd}
\bar{I}N \arrow[dr] & & \\
& \bar{I}M \arrow[r] \arrow[d] & (A,\alpha) \arrow[d, dash] \\
& (C,\gamma) \arrow[r] & (B,\beta)
\end{tikzcd}$$

Prenons alors la colimite de ce diagramme (dans $\underline{A}_G$ elle existe) et soit (P,p) cette colimite.

La condition de stabilité est alors la suivante:

on remplace les diagrammes donnés de (A,α) et (C,γ) par leurs diagrammes canoniques; ceci entraîne, en général unemodification du diagramme canonique au-dessus de

$$\begin{array}{ccc} & & (A,\alpha) \\ & & \downarrow \\ (C,\gamma) & \rightarrow & (B,\beta) \end{array}$$

donc une modification de la colimite; soit (Q,q) la nouvelle colimite. On a bien entendu un morphisme canonique de $(P,p) \xrightarrow{\chi} (Q,q)$ puisque (Q,q) n'est rien d'autre que le pullback de $(A,\alpha) \rightarrow (B,\beta) \leftarrow (C,\gamma)$!
On dira que $\underline{A}_G$ satisfait la condition de stabilité pour les pullbacks si χ est un isomorphisme.

3.10. Remarque. On peut "descendre" cette condition en une condition sur $\underline{A}$, en ne choisissant pour $A \rightarrow B \leftarrow C$ que des objets qui restent "invariants" par la modification du diagramme faite ci-dessus.
(La restriction est nécessaire puisque I n'est pas sup-dense)

3.11. On peut formuler de la même manière une condition de stabilité pour les produits finis, et faire la même remarque que ci-dessus.

3.12. Théorème Pour que la catégorie $\underline{A}_G$ soit la catégorie des faisceaux pour la topologie définie sous 3.3. , il suffit que $\underline{A}_G$ ait les propriétés de stabilité pour les pullbacks et les produits finis définies sous 3.10 et 3.11. (d'après la remarque de 3.10 ce sont des conditions sur $\underline{A}$ seulement!)

<u>Preuve</u>. a) la propriété de 3.10 entraîne que $\bar{r}$ conserve les pullbacks

Soit donc $F=\varinjlim(-,M_k)$, $G=\varinjlim(-,N_l)$, $H=\varinjlim(-,P_z)$;

Formons $K = F \underset{H}{\times} G = \varinjlim(-,Q_m)$,

et remarquons que, par construction, un morphisme $(-,Q_m)\to(-,Q_{m'})$ du diagramme canonique de K est au-dessus de $K=F \underset{H}{\times} G$, donc aussi au-dessus de $F\to H$ et de $G\to H$ en même temps. Si l'on prend l'image de K par $\bar{r}$ on aura une représentation de $\bar{r}K=(A,\theta)=\varinjlim \bar{I}Q_m$ puisque $\bar{r}$ commute avec les colimites et que $\bar{r}h = \bar{I}$.

Mais il faut remarquer qu'on n'obtient pas ainsi la représentation canonique comme colimite provenant du fait que $\bar{I}$ est sup-dense ($\Longleftrightarrow$ $\bar{s}$ fidèlement plein).

Cette représentation-là comprend <u>tous</u> les morphismes $\bar{I}Q_m\to\bar{r}K=\bar{r}(F \underset{H}{\times} G)$.

Formons $\bar{r}F \underset{\bar{r}H}{\times} \bar{r}G=(B,\beta)$ dans $\underline{A}_G$ et écrivons-le sous forme canonique:

$(B,\beta) = \varinjlim \bar{I}X_g = \bar{r}\varinjlim(-,X_g) = \bar{r}X$.

Appelons δ: $\bar{r}(F \underset{H}{\times} G)\to\bar{r}X$. Il faut montrer que δ est un isomorphisme.

Si l'on considère les $\bar{I}Q_m \bullet \underline{A}_G$ avec Q_m apparaissant dans le diagramme de K ils rendent naturellement commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} \bar{I}Q_m & \longrightarrow & \lim \bar{I}M_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim \bar{I}N_l & \longrightarrow & \lim \bar{I}P_j \end{array}$$

car ils sont au-dessus de $\bar{r}K$ et que

$$\begin{array}{ccc} \bar{r}K & \longrightarrow & \bar{r}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{r}G & \longrightarrow & \bar{r}H \end{array}$$

est commutatif.

Le critère de "stabilité" nous livre immédiatement l'isomorphisme cherché puisque si l'on prend la colimite de tous les $\bar{I}Q_m$ rendant commutatif le diagramme $\begin{array}{ccc} \bar{I}Q_m & \longrightarrow & \bar{r}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{r}G & \longrightarrow & \bar{r}H \end{array}$

on obtient par définition

$$\bar{r}F \underset{\bar{r}H}{\times} \bar{r}G .$$

b) <u>Preuve du théorème</u>.

En utilisant [Verdier II p.17] on voit qu'il suffit de montrer que l'ensemble des morphismes de $(\underline{M}^o, \mathrm{Ens})$ rendus invertibles par $\bar{r}$, possède un calcul de fractions à droite; de plus dans la vérification des conditions du calcul des fractions à droite il nous suffira de vérifier les duales des conditions 3 et 4 de 2.2.c) puisque les conditions 1 et 2 sont auto-duales et que l'on sait déjà que Σ possède un calcul des fractions à gauche.

<u>Vérification de l'axiome 3.</u>

On se donne deux foncteurs $F' \xrightarrow{s} F$ et $G \xrightarrow{u} F$ au-dessus de F, avec $s \in \Sigma$. Il s'agit de montrer qu'il existe un foncteur G' et des morphismes $G' \xrightarrow{u'} F'$ et $G' \xrightarrow{t} G$, avec $t \in \Sigma$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r] \arrow[d] & F' \arrow[d] \\ G \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

Pour cela formons d'abord le pullback $F' \underset{F}{\times} G = H$ dans $(\underline{M}^o, \mathcal{E}ns)$ puis appliquons $\bar{r}$. On voit alors sur le diagramme de $\underline{A}_G$ suivant:

$$\begin{tikzcd} \bar{r}H \arrow[dr] & & \\ & \bar{r}G \underset{\bar{r}F}{\times} \bar{r}F' \arrow[r] \arrow[d] & \bar{r}F' \arrow[d] \\ & \bar{r}G \arrow[r] & \bar{r}F \end{tikzcd}$$

qu'il"faudra" choisir $t : G' \longrightarrow G$ de sorte que

$\bar{r}G' \cong \bar{r}G \underset{\bar{r}F.}{\times} \bar{r}F'.$

L'hypothèse, 1) $\Rightarrow$ $\bar{r}$ conserve les pullbacks

$\bar{r}G \underset{\bar{r}F}{\times} \bar{r}F' = \bar{r}\ (G \underset{F}{\times} F') = \bar{r}H$

$\Longrightarrow$ $G' = H.$

<u>Vérification de l'axiome 4</u>

On se donne cette fois la situation suivante:

$F \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} G \xrightarrow{t} G'$ avec $tf = tg$ et $t \in \Sigma$, et il s'agit de trouver $F' \xrightarrow{s} F$ avec $s \in \Sigma$ rendant commutatif le diagramme:

$$F' \xrightarrow{s} F \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} G \quad .$$

Par hypothèse on a:

$$\bar{r}(tf) = \bar{r}(tg),$$

$t \in \Sigma$ est équivalent à $\bar{r}(t)$ iso, donc $\bar{r}(f) = \bar{r}(g)$.

On sait qu'un égalisateur peut toujours se mettre sous la forme d'un pullback, (voir par exemple [Pareigis]), on peut donc décrire la situation au moyen du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\bar{r}F \arrow[dr, "a"] & & \\
& \bar{r}F \times_{\bar{r}F \times \bar{r}G} \bar{r}F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & \bar{r}F \arrow[d, "{(1,\bar{r}f)}"] \\
& \bar{r}F \arrow[r, "{(1,\bar{r}g)}"] & \bar{r}F \times \bar{r}G
\end{tikzcd}$$

où $(1,\bar{r}g) \cong (1,\bar{r}f)$. De plus, p sera un iso, car par définition du pullback, il existe $a:\bar{r}F \longrightarrow \bar{r}F \times_{\bar{r}F \times \bar{r}G} \bar{r}F$ tel que $pa = 1$, et du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\bar{r}F \times_{\bar{r}F \times \bar{r}G} \bar{r}F \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "1"'] & \bar{r}F \arrow[d, "a"] \arrow[dr, "1"] & \\
& \bar{r}F \times_{\bar{r}F \times \bar{r}G} \bar{r}F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & \bar{r}F \arrow[d] \\
& \bar{r}F \arrow[r] & \bar{r}F \times \bar{r}G
\end{tikzcd}$$

on tire que $ap = 1$.

Ici, on "devra" donc choisir F' de sorte que

$$\bar{r}F' = \bar{r}F \times_{\bar{r}F \times \bar{r}G} \bar{r}F \xrightarrow{\sim} \bar{r}F.$$

l'hypothèse 2) $\Rightarrow \bar{r}F \times \bar{r}G = \bar{r}\,(F\times G)$

et 1) $\Rightarrow \underbrace{\bar{r}F \times \bar{r}F}_{\bar{r}(F\times G)} = \bar{r}^{\,\cdot\cdot}\underbrace{(F\times F)}_{F\times G} = \bar{r}F'$

3.13. Nous revenons maintenant au cas général où $\underline{A}_G$ n'est pas obligatoirement une catégorie de faisceaux.

Le théorème suivant qui est le but de ce travail, nous montre que la caractérisation, à partir du modèle exclusivement, des foncteurs qui proviennent des coalgèbres est semblable à celle donnée dans [Verdier] des préfaisceaux qui sont des faisceaux pour une topologie de Grothendieck.

<u>Théorème</u> Pour que $F: \underline{M}^o \to Ens$ provienne d'une coalgèbre il faut et il suffit que pour toute paire de diagrammes inductifs de $\underline{M}$, $(M_k)_{k\in K}$ et $(N_j)_{j\in J}$, avec J et K cofiltrantes, tels que:

$$\varinjlim IM_k \xleftarrow{\sim} \varinjlim IN_j$$

on ait que:

$$\varprojlim FM_k \twoheadrightarrow \varprojlim FN_j$$

est une surjection.

<u>Remarque</u>. Le fait qu'on exige ici une surjection alors que dans l'analogue pour les faisceaux il faut une bijection est dû au fait qu'on a ici un calcul des fractions à gauche.

<u>Preuve</u>: a) <u>la suffisance</u>:

D'après le théorème 1), il suffit de montrer que pour tout $\delta: G \to H$ tel que (1) $\bar{r}\delta : \bar{r}G \xrightarrow{\sim} \bar{r}H$ est iso

$(\delta, F) : (H,F) \longrightarrow (G,F)$ est une surjection.

Comme L reflète les isomorphismes on peut remplacer $\bar{r}\sigma$ iso par $r\sigma$ iso. En écrivant alors:

$$G = \varinjlim\, (-,M_k)$$

$$H = \varinjlim\, (-,N_j)$$

la condition (1) devient

$$rG = \varinjlim\, IM_k \longrightarrow rH = \varinjlim\, IN_j \quad \text{est iso.}$$

Par hypothèse on a alors que:

$$\varprojlim\, FM_k \longleftarrow \varprojlim\, FN_j \quad \text{est une surjection.}$$

On applique alors Yoneda, ce qui donne:

$$\varprojlim\, ((-,M_k),\, F) \twoheadleftarrow \varprojlim((-,N_j),\, F), \text{ ou encore:}$$

$$(\varinjlim(-,M_k),\, F) \twoheadleftarrow (\varinjlim(-,N_j),\, F) \text{ et finalement}$$

$$(G,F) \twoheadleftarrow (H,F) \quad \text{est une surjection.}$$

b)<u>la nécessité</u>

Elle est évidente si on écrit

$$F \cong \bar{s}(A,\theta) = (\bar{I}(-),(A,\theta)).$$

<u>Remarque</u>: Lorsque $\underline{M}$ a des pullbacks et que I commute avec les pullbacks on peut appliquer le lemme I2.12 de [Verdier] et remplacer les $\varprojlim FM_i$ par des égalisateurs.