

# Catégories avec modèles, préfaisceaux et coalgèbres

**Author(s):**
Gronstein, Claude

**Publication Date:**
1971

**Permanent Link:**
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000093450

Thèse no 4670

# CATEGORIES AVEC MODELES, PREFAISCEAUX ET COALGEBRES

Thèse
présentée
à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich
pour l'obtention du
grade de Docteur ès sciences mathématiques

par

CLAUDE GRONSTEIN
mathématicien dipl. EPF
né le 11. novembre 1942
de Genève

*acceptée sur proposition*
du professeur B. Eckmann, rapporteur
du professeur M. Tierney, corapporteur

aku-Fotodruck
Zürich
1971

suffisantes en nous laissant naturellement guider par les conditions nécessaires que nous venons d'obtenir.

## 3.9. Conditions de "stabilité" pour les pullbacks

Soit $\underline{B}$ une catégorie ayant des colimites.

Rappelons que le foncteur $F: \underline{A} \to \underline{B}$ est <u>sup-dense</u> si $\forall B \in \underline{B}, \exists$ un diagramme $D: \underline{J} \to \underline{A}$ tel que $B = \varinjlim FA_j$.

On sait par ailleurs que les conditions $\bar{s}$ pleinement fidèle et $\bar{I}$ sup-dense sont équivalentes.

Nous sommes maintenant en mesure de formuler les conditions suivantes:

On va voir qu'il suffit de deux conditions sur la catégorie $\underline{A}_G$, qui se laissent même exprimer dans $\underline{A}$.

Remarquons encore que puisque $\underline{A}_G$ a un élément final, c'est-à-dire un élément $(A,\theta)$ tel que tout élément de $\underline{A}_G$ s'envoie dans $(A,\theta)$, la notion de produit fini est un cas particulier de celle du pullback.

On n'a plus alors qu'une seule condition.

Toute coalgèbre $(A,\theta)$ a donc une représentation canonique $(A,\theta)=\varinjlim \bar{I}M_i$, la colimite étant prise sur <u>toutes</u> les coalgèbres de la forme $\bar{I}M$ au-dessus de $(A,\theta)$ ).

Considérons un diagramme quelconque du type

$(C,\gamma)\rightarrow(B,\beta)\leftarrow(A,\alpha)$ dans $\underline{A}_G$

et supposons que les objets $(C,\gamma)$ et $(A,\alpha)$ aient une représentation comme colimite(en plus de leur représentation canonique), par exemple:

$(A,\alpha) = \varinjlim \bar{I}M_j,\ j\in J$

$(C,\gamma) = \varinjlim \bar{I}N_k,\ k\in K$

(les catégories d'indices J, K sont cofiltrantes quelconques.)

On peut alors former le diagramme inductif suivant: les objets sont les coalgèbres du type $\bar{I}M$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bar{I}M \arrow[r] \arrow[d] & (A,\alpha) \arrow[d] \\
(C,\gamma) \arrow[r] & (B,\beta)
\end{tikzcd}$$

et telles que $\bar{I}M$ <u>apparaisse effectivement</u> dans le diagramme de $(A,\alpha)$ et de $(C,\gamma)$.

et les morphismes ceux rendant commutatif: $(\Longleftrightarrow \forall\, \bar{I}_\alpha : \bar{I}N \rightarrow \bar{I}M)$

$$\begin{tikzcd}
\bar{I}N \arrow[dr] & & \\
& \bar{I}M \arrow[r] \arrow[d] & (A,\alpha) \arrow[d, no head] \\
& (C,\gamma) \arrow[r] & (B,\beta)
\end{tikzcd}$$

Prenons alors la colimite de ce diagramme (dans $\underline{A}_G$ elle existe) et soit $(P,p)$ cette colimite.

La condition de stabilité est alors la suivante:

on remplace les diagrammes donnés de $(A,\alpha)$ et $(C,\gamma)$ par leurs diagrammes canoniques; ceci entraîne, en général unemodification du diagramme canonique au-dessus de

$$\begin{array}{ccc} & & (A,\alpha) \\ & & \downarrow \\ (C,\gamma) & \rightarrow & (B,\beta) \end{array}$$

donc une modification de la colimite; soit $(Q,q)$ la nouvelle colimite. On a bien entendu un morphisme canonique de $(P,p) \xrightarrow{\chi} (Q,q)$ puisque $(Q,q)$ n'est rien d'autre que le pullback de $(A,\alpha) \rightarrow (B,\beta) \leftarrow (C,\gamma)$!

On dira que $\underline{A}_G$ satisfait la condition de stabilité pour les pullbacks si $\chi$ est un isomorphisme.

3.10. Remarque. On peut "descendre" cette condition en une condition sur $\underline{A}$, en ne choisissant pour $A \rightarrow B \leftarrow C$ que des objets qui restent "invariants" par la modification du diagramme faite ci-dessus.
(La restriction est nécessaire puisque I n'est pas sup-dense)

3.11. On peut formuler de la même manière une condition de stabilité pour les produits finis, et faire la même remarque que ci-dessus.

3.12. Théorème Pour que la catégorie $\underline{A}_G$ soit la catégorie des faisceaux pour la topologie définie sous 3.3. , il suffit que $\underline{A}_G$ ait les propriétés de stabilité pour les pullbacks et les produits finis définies sous 3.10 et 3.11. (d'après la remarque de 3.10 ce sont des conditions sur $\underline{A}$ seulement!)

**Preuve.** a) la propriété de 3.10 entraîne que $\bar{r}$ conserve les pullbacks

Soit donc $F = \varinjlim (-, M_k)$, $G = \varinjlim (-, N_l)$, $H = \varinjlim (-, P_z)$;

Formons $K = F \underset{H}{\times} G = \varinjlim (-, Q_m)$,

et remarquons que, par construction, un morphisme $(-, Q_m) \to (-, Q_{m'})$ du diagramme canonique de K est au-dessus de $K = F \underset{H}{\times} G$, donc aussi au-dessus de $F \to H$ et de $G \to H$ en même temps. Si l'on prend l'image de K par $\bar{r}$ on aura une représentation de $\bar{r}K = (A, \theta) = \varinjlim \bar{I}Q_m$ puisque $\bar{r}$ commute avec les colimites et que $\bar{r}h = \bar{I}$.

Mais il faut remarquer qu'on n'obtient pas ainsi la représentation canonique comme colimite provenant du fait que $\bar{I}$ est sup-dense ($\Longleftrightarrow$ $\bar{s}$ fidèlement plein).

Cette représentation-là comprend <u>tous</u> les morphismes $\bar{I}Q_m \to \bar{r}K = \bar{r}(F \underset{H}{\times} G)$.

Formons $\bar{r}F \underset{\bar{r}H}{\times} \bar{r}G = (B, \beta)$ dans $\underline{A}_G$ et écrivons-le sous forme canonique:

$$(B, \beta) = \varinjlim \bar{I}X_g = \bar{r}\varinjlim (-, X_g) = \bar{r}X.$$

Appelons $\delta : \bar{r}(F \underset{H}{\times} G) \to \bar{r}X$. Il faut montrer que $\delta$ est un isomorphisme.

Si l'on considère les $\bar{I}Q_m \bullet \underline{A}_G$ avec $Q_m$ apparaissant dans le diagramme de K ils rendent naturellement commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} \bar{I}Q_m & \longrightarrow & \lim \bar{I}M_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim \bar{I}N_l & \longrightarrow & \lim \bar{I}P_j \end{array}$$

car ils sont au-dessus de $\bar{r}K$ et que

$$\begin{array}{ccc} \bar{r}K & \longrightarrow & \bar{r}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{r}G & \longrightarrow & \bar{r}H \end{array}$$

est commutatif.

Le critère de "stabilité" nous livre immédiatement l'isomorphisme cherché puisque si l'on prend la colimite de tous les $\bar{I}Q_m$ rendant commutatif le diagramme $\begin{array}{ccc} \bar{I}Q_m & \longrightarrow & \bar{r}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{r}G & \longrightarrow & \bar{r}H \end{array}$

on obtient par définition

$$\bar{r}F \underset{\bar{r}H}{\times} \bar{r}G \; .$$

b) <u>Preuve du théorème</u>.

En utilisant [Verdier II p.17] on voit qu'il suffit de montrer que l'ensemble des morphismes de $(\underline{M}^o, \mathrm{Ens})$ rendus invertibles par $\bar{r}$, possède un calcul de fractions à droite; de plus dans la vérification des conditions du calcul des fractions à droite il nous suffira de vérifier les duales des conditions 3 et 4 de 2.2.c) puisque les conditions 1 et 2 sont auto-duales et que l'on sait déjà que $\Sigma$ possède un calcul des fractions à gauche.

Vérification de l'axiome 3.

On se donne deux foncteurs $F' \xrightarrow{s} F$ et $G \xrightarrow{u} F$ au-dessus de $F$, avec $s \in \Sigma$. Il s'agit de montrer qu'il existe un foncteur $G'$ et des morphismes $G' \xrightarrow{u'} F'$ et $G' \xrightarrow{t} G$, avec $t \in \Sigma$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r] \arrow[d] & F' \arrow[d] \\ G \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

Pour cela formons d'abord le pullback $F' \underset{F}{\times} G = H$ dans $(\underline{M}^o, \mathcal{E}ns)$ puis appliquons $\bar{r}$. On voit alors sur le diagramme de $\underline{A}_G$ suivant:

$$\begin{tikzcd} \bar{r}H \arrow[dr] & & \\ & \bar{r}G \underset{\bar{r}F}{\times} \bar{r}F' \arrow[r] \arrow[d] & \bar{r}F' \arrow[d] \\ & \bar{r}G \arrow[r] & \bar{r}F \end{tikzcd}$$

qu'il"faudra" choisir $t : G' \longrightarrow G$ de sorte que $\bar{r}G' \cong \bar{r}G \underset{\bar{r}F}{\times} \bar{r}F'$.

L'hypothèse, 1) $\Rightarrow$ $\bar{r}$ conserve les pullbacks

$$\bar{r}G \underset{\bar{r}F}{\times} \bar{r}F' = \bar{r}\,(G \underset{F}{\times} F') = \bar{r}H$$

$\Longrightarrow$ $G' = H$.

Vérification de l'axiome 4

On se donne cette fois la situation suivante:

$F \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} G \xrightarrow{t} G'$ avec $tf = tg$ et $t \in \Sigma$, et il s'agit de trouver $F' \xrightarrow{s} F$ avec $s \in \Sigma$ rendant commutatif le diagramme:

$$F' \xrightarrow{s} F \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} G \quad .$$

Par hypothèse on a:

$$\bar{r}(tf) = \bar{r}(tg),$$

$t \in \Sigma$ est équivalent à $\bar{r}(t)$ iso, donc $\bar{r}(f) = \bar{r}(g)$.

On sait qu'un égalisateur peut toujours se mettre sous la forme d'un pullback, (voir par exemple [Pareigis]), on peut donc décrire la situation au moyen du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\bar{r}F \arrow[dr, "a"] & & \\
& \bar{r}F \times_{\bar{r}F \times \bar{r}G} \bar{r}F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & \bar{r}F \arrow[d, "{(1,\bar{r}f)}"] \\
& \bar{r}F \arrow[r, "{(1,\bar{r}g)}"] & \bar{r}F \times \bar{r}G
\end{tikzcd}$$

où $(1,\bar{r}g) \cong (1,\bar{r}f)$. De plus, p sera un iso, car par définition du pullback, il existe $a : \bar{r}F \longrightarrow \bar{r}F \times_{\bar{r}F \times \bar{r}G} \bar{r}F$ tel que $pa = 1$, et du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\bar{r}F \times_{\bar{r}F \times \bar{r}G} \bar{r}F \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "1"'] & \bar{r}F \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "1"] & \\
& \bar{r}F \times_{\bar{r}F \times \bar{r}G} \bar{r}F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & \bar{r}F \arrow[d] \\
& \bar{r}F \arrow[r] & \bar{r}F \times \bar{r}G
\end{tikzcd}$$

on tire que $ap = 1$.

Ici, on "devra" donc choisir F' de sorte que

$$\bar{r}F' = \bar{r}F \times_{\bar{r}F \times \bar{r}G} \bar{r}F \xrightarrow{\sim} \bar{r}F.$$

l'hypothèse 2) $\Rightarrow \bar{r}F \times \bar{r}G = \bar{r}\,(F\times G)$

et 1) $\Rightarrow \bar{r}F \times_{\bar{r}(F\times G)} \bar{r}F = \bar{r}\,(F\times_{F\times G} F) = \bar{r}F'$

3.13. Nous revenons maintenant au cas général où $\underline{A}_G$ n'est pas obligatoirement une catégorie de faisceaux.

Le théorème suivant qui est le but de ce travail, nous montre que la caractérisation, à partir du modèle exclusivement, des foncteurs qui proviennent des coalgèbres est semblable à celle donnée dans [Verdier] des préfaisceaux qui sont des faisceaux pour une topologie de Grothendieck.

<u>Théorème</u> Pour que $F : \underline{M}^o \to \mathrm{Ens}$ provienne d'une coalgèbre il faut et il suffit que pour toute paire de diagrammes inductifs de $\underline{M}$, $(M_k)_{k\in K}$ et $(N_j)_{j\in J}$, avec J et K cofiltrantes, tels que:

$$\varinjlim IM_k \xleftarrow{\sim} \varinjlim IN_j$$

on ait que:

$$\varprojlim FM_k \twoheadrightarrow \varprojlim FN_j$$

est une surjection.

<u>Remarque</u>. Le fait qu'on exige ici une surjection alors que dans l'analogue pour les faisceaux il faut une bijection est dû au fait qu'on a ici un calcul des fractions à gauche.

<u>Preuve</u>: a ) <u>la suffisance</u>:

D'après le théorème 1), il suffit de montrer que pour tout $\sigma : G \to H$ tel que (1) $\bar{r}\sigma : \bar{r}G \xrightarrow{\sim} \bar{r}H$ est iso

$(\sigma, F) : (H,F) \longrightarrow (G,F)$ est une surjection.

Comme L reflète les isomorphismes on peut remplacer $\bar{r}\sigma$ iso par $r\sigma$ iso. En écrivant alors:

$$G = \varinjlim\, (-,M_k)$$

$$H = \varinjlim\, (-,N_j)$$

la condition (1) devient

$$rG = \varinjlim\, IM_k \longrightarrow rH = \varinjlim\, IN_j \quad \text{est iso.}$$

Par hypothèse on a alors que:

$$\varprojlim\, FM_k \longleftarrow \varprojlim\, FN_j \quad \text{est une surjection.}$$

On applique alors Yoneda, ce qui donne:

$$\varprojlim\, ((-,M_k),\, F) \twoheadleftarrow \varprojlim((-,N_j),\, F), \text{ ou encore:}$$

$$(\varinjlim(-,M_k),\, F) \twoheadleftarrow (\varinjlim(-,N_j),\, F) \text{ et finalement}$$

$$(G,F) \twoheadleftarrow (H,F) \quad \text{est une surjection.}$$

b) <u>la nécessité</u>

Elle est évidente si on écrit

$$F \cong \bar{s}(A,\theta) = (\bar{I}(-),(A,\theta)).$$

<u>Remarque</u>: Lorsque $\underline{M}$ a des pullbacks et que I commute avec les pullbacks on peut appliquer le lemme I2.12 de [Verdier] et remplacer les $\varprojlim FM_i$ par des égalisateurs.