On the existence of a local Hamiltonian in the Galilean invariant Lee model

Author(s):
Schrader, Robert

Publication Date:
1968

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000093960

Diss. Nr. 4109

On the Existence of a Local Hamiltonian in the Galilean Invariant Lee Model

a Dissertation submittet
to the

Swiss Federal Institute of Technology
Zürich

for the degree of
Doctor of Natural Sciences

Presented by

Robert Schrader
dipl. Phys. (University of Hamburg)
born 12. 9. 1939
citizen of Germany

Accepted on the recommendation of

Prof. Dr. K. Hepp
Prof. Dr. R. Jost

Brühlsche Universitätsdruckerei Gießen
Printed in Germany
1968

Inhalt

Kürzlich hat J. M. LEVY-LEBLOND [1] Eigenschaften von Galileiinvarianten Feldtheorien diskutiert. Trotz der Bargmannschen Superauswahlregel können solche Theorien Teilchenvernichtung- und Erzeugungsprozesse beschreiben. Insbesondere gab J. M. LEVY-LEBLOND eine Galileiinvariante Beschreibung des Lee-Modells [3]. In seiner ursprünglichen Form ist das Lee-Modell Gegenstand von großem Interesse gewesen. Es ist explizit lösbar in den niedrigsten Sektoren [4], und es existiert eine Renormierung der Masse und der Kopplungskonstante.

Sowohl die Tamm-Dancoff-Methode [5] als auch der LSZ-Formalismus [6] und Dispersionsrelationen [7] sind zur Diskussion des Modells herangezogen worden. Schwierigkeiten entstehen jedoch beim Übergang zur lokalen Kopplung und durch das mögliche Auftauchen von "ghosts".

Die Galileiinvariante Beschreibung geht auch von den 3 Teilchen V, Θ, und N aus mit $V \leftrightarrow N$, Θ als mögliche Übergänge.

Die freie Teilchentheorie wird durch 3 Felder $V(P)$, $\Theta(k)$, $N(l)$ beschrieben, die den folgenden (Anti-)Vertauschungsrelationen genügen:

$$\{V(P), V^*(P')\} = \delta^3(P - P'); \{V(P), V(P')\} = 0$$

$$[\Theta(k), \Theta^*(k')] = \delta^3(k - k'); [\Theta(k), \Theta(k')] = 0$$

$$\{N(l), N^*(l')\} = \delta^3(l - l'); \{N(l), N(l')\} = 0 \quad \text{etc.}$$

Der Hilbertraum ist der Fockraum, der durch diese Felder definiert ist. Die freien 1-Teilchen V-Zustände transformieren nach einer irreduziblen Darstellung der zentralen Erweiterung der Galileigruppe zur Masse m_1, Spin 0 und inneren Energie U_0 [2, 8]. Die Massen des Θ- und N-Teilchens sind jeweils m_2 und m_3, ihr Spin und ihre innere Energie ist Null. V und N sind Fermionen, Θ ist ein Boson; die Wahl der Statistik ist jedoch unwesentlich [1].

Der freie Hamiltonoperator wird demnach

$$H_0(U_0) = \int \left(U_0 + \frac{P^2}{2m_1}\right) V^*(P)\, V(P)\, d^3 P$$
$$+ \int \frac{k^2}{2m_2} \Theta^*(k)\, \Theta(k)\, d^3 k + \int \frac{l^2}{2m_3} N^*(l)\, N(l)\, d^3 l\,.$$

Die Wechselwirkung ist definiert durch

$$H_{I\chi} = \lambda_0 \int \chi(\omega) \left[V^*(P)\, N\left(\frac{m_3}{m_1} P + q\right) \Theta\left(\frac{m_2}{m_1} P - q\right) + h \cdot c\right] d^3 P\, d^3 q$$

$$2\mu\,\omega = q^2\,; \quad \mu\, m_1 = m_2\, m_3\,.$$

Die Bargmannsche Superauswahlregel verlangt $m_1 = m_2 + m_3$. λ_0 ist die Kopplungskonstante und χ eine reelle Abschneidefunktion. Dann wird $H_\chi = H_0(U_0) + H_{I\chi}$ ein selbstadjungierter Hamiltonoperator. Genauer gilt folgende Aussage:

Seien $\mathcal{N}(V)$, $\mathcal{N}(\Theta)$, $\mathcal{N}(N)$ die drei Teilchenzahloperatoren. Dann sind $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}(V) + \mathcal{N}(\Theta)$; $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}(V) + \mathcal{N}(N)$ Konstanten der Bewegung. Der Massenoperator ist $\mathcal{M} = m_2 \mathcal{N}_1 + m_3 \mathcal{N}$. Sei $\mathcal{H}(N_1, N_2)$ (N_1, N_2 nichtnegative ganze Zahlen) der Sektor, der den Eigenwerten N_1 und N_2 von $\mathcal{N}_1$ und $\mathcal{N}_2$ entspricht. Da alle Teilchenzahloperatoren in $\mathcal{H}(N_1, N_2)$ beschränkt sind, ist $H_{I\chi}$ restringiert auf $H(N_1, N_2)$ ein beschränkter Operator. Damit wird H_χ in $\mathcal{H}(N_1, N_2)$ selbstadjungiert und sein Definitionsbereich stimmt mit dem von $H_0(U_0)$ überein [9]. Sei $(2\mathcal{M})^{-1}\mathcal{P}^2$ der Energieoperator der Schwerpunktsbewegung und setze $H_\chi^S = H_\chi - (2\mathcal{M})^{-1}\mathcal{P}^2$. Jetzt läßt sich $\mathcal{H}(N_1, N_2)$ schreiben als $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, wo $\mathcal{H}_1$ der Hilbertraum der Schwerpunktsbewegung ist und $\mathcal{H}_2$ aus allen Paaren (g, f) mit $g \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})^3$ besteht. H_χ^S beschränkt auf $\mathcal{H}(1, 1)$ wirkt dann nur noch auf $\mathcal{H}_2$. Schreiben wir die Resolvente $r^S(\chi, z)$ von H_χ^S als eine 2×2 Matrix, dann hat ihr Kern die Form [1]:

$$r^S(\chi, z)\,(q, q')$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{Z_\chi}{H(\chi, z - U)} \,; & \dfrac{\lambda Z_\chi^{1/2}\,\chi(\omega')}{H(\chi, z - U)\,(z - \omega')} \\[2ex] \dfrac{\lambda Z_\chi^{1/2}\,\chi(\omega)}{(z - \omega)\,H(\chi, z - U)} \,; & \dfrac{\delta^3(q - q')}{z - \omega} + \dfrac{\lambda^2\chi(\omega)\,\chi(\omega')}{(z - \omega)\,H(\chi, z - U)\,(z - \omega')} \end{pmatrix}$$

wobei

$$Z_\chi^{-1} = 1 + \lambda_0^2 \int \frac{\chi^2(\omega)\,d^3q}{(U - \omega)^2} = 1 + \lambda_0^2\,\lambda_c^{-2}(\chi)$$

$$U_0 = U - \lambda_0^2 \int \frac{\chi^2(\omega)\,d^3q}{(U - \omega)} = U + \delta\,U_\chi$$

$$\lambda = Z_\chi^{1/2}\,\lambda_0\,.$$

Die Funktion $H(\chi, z)$ ist in Appendix A diskutiert. U ist per Definitionem kleiner als Null. Dadurch ist U_0 durch obige Gleichung festgelegt.

Die obige Lösung hat mehrere Konsequenzen. Zunächst läßt sich die Streutheorie in diesem Sektor vollständig diskutieren. Die Streuzustände bilden ein vollständiges System, die S-Matrix ist somit unitär. Zweitens werden alle Parameter der Theorie festgelegt, es gibt keine Freiheiten mehr für höhere Sektoren. Drittens ist die 1-Teilchenstruktur des V-Teilchens bekannt. Das ist aber bekanntlich eine der Voraussetzungen zur Diskussion einer Haag-Ruelleschen Streutheorie. Eine solche existiert auch tatsächlich, und wir geben das Ergebnis in der Einleitung an.

Die wichtigste Eigenschaft von $r^S(\chi, z)$ ist aber, daß der Limes für $\chi \to 1$ existiert und die Resolvente eines selbstadjungierten Operators H ist. Das erlaubt es uns $H = H^S + (2\mathscr{M})^{-1}\,\mathscr{P}^2$ als einen lokalen Hamiltonoperator in $\mathscr{H}(1, 1)$ anzusehen.

Die Ergebnisse in $H(1, 1)$ gaben uns dann die Anleitung, wie man in den höheren Sektoren vorzugehen hat: Man betrachtet die Resolvente $r(\chi, z)$ von H_χ. Für genügend große $\operatorname{Im} z$ läßt sie sich als eine konvergente Bornreihe schreiben. Die Kenntnis der Einteilchenstruktur erlaubt es uns dann, eine partielle Summation durchzuführen. Danach läßt sich der Übergang $\chi \to 1$ vollziehen und wir erhalten die Resolvente eines selbstadjungierten Operators H, den wir wieder als einen lokalen Hamiltonoperator interpretieren dürfen.

Zum Schluß diskutieren wir die Streutheorie von H im Sektor $\mathscr{H}(2, 1)$. Dabei benutzen wir Abschätzungen, die zum ersten Mal von L. D. Faddeev im quantenmechanischen Dreikörperproblem verwendet wurden. Wir erhalten eine unitäre Streumatrix und geben schließlich das Ergebnis der zeitabhängigen Streutheorie an.

Commun. math. Phys. 10, 155—178 (1968)

On the Existence of a Local Hamiltonian in the Galilean Invariant Lee Model

R. Schrader
Seminar für theoretische Physik der E. T. H., Zürich

Received May 10, 1968

Abstract. It is shown that there exists a selfadjoint Hamilton operator in the limit of local coupling for the Galilean invariant Lee Model. We discuss the scattering theory of this Hamilton operator in the $V\,\Theta - N\,\Theta\,\Theta$ sector.

§ 1. Introduction

Recently J. M. Levy-Leblond [1] has discussed properties of Galilean invariant field theories. Although one has the Bargmann superselection rule for the mass [2], nevertheless such theories may describe processes involving particle creation and annihilation. In particular J. M. Levy-Leblond has given a Galilean invariant formulation of the Lee Model [3]. In its original form the Lee Model has been the object of great interest. It is solvable in the lowest sectors [4] and there is a mass and coupling constant renormalization. The Tamm-Dancoff method [5] has been applied as well as the LSZ-formalism [6] and dispersion relation methods [7] have also been used. However, it was always necessary to use a cutoff function and to consider possible ghost states.

The Galilean invariant formulation also describes the interaction of three particles V, N and Θ; $V \leftrightarrow N + \Theta$ being the possible transitions. The free particle theory is given by 3 fields $V(P)$, $\Theta(k)$, $N(l)$ satisfying the following (anti-)commutation relations

$$\begin{aligned} &\{V(P), V^*(P')\} = \delta^3(P - P'); \{V(P), V(P')\} = 0 \\ &[\Theta(k), \Theta^*(k')] = \delta^3(k - k'); [\Theta(k), \Theta(k')] = 0 \\ &\{N(l), N^*(l')\} = \delta^3(l - l'); \{N(l), N(l')\} = 0 \quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{1}$$

The Hilbert space is the Fock space defined by these fields. The free 1-particle V-states transform according to an irreducible representation of the central extension of the Galilei group with mass m_1, spin 0 and internal energy U_0 [2, 8].

The masses of the Θ and N particles are m_2 and m_3 respectively, their spin and their internal energy is zero. V and N are fermions; Θ is a boson; but the choice of statistics is not important [1]. The free