Mehrjährige periodische Schwankungen der Abflußmengen des Rheins bei Basel

Von der

Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

zur Erlangung

der Würde eines Doktors der Technischen Wissenschaften

genehmigte Promotionsarbeit

Vorgelegt von

Max Oesterhaus

aus Gadmen, Kt. Bern

Referent: Herr Prof. Dr. E. Meyer-Peter
Korreferent: Herr Prof. Dr. H. Favre

Basler Druck- und Verlagsanstalt · Basel 1947

43792

Erscheint als Mitteilung Nr. 38
des Eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft
in Bern

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 5

I. Teil

Überblick über das Wesen der Periodizitäten und deren Bedeutung für die Abflußmengenvoraussage

I. Allgemeines und Geschichtliches 7
II. Verschiedene Arten der Abflußprognose 8
III. Besondere Eignung von Abflußmengenbeobachtungen für Untersuchungen über den Wechsel trockener und nasser Zeitabschnitte 10
IV. Vergleich zwischen den Ergebnissen von Untersuchungen verschiedener Forscher, insbesondere zwischen den Ergebnissen der Untersuchungen von meteorologischen Elementen einerseits und von Abflußmengen anderseits 11
V. Über den Begriff der Periodizität und ihrer Realität 12

II. Teil

Die Untersuchungsmethoden

A. Die Methoden bisheriger Untersuchungen über die Periodizität der Abflußmengen 16
1. Allgemeines 16
2. Die von Brückner angewendete Methode 17
3. Die von Streiff, v. Keßlitz und Novotny angewendeten Methoden (Glättung durch übergreifende Mittelbildung und Schichtanalyse) 17
a) Beschreibung dieser Methoden 17
b) Erörterung mit Ausblick auf neuere Methoden 18

B. Morphologische Untersuchung von Beobachtungsreihen 21
1. Anwendung von Verteilungskurven 21
a) Allgemeines 21
b) Die normale Verteilungskurve nach Gauß . . 21
c) Unsymmetrische Verteilungskurven 22
2. Untersuchungen über die Erhaltungstendenz . . 23
a) Allgemeines 23
b) Untersuchungen mit Hilfe der Streuung . . . 23
c) Autokorrelation von Beobachtungsreihen . . 24

C. Die harmonische Analyse 25
1. Grundlagen 25
2. Harmonische Analyse von Beobachtungsreihen . 26
3. Berechnung der Fourierkoeffizienten einer unharmonischen Welle 27

D. Die Periodogrammrechnung 27
I. Die Berechnung des Spektrums 27
1. Allgemeines 27
2. Das Spektrum einer einfachen Sinuswelle . . 28
3. Wichtige Eigenschaften des Periodogramms einer Sinuswelle 29
4. Verwendung der Fourierfrequenzen als Versuchsfrequenzen 30
5. Darwin-Börgen'sches Berechnungsschema . 31
II. Das Phasendiagramm 34
1. Allgemeines 34
2. Ableitung der Gleichungen 34
3. Veranschaulichung der Gleichungen 36
4. Berechnung der Periodogrammkomponenten für eine Beobachtungsreihe 36
5. Ermittlung der Frequenz und der Anfangsphase der gesuchten Periodizität 38
6. Ermittlung der Amplitude der gesuchten Periodizität 39
a) Reine Sinuswelle 39
b) Beobachtungsfunktionen mit großen aperiodischen Bestandteilen 39
c) Beobachtungsfunktion mit großen aperiodischen Bestandteilen und zeitlich veränderlicher Amplitude 41
7. Beispiel für die Berechnung einer verborgenen Periodizität mit Hilfe des Phasen- und Amplitudendiagramms 42
a) Analysenintervall $p' = 6$ Jahre 43
b) Analysenintervall $n = 18$ Jahre 46
c) Berechnung der Konstanten der Periodizität 47
III. Die Trennung benachbarter Periodizitäten . . 48
1. Allgemeines 48
2. Trennung von zwei benachbarten Periodizitäten 49
a) Einleitende Ausführungen 49
b) Ableitung der Gleichungen 49
3. Periodizität mit periodisch veränderlicher Amplitude 51
IV. Der Summationsvektorenzug 51
1. Allgemeines und Ableitung der Beziehungen 51
2. Beispiel 53

E. Die benützten wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungsmethoden 54
1. Die Expektanz 54
2. Die Punktwolke 55

III. Teil

Berechnung der mehrjährigen Periodizitäten der Abflußmenge des Rheins bei Basel

A. Hydrographische Unterlagen 58
1. Bestimmung der Abflußmengen 58
a) Allgemeines über das Einzugsgebiet 58

Seite

b) Beobachtung der Wasserstände und Messung der Abflußmengen 58
2. Berechnung der mittleren jährlichen Abflußmenge . 59
3. Berechnung der mittleren vierteljährlichen Abflußmengen unter Ausschaltung der jährlichen Periode 59
a) Allgemeines 59
b) Bezeichnungen und Definitionen 60
c) Ausschaltung der jährlichen Periode bei Monatsmitteln 60
d) Ausschaltung der jährlichen Periode bei Vierteljahresmitteln 60
e) Ermittlung der Schwankung der Monats- und Vierteljahresmittel infolge der jährlichen Periode 61

B. Morphologische Untersuchungen 62

I. Streuung und Verteilung der mittleren jährlichen sowie der mittleren vierteljährlichen Abflußmengen des Rheins bei Basel 62

1. Streuung und Verteilung der mittleren jährlichen Abflußmengen MQ um ihren Durchschnittswert MMQ für die Jahresreihe 1808 bis 1943 62
2. Streuung und Verteilung der mittleren jährlichen Abflußmengen MQ um die säkulare Ganglinie für die Jahre 1808–1943 63
3. Streuung und Verteilung der mittleren vierteljährlichen Abflußmengen um die säkulare Ganglinie 63
4. Verteilung der mittleren vierteljährlichen Abflußmengen nach Ausschaltung der einjährigen Periode, des säkularen Ganges, sowie der Periodizitäten p_6 bis p_{30} 63
5. Verteilung der mittleren jährlichen Abflußmengen nach jeweiliger Ausschaltung mehrerer Periodizitäten zwecks genauerer Berechnung einer einzelnen Periodizität 64

II. Untersuchungen der Jahres- und Vierteljahresmittel der Abflußmengen in bezug auf eine Erhaltungstendenz 65

1. Untersuchung mit Hilfe der Streuung . . . 65
2. Untersuchung mit Hilfe von Autokorrelationskoeffizienten 66

III. Ergebnisse und Schlußfolgerungen 67

1. Mittlere jährliche Abflußmengen 67
2. Mittlere vierteljährliche Abflußmengen, nach Ausschaltung der einjährigen Periode . . . 68

C. Berechnung des Spektrums 68

1. Wahl des untersuchten Zeitabschnittes 68
2. Schlüsse, welche aus dem Spektrum zu ziehen sind 68

D. Berechnung der Periodizitäten mit Hilfe der Periodogrammrechnung 69

I. Erster Berechnungsgang 69

1. Angenäherte Berechnung der Welle p_7 . . . 69
2. Erste angenäherte Berechnung der Welle p_5 . 71
3. Angenäherte Berechnung der Welle p_{12} . . 73
4. Erste angenäherte Berechnung der Welle p_{30} 75
5. Berechnung der säkularen Welle p_{120} . . . 76

II. Zweiter Berechnungsgang 76

1. Definitive Berechnung der Welle p_6 76
2. Angenäherte Berechnung der Welle p_9 . . . 78

Seite

3. Definitive Berechnung der Welle p_7 79
4. Zweite angenäherte Berechnung der Welle p_5 81
5. Definitive Berechnung der Welle p_{12} mit zwei Nebenperioden p_{10} und p_{15} 83
a) Allgemeines 83
b) Berechnung der Hauptperiode 86
c) Berechnung der Nebenperioden 87
6. Zweite angenäherte Berechnung der Welle p_{30} mit der Nebenperiode p_{20} 88

III. Dritter Berechnungsgang 90

1. Definitive Berechnung der Welle p_9 und Kontrolle der Nebenperiode p_{10} 90
2. Definitive Berechnung der Periodizität p_{30} . 92
3. Definitive Berechnung der Welle p_5 93

IV. Zusammenstellung der definitiven Ergebnisse . 96

E. Prüfung der Frage, wie weit die gefundenen Periodizitäten als reell betrachtet werden dürfen 98

1. Säkulare Welle p_{120} 98
2. Wellen p_5, p_7, p_{12} und p_{30} 98
a) Allgemeines 98
b) Erste Überprüfung der Welle p_5 99
c) Erste Überprüfung der Welle p_7 99
d) Überprüfung der Welle p_{12} 99
e) Überprüfung der Welle p_{30} 99
f) Zweite Überprüfung der Wellen p_5 und p_7 . . 100
3. Wellen p_6 und p_9 101
4. Zusammensetzung aller Wellen und Vergleich mit den beobachteten Jahresmitteln der Abflußmengen 101

IV. Teil

Zeitliche Zusammenhänge zwischen der Häufigkeit der Sonnenflecken und den Abflußmengen des Rheins bei Basel

A. Die Häufigkeit der Sonnenflecken 102

1. Statistische Erfassung der Häufigkeit der Sonnenflecken 102
2. Die «elfjährige» Periode der Häufigkeit der Sonnenflecken 102

B. Die Häufigkeit der Sonnenflecken und das Wetter . 103

1. Temperatur 103
a) Die «elfjährige» Periode 103
b) Extreme der Sonnenfleckenkurve und Temperatur 104
2. Niederschlag 104
a) Die «elfjährige» Periode 104
b) Sonnenfleckenminimum und Niederschlag . . 104

C. Sonnenfleckenhäufigkeit und Abflußmengen des Rheins bei Basel 105

1. Die «elfjährige» Periode 105
2. Weitere Zusammenhänge 105
a) Allgemeines 105
b) Zusammenhänge für die Jahre, welche einem Sonnenfleckenminimum unmittelbar vorangehen, sowie für Jahre des Sonnenfleckenminimums selbst 106
c) Winterabfluß in den Jahren, welche in der Nähe eines Maximums oder Minimums der Sonnenfleckenhäufigkeit liegen 107

Seite

Zusammenfassung und Erörterung der Ergebnisse

I. Periodische Schwankungen der Abflußmengen . . . 110

1. Statistische Beurteilung der Jahresmittel des Rheins bei Basel 110
2. Verborgene mehrjährige Periodizitäten 110
3. Beschreibung der gefundenen Periodizitäten . . 111
4. Zusammensetzung der gefundenen Periodizitäten 112

II. Häufigkeit der Sonnenflecken und Abflußmengen des Rheins bei Basel 113

1. Sonnenfleckenminimum und trockene Jahre . . 113
2. Extreme der Sonnenfleckenhäufigkeit und trokkene Winter 114
3. Sonnenfleckenminimum und Wechsel im Verhalten der Periodizitäten 114

Seite

III. Möglichkeiten der Voraussage der Abflußmengen des Rheins bei Basel 114

1. Mittlere jährliche Abflußmengen 114
2. Verteilung der Abflußmengen innerhalb des Verlaufes eines bestimmten Jahres 115
3. Vergleich der effektiv eingetretenen Wasserführung der Jahre 1944, 1945 und 1946 mit derjenigen, welche auf Grund der Periodizitäten zu erwarten war 115
   a) Jahr 1944 115
   b) Jahr 1945 115
   c) Jahr 1946 116
   d) Zusammenfassung und Ausblick auf die Jahre 1947, 1948 und 1949 116

Literaturangaben 119

Tafeln I bis XXII, im Anhang.

Leer - Vide - Empty

Einleitung

I.

Nasse und trockene Jahre, abflußreiche und abflußarme Zeitabschnitte — die Bedeutung dieser Erscheinung ist uns während den vergangenen Kriegsjahren wiederum derart eindrücklich zum Bewußtsein gekommen, wie dies seit dem besonders denkwürdigen Winter 1920/21 und auch dem Winter 1924/25 wohl nicht mehr der Fall gewesen ist. In diesen beiden Wintern mußten die eidgenössischen Räte im Hinblick auf die große Energieknappheit dringliche Bundesbeschlüsse fassen. Besonders die ganz außergewöhnliche Abflußarmut des Winters 1920/21 erregte durch ihre Auswirkungen auf die Elektrizitätsversorgung unseres Landes großes Aufsehen. In vielleicht noch höherm Maße wurde aber die Öffentlichkeit beunruhigt durch die Trockenheit, welche im Jahre 1941 einsetzte und erst im Herbst 1944 ihren Abschluß fand, obwohl in keinem Jahre dieses Zeitabschnittes die Abflußmengen so klein waren wie im Winter 1920/21. Auch in den Jahren 1932 bis 1934 war ein ähnlich abflußarmer Zeitabschnitt zu verzeichnen wie 1941 bis 1944, ohne daß er in besonderm Maße die Aufmerksamkeit der Öffentlichkeit auf sich zu ziehen vermochte. Da große Speicherwerke erstellt worden waren und die Konsumentenschaft nicht außergewöhnliche Anforderungen stellte, sondern die Nachfrage wegen der Wirtschaftskrise eher gering war, bereitete der Zeitabschnitt 1932 bis 1934 keine Schwierigkeiten in der Energieversorgung unseres Landes. Die abflußarme Zeit während des zweiten Weltkrieges jedoch fiel einerseits mit einem großen Kohlen- sowie Treibstoffmangel und anderseits mit einer kriegsbedingten Überbeschäftigung der Wirtschaft zusammen. So mußten denn vom 15. November 1941 bis anfangs März 1942, vom Dezember 1942 bis 15. Januar 1943, von Ende November 1943 bis ca. Mitte Februar 1944 und vom 5. November 1945 bis 25. Januar 1946 Einschränkungen im Elektrizitätsverbrauch verfügt werden.

Als die abflußarme Zeit der Jahre 1941 bis 1944 eingesetzt hatte, erhob sich alsbald die bange Frage, wie lange wohl die Trockenheit dauern und wann eine Besserung zu erwarten sein werde. Nicht nur unter Fachleuten der Wasser- und Energiewirtschaft, sondern, wie durch zahlreiche Zeitungsartikel zum Ausdruck kam, auch in der Allgemeinheit machte sich ein großes Bedürfnis nach einer *Voraussage* geltend. Man fragte sich in erster Linie, ob es sich bei der Wiederkehr von trokkenen und nassen Zeitabschnitten um einen einigermaßen regelmäßigen *periodischen* Vorgang handle, so daß eine Extrapolation in die Zukunft erlaubt sei; man erinnerte sich in der Öffentlichkeit an die Brückners'che Klimaperiode sowie, im Zusammenhang mit dem periodischen Verlauf der Sonnenflecken, an eine elfjährige Klimaperiode und sprach von Zusammenhängen der Sonnenfleckenmaxima und -minima mit dem Wetter. Gegenstand dieser Betrachtungen waren vor allem die Niederschläge und die Temperatur, von welchen auf die mutmaßlichen Abflußverhältnisse geschlossen wurde (Lit. V).

Von seiten des Eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft waren schon in frühern Jahren mit großem Interesse alle Versuche verfolgt worden, welche darauf abzielten, eine Voraussage der Wasserführung zu ermöglichen und die Frage der Periodizität des Abflußvorganges abzuklären. Das Amt war bestrebt, auch selbst Untersuchungen über die Periodizität und die Frage der Voraussage durchzuführen. Im Rahmen dieser Bestrebungen zog der Verfasser der vorliegenden Arbeit bereits bestehende Untersuchungen über die Periodizität des Abflußvorganges zu Rate. Er prüfte ferner, ob allfällig für die Voraussage andere bekannte Methoden verwendet werden könnten, die im ersten Teil der vorliegenden Arbeit erwähnt sind und nicht auf eine Periodizität des Abflusses abstellen. Doch mußte festgestellt werden, daß die bisherigen Kenntnisse über die *Periodizität des Abflusses* unserer Gewässer noch zu spärlich und zu unsicher waren, um entscheiden zu können, ob eine Voraussage auf Grund von Periodizitäten mit einiger Wahrscheinlichkeit möglich ist. Ferner wurde gefunden, daß das vorhandene hydrographische Material noch zu wenig mathematisch-statistisch verarbeitet und die langfristige Wettervoraussage noch zu wenig entwickelt worden ist und somit nicht genügte, um versuchen zu können, gestützt auf andere Methoden, welche nicht auf die Periodizität der Abflußmenge abstellen, Prognosen zu stellen. Infolge starker Belastung durch laufende dringende Geschäfte war es indessen nicht möglich, durch entsprechende Untersuchungen im Amte selbst diesem Mangel abzuhelfen und die Frage der Voraussage der Wasserführung zu fördern.

II.

Es würde aber von großer wirtschaftlicher Bedeutung sein, wenn eine Voraussage mit einiger Wahrscheinlichkeit möglich wäre.

Eine mehr oder weniger gleichmäßige Lieferung hydroelektrischer Energie während des ganzen Jahres und von Jahr zu Jahr ist bei unsern hydrographischen Verhältnissen bekanntlich nur durch Zusammenarbeit zwischen Lauf- und Hochdruckspeicherwerken möglich. Die möglichst regelmäßige Lieferung von Energie wird insbesondere auch dadurch erschwert, daß

1. die Schwankungen der Abflußmengen (z. B. der mittleren täglichen oder monatlichen Abflußmengen) im Verlaufe eines Jahres von Jahr zu Jahr verschiedenartig und vor allem verschieden groß sind und

2. die mittleren jährlichen Abflußmengen im Verlaufe der Jahre ganz erheblich schwanken.

Eine Voraussage von ganz kurzer oder doch mittlerer Dauer ist erwünscht für die Dispositionen, die etwa innerhalb eines Jahres zu treffen sind. Eine langfristige Prognose dagegen ist von großer Bedeutung für zweckdienliche Maßnahmen in bezug auf den Bau neuer Werke, die Bereitstellung von Speicherwasser, die Energieausfuhr, die Bereitstellung entsprechender Kohlen- und Treibstoffvorräte usw.

Die Wasserkraftnutzung ist aber nur ein Gebiet unter andern Gebieten, für welche eine Abflußmengenprognose dringend erwünscht ist. Für die Schiffahrt, den Wasserbau und die Regulierung der Seen kann aus Voraussagen großer wirtschaftlicher Gewinn gezogen werden. Für die Regulierung unserer Seen mit dem Zwecke der Hochwasserabsenkung sind allerdings nur langfristige Voraussagen nützlich, kurzfristige sind für sie ohne große Bedeutung.

III.

In Anbetracht der großen Bedeutung der Voraussage der Wasserführung und der oben erwähnten Unmöglichkeit, diesbezügliche Untersuchungen im Amte für Wasserwirtschaft selbst durchzuführen, ersuchte der Direktor des Amtes, *Herr Dr. sc. techn. C. Mutzner*, den Verfasser, eine Untersuchung außeramtlich als persönliche Arbeit durchzuführen und regte an, die Arbeit als Dissertation der Eidg. Technischen Hochschule einzureichen. Gerne gab ich dieser Anfrage Folge. Auf Grund von Studien des vorhandenen hydrographischen Materials und der einschlägigen Literatur erschien es mir zweckmäßig, zuerst eine Untersuchung über die Periodizität des Abflußvorganges und die Möglichkeit einer langfristigen Voraussage vorzunehmen. Wie auf Seite 15 noch begründet wird, mußte ich mich dabei mit einer Untersuchung mehrjähriger Periodizitäten begnügen. Ich sah ferner ein, daß ich mich für eine Arbeit der vorliegenden Art auf die Untersuchung der Abflußmengen an einer charakteristischen Stelle eines einzigen Flusses beschränken mußte, um innerhalb absehbarer Zeit zu einem Abschluß zu kommen. Da dem Rhein bei Basel für die Schweiz eine ganz besondere Bedeutung zukommt und seine dortigen Abflußmengen für einen außergewöhnlich langen Zeitraum, nämlich seit dem Jahre 1808, bekannt sind, entschloß ich mich, die Abflußverhältnisse des Rheins bei Basel zu untersuchen.

IV.

Die vorliegende Arbeit wurde also unternommen, um zu erforschen, ob die Abflußmengen des Rheins bei Basel mehrjährigen Periodizitäten unterworfen seien und ob letztere, wenn vorhanden, für eine langfristige Prognose herangezogen werden können. Solche Periodizitäten wurden gefunden. Es scheint, daß es auf Grund dieser Periodizitäten möglich werden könnte, die mittleren jährlichen Abflußmengen auf einige Jahre hinaus voraussagend beurteilen zu können und jeweilen auch Anhaltspunkte darüber zu erhalten, welchen Abflußcharakter der Rest eines einzelnen Jahres etwa aufweisen wird, wenn bereits für einen größern Teil des betreffenden Jahres die Abflußmengen bekannt sind; ein endgültiges Urteil, insbesondere auch darüber, welche Wahrscheinlichkeit der Voraussage zukommt, wird sich aber, wie wir sehen werden, erst auf Grund einer mehrjährigen Erfahrung fällen lassen.

Es erschien zweckmäßig, in einem ersten Teil der Arbeit zuerst einen allgemeinen Überblick über das Wesen der Periodizitäten und ihrer Bedeutung für die Voraussage von Abflußmengen zu geben. Im zweiten Teil werden dann die angewendeten Untersuchungsmethoden dargelegt und im dritten Teil die Ergebnisse der Untersuchungen über die mehrjährigen periodischen Schwankungen des Rheins bei Basel unter Hinweis auf die Ergebnisse früherer Untersuchungen an andern Gewässern bekanntgegeben. In einem vierten Teil wird ferner noch untersucht, ob und welche zeitlichen Zusammenhänge zwischen der Häufigkeit der Sonnenflekken und den Abflußmengen des Rheins bei Basel bestehen; denn solche Beziehungen, wenn vorhanden, sind für die Voraussage ebenfalls wichtig und müssen berücksichtigt werden. Es wurden solche Beziehungen von sehr interessanter Art festgestellt, und damit konnten die Grundlagen für eine langfristige Voraussage in willkommener Weise erweitert werden.

V.

Die Arbeit konnte ich neben meiner amtlichen Tätigkeit nur durchführen, indem mir Herr Dr. Mutzner gestattete, Personal der von mir geleiteten Sektion beim eidg. Amt für Wasserwirtschaft für die rein rechnerischen Auswertungen und die graphischen Darstellungen heranzuziehen. Ich danke Herrn Direktor Dr. Mutzner bestens dafür und ebenfalls für seine weiteren Bemühungen, die Durchführung der Arbeit in organisatorischer und administrativer Hinsicht zu erleichtern. Auch den Herren meiner Sektion, welche mir mit großer Hingabe und Gewissenhaftigkeit im erwähnten Sinne und bei der Drucklegung geholfen haben, insbesondere den Herren K. Kaufmann, A. Geßler, F. Wyß und H. Weber, gilt mein Dank.

Besonders danke ich ferner dem *Referenten*, Herrn *Prof. Dr. E. Meyer-Peter*, und dem *Korreferenten*, Herrn *Prof. Dr. H. Favre*, für ihre Bemühungen, ihr großes Interesse und ihre wertvollen Anregungen für die definitive Fassung der Arbeit.

Die Drucklegung wurde ermöglicht, indem Herr Direktor Dr. Mutzner die Arbeit als Veröffentlichung Nr. 38 des eidg. Amtes für Wasserwirtschaft erscheinen läßt, wofür ich ihm ebenfalls danke.

Bern, November 1946.

I. TEIL

Überblick über das Wesen der Periodizitäten und deren Bedeutung für die Abflußmengenvoraussage

I. Allgemeines und Geschichtliches

1. Die in der Natur erkennbaren Periodizitäten haben von jeher auf den menschlichen Geist eine große Anziehungskraft auszuüben vermocht. Sie waren und sind dem Menschen Ausdruck eines geheimnisvollen gesetzmäßigen Waltens. Neben Vorgängen, deren Rhythmus oder Periodizität unverkennbar ist, bestehen aber viele Vorgänge, deren zeitlicher Verlauf ein reines Zufallsprodukt zu sein scheint. Und doch konnten sich viele Menschen, vor allem Naturforscher, mit einer solchen Betrachtungsweise nicht abfinden. Sie suchten nach *verborgenen Periodizitäten*, aus deren Zusammenwirken, im Verein mit wirklich aperiodischen Bestandteilen, der scheinbar regellose zeitliche Verlauf zu erklären wäre. In geophysikalisch, insbesondere klimatologisch und meteorologisch, sowie in astronomisch interessierten Kreisen setzte eine emsige Forschertätigkeit ein.

Diese Tätigkeit dürfte einen besonderen Auftrieb erhalten haben durch zwei Entdeckungen: In den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts (S. H. Schwabe; R. Wolf, Zürich) wurde erkannt, daß die Häufigkeit der Sonnenflecken eine «elfjährige» Periodizität aufweist; in dem 1890 erschienenen Werk Brückners «Klimaschwankungen seit 1700» wies der Verfasser das Bestehen einer inzwischen weltberühmt gewordenen «fünfunddreißigjährigen» Periode nach.

Die Periodizität der Sonnenfleckenhäufigkeit ist nicht *reiner* Art, aber dafür so ausgeprägt, daß der Ansporn sehr groß war, geophysikalische Beobachtungsreihen daraufhin zu untersuchen, ob sie nicht eine verborgene Periodizität von gleicher Periode enthalten wie die Schwankungen der Sonnenfleckenhäufigkeit.

Wichtige Impulse erhielt die Periodenforschung offenbar auch durch die Analyse der Meeresgezeiten, deren Durchführung praktisch notwendig wurde, um sich in Häfen, welche den Einflüssen von Ebbe und Flut unterworfen sind, den Gezeiten anpassen zu können.

2. Von besonders großer Bedeutung war in theoretischer und praktischer Hinsicht die Erfindung des «*Periodogramms*», welche durch *Arthur Schuster* im Jahre 1898 erfolgte.

Durch die Methode von Schuster wurde die Verbindung hergestellt zwischen der rein mathematischen und der physikalisch-naturwissenschaftlichen Auffassung eines konkreten Problems. Es konnte nun versucht werden, auf die Frage Antwort zu geben, welche mehr oder weniger große Wahrscheinlichkeit besteht für die *Realität* einer Periodizität. Die Periodenforschung ist durch Schuster über den Rahmen der rein analytischen Methoden hinaus auf das Gebiet der Statistik erweitert worden.

3. Die praktische und theoretische Periodenforschung ist zu einer bedeutenden und sehr interessanten Spezialwissenschaft ausgewachsen, eine umfangreiche, kaum überblickbare Literatur ist entstanden, und im letztverflossenen Zeitabschnitt von etwa 20 Jahren sind große Fortschritte erzielt worden. Dem meteorologischen Institut der Universität Berlin wurde z. B. ein besonderes «Institut für Periodenforschung» angegliedert. Dieses stand unter der Leitung von Prof. Dr. *K. Stumpff* und verfolgte seit 1934 die Aufgabe, die Grundlagen und Methoden der Periodenforschung zusammenzufassen, zu erweitern, zu verbessern und sie insbesondere der Erforschung meteorologischer Perioden nutzbar zu machen. Die bedeutenden Arbeiten von Stumpff dürften sich künftig als sehr fruchtbar erweisen. Erwähnt sei hier auch *J. Bartels*, Eberswalde, der sich insbesondere auf Erfahrungen bei erdmagnetischen Erscheinungen stützte.

4. Die große Bedeutung der Periodenforschung ist frühzeitig, insbesondere auch von englischen und den praktisch veranlagten amerikanischen Forschern, erkannt worden, welche sich ihr intensiv zugewandt haben, so daß die englische Sprache einen sehr großen Anteil an der Literatur besitzt. Es sei hier bereits auf die Methode von *A. Streiff* (Lit. 29) hingewiesen, welche sich, wie wir noch sehen werden, in wasserwirtschaftlicher Beziehung bereits fruchtbringend ausgewirkt hat. In Amerika bieten die kalifornischen Riesenbäume der Gattung Sequoia, welche bis dreitausendfünfhundert Jahre alt werden, ein sehr interessantes Objekt für die Periodenforschung. Die Jahrringe dieser Bäume sollen ein ziemlich getreues Abbild der Klimaschwankungen darstellen. Streiff (Lit. 29) gibt in einem Diagramm einen Vergleich zwischen der Periodizität des Wachstums der Sequoia-Bäume und Brückners Darstellungen über das Datum der Weinernten, sowie über die Schwankungen der Sonnenfleckenhäufigkeit, nach Ausschaltung der elfjährigen Periode. Es scheint eine überraschende Übereinstimmung zwischen diesen drei Erscheinungen zu bestehen; eine Möglichkeit zur Kontrolle wird aber in der Arbeit von Streiff nicht geboten. Auch die elfjährige Sonnenfleckenperiode spiegelt sich im Wachstum dieser Bäume getreulich wider und konnte bis zum Jahr 1000 vor Christi Geburt nachgewiesen werden. Den Jahren größerer Fleckenhäufigkeit entsprechen dickere Jahrringe, den Jahren kleinerer Fleckenhäufigkeit dünnere Jahrringe, wobei Minima und Maxima der Fleckenperiodizität und des Wachstumsrhythmus einander zeitlich entsprechen. Dieser Wachstumsrhythmus wurde

auch in Europa an Bäumen mit gut ausgeprägten Jahrringen, wie Rottannen und Kiefern, festgestellt.

5. Der Frage nach dem Bestehen von Rhythmen und Perioden kommt außer ihrer allgemeinen geistes- und naturwissenschaftlichen Bedeutung auch eine große Wichtigkeit zu in *wirtschaftlicher und volkswirtschaftlicher Hinsicht*, nämlich für die meteorologische und die *hydrographische Voraussage*. Während sich die Meteorologie der Frage, ob Periodizitäten bestehen, sehr eingehend angenommen hat, kann das gleiche von der Hydrographie nicht behauptet werden. Immerhin hat bereits Brückner hydrographisches Material benützt, um das Bestehen seiner «fünfunddreißigjährigen» Periode nachzuweisen.

In Schweden war es *Axel Wallén*, welcher für schwedische Flüsse ein periodisches Verhalten entdeckte und darauf bereits vor mehr als 30 Jahren eine langfristige Wasserstandsvoraussage aufbaute. Mit Hilfe der Methode von Streiff, welche letzterer auf den Penobscotriver USA. angewendet hat, baute *W. v. Keßlitz*, nach seinen Angaben mit Erfolg, eine langfristige Prognose für die Mur bei Bruck (Steiermark) auf. Außer diesen Arbeiten über die Periodizität der Abflußmengen oder Wasserstände eines Gewässers sind uns nur noch zwei Studien bekannt: eine mit negativem Resultat von *J. Novotny* über die Moldau und die Elbe, sowie eine von *A. Jacobi*. Keine dieser sich mit der Periodizität der Abflußmengen befassenden Arbeiten bedient sich aber moderner Methoden der Periodenforschung. Dies dürfte darauf beruhen, daß diese Methoden in hydrographisch tätigen Kreisen noch zu wenig bekannt sind.

6. In vorliegender Arbeit über den Rhein bei Basel sind *moderne, aufschlußreiche Methoden der Periodogramm- und Wahrscheinlichkeitsrechnung* benützt worden, welche uns zur Hauptsache durch das Werk von *K. Stumpff «Grundlagen und Methoden der Periodenforschung»* (Lit. 3) vermittelt worden sind, und diese Methoden wurden auf ihre Anwendbarkeit zur Aufdeckung verborgener Periodizitäten im Abflußvorgang überprüft. Unseres Wissens sind in vorliegender Arbeit erstmals solche Methoden der modernen Periodenforschung auf den Abflußvorgang eines Flusses angewendet und erprobt worden. Wir hoffen, damit das Interesse weiterer Kreise an solchen Arbeiten wecken zu können, besonders auch, weil unsere Untersuchungen zu einem interessanten positiven Ergebnis geführt haben.

7. Die *Prognose* auf Grund von *Periodizitäten* ist nur *eine* unter verschiedenen Methoden. Um erkennen zu können, wo sich die Prognosen, welche auf der Periodizität des Abflußvorganges aufbauen, einordnen und inwiefern sie sich von andern Methoden unterscheiden, halten wir es für nützlich, einen wenn auch schematischen Überblick über die verschiedenen Verfahren zu geben. Es dürfte dies um so mehr am Platze sein, als schließlich wohl nicht eine Methode allein zum Ziele führen kann. Jede Methode baut sich auf einer bestimmten Art von Beobachtungen auf. So geht die Methode, welche auf der Periodizität des Abflußvorganges beruht, von den Beobachtungen der bisherigen Abflußmengen aus. Daneben wird es aber noch Beobachtungen anderer Art geben, welche der Voraussage dienen können, zu deren Verwertung aber auch andere Methoden angewendet werden müssen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit kann es sich nur darum handeln, summarisch das Grundsätzliche anderer Methoden darzulegen.

II. Verschiedene Arten der Abflußprognose

1. Es ist vorerst zu unterscheiden einerseits zwischen Angaben über die Wahrscheinlichkeit, mit welcher eine Abflußmenge innerhalb eines bestimmten Zeitabschnittes eintreffen wird, und anderseits der eigentlichen Prognose.

Angaben über die *Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer Abflußmenge*, z. B. einer Hochwasserspitze von bestimmter Größe innerhalb eines gegebenen Zeitraumes oder umgekehrt Angaben über den Zeitabschnitt, innerhalb welchem diese Abflußmenge einmal zu erwarten ist, beruhen darauf, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf den Abflußvorgang anzuwenden. Auf Grund der vorhandenen Abflußmengenbestimmungen wird festgestellt, welche Beziehung besteht zwischen der Häufigkeit, mit welcher eine Abflußmenge auftritt, und deren Größe. Diese Beziehung wird durch sogenannte *Verteilungskurven* zu erfassen gesucht (Lit. II). Diese Methoden sind noch kein Allgemeingut der Hydrographen. Im Gegensatz zu den Methoden der Periodenforschung sind sie indessen doch schon weitgehend in die Hydrographie eingeführt worden. In vorliegender Arbeit wird von ihnen kein umfassender Gebrauch gemacht. Doch werden unsere Untersuchungen in wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen unter Benützung von Verteilungskurven ausmünden. Wir werden uns deshalb in einem speziellen Abschnitt noch eingehender mit dem Wesen der Verteilungskurven zu befassen haben.

Bei den *eigentlichen Prognosen* ist zu unterscheiden zwischen:

a) kurzfristiger Prognose und langfristiger Prognose;

b) Methoden, welche nur vom vorhandenen hydrographischen Material ausgehen, und Methoden, welche weitgehend die Meteorologie zu Hilfe nehmen;

c) statistischen Methoden und analytischen Methoden;

d) der Prognose einer bestimmten Abflußmenge auf einen bestimmten Zeitpunkt und der Prognose der mittleren Abflußmenge oder sogar nur des allgemeinen Charakters des Abflußvorganges (sehr naß, naß, normal, trocken, sehr trocken), welcher während eines bestimmten künftigen Zeitabschnittes, z. B. im kommenden Monat oder Jahr, zu erwarten ist.

2. Eine konventionelle *Grenze* zwischen *kurzfristiger* und *langfristiger Prognose* ist nicht festgelegt worden, und eine methodische, zwanglose Abgrenzung ist nicht möglich, denn es gibt Methoden, welche sowohl für kurzfristige wie für langfristige Voraussagen verwendet werden können. Doch dürfte man wohl Voraussagen für die nächsten Stunden oder die nächsten Tage als kurzfristig, solche für die nächsten Wochen, Monate und Jahre als langfristig bezeichnen.

3. *Rein hydrographische Unterlagen* können zur Anwendung kommen, wenn es sich handelt:

a) um die *kurzfristige Prognose* für einen weit flußabwärts gelegenen Gebrauchsort an einem größeren Flusse (Lit. 13; 19);

b) um die *langfristige* Voraussage auf Grund von allfällig vorhandenen *Periodozitäten* des Abflußvorganges (Lit. 16; 17; 18).

Im Falle a erfolgt die Voraussage mit Hilfe von Beziehungen, welche zwischen der Abflußmenge bei Meßstationen am Oberlauf und derjenigen bei der Gebrauchsstation aufgestellt worden sind, auf Grund eines entsprechend organisierten hydrographischen Nachrichtendienstes. Es handelt sich hier um Voraussagen auf 12 bis 24 Stunden, bei langen, großen Flüssen auch noch auf eine längere Frist. Je nach der mehr oder weniger starken Gliederung des Einzugsgebietes bedeutet diese Voraussage ein mehr oder weniger verwickeltes Problem, welches unter Umständen recht schwierig und unübersichtlich werden kann.

Benötigt die Wasserwelle nur eine kurze Zeit, um die Strecke von der Meßstation bis zu einer flußabwärts gelegenen Gebrauchsstation zurückzulegen, so trifft die Hochwassermeldung der Meßstation nicht viel früher als die Wasserwelle selbst bei der Gebrauchsstation ein. Dies ist z. B. der Fall, wenn es sich um einen ohnehin kurzen Fluß handelt oder wenn bei einem längeren Fluß Hochwassermeldungen bereits an einer Stelle gebraucht werden, die nicht weit flußabwärts von der Meßstation liegt. In solchen Fällen muß versucht werden, neben rein hydrographischen Elementen auch meteorologische Elemente für die Prognose zu verwenden mit Hilfe von Methoden, welche nachstehend unter Ziffer 4 noch erläutert werden.

Im Falle b kommen die auf der Periodizität der Wasserführung aufbauenden analytischen Methoden zur Anwendung, welche uns noch näher beschäftigen und unsern Untersuchungen zugrunde liegen.

4. *Mit Hilfe meteorologischer und hydrographischer Elemente* erfolgt unter Anwendung *statistischer* Methoden

a) die *kurzfristige Prognose an kürzeren Gewässern*, aus den bereits unter Ziffer 3 erwähnten Gründen (Lit. 14; 17);

b) die *langfristige Prognose an kleineren oder größeren Gewässern*, welche aber noch keine befriedigenden Ergebnisse zu liefern imstande scheint (Lit. 14; 15; 17).

Im Falle a stützt man sich, nebst den hydrographischen Elementen, auf Niederschlagsmessungen und je nach Charakter des Einzugsgebietes und der Jahreszeit auf Messungen der Temperatur oder der Abnahme der Schneehöhe innerhalb bestimmter Zeitintervalle. An Stelle der Niederschlags- und Temperatur*messung* kann auch die kurzfristige Wetterprognose treten. Das grundlegende hydrographische Element bei solchen Prognosen ist die sogenannte *Trockenwetter-Auslauflinie*, d. h. die Ganglinie der Abflußmenge des betreffenden Flusses, wie sie sich in Trockenperioden einstellt. Je nach der Jahreszeit, mit welcher sich Bodenbeschaffenheit, Grundwasserstände usw. ändern und den Schneeschmelzverhältnissen ergeben sich verschiedene Typen von Auslauflinien. Zu den Wassermengen, die sich nach diesen Linien am Gebrauchsort ergeben, sind die Abflußmengen infolge Niederschlag oder Schneeschmelze zu addieren. Bekannt müssen also auch die Beziehung zwischen *Niederschlags-* und *Abflußmenge* sowie jene zwischen *Temperatur* und *Schmelz*wassermenge für die verschiedenen Jahreszeiten und die verschiedenen Zustände des Erdbodens sein. Diese Beziehungen werden auf Grund der Statistik durch die Korrelationsrechnung ermittelt.

Wenn sich eine solche Prognose auf *Messungen* aufbaut, so kann sie für kleinere oder auch für größere, aber relativ einfach geformte Einzugsgebiete ziemlich zuverlässige Werte liefern. Bei größeren Einzugsgebieten mit mannigfaltigem Aufbau aus Teileinzugsgebieten mit verschiedenem Charakter hinsichtlich Topographie, Hydrographie, Geologie, Beschaffenheit der Erdoberfläche usw. wird jedoch die Prognose aus den Niederschlägen außerordentlich kompliziert und schwierig. In seiner sehr interessanten Untersuchung über die Vorhersage rascher Pegelstandsänderungen des Rheinstroms bei Basel (Lit. 20) führt *E. Wanner* aus, daß sich nie eine allseitig befriedigende Lösung finden lasse, um aus den Niederschlägen die Pegelstandserhöhungen in Basel vorauszubestimmen. Der ganze Komplex der miteinander verketteten Einzelprobleme sei zu vielgestaltig.

Stützt sich dagegen die Abflußvoraussage auf die *Wetterprognose*, so kann sie ohnehin zu keinen genauen mengenmäßigen Ergebnissen führen; denn es ist wenigstens heute noch nicht möglich, sichere Prognosen über die Menge der zu erwartenden Niederschläge zu machen. Unter Umständen können immerhin wertvolle qualitative Anhaltspunkte erhalten werden, weil es ja z. B. schon oft genügt, zu wissen, ob überhaupt ein Hochwasser zu erwarten ist und welchen Charakter es etwa annehmen wird.

Im Falle b geht man, ähnlich wie bei der langfristigen Wettervorhersage, von der Tatsache aus, daß es bestimmte weit entfernt liegende Aktionszentren gibt, deren atmosphärische Verhältnisse auf das zeitlich nachfolgende Wetter im Einzugsgebiet des Flusses, welcher Gegenstand der Prognose bildet, von starkem Einfluß sind. Man versuchte bereits mit Hilfe der Statistik, insbesondere der Korrelationsrechnung, eine Beziehung zwischen Niederschlagsmenge sowie Temperatur im Einzugsgebiet einerseits und den atmosphärischen Verhältnissen im Aktionszentrum anderseits herzustellen. Eine solche Beziehung kann natürlich nur wahrscheinlichkeitstheoretischer (stochastischer) Natur sein. Vorausberechnet wurden somit Niederschlagsmenge und Temperatur. Aus diesen Werten mußte vermittels Beziehungen, welche, gleich wie bei der oben unter Ziffer a beschriebenen kurzfristigen Methode, zwischen dem Niederschlag sowie der Temperatur einerseits und der Abflußmenge anderseits auf Grund bisheriger Beobachtungen aufgestellt worden sind, die künftige Abflußmenge berechnet werden. Solche Berechnungen werden bei der langfristigen Prognose natürlich viel unsicherer als bei der kurzfristigen, weil man nichts Genaues über die Bodenbeschaffenheit und auch über andere maßgebende Faktoren auf längere Frist aussagen kann. Aber ganz abgesehen von dieser Unsicherheit, würde es verwunderlich sein, wenn der Hydrologe Niederschlagsmengen mit einiger Genauigkeit mengenmäßig vorausberechnen könnte, während die Meteorologen sich außerstande erklären, dies tun zu können. *F. Baur* (Lit. 37) sagt bereits in bezug auf die zehntägige Wettervorhersage, daß es sich um einen Rat handle, mit welchem man im Durchschnitt gut fahre, weniger um eine Weissagung. So kommt es nicht überraschend, wenn *v. Keßlitz*, welcher sich während vieler Jahre darum bemühte, Monatsmittelwerte der Wasserführung auf einen Monat, sowie auf mehrere Monate hinaus mittels der in Rede stehenden Methode vorauszuberechnen, diese Methode schließlich als nicht befriedigend verlassen und sich der analytischen Methode zugewendet hat (Lit. 15; 16).

Es stellt sich noch die Frage, ob aus einer *langfristigen Wettervorhersage* mit einiger Sicherheit Wetterlagen erkannt werden können, welche Hochwasser zur Folge haben, um frühzeitig genug wenigstens eine Hochwasserwarnung erlassen zu können. Die Beantwortung dieser Frage fällt in die Kompetenz des Meteorologen. Jedoch sei hier auf einen interessanten, in der hydrologischen Literatur (Lit. 14) zu findenden Vergleich hingewiesen, welchen *W. Friedrich* zwischen den Angaben der Zehntagevorhersage und den effektiv dann gefallenen Niederschlägen während einem katastrophalen Hochwasser zieht. Aus diesem Vergleich erkennt man, daß die Vorhersagen im allgemeinen ein richtiges Bild vom kommenden Wetter gegeben haben. Dagegen enthielten die Vorhersagen keine Andeutungen über den katastrophalen Charakter dieser Niederschläge und über ihr wiederholtes Auftreten. Nach dem gemachten Vergleich zwischen Zehntagevorhersage und den dann gefallenen Niederschlägen erscheint es fraglich, ob es beim heutigen Stande der langfristigen Wettervorhersage möglich ist, Hochwasserwarnungen herauszugeben.

Dr. *J. Maurer* (Lit. 43) bemerkt, daß es noch nicht möglich sei, die zu katastrophalen Hochwassern führenden Niederschläge vorauszusagen. Die einzelnen sich einstellenden Erscheinungen — offenbar ist gemeint bei ähnlichen Ausgangslagen — stimmen in ihrem weitern Verlauf niemals völlig überein. Es gehöre noch oft zu den schwierigsten Aufgaben der Wettervorhersage, die sukzessive rasche Entwicklung der für Hochwassererzeugung in Frage kommenden Wetterlagen sicher genug vorauszusehen. Um weitere Fortschritte zu erzielen, wäre für den praktischen Gebrauch eine noch viel eingreifendere rasche Durchforschung der höhern Schichten der Atmosphäre, zeitlich in kürzesten Momenten, erforderlich.

Großes Interesse beim wasserwirtschaftlich Tätigen finden Versuche der Meteorologen (Lit. 17; 33; 35), aus der Lage der in Frage kommenden atmosphärischen Aktionszentren auf das kommende Wetter qualitative Schlüsse zu ziehen, welche sich über eine sehr lange Frist (Monate) erstrecken. Sollte die künftige Erfahrung bestätigen, daß sich eine langfristige Abflußmengenprognose aufbauen läßt auf Grund von Periodizitäten, wie wir sie für den Rhein bei Basel gefunden haben, so wäre es sehr wertvoll, wenn diese Prognose ergänzt werden könnte durch Angaben, welche die Meteorologen aus Zusammenhängen zwischen solchen Aktionszentren und dem kommenden Wetter erschlossen haben. Vor allem wäre dies der Fall, wenn solche Angaben einmal eine vermehrte Sicherheit in bezug auf die Phase der Perioden und alsdann Anhaltspunkte darüber bringen würden, was für aperiodische Störungen zu erwarten sind. Es scheint möglich, daß zu ähnlichem Zwecke auch Beobachtungen über Schneehöhen, Schneebeschaffenheit, Firnbildung, Gletscherbewegungen usw. von Nutzen sein könnten. Eine Verarbeitung solcher Beobachtungen, um einen allfälligen Einfluß auf die Abflußperiodizitäten jeweilen frühzeitig abzuklären, bietet zahlreiche interessante Aufgaben. Ein positives Ergebnis wäre von großem wirtschaftlichem Wert.

5. In bezug auf die *statistischen Methoden* haben wir bereits erkannt, daß es jene sind, welche Korrelationen zwischen der Abflußmenge und meteorologischen Elementen herzustellen versuchen, um aus letztern die zeitlich nachfolgenden Abflußmengen berechnen zu können.

6. Die *analytischen* Methoden beruhen, wie schon erwähnt, auf allenfalls vorhandenen Periodizitäten der Abflußmengen. Wenn solche Periodizitäten wirklich vorhanden sind, so läßt sich die scheinbar ganz unregelmäßige Ganglinie eines Flusses in einzelne Wellen mit verschiedener Periode und Amplitude zerlegen, entsprechend den vorhandenen Periodizitäten. Handelt es sich um reelle Periodizitäten, so dürfen die einzelnen Wellen in die Zukunft extrapoliert werden. Die Synthese der extrapolierten Wellen ergibt dann den extrapolierten Verlauf der Ganglinie. Letztere kann wegen ihrem unregelmäßigen Verlauf nicht direkt extrapoliert werden, dagegen indirekt. Es ist nämlich leicht möglich, die bezüglich Wellenlänge, Amplitude und Phase gut erfaßbaren Einzelwellen zu extrapolieren und die so extrapolierten Wellenstücke zu einer Ganglinie zusammenzusetzen.

7. Die kurzfristigen Prognosen, auch wenn sie meteorologische Elemente benützen, gestatten in der Regel die Voraussage einer bestimmten Abflußmenge auf einen bestimmten Zeitpunkt. Je länger die Prognosenfrist wird, um so weniger können bestimmte Angaben in bezug auf den Zeitpunkt oder die Abflußmenge gemacht werden, und die Prognose nimmt immer mehr die Form einer Warnung an, z. B. vor einem Hochwasser, oder von einer mehr allgemeinen Beschreibung des Abflußcharakters in einem zukünftigen Zeitabschnitt.

III. Besondere Eignung von Abflußmengenbeobachtungen für Untersuchungen über den Wechsel trockener und nasser Zeitabschnitte

1. *Wanner* (Lit. 49) weist darauf hin, daß die Hauptschwierigkeit, Methoden der mathematischen Statistik zur Untersuchung *meteorologischer Reihen* verwenden zu können, in der Inhomogenität dieser Reihen liegt. Neue Instrumente oder Beobachtungsmethoden, selbst ein Beobachterwechsel können ganz *beträchtliche Inhomogenitäten* in einer Beobachtungsreihe zur Folge haben. Besonders wird sich auch der Einfluß des Geländes (orographischer Einfluß) stark bemerkbar machen, denken wir z. B. an den extremen Fall, welcher in verschiedenen Gebirgstälern auftritt, daß ein Bergkamm überhaupt jede Sonnenbestrahlung während einer längeren Zeit im Winter abhält.

2. Es fällt denn auch auf, daß bei der Untersuchung verschiedener Niederschlagsreihen auf das Vorhandensein von verborgenen Periodizitäten einander widersprechende Resultate gefunden werden. Bei den einen bekanntgegebenen Reihen, z. B. von *Seidel* (Lit. 27) für Rom, Warschau, Tilsit oder von *W. v. Keßlitz* (Lit. 24) für Stationen in den Alpen und dem Alpenvorland Österreichs, wird das Vorhandensein von Periodizitäten gemeldet, während bei andern veröffentlichten Reihen, z. B. durch *Loh* (Lit. 25) für Darmstadt, keine Periodizitäten gefunden wurden.

Es mag dies, abgesehen vom Einfluß, den die zur Anwendung gelangten Berechnungsmethoden hatten, in der Inhomogenität meteorologischer Reihen und einem starken Anteil aperiodischer Bestandteile begründet

sein. Man kann sich vorstellen, daß periodische Erscheinungen in einzelnen meteorologischen Reihen auch stark durch allenfalls vorhandene und variable Überlagerungen verschiedener Klimatypen gestört und verwischt werden.

3. a) Gute, durch sichere Beobachtungen und Messungen erhaltene *Abflußmengenreihen* dürften in mancher Hinsicht ausgeglichener sein als meteorologische Reihen.

b) Der Einfluß der Instrumente, der Beobachtungs- und Meßmethoden, der Beobachter, der Meßstelle ist bei guten Abflußmengenbestimmungen von untergeordneter Bedeutung im Vergleich zu derjenigen bei der Niederschlags- und Temperaturmessung; z. B. kann eine Verlegung einer an und für sich guten Wassermeßstation um eine relativ kleine Strecke an einem Flusse, abgesehen vom Falle, daß auf dieser Strecke bedeutende Zubringer einmünden, keinen derart einschneidenden Einfluß haben wie die Verlegung einer Niederschlags- oder Temperaturmeßstation innerhalb ein und derselben Ortschaft oder sogar innerhalb ein und desselben Grundstückes. Abflußbeobachtungen vor und nach der Verlegung können somit zu einer homogenen Reihe vereinigt werden.

c) Zudem wird in den *Abflußmengen* eine Art *Resultierende* der über ein relativ großes Gebiet sich auswirkenden meteorologischen Elemente erfaßt. Durch diese Integration über ein relativ großes Gebiet werden die lokalen aperiodischen Störungen besser ausgeglichen und die regelmäßigen Erscheinungen hervorgehoben. Um einen ähnlichen Ausgleich zu erhalten, müßte man bei der Untersuchung meteorologischer Elemente schon zahlreiche über ein größeres Gebiet verteilte Reihen zu einer Reihe zusammenfassen.

d) Kennzeichnend in dieser Hinsicht ist z. B., daß *v. Keßlitz* (Lit. 15 und 24) für die Abflußmengen der Mur die Periodizitäten soweit herausarbeiten konnte, daß es ihm, gestützt darauf, möglich war, Prognosen aufzustellen, während er für die Niederschlagsmessungen im Murgebiet wohl Perioden gefunden hat, die jedoch mit so großer Unsicherheit und so starken Streuungen behaftet waren, daß eine Prognose nicht in Frage kommen konnte. V. Keßlitz weist dabei ausdrücklich auf die starke Inhomogenität der verwendeten und zur Verfügung stehenden Reihen hin.

4. a) Der Ausgleich von Störungen wird in der Regel um so besser sein, je größer das Einzugsgebiet sein wird; es ist nämlich auffallend, wie in der Schweiz, wo sich verschiedene Klimatypen überlagern, innerhalb eines größeren Einzugsgebietes die Abflüsse aus kleineren Einzugsgebieten sich in ihrem Verhalten, z. B. in bezug auf die Abweichung vom langjährigen, «normalen» Mittel, voneinander unterscheiden können, wobei die Ursache dieses verschiedenen Verhaltens z. B. in einer ungleichförmigen Verteilung der Niederschläge gefunden werden kann. Einzelne, besonders heftige Starkregen lokaler Natur können auf die Gesamtabflußmenge eines kleinen Einzugsgebietes einen ganz erheblichen Einfluß haben.

In der hydrographischen Literatur (z. B. Lit. 17) wird etwa der Meinung Vorschub geleistet, zur Feststellung periodischer Vorgänge des Abflusses und zum Aufbau einer darauf beruhenden Prognose würden sich nur Abflüsse aus Seengebieten eignen, wie sie von Streiff und Wallén untersucht worden sind und wo ein besonders guter Ausgleich lokaler Unterschiede stattfindet. Inzwischen haben jedoch die frühern Untersuchungen für die Mur (v. Keßlitz) und die vorliegenden für den Rhein bei Basel gezeigt, daß solche Arbeiten auch bei andern Flüssen Aussicht auf Erfolg haben. Beim Rhein bei Basel haben die in seinem Einzugsgebiet liegenden Seen, wie wir noch sehen werden, keinen wesentlichen Einfluß auf mehrjährige Perioden.

b) Um das Problem der Periodizität der Abflußmengen weiterzuverfolgen, wird es sogar gegeben sein, auch Abflüsse aus einem ausgewählten kleineren, aber besonders charakteristischen Einzugsgebiete — wir denken hier vor allem an Gletscherabflüsse — zu untersuchen, um so der Lösung der Frage näher zu kommen, welche Einflüsse hinter den Periodizitäten stehen.

c) Selbstverständlich wird man jede Abflußreihe vor ihrer Verwendung eingehend auf ihre Homogenität prüfen müssen. Einflüsse infolge menschlicher Eingriffe, wie es die Erstellung von Stauseen, die Durchführung von Seeregulierungen und Flußkorrektionen sind, müssen untersucht und wenn nötig eliminiert werden.

IV. Vergleich zwischen den Ergebnissen von Untersuchungen verschiedener Forscher, insbesondere zwischen den Ergebnissen der Untersuchungen von meteorologischen Elementen einerseits und von Abflußmengen anderseits

1. Nachdem wir für den Rhein bei Basel ausgeprägte Periodizitäten gefunden haben, erscheint es natürlich sehr reizvoll, Vergleiche mit Periodizitäten zu ziehen, welche anderswo für meteorologische und hydrographische Vorgänge festgestellt worden sind. Ein solcher Vergleich müßte aber sehr sorgfältig durchgeführt werden. Ein flüchtiger Vergleich könnte zu falschen Hoffnungen oder auch unnötigen Enttäuschungen führen und der Periodenforschung schaden.

2. Auf Grund der Darlegungen im vorangehenden Abschnitt ist leicht einzusehen, daß zuerst die Unterlagen, von welchen ausgegangen wurde, auf ihre Vergleichbarkeit und Gleichwertigkeit zu überprüfen sind, bevor die Ergebnisse eingehend verglichen werden können. Wir werden in vorliegender Arbeit auf Seite 100 noch zeigen, welche bedenklichen Mängel den von *Brückner* benützten hydrographischen Unterlagen zum Teil anhaften, die wir dank eingehender Kenntnis derselben überprüfen konnten. Es ist denkbar, daß auch meteorologischen Unterlagen, von welchen ausgehend Untersuchungen über die Periodizität durchgeführt worden sind, Mängel anhaften, weshalb die Konstanten der gefundenen Periodizitäten fehlerhaft sind.

3. Wie wir bei der Besprechung bisher angewendeter Methoden zur Aufdeckung hydrographischer Periodizitäten noch sehen werden, ist es möglich, daß bei der Ermittlung der Konstanten erhebliche Unsicherheiten auch infolge ungenügender Berechnungsmethoden entstehen.

4. Meteorologische, astronomische und hydrographische Periodizitäten können schon darum nicht ohne

weiteres miteinander verglichen werden, weil wir nicht oder doch nur ungenau wissen, auf welche Weise und wie streng die Vorgänge miteinander gekoppelt und ob Phasenverschiebungen je nach der geographischen Lage der Beobachtungsstationen vorhanden sind. Auf solche Phasenverschiebungen in Funktion der geographischen Lage weisen *Baur* (Lit. 37) und *Dilger* (Lit. 22) hin. Genauere Kenntnisse darüber, wie die Periodizitäten verschiedener Vorgänge gekoppelt sind, sowie über systematische geographisch bedingte Phasenverschiebungen können nur erhalten werden, wenn die verschiedenen Ergebnisse eingehend verglichen werden. Das setzt aber voraus, daß die Konstanten der gefundenen Periodizitäten genügend genau ermittelt worden sind und man einen Einblick in die Genauigkeit dieser Ermittlung hat. Sonst können leicht systematische und fehlerhafte Unterschiede miteinander verwechselt oder wenigstens nicht auseinandergehalten werden.

5. Ein eingehender Vergleich zwischen den Ergebnissen für den Rhein bei Basel und den Ergebnissen früherer Arbeiten, die auf Grund von andern Beobachtungsreihen durchgeführt worden sind, würde somit aus den vorstehend genannten Gründen einen derart großen Aufwand erfordern, daß es sich um eine besondere, weit über den Rahmen der vorliegenden Untersuchungen hinausgehende Aufgabe handelt. Diese Aufgabe dürfte übrigens kaum in die Kompetenz eines einzelnen allein fallen; denn die zuverlässige Beurteilung der Unterlagen bedarf der Spezialkenntnisse, über welche bei meteorologischem Material nur der Meteorologe, bei hydrographischem dagegen nur der hydrographisch Geschulte verfügen.

6. a) Wird bei einer Untersuchung eine Periodizität mit bestimmter Wellenlänge gefunden und ist auch bei andern Untersuchungen auf Grund von verschiedenem Material und für verschiedene Orte eine ähnliche Periodizität von ungefähr gleicher Wellenlänge gefunden worden, so darf darauf als ein Zeugnis für die Realität dieser Periodizität hingewiesen werden. Dieser Hinweis ist selbst dann zulässig, wenn bei den verschiedenen Untersuchungen sich für die Phase und Amplitude nicht übereinstimmende Werte ergeben und auch wenn die Wellenlänge nicht genau identisch erhalten wird; denn, wie bereits erwähnt, können solche Unterschiede durch eine mit erheblichen Fehlern behaftete Konstantenbestimmung oder allfällig durch systematische, geographisch bedingte Ursachen entstehen.

b) Soweit sie als begründet betrachtet werden dürfen, werden wir uns deshalb in vorliegender Arbeit mit allgemeinen Hinweisen auf anderswo gefundene Periodizitäten ähnlicher Art begnügen müssen, ohne in Diskussionen über Einzelheiten, z. B. über Phasenverschiebungen, eintreten zu können.

c) Was zukünftige Arbeiten anbetrifft, so erscheint es uns vom ingenieurwissenschaftlichen Standpunkt aus dringender zu sein, zunächst weitere vorhandene gute Abflußmengenreihen schweizerischer Gewässer auf Periodizitäten hin zu analysieren — was eine sehr große Arbeit erfordert—, als vorerst ebenfalls sehr zeitraubende eingehende Vergleiche mit andern Arbeiten durchzuführen. Indem weitere Abflußmengenreihen analysiert werden, wird es wahrscheinlich möglich sein, die unsern Abflußvorgängen innewohnenden Periodizitäten noch genauer zu erfassen. Werden nämlich gleichartige Periodizitäten bei mehreren Abflußmengenstationen gefunden und je durch eine Formel erfaßt, so können die für eine bestimmte Periodizität bei den verschiedenen Stationen gefundenen Formeln zu einer einzigen Formel vereinigt werden. Dabei wird ein Ausgleich der Fehler eintreten, welche den Konstanten der Formeln für die einzelnen Stationen anhaften. Durch ein solches Vorgehen dürfte sich ein erheblicher Nutzen wissenschaftlicher und praktischer Art (Voraussage) erzielen lassen.

V. Über den Begriff der Periodizität und ihrer Realität

1. a) Durch die Messung der *Abflußmengen* eines Flusses in Abhängigkeit von der Zeit erhalten wir eine *empirische Funktion*, welche wir zahlen- oder kurvenmäßig darstellen können. Wir stehen nun vor der Frage, ob dieser empirischen Funktion mathematisch erfaßbare Gesetzmäßigkeiten, insbesondere Periodizitäten, zugrunde liegen.

Wenden wir zunächst unsere Aufmerksamkeit *mehrjährigen Periodizitäten* des Abflußvorganges zu. Es wäre willkürlich, wenn man von vornherein Zusammenhänge mit andern Erscheinungen, z. B. der Periodizität der Sonnenfleckenhäufigkeit, annehmen und darauf die Untersuchungen aufbauen würde. Allerdings wird die Existenz einer Periodizität der Temperatur und des Niederschlages von ähnlich großer Wellenlänge wie jene der Periodizität der Sonnenfleckenhäufigkeit von verschiedenen Forschern als gesichert angesehen; doch sind die physikalischen Zusammenhänge zwischen dem Abflußvorgang einerseits und dem Niederschlag und der Temperatur anderseits derart verwickelter Natur, daß man nicht einfach davon ausgehen kann, im Abflußvorgang eine gleiche Periodizität wie bei Niederschlag und Temperatur vorauszusetzen und z. B. durch die harmonische Analyse Phase und Amplitude dieser Periodizität zu bestimmen.

Wir werden deshalb Methoden anwenden, welche in bezug auf Periodenlänge, Phase und Amplitude allfälliger Periodizitäten völlig voraussetzungslos sind. Eine willkürliche Voraussetzung machen wir allerdings bei der Analyse, nämlich indem wir annehmen, daß die Periodizitäten die Form von einfachen Sinuslinien haben. Es wird nötig sein, weiter unten auf diesen Punkt zurückzukommen.

b) Etwas anders würden die Verhältnisse liegen, wenn wir uns mit der jährlichen Schwankung der Abflußmenge beschäftigen würden. Bei einem Fluß von alpinem Charakter (Gletscher- und Firnschmelze) ist die Abhängigkeit der Abflußmenge von dem jahreszeitlichen Wechsel der Temperatur deutlich ersichtlich, so daß von vornherein physikalisch begründete Annahmen über die Wellenlänge von Periodizitäten als möglich erscheinen.

Doch beschäftigt uns diese Frage hier nicht weiter. Bei unsern Untersuchungen über mehrjährige Periodizitäten des Abflußvorganges werden wir, mit Ausnahme eines Falles, von den Jahresmitteln der Abflußmengen ausgehen; in diesem einen Ausnahmefall wird von Vierteljahresmitteln Gebrauch gemacht. Durch die Mittelbildung wurde die tägliche und bei den Jahresmitteln auch die jährliche Periode von vornherein ausgeschaltet;

denn, wie leicht einzusehen ist, sind in einer auf diese Art durch Mittelbildung entstandenen Zahlenreihe keine Periodizitäten mehr enthalten, deren Wellenlänge gleich dem Intervall der Mittelbildung ist. Soweit Vierteljahresmittel zur Anwendung gekommen sind, wurden sie vorher rechnerisch auch von der jährlichen Periode (Jahresgang) des Abflußvorganges befreit.

2. a) Das *eine Ziel* unserer Untersuchungen wird also sein, abzuklären, ob die empirische Funktion der jährlichen Abflußmengen des Rheins bei Basel mathematisch durch eine oder mehrere periodische Funktionen dargestellt werden kann.

Dadurch aber, daß eine empirische Funktion so dargestellt werden kann, ist noch lange nicht gesagt, daß diese mathematischen Ausdrücke den wirklichen naturgesetzlichen Sachverhalt wiedergeben — und wir es nicht mit einer mehr oder weniger guten Interpolationsformel zu tun haben, welche nur innerhalb des Beobachtungsbereiches gilt. *Stumpff* (Lit. 3) weist denn auch ausdrücklich darauf hin, daß erst die *Extrapolation der Formel über den Beobachtungsbereich hinaus* und ihr Vergleich mit späteren Beobachtungen (Eintreffen oder Nichteintreffen von Voraussagen) eine *endgültige* Entscheidung erlaubt oder auch nur eine Verdichtung der Gründe herbeiführen kann, welche für eine bestimmte Form der Gesetzmäßigkeit sprechen. Wie die Erfahrung lehre, habe die gute Darstellbarkeit einer Beobachtungsreihe durch eine einfach gebaute periodische Funktion schon oft zur vermeintlichen Entdeckung von Periodizitäten geführt, deren Realität spätern kritischen Untersuchungen nicht standgehalten habe. Gerade in der Periodenforschung sei besondere Vorsicht am Platze.

b) Gefundene Periodizitäten innerhalb des Beobachtungsbereiches könnten möglicherweise durch das Spiel eines merkwürdigen Zufalls entstanden sein. Die Wahrscheinlichkeitstheorie gibt nun die Mittel in die Hand (durch die bereits angedeuteten, auf *Schuster* zurückgehenden Methoden), um schon *a priori* zu berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit für das Zustandekommen der gefundenen Periodizität durch Zufall ist. Je kleiner *diese* Wahrscheinlichkeit ist, um so größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß die gefundene Periodizität «reell» ist. Das *weitere Ziel* unserer Untersuchungen wird also sein, *a priori* zu berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit für die Realität allfällig gefundener Periodizitäten ist. Wir wissen dann, wie weit wir berechtigt sind, jeweilen eine Extrapolation aus dem Beobachtungsbereich — welcher Jahr für Jahr länger wird — in die Zukunft vorzunehmen, ohne daß wir vorerst abwarten müssen, bis wir in genügender Anzahl Extrapolationen mit späteren Beobachtungen verglichen haben; denn selbst das positive Ergebnis *eines* solchen Vergleiches für die nächsten Jahre wird noch keine absolute Gewißheit bringen. Auch hier könnte ein eigenartiger Zufall vorliegen. Der Vergleich der Extrapolation mit späterer Beobachtung wird während längerer Zeit durchgeführt werden müssen, bis auf diese Weise *a posteriori* die Realität der gefundenen Periodizitäten beurteilt werden kann. Es ist darum sehr wichtig, bereits Schlüsse a priori auf Grund der Wahrscheinlichkeitstheorie ziehen zu können. Wir werden dabei das Beobachtungsmaterial, wie bereits auf Seite 8 erwähnt, u. a. auch durch *Verteilungskurven* untersuchen müssen und dabei die Berührung mit den Arbeiten von *Graßberger* (Lit. 6; 7; 8) herstellen, in welchen die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf den Abflußvorgang angewendet wird.

Es handelt sich also bei der Feststellung von Periodizitäten des Abflußvorganges um den typischen Fall, ein statistisches Gesetz aufzustellen. In bezug auf solche statistische Gesetze schreibt Prof. *Saxer* (Lit. 45): «Im Sinne einer statistischen Aussage sind alle unsere wissenschaftlichen Prognosen (und Naturgesetze bedeuten nichts anderes) mit einer Wahrscheinlichkeit behaftet, die allerdings in gewissen Fällen praktisch 1 betragen kann, was dann einem Gesetze in seinem guten, klassischen Sinn entspricht.»

Zunächst werden wir also nur auf Grund der Wahrscheinlichkeitstheorie die unsern Periodizitäten des Abflußvorganges a priori zukommende Wahrscheinlichkeit angeben können und erst eine längere Erfahrung, gewonnen durch Vergleiche extrapolierter Werte mit spätern Beobachtungen, wird a posteriori endgültig zeigen, ob und wie weit wir uns der Wahrscheinlichkeit 1 nähern werden. Eines sei bereits hier ausdrücklich betont: Die durch vorliegende Arbeit gefundenen Periodizitäten des Rheins bei Basel erleiden von Zeit zu Zeit eine Änderung. Wenn wir also auch dazu kommen, sie innerhalb eines bestimmten Zeitabschnittes als reell anzusehen, so besteht doch immer die Wahrscheinlichkeit, daß sich eine oder mehrere der Periodizitäten plötzlich ändern, so daß eine Prognose zukünftiger Abflußmengen auf Grund dieser Periodizitäten stets mit einer kleineren Wahrscheinlichkeit als 1 behaftet sein wird.

3. a) Den Schwankungen der Abflußmengen des Rheins bei Basel liegen somit nicht absolut *rein periodische Vorgänge* zugrunde. Letztere sind Vorgänge, welche sich zeitlich rück- und vorwärts *beliebig* weit über das Beobachtungsintervall hinaus durch Extrapolation in Übereinstimmung mit ihrem wahren Verlauf darstellen lassen, also während beliebig langer Zeiten *persistent*, d. h. beständig vorhanden, und in bezug auf ihre spezifischen Konstanten unveränderlich sind. Persistenz während einer bestimmten Beobachtungsdauer ist noch keine Garantie für eine Persistenz während beliebig langer Zeitabschnitte, also für das Vorhandensein einer rein periodischen Funktion im strengsten Sinne des Wortes.

b) Mit Vorgängen, welche mit großer Strenge, wenn auch nicht absolut, rein periodisch sind, hat es die Astronomie zu tun. Sie kann deshalb astronomische Vorgänge mit großer Sicherheit weit über den Beobachtungszeitraum hinaus berechnen (z. B. Voraussage von Sonnen- und Mondfinsternissen auf Jahrhunderte hinaus). Bei irdischen Vorgängen müssen wir den Begriff der reinen Periodizität einschränken, um überhaupt von einer solchen sprechen zu können, und müssen eine *praktische Definition* geben. *Stumpff* (Lit. 3) bezeichnet in diesem praktischen Sinne solche empirische Funktionen als rein periodisch, für welche die mathematische, periodische Funktionsgleichung innerhalb eines endlichen Zeitraumes erfüllt ist, der im Verhältnis zur Grundperiode groß ist. Auch wenn die mathematische, periodische Funktionsgleichung nur innerhalb gewisser Genauigkeitsgrenzen erfüllt ist, die durch die Wirkung zufälliger Beobachtungsfehler oder störender Einflüsse von außen bestimmt sind, so spricht er im praktischen Sinne noch von rein periodischen Funktionen. Als Beispiele seien genannt die Schwingung eines Pendels, einer Stimmgabel oder allgemein die Schwingungen eines Luftteil-

chens bei der Entstehung harmonischer Töne oder Akkorde. Der Zusatz «*harmonisch*» kennzeichnet dabei bereits diejenigen Schallschwingungen, deren Schwingungsbilder sich als rein periodische Funktionen im praktischen Sinne darstellen lassen.

4. Im vollständigen Gegensatz zu der Klasse der rein periodischen Erscheinungen steht die Klasse der rein *aperiodischen Vorgänge*, deren Einzelwerte rein zufällig und voneinander unabhängig entstanden sind (z. B. eine Folge reiner *Beobachtungsfehler*).

Graßberger (Lit. 6) neigt, wie wir sehen werden, auf Grund ungenügender Überlegungen zu Unrecht von vornherein zum Schluß, die mittleren jährlichen Abflußmengen seien sowohl nach ihrer Größe wie auch nach ihrer Reihenfolge als reines Zufallsprodukt und allfällige doch vorhandene periodische Bestandteile seien als nicht wesentlich zu betrachten. In der Natur sind eben Vorgänge häufig, welche als Gesamtvorgang nicht periodisch sind, sondern alle Merkmale einer zufälligen Wertereihe aufweisen, sich jedoch additiv aus mehr oder weniger rein periodischen Teilvorgängen von bedeutendem Anteil, sowie aus aperiodischen Bestandteilen zusammensetzen. Zu dieser Art von Vorgängen gehört, wie unsere Untersuchungen zeigen werden, der Abflußvorgang des Rheins bei Basel.

5. a) Zwischen den rein periodischen und den rein aperiodischen Vorgängen liegt die große Klasse der «*quasipersistenten*» *Periodizitäten* und der «*quasiperiodischen*» *Vorgänge* (Bartels Lit. 1), die in vielen Naturvorgängen vorkommen.

«*Quasipersistente*» *Periodizitäten* nennt man solche Vorgänge, die sich mehr oder weniger rein periodisch nur während bestimmter Zeitabschnitte verfolgen lassen, dann verschwinden und allfällig durch Periodizitäten anderer Art abgelöst werden. Sie sind also nur innerhalb bestimmter Zeitabschnitte persistent.

Als *quasiperiodisch* werden Vorgänge bezeichnet, die sich wohl über derart lange Zeitabschnitte, z. B. schon vom Zeitpunkt an, seit dem überhaupt Beobachtungen vorliegen, feststellen lassen, so daß sie in dieser Beziehung also als persistent erscheinen, deren Konstanten aber je einzeln oder gesamthaft zeitlichen Änderungen unterworfen sind. Dabei besteht ein sehr großes Spiel der Möglichkeiten, so daß die Begriffe der Quasiperiodizität und Quasipersistenz ineinanderfließen. In allen diesen Fällen ist man nicht berechtigt, eine Extrapolation auf beliebig lange Zeit hinaus vorzunehmen und von Voraussagen auf längere Zeit ohne weiteres zu erwarten, daß sie mit der Wahrscheinlichkeit 1 zutreffen.

b) Ob ein Vorgang rein periodischer oder quasiperiodischer Natur ist, bedeutet kein Kriterium für die Realität der gefundenen Periodizität. Immerhin läßt sich leicht einsehen, daß die Realität einer Periodizität von bestimmter konstanter oder auch variabler Amplitude um so wahrscheinlicher erscheint, je länger sich diese Periodizität zeitlich ohne relativ große Änderungen ihrer sonstigen Konstanten verfolgen läßt. Wenn sich also verborgene Periodizitäten, aus welchen sich der Abflußvorgang außer aperiodischen Beimischungen zusammensetzt, während z. B. 100 Jahren als persistent erweisen, so ist ihre Realität natürlich bedeutend wahrscheinlicher, als wenn die Dauer der Periodizität nur wenige Jahre beträgt.

c) Es gibt jedoch Vorgänge, welche zu den *quasiperiodischen* zu rechnen sind, aber mit einer derartigen Deutlichkeit seit langer Zeit ununterbrochen auftreten, daß an ihrer Realität nicht gezweifelt werden kann. Das berühmteste Beispiel eines solchen Vorganges ist wohl die «elfjährige» *Periodizität* der *Häufigkeit der Sonnenflecken*, welche von *Wolf* zurück bis zum Jahre 1610, dem Zeitpunkt der Entdeckung der Sonnenflecken überhaupt, nachgewiesen werden konnte. Es ist ein Vorgang, welcher mit sehr großer Wahrscheinlichkeit als unbeschränkt andauernd, also als «persistent» erscheint; der Abstand zweier aufeinanderfolgender Minima oder Maxima (variiert für letztere von 7,3 bis 17,1 Jahre) ist dagegen nicht konstant (vgl. Tafel XIX) und die Größe der einzelnen Maxima ist starken Schwankungen unterworfen, so daß der Vorgang quasiperiodischer Natur ist. Die «elfjährige» Quasiperiodizität der Sonnenfleckenhäufigkeit ist derart, daß eine Darstellung vermittels rein periodischer Funktionen (Sinuslinien) nicht dem wahren Charakter zu entsprechen scheint und von *Waldmeier* (Lit. 46) durch eine andere von ihm gefundene Darstellungsart ersetzt worden ist, auf welche wir im vierten Teil noch näher zu sprechen kommen werden.

d) Bei unseren Untersuchungen über den *Abflußvorgang des Rheins* werden wir verborgene Periodizitäten finden, deren Realität nicht so sicher ist wie jene der «elfjährigen» Sonnenfleckenperiode. Die für den Rhein gefundenen Periodizitäten treten aber während längerer Zeit rein periodisch auf, und deren jeweiligen Änderungen sind relativ klein, so daß sie sich sehr nahe bei der Klasse der persistenten, rein periodischen Vorgänge einordnen. Doch sind wir nicht sicher, ob jede dieser sinusförmigen Periodizitäten für sich wirklich besteht und ob es sich nicht um die Zerlegung eines, wie die «elfjährige» Sonnenfleckenperiodizität, nicht sinusförmig verlaufenden Vorganges oder eher mehrerer solcher Vorgänge handelt; denn jede empirische Funktion kann innerhalb eines gegebenen Intervalles mit beliebiger Genauigkeit als Summe von Sinuslinien dargestellt werden, womit, rein mathematisch gesehen, alle Funktionen als Überlagerung von periodischen erscheinen. *Bartels* (Lit. 2) weist darauf hin, daß dies leider immer wieder nicht beachtet werde, woraus sich die große Fülle von Scheinperiodizitäten erkläre, welche in der geophysikalischen Literatur gefunden werden. Die gefundenen Periodizitäten müssen deshalb, wie wir oben dargelegt haben, durch wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen auf ihre Realität überprüft werden, wobei wir allerdings noch keine Gewißheit über die genauen Formen der Periodizitäten erhalten. Dafür bedarf es weiterer spezieller Untersuchungen, wie sie *Waldmeier* anhand von gesetzmäßigen und physikalischen Erscheinungen, sowie plausibler Hypothesen für die Sonnenflecken durchgeführt hat. Das Abflußproblem scheint jedoch noch zu wenig erforscht zu sein, um heute die physikalischen Gründe — wenn auch nur in Form von plausiblen Hypothesen — angeben zu können, auf welche das Entstehen der Periodizitäten zurückzuführen ist.

Nachdem aber z. B. für den Rhein bei Basel verborgene Periodizitäten gefunden worden sind, könnte vielleicht versucht werden, die schwierige Aufgabe zu lösen, *Gründe zu finden für diese Periodizitäten* und anhand dieser Gründe die wirkliche Zahl und genaue Form der Periodizitäten mit größerer Sicherheit abzuklären. Heute ist vielleicht diese Lösung noch unmöglich.

e) Soweit dies begründet erschien, haben wir übrigens weniger ausgeprägte Periodizitäten von erhöhtem quasipersistentem Charakter, welche wir für den Rhein bei Basel gefunden haben, mit benachbarten, kräftigeren, mehr persistenten Perioden vereinigt, also eine Superposition zu periodischen, nicht mehr streng nach einer Sinuslinie verlaufenden Erscheinungen vorgenommen, deren Amplitude und Periodenlänge nicht genau konstant, die aber doch von sinusoidalem Charakter sind.

Die vorläufige Annahme eines sinusoidalen Verlaufes ist insofern gerechtfertigt, als die Sinuswelle die einfachste rein periodische Funktion darstellt und es mangels weiterer Anhaltspunkte keinen Sinn hat, eine komplizierte Annahme zu treffen.

f) Neigt man dazu, die Periodizitäten des Abflußvorganges zunächst mit Gleichgewichtsstörungen des allgemeinen Luftkreislaufes in Zusammenhang zu bringen, so erscheint die Annahme eines sinusoidalen Verlaufes solcher Periodizitäten auch von diesem Gedanken ausgehend zunächst als gerechtfertigt. Auch allfällige kosmische Ursachen werden sich in der Regel zunächst in Änderungen der atmosphärischen Zirkulation auswirken und Störungen des Gleichgewichtszustandes dieses Strömungssystems hervorrufen. Störungen des Gleichgewichtszustandes rufen jedoch «Schwingungen», also periodische Erscheinungen von sinusoidaler Form, hervor, und *Baur* (Lit. 37) führt aus, daß sich aus diesem Grunde auch dem heutigen wissenschaftlichen Wetterforscher der Gedanke aufdränge, daß möglicherweise Periodizitäten vorhanden seien.

Würde es sich dabei um einmalige «Störungen» handeln, so hätte man es mit «gedämpften Schwingungen», also mit einem abklingenden quasiperiodischen Vorgang, zu tun, dagegen bei Ursachen, welche selbst mehr oder weniger periodischen Charakter besitzen (z. B. in der Periodizität der Sonnenfleckenhäufigkeit zum Ausdruck kommend), mit periodischen Erscheinungen von der Art der «erzwungenen Schwingungen».

6. Zwischen einem quasiperiodischen oder quasipersistenten Vorgang und einer Folge aperiodischer rein zufälliger Werte von der Art reiner Beobachtungsfehler besteht ein großer und einschneidender Unterschied. Zwischen ihnen liegt als Übergangsbereich eine Klasse von Wertefolgen, welche eine *Erhaltungstendenz* zeigen, aber sonst keine Beziehung zu gesetzlich geregelten Ursachen haben (Lit. 3, Seiten 93f.). Der glatte Verlauf solcher Wertefolgen kommt nur dadurch zustande, daß eine Abhängigkeit besteht zwischen direkt aufeinanderfolgenden Werten infolge einer Erhaltungstendenz oder vielleicht besser ausgedrückt, infolge eines Beharrungsvermögens des Vorganges. Zum Beispiel wird auch bei rein aperiodischen Ursachen von Abflußmengenänderungen ein Limnigraph, abgesehen von der Pulsation des Wassers und von Welleneinflüssen, eine je nach der Schroffheit der ursächlichen Einwirkung allerdings mehr oder weniger glatte Registrierkurve liefern, ohne daß aber den kurvenförmig vor sich gehenden Auf- und Abschwankungen ein periodischer Vorgang zugrunde liegt. *Wo eine zu untersuchende Wertreihe eine solche Erhaltungstendenz aufweist, muß sie bei der wahrscheinlichkeitstheoretischen Überprüfung der Realität gefundener Periodizitäten berücksichtigt werden.* Bei unseren Untersuchungen der *mehrjährigen Schwankungen* der Abflußmengen des Rheins bei Basel, entstehend durch ein Zusammenwirken aperiodischer und quasiperiodischer Vorgänge, wobei letztere teilweise nahe der Klasse der persistenten Periodizitäten liegen, wird sich dies, wie wir sehen werden, als nicht notwendig erweisen.

Bei Untersuchungen über Periodizitäten, welche kürzere Wellenlängen aufweisen als die hier von uns untersuchten Periodizitäten, müßte eine Erhaltungstendenz sowie eine unsymmetrische Verteilung der Größe der Beobachtungswerte in bezug auf ihre Häufigkeit (unsymmetrische Verteilungskurven) berücksichtigt werden; denn es müßten dann als Unterlagen Monats- oder gar Tagesmittel der Abflußmengen verwendet werden, welche, im Gegensatz zu den Jahresmitteln, eine Erhaltungstendenz aufweisen. Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen würden dadurch bedeutend verwickelter und umfangreicher. Zudem müßten noch eingehende und zeitraubende hydrographische Untersuchungen über wasserwirtschaftliche Einflüsse auf die Monats- und Tagesmittel durchgeführt werden. Wir mußten uns deshalb auf die Untersuchung mehrjähriger Periodizitäten beschränken; eine Ausdehnung der Untersuchungen auf Periodizitäten von kürzerer Wellenlänge hätte weit über den Rahmen hinausgeführt, welcher einer Arbeit der vorliegenden Art zukommt.

II. TEIL

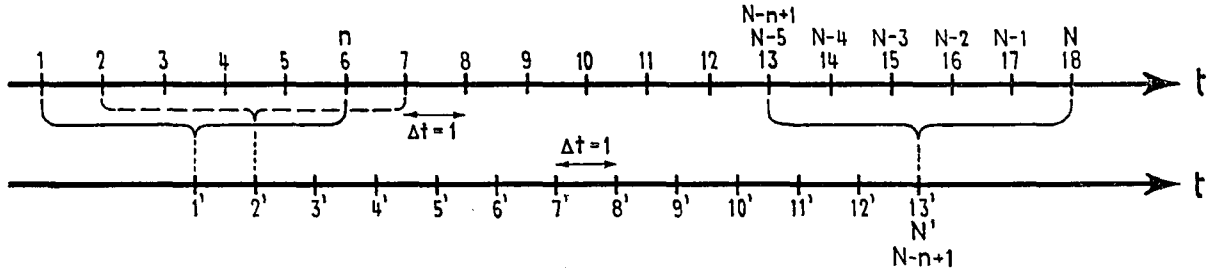
Die Untersuchungsmethoden

A. *Die Methoden bisheriger Untersuchungen über die Periodizität von Abflußmengen*

1. Allgemeines

In den bisherigen Untersuchungen über die Periodizität von Abflußmengen sind Verfahren angewendet worden, welche sich einer einfachen *Glättung* der Meßreihen bedienen. Die kurvenmäßige Darstellung der Abflußmengen in Funktion der Zeit zeigt im allgemeinen keinen glatten Verlauf, sondern zahlreiche kleinere und größere Schwankungen ergeben ein mehr oder weniger unregelmäßiges Bild. Betrachten wir z. B. die mittleren jährlichen Abflußmengen des Rheins bei Basel, welche, um ihre Eigenschaft als Mittelwerte zum Ausdruck zu bringen, auf Tafel XXI als Stufenzug dargestellt sind. Wir könnten die einzelnen Stufen auch durch Punkte ersetzen, welche auf gleicher Höhe wie die Stufen in der Mitte des Jahresintervalles liegen. Der Kurvenzug, welcher durch diese Punkte gezogen werden könnte, gäbe den zeitlichen Verlauf der Abflußmengen nach Ausschaltung der einjährigen (zwölfmonatigen) Schwankung (Jahresgang) wieder. Letztere ist durch die Jahresmittelbildung ausgeschaltet, wie wir nachfolgend sehen werden, weggeglättet worden. Wie leicht zu erkennen ist, würde sich aber nur zeitweise ein relativ «glatter» Kurvenzug ergeben, in den übrigen Zeiten wäre er sehr unregelmäßig. Wenn diese Unregelmäßigkeit die Folge des Zusammenwirkens verschiedener Periodizitäten und allfällig aperiodischer Bestandteile ist, so kann man durch eine *«Glättung»* der Meßreihe, welche man sich als Kurve dargestellt denke, die kurzperiodischen und aperiodischen Bestandteile mehr oder weniger eliminieren und dadurch langwellige Periodizitäten klarer hervortreten lassen.

Die einfachste Art der *Glättung* ist diejenige durch *übergreifende Mittelbildung*, bei welcher man gemäß nachstehender Skizze folgendermaßen vorgeht:



Für die Mittelbildung wird eine Intervallänge gewählt, welche n Meßwerte umfaßt (in obiger Skizze n = 6). Aus den ersten n zeitlich aufeinanderfolgenden Meßwerten (Meßwerte 1 bis 6 der obigen Skizze) bildet man den arithmetischen Mittelwert und schreibt diesen als geglätteten Wert dem mittleren Zeitargument des Intervalles zu, welches diese ersten n Meßwerte umfaßt (Punkt 1′ der obigen Skizze). Hierauf wird in gleicher Weise das arithmetische Mittel der n Meßwerte der Intervalle gebildet, welche sich ergeben, indem der Anfangspunkt des ersten Intervalles sukzessive um je einen Meßwert in Richtung der Zeitachse verschoben wird. (In obiger Skizze: Wert 2′ aus Werten 2 bis 7, Wert 3′ aus Werten 3 bis 8 usf.) Die zur Mittelbildung verwendeten Intervalle greifen somit ineinander über, weshalb man von übergreifender Mittelbildung spricht. Umfaßt die ursprüngliche Meßreihe total N Werte und werden je n Werte zur Glättung verwendet, so wird die geglättete Reihe nur noch aus $N' = N - n + 1$ Werten gebildet (in obiger Skizze $N = 18$, $n = 6$, $N' = N - n + 1 = 13$). Es gehen also $n - 1$ Glieder bei der Glättung verloren.

Umfassen die zur Mittelbildung verwendeten n Werte ein Intervall, dessen Länge gleich der Wellenlänge einer Periodizität ist, so enthält die geglättete Meßreihe diese Periodizität überhaupt nicht mehr (obengenannte Wegglättung des Jahresganges der Abflußmengen durch Bildung der Jahresmittel).

Ist in einer Meßreihe eine reine Sinuswelle enthalten und sind die Meßwerte noch mit größeren aperiodischen Bestandteilen von der Art zufälliger Fehler behaftet, so ergibt die graphische Auftragung der Meßwerte nur ein undeutliches Bild der Sinuswelle. Diese kann durch eine, wenn nötig mehrmals wiederholte Glättung mittels übergreifender Mittelbildung deutlicher herausgearbeitet werden. Die Amplitude der Sinuswelle wird aber durch die Glättung verkleinert, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht: Die gesuchte Sinuswelle habe die Form

$$f(t) = c \sin [\alpha t + \beta] \qquad (1)$$

wobei bedeutet: t die Zeit, c die Amplitude, α die *Kreisfrequenz*, aus welcher sich also die Wellenlänge (Periode) zu $p = \frac{2\pi}{\alpha}$ ergibt und β die Phasenkonstante (Anfangsphase).

Mit den gegebenen Meßwerten wird auch diese in den Meßwerten enthaltene Sinuswelle geglättet. Das *Glättungsintervall*, also jenes Intervall, welches zur Mittelbildung verwendet und durch die Meßreihe sukzessive verschoben wird, habe die Länge n, und sein mittleres Zeitargument sei gleich u. Verschieben wir dieses Intervall stetig längs der Zeitachse, so hat die geglättete Sinuswelle die Gestalt

$$f(u;n) = \frac{1}{n}\int_{u-\frac{n}{2}}^{u+\frac{n}{2}} f(t)\cdot dt = \frac{c}{n}\int_{u-\frac{n}{2}}^{u+\frac{n}{2}} \sin [\alpha t + \beta]\, dt =$$

$$= \frac{\sin \frac{\alpha \cdot n}{2}}{\frac{\alpha \cdot n}{2}} \cdot c \sin [\alpha u + \beta]$$

Die geglättete Kurve stellt also wiederum eine Sinuswelle mit gleicher Frequenz und Phase dar, die Amplitude wird aber verkleinert durch den Glättungsfaktor

$$G(n) = \frac{\sin \frac{\alpha \cdot n}{2}}{\frac{\alpha \cdot n}{2}} \qquad (2)$$

Bei der Glättung durch übergreifende Mittelbildung wird also, wie erwähnt, die Amplitude der herauszuschälenden Periodizität verkleinert.

2. Die von Brückner angewendete Methode

Bei seiner Untersuchung, ob die Schwankungen der Wasserstände von Flüssen und Seen eine sehr langwellige (säkulare) Periodizität enthalten, erprobte *Brückner* seine Methode auf Grund der Wasserstandsschwankungen des Bodensees. Er bildete für den Bodensee zuerst *übergreifende* Mittelwerte, indem er fortlaufend je fünf Jahresmittel zu einem Mittelwert zusammenfaßte und diesen als geglätteten Wert dem mittleren Jahr der jeweiligen Gruppe von fünf Jahren zuschrieb. Zum Vergleich bildete er dann noch sogenannte *Lustrenmittel*, d. h. er berechnete nur für jedes fünfte Jahr den Mittelwert der Gruppe von fünf Jahren, in deren Mitte sich das betreffende Jahr befindet. Brückner fand, daß die Übereinstimmung der durch übergreifende Mittelbildung geglätteten Kurve mit jener, welche nur durch Lustrenbildung geglättet wurde, so befriedigend sei, daß er bei andern Gewässern zur Abkürzung der Arbeit nur noch mit Lustrenmitteln, also mit einem einfachen, aber recht rohen Glättungsverfahren arbeitete. Einen Glättungsfaktor berücksichtigte er nicht.

3. Die von Streiff, v. Keßlitz und Novotny angewendeten Methoden

(Glättung durch übergreifende Mittelbildung und Schichtanalyse)

a) Beschreibung dieser Methoden

Bereits methodisch feiner als Brückner ging *Wallèn* vor, indem er durch übergreifende Mittelbildung, deren Intervall er systematisch änderte, verschiedene Perioden nach und nach entsprechend ihrer Wellenlänge isolieren und herausschälen konnte.

Streiff weist in seiner Studie (Lit. 29) zuerst mit Hilfe mathematischer Formeln auf die *selektive* Wirkung der Integration (Bildung übergreifender Mittel) und auch der Differentiation hin. Auf Grund obiger Gleichung (2) läßt sich diese selektive Wirkung auf einfache Weise wie folgt erkennen:

Bei einem gegebenen Wert n ist $\lim_{\alpha \to 0} G(n) = 1$, mit von Null an zunehmender Größe von α wird G (n) zuerst langsam und dann immer rascher kleiner und wird für $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ gleich Null. Mit weiterwachsendem α nimmt G (n) negative Werte an, erreicht jedoch den Wert -1 bei weitem nicht und wird mit $\alpha = \frac{4\pi}{n}$ wiederum Null. Wie also aus folgender Abb. 1 hervorgeht, in welcher G (n) in Funktion von α für n = 20 dargestellt ist, treten ein Hauptmaximum, ferner Nebenextreme von abklingendem Betrag, sowie Nullstellen auf. Letztere treten dort auf, wo $\alpha = \frac{2\pi}{n} \cdot \nu$ ($\nu = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \cdots$) ist.

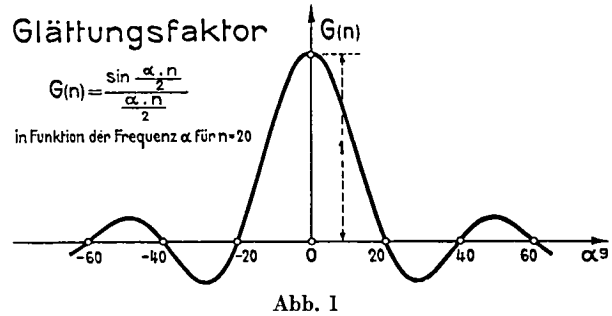


Abb. 1

Die Amplituden von langwelligen Perioden mit Frequenzen, welche bedeutend kleiner als $\frac{2\pi}{n}$ sind, werden also durch die Glättung wenig gedämpft und gegenüber den kurzwelligen Perioden, deren Amplituden stark verkleinert werden, hervorgehoben. Die kurzwelligen Perioden werden aber, wenn ihre Frequenz bei dem gewählten Wert von n nicht gerade einer der Nullstellen entspricht, nicht ganz zum Verschwinden gebracht. Um den Einfluß der kürzeren Wellen möglichst zum Verschwinden zu bringen und die längern Wellen infolgedessen möglichst unverzerrt zu erhalten, müssen daher mehrere Glättungen jeweilen mit verschieden großen Glättungsintervallen durchgeführt werden. Auf diese Weise kann also versucht werden, die längste Welle zu isolieren. Nach ihrer Isolierung und Rekonstruktion der richtigen Amplitude durch Berücksichtigung der den verschiedenen Glättungen entsprechenden Glättungs-

faktoren kann sie durch Subtraktion von den beobachteten Werten aus letztern eliminiert werden. Dann kann versucht werden, von den Restwerten (als Schicht oder Stratum bezeichnet) wiederum durch mehrere Glättungen die nächst kürzere Welle zu isolieren und abzuziehen und so weiterzufahren, bis als endgültiger Rest die unperiodischen Bestandteile übrigbleiben. Dieses Vorgehen ist von *Streiff* angewendet und als *Schichtanalyse* (Strato Analysis) bezeichnet worden (1926). Er hat dabei die Glättung in einfachster Weise durch übergreifende Mittelbildung oder die Bildung von Massen- oder Integralkurven vorgenommen.

Eine *Massen-* oder *Integralkurve* entsteht, indem die Beobachtungswerte fortlaufend addiert werden und die jeweilige Summe als Ordinate an Stelle des zuletzt hinzugezählten Beobachtungswertes aufgetragen wird. Die Integralkurve einer reinen Sinuslinie ist wiederum eine reine Sinuslinie von gleicher Frequenz, jedoch sind die entsprechenden Phasen um $1/4$ der Wellenlänge, also um $\frac{\pi}{2}$, gegeneinander verschoben; denn aus Gl. 1 ergibt sich für die Integralkurve

$$F(t^*) = c \int_0^{t^*} \sin[\alpha t + \beta]\, dt = \tag{3}$$

$$= \frac{c}{\alpha} \cdot \sin\left[\alpha t^* + \beta - \frac{\pi}{2}\right] + \frac{c}{\alpha} \cdot \cos\beta$$

Da $\frac{c}{\alpha} = \frac{p}{2\pi} \cdot c$ ist, so erkennt man, daß bei Vorhandensein verschiedener Periodizitäten diejenigen mit langen Wellen in der Massenkurve gegenüber den kurzwelligen hervorgehoben werden. Die Massenkurve wirkt also ebenfalls selektiv. Die Schichtanalyse mit Hilfe einfacher Glättungen durch übergreifende Mittelbildung ist auf Grund der sehr anregenden Streiff'schen Arbeit durch *von Keßlitz* für seine interessanten Untersuchungen übernommen worden, welche er zuerst (1934) über Niederschlagsperioden und dann (1938) über die Abflußperioden der Mur bei Bruck durchführte. *Novotny* (1939) verwendete bei seiner ebenfalls anregenden Studie über Niederschlagsschwankungen, sowie über die Schwankungen der Abflußmenge der Moldau und Elbe Integralkurven in einer speziell praktisch geeigneten Form.

b) Erörterung mit Ausblick auf neuere Methoden

Die Methode der Schichtanalyse mit Hilfe von primitiven Glättungen durch übergreifende Mittelbildung und die Methode der Integralkurven werden in einfachen Fällen gute Dienste leisten können. In verwickelteren Fällen, wenn mehrere, insbesondere stark benachbarte Perioden zusammenwirken oder große aperiodische Bestandteile vorhanden sind, sind diese Verfahren zur Trennung der Perioden voneinander oder von den aperiodischen Bestandteilen zu wenig leistungsfähig. Dies läßt sich leicht an fingierten Beispielen des Zusammenwirkens mehrerer einfacher Sinuslinien oder von Sinuslinien mit aperiodischen Bestandteilen verdeutlichen. Wir haben u. a. folgendes, uns später noch interessierendes fingiertes Beispiel einer Beobachtungsreihe von 48 Werten untersucht, welche sich aus einem periodischen und einem aperiodischen Bestandteil zusammensetzen. Der periodische Bestandteil entspricht einer einfachen Sinuslinie.

$$y = c \cdot \sin \alpha t = 10 \cdot \sin 72^0\, t = 10 \cdot \sin \frac{2\pi}{5{,}00}\, t \tag{4}$$

Die aperiodischen Werte η sind so ausgelost worden, daß sie den Charakter zufälliger Fehler besitzen. Ihre Streuung («mittlerer Fehler» des Einzelwertes) ist $\sigma = \pm\ 4{,}93$. Das Verhältnis zwischen Streuung σ des aperiodischen und der Amplitude c des periodischen Bestandteiles ist mit 0,493 kleiner als dasjenige, welches wir für die Periodizitäten der Abflußmengen des Rheins bei Basel finden werden; d. h. wenn wir nun feststellen, daß die Glättung mit übergreifenden Mittelwerten für vorliegendes Beispiel eine ungenügende Methode ist, so ist sie es noch viel mehr für die Behandlung der Abflußperiodizitäten des Rheins.

In Tabelle 1 sind die Werte y, η, $y' = y + \eta$ in drei Spalten zu je 16 Werten geordnet, zusammengestellt und in Abb. 2a (Seite 20) graphisch dargestellt worden.

y	η	$y' = y + \eta$	y	η	$y' = y + \eta$	y	η	$y' = y + \eta$
0,00	+10	+10,00	+ 9,51	+ 2	+11,51	+ 5,88	+ 4	+ 9,88
+ 9,51	−10	− 0,49	+ 5,88	+ 3	+ 8,88	− 5,88	− 1	− 6,88
+ 5,88	− 4	+ 1,88	− 5,88	+ 8	+ 2,12	− 9,51	−10	−19,51
− 5,88	+ 2	− 3,88	− 9,51	− 6	−15,51	0,00	+ 4	+ 4,00
− 9,51	+ 6	− 3,51	0,00	+ 5	+ 5,00	+ 9,51	− 4	+ 5,51
0,00	+ 4	+ 4,00	+ 9,51	− 4	+ 5,51	+ 5,88	− 1	+ 4,88
+ 9,51	− 8	+ 1,51	+ 5,88	− 3	+ 2,88	− 5,88	− 1	− 6,88
+ 5,88	+ 4	+ 9,88	− 5,88	+ 2	− 3,88	− 9,51	− 5	−14,51
− 5,88	− 4	− 9,88	− 9,51	− 4	−13,51	0,00	+ 1	+ 1,00
− 9,51	+ 8	− 1,51	0,00	− 2	− 2,00	+ 9,51	+ 5	+ 14,51
0,00	− 2	− 2,00	+ 9,51	+ 2	+11,51	+ 5,88	+ 2	+ 7,88
+ 9,51	− 6	+ 3,51	+ 5,88	+ 1	+ 6,88	− 5,88	− 2	− 7,88
+ 5,88	−10	− 4,12	− 5,88	+10	+ 4,12	− 9,51	− 2	−11,51
− 5,88	+ 2	− 3,88	− 9,51	+ 1	− 8,51	0,00	− 5	− 5,00
− 9,51	+ 3	− 6,51	0,00	− 1	− 1,00	+ 9,51	+ 2	+11,51
0,00	− 2	− 2,00	+ 9,51	+ 4	+13,51	+ 5,88	+ 5	+10,88

Tabelle 1

Fingiertes Beispiel einer Beobachtungsreihe, deren Werte aus einem periodischen Bestandteil y und einem aperiodischen η sich zusammensetzen.

Die Reihe der Werte y′ würde nach der getroffenen Annahme der letzten «Schicht» («Stratum») entsprechen, welche bei der Schichtanalyse nach Ausschaltung aller andern Periodizitäten übrigbleibt und nur noch aus einer kurzwelligen Periodizität, vermischt mit großen aperiodischen Bestandteilen, besteht. Es wären also nur noch diese aperiodischen Bestandteile wegzuglätten. Das Glättungsintervall muß dabei bedeutend kürzer als die Wellenlänge der in der «Schicht» noch enthaltenen Periode gewählt werden.

Dementsprechend ist in unserm Falle mit einer Periode p = 5,00 Zeiteinheiten eine vierfache Zweizifferglättung (Glättungsintervall = 2 Zeiteinheiten) durchgeführt worden. In Abb. 2a ist das Ergebnis dieser Glättung durch einen gebrochenen Linienzug mit den Ordinaten w eingetragen. Man sieht nun sofort, daß keine reine Sinuslinie erhalten wird, sondern daß die vorausgesetzte Sinuslinie einer längern Periode mit einer Wellenlänge von rund 12 Zeiteinheiten überlagert erscheint. Wir haben also hier den Fall einer zufällig entstandenen Periodizität. Trotzdem wir also die aperiodischen Bestandteile ausgelost haben, ergab sich zufällig eine Anordnung, welche eine langwellige Periodizität erkennen läßt. Diese Periodizität ist ebenfalls zu isolieren. Wir bilden zu diesem Zwecke aus den Ordinaten w übergreifende Fünfermittel, welche dann die Periode p = 5,00 nicht mehr enthalten. Die Fünfermittel sind durch Berücksichtigung des entsprechenden Glättungsfaktors G(5) = 0,75 wieder auf den Maßstab der durch die Zweizifferglättungen erhaltenen Ordinaten w umgerechnet und in Abb. 2a als gestrichelter langwelliger Linienzug mit den Ordinaten w* zum Vergleich eingetragen worden. Man ersieht nun deutlich, wie die kurze Periodizität um diesen langwelligen Linienzug schwingt.

Der Glättungsfaktor einer durch äquidistante Ordinaten gegebenen Sinusreihe

$$y = c \cdot \sin \alpha i;\ i = 0, 1, 2, 3 \cdots$$

ergibt sich aus

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} \sin \alpha i = \frac{\sin \frac{n \cdot \alpha}{2}}{n \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\left[\frac{n+1}{2} \cdot \alpha\right]$$

zu

$$G(n) = \frac{\sin \frac{\alpha \cdot n}{2}}{n \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} \qquad (5)$$

Für die langwellige Periode p = 12 ist $\alpha = 30^0$, somit

ergibt sich für n = 5 G(5) = 0,75
für n = 2 G(2) = 0,97

Zur Eliminierung der langwelligen Periode rechnen wir die Ordinaten w* des in Abb. 2a gestrichelten Linienzuges auf Grund des Glättungsfaktors G(2) = 0,97 weiter auf den ursprünglichen Maßstab der Werte y′ um. Da vier Zweizifferglättungen durchgeführt worden sind, sind diese Ordinaten w* durch $0{,}97^4 = 0{,}88$ zu dividieren. Die so erhaltenen Werte y* sind in Abb. 2b als gestrichelter sinusoidaler Linienzug aufgetragen. Infolge des durch die Glättung entstehenden Verlustes an Gliedern der Beobachtungsreihe wird dieser Linienzug nur zwischen den Ordinaten 4 und 43 erhalten; er ist in Abb. 2a aber beidseitig extrapoliert worden. Das Verhältnis der mittleren Amplitude dieser zufällig entstandenen Periodizität zur Streuung der Werte y′ um ihren Mittelwert ist so klein, daß nach dem Expektanzkriterium*) nur eine relativ kleine Wahrscheinlichkeit dafür spricht, daß die Periodizität nicht zufälliger Art ist. Und zwar ist diese Wahrscheinlichkeit so klein, daß die gefundene langwellige Periodizität auf Grund der Expektanztheorie auch dann nicht mehr als reell angesehen werden dürfte, wenn wir nicht wie hier zum vorneherein wüßten, daß die Periodizität tatsächlich zufälliger Art ist. Wir eliminieren diese zufällige Periode p = 12, indem wir die Ordinaten y* (Abb. 2b) von den Werten y′ subtrahieren und die Differenzen wiederum einer vierfachen Zweizifferglättung unterwerfen. Unter Berücksichtigung des Glättungskoeffizienten ergeben sich dann die Werte y_s, welche in Abb. 2b als sinusförmige Kurve dargestellt werden. Zum Vergleich sind auch eingetragen die wirkliche in unserer Reihe enthaltene Welle $y = 10 \sin 72^0 \cdot t$, sowie die Welle $y = 9{,}3 \cdot \sin (71{,}11^0 \cdot t + 22^0)$, welche wir später mit Hilfe der für unsere Untersuchungen benützten Periodogrammrechnung aus der gleichen Beobachtungsreihe ermitteln werden. Die durch die Schichtanalyse erhaltene Kurve (Werte y_s) entspricht, insbesondere was die Amplituden anbetrifft, der wirklichen Sinuslinie in unbefriedigender Weise; die Übereinstimmung zwischen letzterer und der durch die Periodogrammrechnung gefundenen Sinuslinie ist bedeutend besser. Wenn man nicht, wie in vorliegendem fingierten Beispiel zum vorneherein wüßte, daß nur eine einzige wirkliche Periode mit konstanter Amplitude vorhanden ist, so würde man auf Grund der Schichtanalyse zum Schlusse neigen, daß die Amplitude der Welle p = 5,00 starken Schwankungen unterworfen sei. Wenn also *Streiff* es als einen Vorteil der von ihm angewendeten Methode ansieht, daß sie für die Periodizitäten keine reinen Sinuslinien vorauszusetzen braucht, und wenn *von Keßlitz* aus dem unregelmäßigen Verlauf von Periodizitäten, welche er gefunden hat, Schlüsse auf deren Entstehung (gedämpfte Schwingungen ausgelöst durch spontane unperiodische Ursachen) zieht, so darf man dabei nicht vergessen, daß bei der von ihnen angewendeten Methode in vielen Fällen die Abweichung von einem sinusförmigen Verlauf nur eine Folge des Einflusses aperiodischer Störungen ist. Wenn man, wie im vorliegenden Fall, weiß, daß Amplitude und Wellenlänge konstant sind, so kann man aus den ermittelten Werten Durchschnittswerte berechnen. In unserem Falle würde sich eine Amplitude von rund 9,4, also eine recht gute Übereinstimmung mit der wirklichen Amplitude, ergeben. Man sieht jedoch bereits an diesem einfachen Beispiel, daß die Schichtanalyse mit Hilfe von primitiven Glättungen durch übergreifender Mittelbildung kein scharfes mathematisches Instrument ist, welches eine unvoreingenommene Analyse in zahlenmäßig leicht erfaßbarer Form gestattet. Besonders empfindet man diese Mängel, wenn es sich darum handelt, eng benachbarte Periodizitäten zu trennen, also solche, deren Wellenlängen sich nur wenig voneinander unterscheiden. In unserm Beispiel kannten

*) Vgl. Seite 54.

wir zum vorneherein die gesuchte Wellenlänge der Periode p = 5,00 und konnten deshalb daraus bei der Elimination der zufälligen langwelligen Periodizität Nutzen ziehen. Bei wirklichen, nicht fingierten Abflußmengenreihen ist dies nicht mehr der Fall, woraus sich weitere Ungenauigkeiten ergeben.

Es sei jedoch bemerkt, daß die Schichtanalyse durch Anwendung von viel allgemeineren und raffinierteren Glättungsmethoden zu neueren, leistungsfähigen Verfahren entwickelt worden ist. *Stumpff* (Lit. 3) weist die innere Verwandtschaft zwischen diesen neueren Verfahren und der Periodogrammethode nach und führt aus, daß es keinen Zweck habe, den Wert der einen Methode gegen den einer andern ganz allgemein abschätzen zu wollen. Vielmehr werde stets von Fall zu Fall entschieden werden müssen, welches Verfahren der zu bewältigenden Aufgabe am besten entspricht. In unserem Falle der Abflußmengen des Rheins bei Basel kamen wir zum Schluß, daß die Schichtanalyse mit Hilfe eines einfachen Glättungsverfahrens nicht befriedigen kann.

Ein Anlaß zur Anwendung neuerer und verfeinerter Glättungsverfahren lag jedoch nicht vor. *Unsere Untersuchungen verfolgen nicht in erster Linie methodische Zwecke, sondern die Erforschung der Abflußmengen des Rheins auf Periodizitäten hin.* Es zeigte sich, daß sich dazu die Methoden der *Periodogrammrechnung* sehr gut eignen. In bezug auf die Periodogrammrechnung, welche an das bekannte Verfahren der harmonischen Analyse anknüpft und in neuerer Zeit sehr stark entwickelt worden ist, liegen schon viele Erfahrungen vor. Glättungsverfahren können nicht in gleichem Maße an eine große Praxis anknüpfen. Zudem stand für die neueren Glättungsverfahren nicht ein gut ausgebautes Tafelwerk (Lit. 4) zur Verfügung wie für die Periodogrammrechnung. Aus all diesen Gründen haben wir *das Verfahren der Periodogrammrechnung für unsere Untersuchungen benützt.*

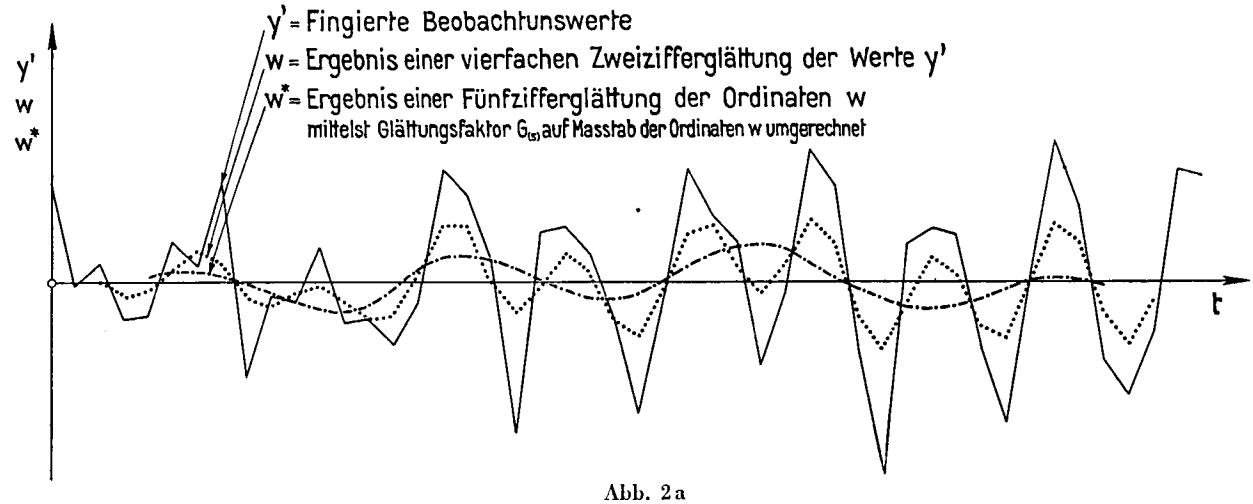


Abb. 2a

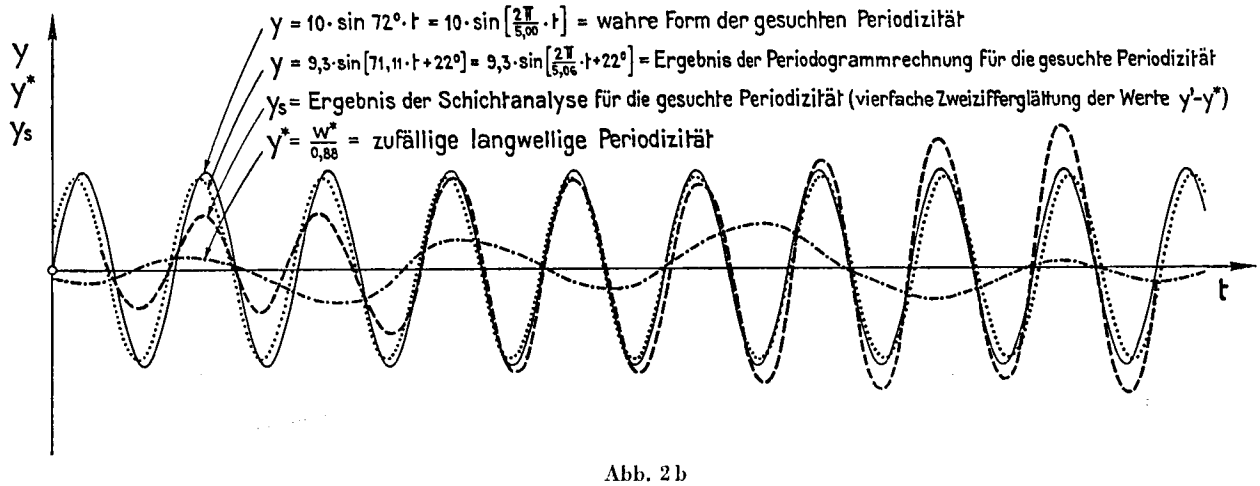


Abb. 2b

Schichtanalyse der in Tabelle 1 zusammengestellten fingierten Beobachtungsreihe

B. *Morphologische Untersuchung von Beobachtungsreihen*

Mit der Bezeichnung «Morphologische Untersuchung» knüpfen wir an den Titel der Arbeit von *Bartels* «Zur Morphologie geophysikalischer Zeitfunktionen» an (Lit. 1). Wir verstehen hier unter morphologischen Untersuchungen solche Untersuchungen, welche uns Aufschluß über diejenigen statistischen Eigenschaften der Meßreihen geben, deren Kenntnis für die Beurteilung der gefundenen Periodizitäten auf Grund des Expektanzkriteriums (siehe Seite 54) nötig ist. Es handelt sich dabei um die Untersuchung der Meßwerte auf ihre Streuung und auf ihre Verteilung nach Größe und Häufigkeit, mit Hilfe von Verteilungskurven, sowie um die zahlenmäßige Feststellung, ob allfällig eine Erhaltungstendenz vorhanden sei.

1. Anwendung von Verteilungskurven

a) Allgemeines

In der Hydrographie hat sich die Anwendung der Verteilungskurve und insbesondere ihres Integrals, der Summenlinie, schon seit langem unter den Begriffen *Häufigkeitskurve* und *Dauerkurve* eingebürgert. Die für eine Meßstation während eines bestimmten Zeitabschnittes durch Messung erhobenen Pegelstände oder Abflußmengen werden dabei als ein *Kollektiv* betrachtet, d. h. als eine Zusammenfassung gleichartiger, mit bestimmten Merkmalen (Pegelstand; Abflußmenge) versehener Gegenstände. Diese Gegenstände, also die Pegelstände oder Abflußmengen, z. B. in der Form von Tages- oder Jahresmitteln, beschreiben wir dabei einmal durch ihre Maß- oder *Ordnungsgröße* y (z. B. in m oder m^3/sek) und dann durch ihre *Häufigkeit*, d. h. durch die Anzahl der gemessenen Werte, welche auf eine bestimmte Ordnungsgröße y entfallen. Praktisch wird bekanntlich so vorgegangen, daß das Kollektiv in eine Anzahl Klassen von gleicher Klassengröße Δy aufgeteilt und die Klassenhäufigkeit z, d. h. die Anzahl der in eine Klasse entfallenden Werte y, festgestellt wird. Die graphische Auftragung der Klassenhäufigkeit in Funktion der Ordnungsgröße ergibt dann eine Stufenlinie oder einen Treppenzug. Je größer die Anzahl der Beobachtungen ist, um so mehr kann man die Klassengröße herabsetzen, und die Stufenlinie darf durch eine glattverlaufende *Häufigkeitskurve*

$$z = f(y)$$

ersetzt werden. Die Häufigkeitskurve gibt somit an, wie sich die Häufigkeit z der einzelnen Meßwerte in bezug auf ihre Größe y *verteilt*. Durch Integration der Häufigkeitskurve erhält man, wie bereits gesagt, die Dauerkurve oder Summenlinie.

Häufigkeits- und Dauerkurven werden verwendet, wenn es nicht auf die zeitliche Reihenfolge der Meßwerte und den Zeitpunkt ihres zeitlichen Eintreffens ankommt, wenn also die Meßwerte aus ihrem zeitlichen Zusammenhang herausgelöst und untereinander vertauscht werden dürfen zwecks Herstellung einer andern, nicht nach dem Gesichtspunkt des zeitlichen Eintreffens, sondern der Häufigkeit des Auftretens gebildeten Reihenfolge. Wir führen also die ursprünglich gegebene empirische Funktion der Meßwerte, bei welcher es wesentlich auf die Zeit als Argument ankam, in eine andere Klasse einer empirischen Funktion über, bei welcher zur Beschreibung der Zusammenhänge die Zeit nicht mehr benötigt wird.

In der praktischen Hydrographie und ihren Anwendungen in Wasserwirtschaft, Wasserbau usw. begnügt man sich in der Regel mit der empirischen Ermittlung und graphischen Darstellung der Verteilungs- (Häufigkeits-) und Dauerkurven und verzichtet auf eine mathematische Erfassung dieser Kurven durch Formeln, bei welchen die Anschaulichkeit verlorengeht. Immerhin macht sich bei der Beurteilung der Häufigkeit des Auftretens von Hochwassern das Bedürfnis nach einer schärferen, zahlenmäßigen Erfassung der Wahrscheinlichkeit des Auftretens oder Überschreitens einer bestimmten Hochwassermenge geltend. Verschiedene interessante und wichtige Arbeiten sind zur Befriedigung dieses Bedürfnisses entstanden (Lit. II).

Für die Anwendung der Methoden der mathematischen Statistik ersetzt man die Häufigkeit durch die *relative Häufigkeit*, d. h. durch das Verhältnis der Häufigkeit z eines bestimmten Wertes y der Meßreihe zur Gesamtzahl der Werte y dieser Reihe. Der Grenzwert, welchem diese relative Häufigkeit sich mit zunehmender Anzahl von Meßwerten nähert, wird als *Wahrscheinlichkeit* des Auftretens des Wertes y bezeichnet. Kurven, welche die Verteilung der Meßwerte y nach ihrer relativen Häufigkeit darstellen, werden deshalb auch als *Wahrscheinlichkeits*kurven bezeichnet.

b) Die normale Verteilungskurve nach Gauß

Das Verteilungsgesetz (Fehlergesetz) nach Gauß lautet bekanntlich

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{m_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\varepsilon^2}{2 m_\varepsilon^2}} \qquad (6)$$

Es bedeuten dabei:

ε zufälliger Fehler (wahrer Wert),
m_ε mittlere quadratische Abweichung der Fehler ε (mittlerer Fehler),
e Basis der natürlichen Logarithmen (2,7183),
$\varphi(\varepsilon)$ Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines bestimmten Fehlers ε, also Verteilungsfunktion von ε.

Verteilen sich die *Abweichungen* λ der Werte einer Beobachtungsreihe von einer die Beobachtungswerte ausgleichenden Funktion, z. B. vom arithmetischen Mittel der Beobachtungswerte, nach dem Verteilungsgesetz von Gauß, so kann man setzen:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\lambda^2}{2\sigma^2}} \qquad (7)$$

σ wird als *Streuung* bezeichnet und bedeutet den wahrscheinlichsten Wert der mittleren quadratischen Abweichung der Meßwerte von einer die Meßwerte ausgleichenden Funktion, z. B. vom arithmetischen Mittel der Meßwerte.

Es ist, wenn n die Zahl der verwendeten Meßwerte bedeutet,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma \lambda^2}{n-1}} \tag{8}$$

Es liege z. B. eine Reihe von n Abflußmengenwerten Q vor, und man habe die Häufigkeit z für das Auftreten der Abweichungen λ in den verschiedenen aufeinanderfolgenden Klassen von der Breite ΔQ berechnet. Wir rechnen dann mit folgenden Formeln

$$\varphi(\lambda) = \frac{z}{n \cdot \Delta Q}$$

oder

$$z = \varphi(\lambda) \cdot n \cdot \Delta Q \tag{9}$$

somit

$$z = \frac{n \cdot \Delta Q}{\sigma \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\frac{-\lambda^2}{2\sigma^2}} = \frac{n \cdot \Delta Q}{\sigma \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-v^2} \tag{10}$$

$$\lambda = v \sigma \sqrt{2} \tag{11}$$

Die Werte der Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-v^2} = \varphi(v)$$

sind in verschiedenen Tafelwerken, z. B. auch in Hütte I, graphisch und tabellarisch angegeben.

Eine Verteilung entsprechend dem Gauß'schen Fehlergesetz bezeichnet man als eine *normale* Verteilung. Eine solche Verteilung ist nur von einer einzigen Konstanten, nämlich der Streuung σ abhängig und hat folgende Eigenschaften (vgl. Abb. 19, Seite 62):

a) Die Kurve verläuft symmetrisch zu $\lambda = 0$, d. h. positive und negative Abweichungen gleichen Betrages sind gleich wahrscheinlich.

b) Abweichungen größeren Betrages sind weniger wahrscheinlich als solche geringeren Betrages, indem die Kurve für $\lambda = 0$ ein Maximum aufweist und ihre Ordinaten für wachsende Abweichungen gegen Null abnehmen.

c) Bei $\lambda = \pm \sigma$ besitzt die Kurve Wendepunkte. Sie zeigt einen *glockenförmigen Verlauf.*

Solche normale Verteilungskurven entstehen, wenn zahlreiche Ursachen bei der Entstehung der Abweichungen mitwirken, wenn diese Ursachen voneinander unabhängig sind und die Wirkung jeder Ursache gegenüber der totalen Wirkung aller Ursachen klein ist. Diese Bedingungen werden z. B. durch die *zufälligen Fehler* einer Meßreihe erfüllt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Abweichung bis zum Betrage $|\lambda|$ auftritt, ist gegeben durch das *Gauß'sche Fehlerintegral*

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{\frac{-\lambda^2}{2\sigma^2}} d\lambda$$

oder, da $d\lambda = \sigma \cdot \sqrt{2} \cdot dv$

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma \sqrt{2} \int_{-v}^{+v} e^{-v^2} dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-v}^{+v} e^{-v^2} dv = \Phi(v) \tag{12}$$

Auch diese Werte $\Phi(v)$ sind in verschiedenen Tabellenwerken, so auch Hütte I, in Funktion von v angegeben. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Abweichung vom Betrag $|\lambda|$ überschritten wird, ist somit

$$W(\lambda) = 1 - \Phi(\lambda) \tag{13}$$

Ein oberer Grenzwert der Abweichung ist definitionsgemäß nicht gegeben; deshalb besteht die Möglichkeit, daß eine noch größere Abweichung als die größte bisher beobachtete auftritt, wenn die Beobachtungen noch weiter festgesetzt werden. Die Erfahrung lehrt allerdings, daß von einer genügend groß gewählten Abweichung an die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von noch größeren Abweichungen praktisch gleich Null wird. Das Gauß'sche Verteilungsgesetz berücksichtigt dies, indem das Integral $\Phi(\lambda)$ für jene Abweichung vom Betrage 1 nur sehr wenig verschieden ist. Bekanntlich ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Abweichung, welche *dreimal* größer als die Streuung ist, nur noch 0,0027. Es ist also wahrscheinlich, daß erst unter 370 Beobachtungswerten eine Abweichung gefunden wird, welche dreimal größer als die Streuung (mittlerer Fehler) ist. Da bekanntlich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von noch größeren Abweichungen als jener, welche dem dreifachen mittleren Fehler entspricht, mit wachsender Größe der Abweichung sehr rasch abnimmt und für den vierfachen mittleren Fehler nur noch 0,00006 (unter rund 17 000 Beobachtungen einmal auftretend) ist, so wird in der Praxis der Vermessungskunde der zulässige Maximalfehler gleich dem dreifachen mittleren Fehler gesetzt.

c) Unsymmetrische Verteilungskurven

Wie wir sehen werden, schmiegt sich die Verteilungskurve der Abweichungen der mittleren jährlichen Abflußmengen des Rheins bei Basel von deren langjährigem Durchschnitt und besonders auch von deren säkularem Gang in befriedigender Weise dem normalen Gauß'schen Verteilungsgesetz an. Das gleiche werden wir auch für andere, aus den mittleren jährlichen Abflußmengen abgeleitete Werte, sowie für die Viertelsjahrmittel nach Ausschaltung des jährlichen Ganges erkennen.

Hätten wir aber Monatsmittel oder gar Tagesmittel untersucht, so würden wir gefunden haben, daß sich unsymmetrische Verteilungskurven ergäben (vgl. Lit. 6). Solche Mittel würden wir aber verwenden müssen, wenn wir auch das Vorhandensein von kürzeren Perioden als jene, welche Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden, untersuchen wollten. Dann hätten wir aber nicht mehr, wie wir dies bei den Jahres- und auch noch bei den

Vierteljahresmitteln (vom jährlichen Gang befreit) tun können, vorerst annehmen dürfen, daß die Meßwerte den Charakter zufälliger Fehler besitzen. Sobald wir aber dies nicht mehr können, werden selbst unter der Annahme, daß die Einzelwerte voneinander statistisch unabhängig seien, die Untersuchungen betreffend die Wahrscheinlichkeit für die Realität von allfälligen Periodizitäten wesentlich komplizierter. Darüber hinaus erhebt sich aber die Frage, welche hier nicht mehr vorerst bejaht werden darf, ob die zu untersuchenden Werte voneinander unabhängige Erscheinungen bedeuten. Es stellt sich also die Frage nach einer allfälligen ursächlichen Verkettung der Erscheinungen oder wenigstens einer Abhängigkeit in Form einer Erhaltungstendenz. Die Untersuchung dieser Frage und deren Konsequenzen für die Wahrscheinlichkeitsuntersuchung betreffend die Realität der Periodizitäten würden aber weit über den Rahmen einer Arbeit der vorliegenden Art hinausführen. Wir mußten deshalb, wie bereits am Schluß des im ersten Teil gegebenen Überblicks erwähnt worden ist, auf die Forschung nach Periodizitäten verzichten, bei welchen als Unterlagen Monats- oder gar Tagesabflußmengen zu verwenden sind. Infolgedessen war es auch nicht nötig, unsymmetrische Verteilungskurven anzuwenden, so daß es sich hier erübrigen kann, näher auf diese einzutreten.

2. Untersuchungen über die Erhaltungstendenz

a) Allgemeines

Im letzten Abschnitt des 1. Teiles unserer Arbeit haben wir bereits auf die Bedeutung hingewiesen, welche einer allfällig vorhandenen *Erhaltungstendenz* der Meßwerte beizulegen ist hinsichtlich der wahrscheinlichkeitstheoretischen Überprüfung der Realität gefundener Periodizitäten. Am Beispiel der Limnigraphenaufzeichnungen haben wir definiert, was unter einer Erhaltungstendenz zu verstehen ist. Wenn eine Erhaltungstendenz vorhanden ist, so sind die zeitlich aufeinanderfolgenden Meßwerte nicht voneinander unabhängig. Sie weisen vielmehr eine zeitliche Abhängigkeit voneinander in dem Sinne auf, daß ihre graphische Darstellung in Funktion der Zeit eine mehr oder weniger glatte Linie bildet. Wäre die Erhaltungstendenz nicht vorhanden, wären also zwei aufeinanderfolgende Werte y_i und y_{i+1} voneinander unabhängig, so würde die Wahrscheinlichkeit für die Größe und Streuung von y_{i+1} von y_i unabhängig und nur durch die Verteilungskurve der Meßreihe gegeben sein. Beim Vorhandensein einer Erhaltungstendenz dagegen ist die Wahrscheinlichkeit für Größe und Streuung von y_{i+1} von der Größe von y_i abhängig. Die Meßreihe darf dann nicht mehr a priori als ein Produkt des Zufalles betrachtet werden. Ist eine Erhaltungstendenz vorhanden, so muß sie bei der Anwendung des Expektanzkriteriums (Seite 54) berücksichtigt werden, und die Untersuchungen darüber, welches die Wahrscheinlichkeit dafür sei, daß eine Periodizität als nicht zufällig betrachtet werden darf, werden bedeutend schwieriger. Wir müssen also untersuchen, ob die von uns verwendeten Meßreihen (Reihe von Jahresmitteln der Abflußmenge, sowie Reihe von Vierteljahresmitteln der Abflußmengen nach Ausschaltung des Jahresganges) eine Erhaltungstendenz aufweisen oder nicht. Es sind dazu zwei Kriterien angewendet worden. Das eine Kriterium bilden Betrachtungen über *das Verhalten der Streuung bei zunehmender Anzahl von Meßwerten nach Bartels* (Lit. 2), und das andere gewinnen wir durch die *Berechnung von Autokorrelationskoeffizienten nach Stumpff* (Lit. 3).

b) Untersuchungen mit Hilfe der Streuung

Es sei eine längere Meßreihe $Q_1, Q_2, \cdots Q_i, \cdots Q_n$ von n Meßwerten gegeben, deren Mittelwert Q_m betrage. σ_n sei die nach Gleichung (8) berechnete Streuung («mittlerer Fehler») des Einzelwertes, indem gesetzt wird $\lambda = Q - Q_m$. Diese Reihe werde nun in Teilabschnitte von je l Meßwerten unterteilt. Bei vollständig voneinander unabhängigen, nach Art der zufälligen «Fehler» verteilten Meßwerten, gilt nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Streuung der Mittelwerte Q_l aus l aufeinanderfolgenden Meßwerten.

$$\frac{\sigma_n}{\sqrt{l}}$$

Es sind $\frac{n}{l}$ solcher Mittelwerte Q_l vorhanden. Ihre Streuung läßt sich auch berechnen mit Hilfe der Formel:

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{\Sigma [Q_l - Q_m]^2}{\frac{n}{l} - 1}} \qquad (14)$$

Haben die Meßwerte den Charakter von *zufälligen Fehlern*, so ist die mathematische Erwartung von

$$\sigma_l = \frac{\sigma_n}{\sqrt{l}}$$

Weist dagegen eine Meßreihe eine Erhaltungstendenz auf, so liegen aufeinanderfolgende Meßwerte während mehr oder weniger langer Zeit systematisch unter oder über dem Mittelwerte Q_m und weichen in ihrer Größe nicht stark voneinander ab. Es sei schematisch angenommen, daß innerhalb der genannten Teilabschnitte von je l Meßwerten immer Gruppen von je ω aufeinanderfolgenden Werten gleich groß seien. Innerhalb des Teilabschnittes seien l' solcher Gruppen vorhanden, so daß also ist

$$l = \omega \cdot l', \quad \text{wobei } l' < l, \quad \omega > 1$$

Der Mittelwert eines Teilabschnittes von l Werten ist dann

$$Q_l = \frac{\omega\ Q_i + \omega\ Q_{[i+\omega]} + \cdots + \omega\ Q_{[i+(l'-1)\,\omega]}}{\omega \cdot l'} =$$

$$= \frac{Q_i + Q_{[i+\omega]} + \cdots + Q_{[i+(l'-1)\,\omega]}}{l'} = Q_{l'}$$

Der Mittelwert Q_l aus l Ordinaten ist also einfach gleich dem Mittelwert $Q_{l'}$ aus l' Ordinaten in zufälliger Reihenfolge und damit

$$\omega = \left[\frac{\sigma_l}{\sigma_n/\sqrt{l}}\right]^2 \qquad (15)$$

Der Wert ω stellt somit eine geeignete Maßzahl für den Grad der Erhaltungstendenz dar. Im Falle von Meßwerten nach der Art zufälliger Fehler ist $\omega \approx 1$, bei Vorhandensein einer Erhaltungstendenz dagegen ist $\omega > 1$.

c) Autokorrelation von Beobachtungsreihen

Der Korrelationskoeffizient zwischen zwei Beobachtungsreihen

$$\begin{array}{l} y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots\cdots\ y_i,\ \cdots\cdots\ y_n \\ y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*,\ \cdots\cdots\ y_i^*,\ \cdots\cdots\ y_n^* \end{array}$$

ist (vgl. Lit. I, 3) bekanntlich

$$k = \frac{\Sigma [y_i - y_m] \cdot [y_i^* - y_m^*]}{\sqrt{\Sigma [y_i - y_m]^2 \cdot \Sigma [y_i^* - y_m^*]^2}} \qquad (16)$$

wobei $\quad y_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad y_m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^*$

Der mittlere Fehler eines Korrelationskoeffizienten k ist:

$$\sigma_k = \frac{1 - k^2}{\sqrt{n}} \qquad (17)$$

Der Korrelationskoeffizient wird in der Regel als Maß für die statistische Abhängigkeit (den stochastischen Zusammenhang) zwischen den beiden Beobachtungsreihen verwendet, wenn zwischen den beiden Beobachtungsreihen eine *lineare* stochastische (wahrscheinlichkeitstheoretische) Beziehung besteht.

Der Korrelationskoeffizient kann deshalb wertvolle Dienste als Maß für die Beurteilung der Erhaltungstendenz leisten, wenn man die zu untersuchende Beobachtungsreihe

$$Q_1,\ Q_2,\ \cdots\cdots\ Q_i,\ \cdots\cdots\ Q_n$$

mit sich selbst korreliert.

Wenn die Reihe *unverändert* mit sich selbst korreliert wird, so ergibt sich der Autokorrelationskoeffizient nullter Ordnung $k_0 = 1$.

Dieses Resultat ist selbstverständlich unabhängig von den besondern Eigenschaften der Reihe und wird z. B. auch für Beobachtungsreihen von der Art zufälliger Fehler gefunden.

Nun wird die oben gegebene Reihe mit der um einen Beobachtungswert verschobenen Reihe

$$Q_2,\ Q_3,\ \cdots\cdots\ Q_{i+1},\ \cdots\cdots\ Q_{n+1}$$

korreliert. Dies ergibt den *Autokorrelationskoeffizienten erster Ordnung*

$$k_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} [Q_i - Q_{m,0}] \cdot [Q_{i+1} - Q_{m,1}]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} [Q_i - Q_{m,0}]^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [Q_{i+1} - Q_{m,1}]^2}} \qquad (18)$$

wobei

$$Q_{m,0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Q_i \qquad Q_{m,1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Q_{i+1}$$

Dieser Koeffizient ist nun von der Reihenfolge der Beobachtungswerte nicht mehr unabhängig und ist zur Charakterisierung der Art der Reihenfolge geeignet.

Handelt es sich um eine *Reihe* von *Beobachtungswerten*, welche sich wie zufällige Fehler verhalten, so ist die mathematische Erwartung für den Koeffizienten k_1 gleich Null. Die empirischen Werte, welche für den Koeffizienten k_1 erhalten werden, schwanken also mit dem mittleren Fehler

$$\sigma_{k_1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

um den Mittelwert Null.

Liegt dagegen eine Beobachtungsreihe mit *Erhaltungstendenz* vor, so ist die mathematische Erwartung für k_1 nicht mehr gleich Null, sondern je strenger die Erhaltungstendenz ist, um so mehr wird der Wert k_1 vom Werte Null abweichen. Dies als Zeichen dafür, daß eben eine Beziehung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werten in dem Sinne vorliegt, daß die mathematische Erwartung für Größe und Streuung eines Beobachtungswertes Q_{i+1} eine Funktion vom vorangehenden Wert Q_i ist. Voraussetzung dafür, daß der Autokorrelationskoeffizient erster Ordnung in diesem Sinne als Maß für die Strenge des Zusammenhanges zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werten verwendet werden darf, ist ein *linearer* stochastischer Zusammenhang zwischen zwei aufeinanderfolgenden Beobachtungswerten. Die graphische Auftragung des Wertes Q_{i+1} in Funktion des Wertes Q_i muß also eine sogenannte Punktwolke von elliptischer und im Grenzfall $k_1 = 0$ kreisförmiger Form ergeben.

Wie *Stumpff* ausführt, beweist deshalb ein Autokorrelationskoeffizient erster Ordnung, welcher, weit außerhalb der Unsicherheitsgrenzen, von Null verschieden ist, daß die betreffende Beobachtungsreihe eine Erhaltungstendenz besitzt; die Beobachtungsreihe darf dann nicht mehr von vorneherein als ein Produkt des Zufalls, also als eine Reihe von Werten von der Art zufälliger Fehler, betrachtet werden. Es ist damit aber noch nicht bewiesen, daß etwa eine Gesetzmäßigkeit in Form einer Periodizität vorliegt, da ja Kurven mit Erhaltungstendenz trotzdem ganz zufälliger Art sein können. Umgekehrt beweist ein um den Wert Null schwankender Korrelationskoeffizient erster Ordnung noch nicht, daß die Beobachtungsreihe nicht doch eine oder auch mehrere verborgene Periodizitäten enthält.

C. *Die harmonische Analyse*

1. Grundlagen

Eine gegebene empirische Funktion f(t) kann auf verschiedene Arten durch eine mathematische Funktion g(t) mit einer mehr oder weniger großen Annäherung nach der *Methode der kleinsten Quadrate* dargestellt, d. h. interpoliert werden. Die Bestimmung der Koeffizienten der mathematischen Funktion g(t) ist eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung und erfolgt mit Hilfe der sogenannten Normalgleichungen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate ist für die Annäherung f(t) im Bereiche $T_1 \leqq t \leqq T_2$ die mathematische Funktion so zu bestimmen, daß die Summe der Fehlerquadrate

$$[vv] = \int_{T_1}^{T_2} [f(t) - g(t)]^2 \, dt$$

ein Minimum wird. Die Koeffizienten der mathematischen Funktion, welche wir mit $a_0, a_1, a_2, \ldots . a_\mu$ bezeichnen, ergeben sich dann aus den Normalgleichungen:

$$\frac{\partial [vv]}{\partial a_0} = 0 \quad \frac{\partial [vv]}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial [vv]}{\partial a_2} = 0 \quad \ldots . \quad \frac{\partial [vv]}{\partial a_\mu} = 0$$

Je mehr Glieder, d. h. je mehr Koeffizienten der Funktion g(t) berücksichtigt werden, um so enger ist die Annäherung, aber um so schwieriger wird auch die Auflösung der Normalgleichungen. Besonders unangenehm ist dabei, daß im allgemeinen nach einer bereits einmal durchgeführten Annäherung, alle Koeffizienten sich ändern und neu berechnet werden müssen, wenn die Annäherung weitergetrieben, d. h. noch ein Koeffizient mehr berücksichtigt werden soll. Es gibt aber auch spezielle mathematische Funktionen, bei welchen die einmal berechneten Koeffizienten a ihre Gültigkeit beibehalten, selbst dann, wenn die Annäherung durch Berücksichtigung von noch mehr Koeffizienten weiter verbessert wird. Eine solche mathematische Funktion ist u. a. die *Fourier'sche Reihe* (auch harmonische trigonometrische Reihe genannt):

$$f(\varphi) = a_0 + a_1 \cdot \cos\varphi + a_2 \cdot \cos 2\varphi + \cdots + a_\mu \cdot \cos\mu\varphi + \cdots + b_1 \cdot \sin\varphi + b_2 \cdot \sin 2\varphi + \cdots + b_\mu \cdot \sin\mu\varphi + \cdots . \tag{19}$$

Die Darstellung einer empirischen Funktion $f(\varphi)$, welche in einem Intervall von der Länge 2π, z. B. im Bereiche $0 \leq t \leq 2\pi$ definiert ist, durch eine Fourier'sche Reihe, oder, mit andern Worten, die dazu notwendige Berechnung der Koeffizienten $a_0, a_1, \cdots a_\mu; b_1, b_2, \cdots b_\mu$ wird als *harmonische Analyse* und die Konstanten $a_0, a_1, \cdots a_\mu; b_1, b_2, \ldots b_\mu$ werden als *Fourierkoeffizienten* bezeichnet. Eine empirische Funktion kann also dabei durch eine Summe von einfachen Sinuslinien dargestellt, bzw. in eine Reihe von Sinuslinien zerlegt werden, je nachdem die Summe der Sinuslinien als Interpolation oder die einzelnen Sinuslinien interessieren. Bekanntlich berechnen sich die Fourierkoeffizienten aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot d\varphi \\ a_\mu &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \cos\mu\varphi \cdot d\varphi \\ b_\mu &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \sin\mu\varphi \cdot d\varphi \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Die *Grundperiode* der durch Gleichung 19 in eine Fourier'sche Reihe entwickelten Funktion $f(\varphi)$ beträgt 2π. Um die Formeln auch auf ein *Grundintervall* von *beliebiger Länge n* anwenden zu können, wird eine neue Variable eingeführt:

$$t = \frac{n}{2\pi} \cdot \varphi \tag{21}$$

Gleichung 19 lautet dann: $f(t) = a_0 +$

$$+ a_1 \cos\frac{2\pi}{n} t + a_2 \cos 2\frac{2\pi}{n} t + \cdots + a_\mu \cos\mu\frac{2\pi}{n} t + \cdots + b_1 \sin\frac{2\pi}{n} t + b_2 \sin 2\frac{2\pi}{n} t + \cdots + b_\mu \sin\mu\frac{2\pi}{n} t + \cdots \tag{22}$$

und es ist:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{n} \int_0^{n} f(t) \cdot dt \\ a_\mu &= \frac{2}{n} \int_0^{n} f(t) \cdot \cos\mu\frac{2\pi}{n} t \cdot dt \\ b_\mu &= \frac{2}{n} \int_0^{n} f(t) \cdot \sin\mu\frac{2\pi}{n} t \cdot dt \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die Werte $h_\mu = \sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2}$ werden als *Amplituden* und die Werte $\psi_\mu = \operatorname{arc\,tg} \frac{a_\mu}{b_\mu}$ als *Anfangsphase* oder *Phasenkonstante* bezeichnet. Mit

$$a_\mu = h_\mu \cdot \sin\psi_\mu \qquad b_\mu = h_\mu \cdot \cos\psi_\mu$$

ergibt sich, wenn $a_0 = h_0$ und $\mu\frac{2\pi}{n} = x_\mu$ gesetzt wird:

$$f(t) = h_0 + h_1 \sin[x_1 t + \psi_1] + h_2 \sin[x_2 t + \psi_2] + \cdots + h_\mu \sin[x_\mu t + \psi_\mu] + \cdots +$$

Die *Perioden (Wellenlängen)* der Glieder verschiedener Ordnung entsprechen der Folge

$$n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \cdots \frac{n}{\mu}$$

Wir zerlegen also die empirische Funktion in Sinuswellen, deren Wellenlängen *ganzzahlig* im Grundintervall oder Analysenintervall n enthalten sind.

Die den Wellenlängen umgekehrt proportionalen Größen

$$x_\mu = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu \qquad \mu = 1, 2, 3, \cdots$$

werden als *Frequenzen* bezeichnet.

Das *Fourier*glied $h_\mu \sin [x_\mu t + \psi_\mu]$

wird im folgenden der Kürze halber als «Welle» μ-ter Ordnung oder noch einfacher als *μ-te Welle* bezeichnet.

Da die harmonische Analyse die gegebene empirische Funktion in Sinuswellen zerlegt, deren Wellenlängen *ganzzahlig* im Analysenintervall enthalten sind, so muß die Wellenlänge einer darzustellenden *Periodizität* zum voraus bekannt sein, um deren Konstanten durch die harmonische Analyse bestimmen zu können. Die harmonische Analyse allein kann deshalb nur zur Untersuchung periodischer Vorgänge verwendet werden, deren Wellenlänge aus irgendeinem Grunde bekannt ist. In andern Fällen, wenn die Periode nicht bekannt ist oder wenn *mehrere* verborgene Periodizitäten mit inkommensurabeln*) Wellenlängen zusammenwirken, gibt die harmonische Analyse nur eine Interpolation der empirischen Funktion. Eine Extrapolation wird jedoch dem wahren Sachverhalt nicht mehr gerecht werden. In solchen Fällen sind andere Methoden, wie z. B. in vorliegender Arbeit die Periodogrammrechnung, anzuwenden. Da aber die Periodogrammrechnung auf der harmonischen Analyse aufbaut, ist es zum Verständnis der späteren Rechnungen notwendig, hier auch die zur Anwendung gelangten bekannten Formeln der harmonischen Analyse zusammenzustellen.

2. Harmonische Analyse von Beobachtungsreihen

Unseren Untersuchungen haben wir nur Meßreihen mit einer äquidistanten Ordinatenfolge, d. h. Meßwerte zugrunde gelegt, welche Zeitwerten entsprechen, die in gleichen Abständen aufeinanderfolgen; also

$$f(t_i) = y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots y_i, \cdots y_{n-1}$$

Die Fourierkoeffizienten berechnen sich dann aus folgenden Formeln, wobei man den konstanten zeitlichen Abstand Δt aufeinanderfolgender Beobachtungswerte als Zeiteinheit einführt, also $\Delta t = 1$ setzt und durch Wahl eines geeigneten Anfangspunktes dafür sorgt, daß $t_i = i$ gesetzt werden kann.

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \\ a_\mu &= \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos x_\mu t_i = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos x_\mu i \\ b_\mu &= \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin x_\mu t_i = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin x_\mu i \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Die Berechnung der Fourierkoeffizienten erfordert einen großen rechnerischen Aufwand. Es sind deshalb unter Ausnützung der Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen zweckmäßige Rechenschemata, sogenannte *Faltschemata*, aufgestellt worden, welche mit Hilfe von praktischen Zahlentafeln (Lit. 4) ein rascheres Rechnen erlauben. Bei unseren Untersuchungen mit Hilfe der Periodogrammanalyse haben wir allerdings in der Regel zur Berechnung von Fourierkoeffizienten aus später noch zu erläuternden Gründen auf die Anwendung von Faltschemata verzichtet und letztere nur ausnahmsweise bei der Ermittlung des Spektrums oder in andern Fällen interessehalber zu Vergleichs- und Kontrollzwecken verwendet. Es kann sich deshalb erübrigen, auf diese Rechenschemata näher einzutreten, es sei nur noch bemerkt, daß die Bezeichnung *Faltschema* daher rührt, daß man bei der Benützung eines solchen Schemas die Beobachtungsreihe sozusagen «faltet». Soll z. B. aus n = 9 Beobachtungswerten y_0 bis y_8 die 1. harmonische Welle mit der Frequenz $x_\mu = \frac{2\pi}{9} = 40^0$ berechnet werden, so ist es für die Berechnung der Werte a_μ nur nötig, in der vordersten Kolonne eines Schemas die cos-Werte der Winkel 0°, 40°, 80°, 120° und 160° einzutragen, welchen in dieser Reihenfolge nach Gleichung (24) die Beobachtungswerte y_0, y_1, y_2, y_3 und y_4 zugeordnet sind. Den Werten y_5, y_6, y_7 und y_8 sind in gleicher Reihenfolge die Winkel 200°, 240°, 280° und 320° zugeordnet, deren cos-Werte aber gleich den cos-Werten der Winkel 160°, 120°, 80° und 40° sind. Tragen wir also im Schema neben die cos-Werte der Winkel 0°, 40°, 80°, 120° und 160° in eine zweite Kolonne die Werte y_0 bis y_4 von oben nach unten ein, so sind in einer dritten Kolonne die Werte y_5 bis y_8 von unten nach oben so einzutragen, daß y_5 neben y_4, y_6 neben y_3, y_7 neben y_2 und y_8 neben y_1 zu liegen kommt. Man «faltet» also die Reihe sozusagen zwischen y_4 und y_5 um. Man kann dann einfach die Summen $y_1 + y_8$, $y_2 + y_7$, $y_3 + y_6$ und $y_4 + y_5$ bilden und mit den cos-Werten der Winkel 0°, 40°, 80°, 120° und 160° multiplizieren. Die Vereinfachung bei diesem Schema besteht also darin, daß vier Multiplikationen durch einfache Additionen ersetzt werden.

*) Inkommensurable Periodizitäten sind solche, deren Wellenlängen in keinem rationalen Verhältnis zueinander stehen.

3. Berechnung der Fourierkoeffizienten einer unharmonischen Welle

Die Berechnung der Fourierkoeffizienten einer unharmonischen Welle (Lit. 3) ist von grundlegender Bedeutung für die Periodogrammrechnung. Unter einer unharmonischen Welle wird eine solche Sinusschwingung verstanden, deren Wellenlänge $p = \frac{2\pi}{\alpha}$ in der Länge des *Analysenintervalles (Grundintervall) n* nicht ganzzahlig enthalten ist.

Es sei also

$$f(t) = c \sin [\alpha t + \beta]$$

wobei α beliebige, also auch gebrochene Werte annehmen kann. Die harmonische Analyse im Grundintervall n ergibt nach Gleichung 23 mit

$$\mu \cdot \frac{2\pi}{n} = x_\mu \qquad \mu = 1, 2, 3, \ldots .$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{c}{n} \int_0^n \sin [\alpha t + \beta] \cdot dt = c \cdot \frac{\sin \frac{\alpha \cdot n}{2}}{\frac{n \cdot \alpha}{2}} \cdot \\ &\quad \cdot \sin \left[\frac{\alpha \cdot n}{2} + \beta \right] \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} a_\mu &= \frac{2c}{n} \int_0^n \sin [\alpha t + \beta] \cdot \cos x_\mu t \cdot dt = \\ &= c \left\{ \frac{\sin [\alpha - x_\mu] \frac{n}{2}}{[\alpha - x_\mu] \frac{n}{2}} \cdot \sin \left[(\alpha - x_\mu) \frac{n}{2} + \beta \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin [\alpha + x_\mu] \frac{n}{2}}{[\alpha + x_\mu] \frac{n}{2}} \cdot \sin \left[(\alpha + x_\mu) \frac{n}{2} + \beta \right] \right\} \\ b_\mu &= \frac{2c}{n} \int_0^n \sin [\alpha t + \beta] \cdot \sin x_\mu t \cdot dt = \\ &= c \left\{ \frac{\sin [\alpha - x_\mu] \frac{n}{2}}{[\alpha - x_\mu] \frac{n}{2}} \cdot \cos \left[(\alpha - x_\mu) \frac{n}{2} + \beta \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin [\alpha + x_\mu] \frac{n}{2}}{[\alpha + x_\mu] \frac{n}{2}} \cdot \cos \left[(\alpha + x_\mu) \frac{n}{2} + \beta \right] \right\} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

D. *Die Periodogrammrechnung*

I. Die Berechung des Spektrums

1. Allgemeines

Wie wir bereits ausgeführt haben, müssen wir, um die harmonische Analyse anwenden zu können, die Wellenlänge einer Periodizität bereits kennen. Die Anwendung der harmonischen Analyse auf ein beliebiges Intervall, welches nicht mit der Wellenlänge übereinstimmt, ist nur eine Interpolation oder näherungsweise Darstellung der zu untersuchenden Beobachtungsreihe. Die Periodogrammrechnung dagegen gibt die Mittel in die Hand, verborgene Periodizitäten aus einer Menge von andersperiodischen und unperiodischen Bestandteilen einer Beobachtungsreihe zu isolieren, diese Periodizitäten mathematisch zu erfassen und gegebenenfalls auch durch wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen auf ihre Realität zu überprüfen. Die Periodogrammrechnung baut dabei auf den Methoden der harmonischen Analyse auf. Es handelt sich aber keineswegs um eine geschlossene Theorie, sondern die Anwendung kann, je nach Zweck und Gegenstand, in außerordentlich verschiedenartigen Varianten erfolgen. *Wir stellen hier nur diejenigen bekannten Methoden (Lit. 3; 4) zusammen, deren wir uns bei der Untersuchung der Abflußmengen des Rheins bei Basel bedient haben, und erläutern diejenigen Überlegungen, welche wir für die hier vorliegende, spezielle Anwendung noch zu machen hatten.* Dabei behandeln wir in diesem Kapitel nur die analytischen Methoden und stellen die benützten wahrscheinkeitstheoretischen Berechnungsmethoden im nächsten Kapitel gesondert dar.

Es soll eine in einer Beobachtungsreihe verborgene Periodizität gesucht werden, welche mathematisch in ihrer einfachsten Gestalt durch eine Sinuswelle

$$y = c \sin [\alpha t + \beta]$$

wiedergegeben werden kann. Darüber, ob in der Beobachtungsreihe eine solche Periodizität enthalten ist, geben in erster Linie die Amplitude c und die Wellenlänge $p = \frac{2\pi}{\alpha}$ Auskunft. Die Phase β, welche lediglich die zeitliche Lage der Maxima und Minima der Welle im gewählten Koordinatensystem festlegt, ist zunächst von untergeordneter Bedeutung.

Zerlegt man eine Beobachtungsreihe in ihrem gegebenen Bereich (o bis n) als Analysenintervall (Grundperiode) in eine Fouriersche Reihe, so stellt die Folge der Amplituden der Teilschwingungen $h_1, h_2, h_3, \ldots$ eine erste Beantwortung der Frage nach den periodischen Eigenschaften des Beobachtungsmaterials dar. Man stellt die Beobachtungsreihe als eine Summe von Einzelwellen mit den Frequenzen

$$x_\mu = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu \qquad \mu = 1, 2, 3, \cdots$$

bzw. den Wellenlängen

$$n, \frac{1}{2} \cdot n, \frac{1}{3} \cdot n, \cdots$$

dar. Die Größe der Amplituden gibt dabei über die relative Bedeutung der einzelnen Schwingungen Auskunft. Finden wir einzelne oder mehrere Amplituden, welche die übrigen an Größe weit übertreffen, so bedeutet dies, daß sich die Beobachtungen durch einzelne oder mehrere Wellen angenähert darstellen lassen.

Diese Wellen deuten auf Periodizitäten hin. Die genauen Konstanten dieser Periodizitäten müssen aber durch andere Verfahren noch weiter erschlossen werden.

Stellt man also die Folge der Amplituden in Funktion ihrer Frequenzen graphisch dar, so erhält man ein Bild von den allgemeinen periodischen Eigenschaften des Materials. Eine solche Aufzeichnung wird als *Spektrum* bezeichnet.

Der Erfinder des Periodogramms, *Schuster*, hat zur Verständlichmachung der Eigenschaften des Spektrums einen sehr treffenden physikalischen Vergleich mit der Zerlegung des *Lichtes* in seine Elementarwellen mittels eines *Prismas* angeführt. In dem so entstehenden *Lichtspektrum* entspricht jede einzelne Stelle einer bestimmten Wellenfrequenz und gibt durch ihre Helligkeit die Intensität der betreffenden Elementarschwingung wieder.

Je nach der Art der Lichtquelle unterscheidet man verschiedenartige Spektren:

Linienspektren, welche nur aus einzelnen, isolierten Linien bestehen und bei der prismatischen Zerlegung des farbigen Lichtes eines leuchtenden Gases entstehen, das nur Schwingungen bestimmter und diskreter Frequenzen aussendet. Sie entsprechen also Spektren von Beobachtungsreihen, welche nur einzelne, voneinander deutlich sich unterscheidende Periodizitäten enthalten.

Kontinuierliche Spektren, welche die Farben in ununterbrochener Reihenfolge zeigen und auftreten, wenn die Lichtquelle Schwingungen aller Wellengattungen aussendet (weißes Licht).

Bei der harmonischen Analyse erhalten wir keine kontinuierlichen Spektren, da ja die vorkommenden Perioden auf die Grundperiode und ihre Oberschwingungen $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \cdots \frac{n}{\mu}$ beschränkt sind, die Frequenzen also keine gebrochenen Werte annehmen. Je länger aber das Analysenintervall gewählt wird, um so kleiner wird der Wert $\frac{2\pi}{n}$ und um so enger liegen die Werte der Frequenzen $x_\mu = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu$, somit auch die Spektrallinien, beieinander. Das kontinuierliche Spektrum stellt also den Grenzfall für $n = \infty$, also für eine unendlich lange Beobachtungsreihe dar.

Zwischen den Linienspektren und den kontinuierlichen Spektren gibt es alle möglichen Übergänge und Kombinationen. «*Bandenspektren*», in denen bestimmte endlich ausgedehnte Teile des Spektralbereiches hell, andere wieder dunkel sind, kommen vor, wenn der in der Beobachtungsreihe enthaltene Vorgang zwar periodischer Art ist, die Länge der Periode und damit die Größe der Frequenz aber mehr oder weniger starken Veränderungen unterworfen sind. Die Periodogrammrechnung hat also, wie *Stumpff* sich trefflich ausdrückt, vor allen andern Methoden zur Bestimmung von Periodizitäten das eine voraus, daß sie sich unmittelbar an das Beispiel hält, welches die Natur uns in der Spektralanalyse des Lichtes gegeben hat.

2. *Das Spektrum einer einfachen Sinuswelle*

Am besten lassen sich die für unsere Untersuchungen benützten Methoden anhand einer einfachen und *persistenten* Sinuswelle darstellen, deren Gleichung lautet

$$f(t) = c \sin [\alpha t + \beta]$$

Die harmonische Analyse in einem Grundintervall n, welches zu der Periode der Sinuswelle nicht in rationaler Beziehung steht, hat zu den Formeln Gleichung 25 geführt.

Um die Spektralfunktion aufzustellen, ist zu berechnen

$$h_\mu^2 = a_\mu^2 + b_\mu^2$$

Auf Grund von Gleichung 25 ergibt sich:

$$h_\mu^2 = c^2 \left[P_\mu^2 + Q_\mu^2 - 2 P_\mu Q_\mu \cdot \cos (n\alpha + 2\beta)\right]$$

worin bedeutet

$$P_\mu = \frac{\sin [\alpha - x_\mu] \frac{n}{2}}{[\alpha - x_\mu] \frac{n}{2}} \qquad Q_\mu = \frac{\sin [\alpha + x_\mu] \frac{n}{2}}{[\alpha + x_\mu] \frac{n}{2}} \tag{26}$$

Dies läßt sich auch in der Form

$$h_\mu^2 = c^2 \cdot P_\mu^2 \cdot \left[1 + \varkappa_\mu^2 - 2\varkappa_\mu \cdot \cos (n\alpha + 2\beta)\right]$$

schreiben, wobei

$$\varkappa_\mu = \frac{Q_\mu}{P_\mu} = \frac{\alpha - x_\mu}{\alpha + x_\mu} \cdot \frac{\sin [\alpha + x_\mu] \frac{n}{2}}{\sin [\alpha - x_\mu] \frac{n}{2}} = \frac{\alpha - x_\mu}{\alpha + x_\mu};$$

denn es ist wegen

$$x_\mu = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu \text{ oder } x_\mu \cdot \frac{n}{2} = \pi \cdot \mu, \quad \mu = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\sin [\alpha + x_\mu] \frac{n}{2} = \sin [\alpha - x_\mu] \frac{n}{2} = \pm \sin \alpha \frac{n}{2}$$

Da immer $|\varkappa_\mu| < 1$, so ergibt sich weiter, daß der Klammerausdruck

$$1 + \varkappa_\mu^2 - 2\varkappa_\mu \cdot \cos [n\alpha + 2\beta]$$

niemals Null und die Amplitude h_μ selbst nur dann gleich Null werden kann, wenn

$$P_\mu = 0$$

d. h.

$$\alpha - x_\mu = \frac{2\pi}{n} \cdot \nu \qquad \nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

Das ist nur dann der Fall, wenn α eine der harmonischen Frequenzen ist, welche zum Grundintervall n gehören. Nur dann besteht das Spektrum aus einer einzigen Linie, welche der Frequenz $\alpha = x_\mu$ entspricht. Andernfalls ergibt sich ein Serienspektrum, in dem alle möglichen Linien mit von Null verschiedenen Intensitäten vertreten sind. Keine dieser Linien entspricht ihrer Lage nach der wirklichen Periode α. Die an der Stelle α des Spektrums zu erwartende Linie ist vielmehr in die genannte Serie aufgespalten; die beiden der wirklichen Frequenz zu beiden Seiten benachbarten Linien haben allerdings die größten Intensitäten, so daß die wirkliche Periode dadurch wenigstens ungefähr angedeutet wird. Der Grund für diese Aufspaltung in Linien liegt in der willkürlichen Wahl des Analysenintervalls (Grundperiode), welche mit der wirklichen Periode der gesuchten Periodizität nicht übereinstimmt und also der naturgesetzlich bedingten Form des beobachteten Schwingungsvorganges nicht gerecht wird.

3. *Wichtige Eigenschaften des Periodogramms einer Sinuswelle*

Theoretisch wird ganz allgemein als Periodogramm die stetige Funktion bezeichnet, welche das Linienspektrum interpoliert, also ein kontinuierliches Spektrum darstellt. In der *Praxis* wird aber nicht nur diese stetige Funktion, sondern auch jede genügend und beliebig dichte Ordinatenauswahl aus ihr als Periodogramm verwendet, denn bei den konkreten Untersuchungen einer Beobachtungsreihe wird es praktisch immer nur möglich sein, eine endliche Menge von Periodogrammkomponenten zu berechnen.

In diesem Sinne ist auch das aus der Folge der harmonischen Amplituden, welche sich aus den Fourierkoeffizienten berechnen, gebildete Spektrum als ein spezielles Periodogramm anzusehen.

Schließlich darf man auch von der Voraussetzung absehen, daß die Beobachtungsfunktion in Form einer Kurve gegeben sei. Auch aus den harmonischen Amplituden, welche aus den Fourierkoeffizienten einer durch n äquidistante Ordinaten gegebenen *diskreten Beobachtungsreihe*

$$y_0, y_1, y_2, \cdots y_i, \cdots y_{n-1}$$

berechnet werden, läßt sich ein Periodogramm konstruieren. Betrachten wir auch hier das diskrete Spektrum, ohne Interpolation desselben, als Periodogramm, so berechnen sich dessen Ordinaten nach Gleichung 24 aus folgenden Komponenten:

$$a_\mu = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos x_\mu i \qquad b_\mu = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin x_\mu i \qquad (27)$$

wobei gesetzt ist

$$\mu \cdot \frac{2\pi}{n} = x_\mu,\ \mu = 1, 2, 3, \cdots$$

Aus den Untersuchungen über die Interpolation des Spektrums, wie sie in Lit. 3 durchgeführt werden, läßt sich weiter erkennen, daß auch andere Folgen von Periodogrammordinaten als jene, welche zu den harmonischen Wellen gehören, imstande sind, die verborgenen periodischen Eigenschaften aufzudecken. Von dem Begriff der harmonischen Welle, deren Frequenz immer ein ganzes Vielfaches der willkürlich gewählten oder durch die zufällige Länge der zu untersuchenden Beobachtungsreihe gegebenen Grundfrequenz ist, gelangt man somit zu dem allgemeinen Begriff der «*Versuchswelle*». Diese kann man innerhalb des gesamten Spektralbereiches beliebig variieren lassen und ist somit nicht mehr an ein Grundintervall gebunden.

In den Gleichungen 25, 26 und 27 soll deshalb im folgenden gegebenenfalls die Frequenz x_μ als Versuchsfrequenz alle möglichen Zahlenwerte und es soll μ also nicht mehr nur die Werte der ganzzahligen Reihenfolge 1, 2, 3, $\cdots$ sondern auch gebrochene Werte oder alle Werte einer kontinuierlichen Zahlenreihe annehmen können. Wir schreiben deshalb mit der Bezeichnung x für die Versuchsfrequenz einfach an Stelle von Gleichung 25

$$\left.\begin{aligned}
a(x) &= c\left\{P(x)\cdot\sin\left[(\alpha-x)\frac{n}{2}+\beta\right]+\right.\\
&\qquad\left.+Q(x)\cdot\sin\left[(\alpha+x)\frac{n}{2}+\beta\right]\right\}\\
b(x) &= c\left\{P(x)\cdot\cos\left[(\alpha-x)\frac{n}{2}+\beta\right]-\right.\\
&\qquad\left.-Q(x)\cdot\cos\left[(\alpha+x)\frac{n}{2}+\beta\right]\right\}\\
P(x) &= \frac{\sin[\alpha-x]\frac{n}{2}}{[\alpha-x]\frac{n}{2}}\\
Q(x) &= \frac{\sin[\alpha+x]\frac{n}{2}}{[\alpha+x]\frac{n}{2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

und an Stelle von Gleichung 27

$$a(x) = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos xi, \quad b(x) = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin xi \qquad (29)$$

Die Funktionen a(x) und b(x), welche zunächst in der Form von Gleichung 28 gegeben seien, hängen ab von den Konstanten c, α und β der gesuchten Periodizität sowie von der Länge n des Analysenintervalls und der Versuchsfrequenz x.

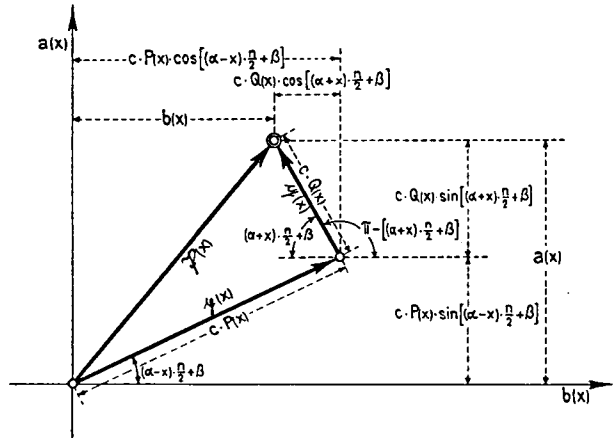


Abb. 3. Veranschaulichung der Gleichungen 28 und 30

Das Periodogramm läßt sich als Vektor $\mathfrak{P}(x)$ mit den Komponenten $a(x)$ und $b(x)$ auffassen; als solchen läßt es sich (vgl. Abb. 3) durch geometrische Addition zweier Teilvektoren

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{p}(x) + \mathfrak{q}(x)$$

erzeugen; die Komponenten dieser Teilvektoren sind

$$\left.\begin{array}{ll} \text{von } \mathfrak{p}(x) & \left\{\begin{array}{l} c\,P(x)\cdot\sin\left[(\alpha-x)\dfrac{n}{2}+\beta\right] \\ c\,P(x)\cdot\cos\left[(\alpha-x)\dfrac{n}{2}+\beta\right] \end{array}\right. \\ \text{von } \mathfrak{q}(x) & \left\{\begin{array}{l} c\,Q(x)\cdot\sin\left[(\alpha+x)\dfrac{n}{2}+\beta\right] \\ -c\,Q(x)\cdot\cos\left[(\alpha+x)\dfrac{n}{2}+\beta\right] \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (30)$$

Die *Vektoren* $\mathfrak{p}(x)$ *und* $\mathfrak{q}(x)$ haben demnach die *Längen* $c\,P(x)$, bzw. $c\,Q(x)$, sowie die *Richtungswinkel*

$$[\alpha-x]\frac{n}{2}+\beta, \text{ bzw. } \pi-\left\{[\alpha+x]\frac{n}{2}+\beta\right\}$$

Die geometrische Gestalt der Funktion $P(x)$ wird durch eine zu Abb. 1 analoge Figur dargestellt. $P(x)$ hat ein Hauptmaximum vom Betrage 1 bei $x=\alpha$ und ist in bezug auf diese Abszisse symmetrisch. Nullstellen sind überall dort vorhanden, wo

$$[\alpha-x]\cdot\frac{n}{2}=\nu\cdot\pi \qquad \nu=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

Die beiden zu $x=\alpha$ symmetrisch liegenden Nullstellen

$$x_{\pm\nu}=\alpha\pm\frac{2\pi}{n}\cdot\nu$$

werden Nullstellen ν-ter Ordnung genannt. Zwischen den *Nullstellen* ν-ter und $(\nu+1)$-ter Ordnung liegt ein *Extremum* ν-ter Ordnung, und zwar ein Maximum, wenn ν gerade, ein Minimum, wenn ν ungerade ist. Die Nebenextrema nehmen zunächst rasch, später langsamer, im ganzen ungefähr hyperbolisch, gegen Null ab. Das Extremum 3. Ordnung ist bereits kleiner als der zehnte Teil des Hauptmaximums (Lit. 3). $Q(x)$ hat die gleiche geometrische Gestalt wie $P(x)$, nur liegt das Hauptmaximum bei $x=-\alpha$, also außerhalb des durch $x>o$ gekennzeichneten Spektralbereiches. $Q(x)$ spielt also im Spektralbereiche selbst gegenüber $P(x)$ eine untergeordnete Rolle. Aus diesem Grunde wird bezeichnet

$\mathfrak{p}(x)$ als *Hauptvektor* und
$\mathfrak{q}(x)$ als *Störungsvektor.*

Der *Hauptvektor* $\mathfrak{p}(x)$, als Funktion der *Versuchsfrequenz* x betrachtet, erreicht seine maximale Länge, wenn die Versuchsfrequenz x gleich der Frequenz α der zu untersuchenden Welle ist. Die Länge des Hauptvektors stimmt dann mit der Amplitude c dieser Welle überein, und seine Richtung entspricht der Phasenkonstanten β. Das Hauptmaximum des Vektorbetrages zeigt also durch seine Lage im Spektrum die Frequenz und damit die Wellenlänge der zu untersuchenden Welle an. Die Festlegung der Wellenlänge ist auf diese Weise vorerst nur ungenau möglich, da das Maximum mehr oder weniger flach ist.

Das Maximum ist um so schärfer ausgeprägt, je kleiner der Abstand zwischen den beiden Nullstellen erster Ordnung ist, welche beidseitig dem Hauptmaximum liegen. Dieser Abstand wird als *Maximumsbreite* bezeichnet und ist gleich

$$x_1 - x_{-1} = \frac{4\pi}{n}$$

Die Maximumsbreite ist also von der Wellenlänge der gesuchten Periodizität unabhängig und der Länge n des Analysenintervalls umgekehrt proportional. Derjenige Bereich des Hauptvektors, welcher zwischen den beiden Nullstellen 1. Ordnung liegt, ist also für die Berechnung der Frequenz der gesuchten Periodizität maßgebend.

Es muß noch abgeschätzt werden, in welchem Ausmaße der Störungsvektor das Bild verzerrt, welches durch den Hauptvektor gegeben ist. Nach Lit. 3 ist an der maßgebenden Stelle $x=\alpha$:

$$|Q(x)| \leq \frac{1}{2\pi\cdot\varrho}$$

wobei $\varrho=\dfrac{n}{p}$ und p die Wellenlänge der zu untersuchenden Periodizität ist. Ist z. B. $\varrho \geq 3$, sind also im Analysenintervall mindestens *drei* vollständige Wellen der gesuchten Periodizität vorhanden, so wird an der Stelle $x=\alpha$ der Betrag $|Q(x)|$ höchstens von der Größenordnung $\dfrac{1}{20}\cdot P(\alpha)$.

Wenn also mindestens drei vollständige Wellen der gesuchten Periodizität im Analysenintervall enthalten sind, so ist der Einfluß des Störungsvektors an der maßgebenden Stelle des Periodogramms sehr klein und vermag das Bild der Periodogrammfunktion nicht wesentlich zu verzerren.

Es ist also bei Periodogrammrechnungen darauf zu achten, daß das Analysenintervall gegenüber den Wellenlängen der zu untersuchenden Perioden ausreichend groß gewählt wird, ansonst die Verhältnisse sehr unübersichtlich werden.

4. Verwendung der Fourierfrequenzen als Versuchsfrequenzen

Einen Spezialfall einer solchen Auswahl diskreter Ordinaten stellen die *Fourieramplituden* dar, welche durch die harmonische Analyse des Analysenintervalles von der Länge n erhalten werden, wie dies schon erwähnt worden ist. Der Abstand der Versuchsfrequenzen $x_\mu=\dfrac{2\pi}{n}\mu$ ist dann konstant gleich $\dfrac{2\pi}{n}$, also gleich der halben Maximumsbreite. Ein Spektrum, welches mit Hilfe der Fourierfrequenzen erzeugt wird, heißt *harmonisches Spektrum.*

Wenn in einem speziellen Falle die zu berechnende Periodizität (Sinuswelle) mit der Wellenlänge p und der Frequenz α eine harmonische Welle des Analysenintervalles von der Länge n, also $p=\dfrac{n}{\varrho}$ ist (ϱ = ganze

positive Zahl), so ist die Frequenz $\alpha = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{n}\varrho$.

Eine der Versuchsfrequenzen x_μ ist dann identisch mit der Frequenz α und entspricht nach den Ausführungen auf Seite 30 dem Hauptmaximum des Hauptvektors. Alle übrigen Versuchsfrequenzen x_μ entsprechen dagegen den Nullstellen der Funktion P(x), d. h. der Hauptvektor $\mathfrak{p}(x)$ (vgl. Gleichung 30) nimmt für diese Versuchsfrequenzen den Wert Null an. Der Störungsvektor nimmt dagegen für *alle* Werte x_μ den Wert Null an. Das harmonische Spektrum enthält also (vgl. Seite 29, links) nur eine einzige von Null verschiedene Ordinate, welche gleich der Amplitude der gesuchten Periodizität ist.

In allen andern Fällen, wenn also α die Frequenz einer im Analysenintervall *unharmonischen* Welle ist, so wird der $\frac{4\pi}{n}$ breite Hauptbereich des harmonischen Spektrums, welcher zwischen den Nullstellen 1. Ordnung liegt, mit *zwei* benachbarten und von Null verschiedenen Ordinaten belegt. Die größere dieser beiden Ordinaten weist mindestens den Betrag $0{,}6366 \cdot c$ auf. Es kann also eine Periodizität nicht übersehen werden.

5. *Darwin-Börgen'sches Berechnungsschema*

Die Ermittlung eines vollständigen und genauen Spektrums erfordert, wie auch die weitere Periodogrammanalyse nach den noch zu behandelnden Methoden, eine gewaltige Rechenarbeit. *Stumpff* (Lit. 3) bemerkt deshalb, daß viele Aufgaben der Periodenforschung bisher ungelöst geblieben und viele nicht einmal in Angriff genommen worden seien, weil die dazu notwendige Arbeit mehr Zeit und Mittel erforderte, als zur Verfügung standen. Es ist deshalb sehr wichtig, rationelle Arbeitsmethoden anzuwenden und sich, soweit dies zulässig ist, mit genäherten, vereinfachten Berechnungen zu begnügen.

Es sind verschiedene Verfahren entwickelt worden, um die Arbeit abzukürzen. Insbesondere sind *Rechenschemata* eingeführt worden, durch welche vor allem die Zahl der Multiplikationen stark herabgesetzt wird. Ein sehr bequemes Rechenschema ist dasjenige nach *Darwin-Börgen*. Da wir in unserer Arbeit nur *ein* Spektrum berechnet haben, kann es sich hier erübrigen, eingehender auf die allgemeine Theorie eines Darwin-Börgen'schen Schemas einzutreten; wir können uns damit begnügen, diejenigen Erläuterungen zu geben, welche nötig sind, um dasjenige, speziell einfache Darwin-Börgen'sche Schema zu verstehen, welches wir für unsere Untersuchung benützten.

Wenn eine Reihe von n gleichabständigen Beobachtungswerten

$$y_0, y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$$

vorliegt, so hätten wir für die genaue Berechnung der Fourierkoeffizienten nach Gleichung (27) $2 \cdot n$ Multiplikationen durchzuführen. Für die Berechnung der Koeffizienten der *Welle* $\mu = 1$ wären z. B. mit

$$x_\mu = x_1 = \frac{2\pi}{n}$$

folgende $2 \cdot n$ Multiplikationen erforderlich:

$$y_0 \cdot \cos 0^0,\ y_1 \cdot \cos\frac{2\pi}{n}, \cdots y_i \cdot \cos i\frac{2\pi}{n}, \cdots y_{n-1} \cdot \cos\left[(n-1)\frac{2\pi}{n}\right]$$

$$y_0 \cdot \sin 0^0,\ y_1 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}, \cdots y_i \cdot \sin i\frac{2\pi}{n}, \cdots y_{n-1} \cdot \sin\left[(n-1)\frac{2\pi}{n}\right]$$

Die Reihenfolge der Beobachtungswerte y_i und der Argumente der zugehörigen trigonometrischen Faktoren $i \cdot \frac{2\pi}{n}$ ist für die Welle $\mu = 1$ in Abb. 4a für $n = 121$ anschaulich dargestellt.

Die Berechnung einer höheren Welle μ erfordert Multiplikationen mit trigonometrischen Faktoren, deren Argumentenfolge lautet:

$$0^0, \mu \cdot \frac{2\pi}{n}, \mu \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \cdots \mu \cdot i \cdot \frac{2\pi}{n}, \cdots \mu \cdot (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$$

Der Bereich 0^0 bis 2π wird dabei insgesamt μ-mal durchlaufen, wie dies in Abb. 4b für $\mu = 2$ veranschaulicht ist.

Wir könnten für die Berechnung aller Wellen ein Schema von n Spalten benützen; der Spalte 0 wäre dabei das Argument 0^0, der Spalte 1 das Argument $\frac{2\pi}{n}$ usw. zugeordnet, bis Spalte n–1, welcher das Argument $(n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$ zugeschrieben würde. In der ersten Zeile dieses Schemas würden für die Berechnung der Welle $\mu = 1$ in den Spalten $0, 1, 2, 3, \cdots\cdots n-1$ die Beobachtungswerte $y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots y_{n-1}$ eingetragen. Die zweite Zeile würde der Berechnung von Welle $\mu = 2$ dienen; dabei wäre wiederum y_0 der Spalte 0 zugeordnet, y_1 dagegen der Spalte 2, y_2 der Spalte 4 usf. In der μ-ten Zeile würde also zur Berechnung der Welle μ der Wert y_0 der Spalte 0, der Wert y_1 der Spalte μ, der Wert y_i der Spalte $i \cdot \mu$ entsprechen, wobei jeweilen wieder vorne im Schema angefangen wird, wenn $i \cdot \mu > n$ ist, wie aus folgender Tabelle 2 mit Schema für $n = 9$ hervorgeht:

Welle μ	$\cos 0^\circ$ $\sin 0^\circ$	$\cos\frac{2\pi}{n}$ $\sin\frac{2\pi}{n}$	$\cos 2\frac{2\pi}{n}$ $\sin 2\frac{2\pi}{n}$	$\cos 3\frac{2\pi}{n}$ $\sin 3\frac{2\pi}{n}$	$\cos 4\frac{2\pi}{n}$ $\sin 4\frac{2\pi}{n}$	$\cos 5\frac{2\pi}{n}$ $\sin 5\frac{2\pi}{n}$	$\cos 6\frac{2\pi}{n}$ $\sin 6\frac{2\pi}{n}$	$\cos 7\frac{2\pi}{n}$ $\sin 7\frac{2\pi}{n}$	$\cos 8\frac{2\pi}{n}$ $\sin 8\frac{2\pi}{n}$
1	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
2	y_0	y_5	y_1	y_6	y_2	y_7	y_3	y_8	y_4
3	y_0 y_3 y_6			y_1 y_4 y_7			y_2 y_5 y_8		
4	y_0	y_7	y_5	y_3	y_1	y_8	y_6	y_4	y_2

Tabelle 2
Schema für die Berechnung der 4 Wellen einer 9-gliedrigen Beobachtungsreihe

Ist μ zu n teilerfremd, so wird *jede* Spalte durch je *eine* Beobachtung belegt (in Tabelle 2 die Zeilen für $\mu = 1$, 2 und 4). Haben jedoch μ und n einen gemeinsamen größten Teiler m, so daß $n = \xi \cdot m$ und $\mu = \vartheta \cdot m$ ist, so kehrt die gleiche Reihenfolge der trigonometrischen Argumente jedesmal wieder, wenn der Bereich 0 bis 2π ϑ-mal durchlaufen ist; z. B. ist für $\mu = 3$ nach Tabelle 2 mit $m = 3$; $n = 3 \cdot m$ und $\mu = 1 \cdot m$. Es wird also nur jede m-te Spalte, in unserem Falle je jede dritte Spalte belegt, dafür aber mit m Beobachtungen.

Bei einer großen Zahl n von Beobachtungswerten ist es genügend genau, wenn für die Berechnung des Spektrums die Beobachtungswerte von ζ aufeinanderfolgenden Spalten zu je einer Gruppe zusammengefaßt werden und für jede Gruppe ein mittleres trigonometrisches Argument verwendet wird. Bei insgesamt n Beobachtungswerten ergeben sich somit $n' = \frac{n}{\zeta}$ Gruppen. Die ζ-Werte einer Gruppe werden *summiert*, und die Summe wird mit dem trigonometrischen Faktor des mittleren, der betreffenden Gruppe zugeordneten Argumentes multipliziert. Anstatt mit der ursprünglichen n-gliedrigen Beobachtungsreihe (y_i) wird also bei der Ermittlung einer Welle μ nur mit einer n'-gliedrigen *Summenreihe* Y_i und einem Schema von nur n' «Summen»-Spalten gearbeitet. Die Zahl der Multiplikationen wird dadurch ganz erheblich verringert.

Die Anwendung eines mittleren trigonometrischen Argumentes für die einzelnen Gruppen setzt voraus, daß die einzelnen Beobachtungswerte sich symmetrisch über die zusammengefaßten Spalten verteilen. Würden wir z. B. nach Tabelle 2 die Beobachtungswerte von je $\zeta = 3$ aufeinanderfolgenden Spalten zu einer Summe zusammenfassen, so wäre die Voraussetzung einer symmetrischen Verteilung über die zusammengefaßten Spalten aller Wellen für $\mu = 1, 2, 3, 4$ erfüllt. Die zu benützenden Summenreihen und die zugehörigen trigonometrischen Faktoren gehen aus folgendem Schema $n' = 3$ hervor, wobei ist:

$$3 \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n'} \quad \text{und} \quad 6 \cdot \frac{2\pi}{n} = 2 \cdot \frac{2\pi}{n'}$$

Welle μ	$\cos 0^0$ $\sin 0^0$	$\cos \frac{2\pi}{n'}$ $\sin \frac{2\pi}{n'}$	$\cos 2\frac{2\pi}{n'}$ $\sin 2\frac{2\pi}{n'}$
1	$Y_0 = y_8 + y_0 + y_1$	$Y_1 = y_2 + y_3 + y_4$	$Y_2 = y_5 + y_6 + y_7$
2	$Y_0 = y_4 + y_0 + y_5$	$Y_1 = y_1 + y_6 + y_2$	$Y_2 = y_7 + y_3 + y_8$
3	$Y_0 = y_0 + y_3 + y_6$	$Y_1 = y_1 + y_4 + y_7$	$Y_2 = y_2 + y_5 + y_8$
4	$Y_0 = y_2 + y_0 + y_7$	$Y_1 = y_5 + y_3 + y_1$	$Y_2 = y_8 + y_6 + y_4$

Solche Schemata werden als *Darwin-Börgen'sche Schemata* bezeichnet. *Ein für alle Wellen brauchbares* Darwin-Börgen'sches Schema, bei welchem also die Beobachtungswerte für alle Wellen symmetrisch über die Summenspalten verteilt sind, ergibt sich, wie im vorigen Beispiel, immer, wenn die *Zahl n'* der «Summen»-Spalten eine *Primzahl* und gleich der Zahl ζ der zusammengefaßten Beobachtungswerte ist. Abgesehen von ganz oberflächlichen Überprüfungen des Beobachtungsmaterials auf Periodizitäten hin, sollte jedoch die Zahl n' der «Summen»-Spalten nicht zu klein und zwar, wenn gleichzeitig für n' eine Primzahl gewählt werden soll, nicht kleiner als $n' = 11$ sein, um eine doch noch ausreichende Genauigkeit zu erhalten.

Besondere Bedeutung kommt also einem Darwin-Börgen'schen Schema von $n' = 11$ Spalten zu; es kann mit einem solchen Schema eine große Zahl von Beobachtungswerten $n = n'^2 = 121$ relativ sehr rasch nach sehr vielen, wenn nötig allen 60 Wellen analysiert werden. Wir haben bei der Aufstellung des Spektrums für die jährlichen Abflußmengen des Rheins bei Basel ein solches 11-spaltiges Schema verwendet.

Wir können also in bezug auf die Anwendung eines Darwin-Börgen'schen Schemas von $n' = 11$ «Summen»-Spalten zusammengefaßt folgendes sagen:

Die 11 «Summen»-Spalten des Schemas sind mit 0, 1, 2, · · · · · · bis 10 beziffert, und es entsprechen ihnen die Winkelargumente der trigonometrischen Faktoren in der Reihenfolge $0^0, \frac{2\pi}{11}, 2 \cdot \frac{2\pi}{11}, \cdots\cdots 10 \cdot \frac{2\pi}{11}$. Je für jede zu berechnende Welle wird jeder der 121 Beobachtungswerte einer der 11 «Summen»-Spalten und damit dem entsprechenden Winkelargument zugeordnet. Die Zuordnung kann dabei für jede Welle μ auf Grund von Darstellungen erfolgen, wie sie in Abb. 4a und 4b für die Wellen $\mu = 1$ und $\mu = 2$ wiedergegeben sind oder nach formelmäßig gegebenen *Verteilungsschlüsseln*, aus welchen auch *Schlüsseltabellen* abgeleitet werden können. Wir haben für die Berechnung unseres Spektrums die Schlüsseltabelle benützt, welche für ein Schema von 11 Spalten und 121 Beobachtungen und für die Wellen $\mu = 1$ bis 25 in Lit. 4 enthalten ist. Jeder «Summen»-Spalte sind also für jede Welle 11 Beobachtungswerte zugeordnet, deren Summen $Y_0, Y_1, \cdots\cdots Y_{10}$ gebildet werden. So entsteht für jede Welle eine Summenreihe (Y_i-Reihe) von 11 Gliedern. Für jede Welle werden dann die Werte $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_{10}$ mit den trigonometrischen Faktoren der Winkelargumente

$$0^0, \frac{2\pi}{11}, 2 \cdot \frac{2\pi}{11}, \cdots\cdots 10 \cdot \frac{2\pi}{11}$$

multipliziert, womit sich die Fourierkoeffizienten der betreffenden Welle ergeben nach den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} a_\mu &= \frac{2}{121} \sum_{i=0}^{10} Y_{\mu,i} \cdot \cos \frac{2\pi i}{11} \\ b_\mu &= \frac{2}{121} \sum_{i=0}^{10} Y_{\mu,i} \cdot \sin \frac{2\pi i}{11} \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Zur weitern Verdeutlichung obiger Darlegungen wollen wir uns bereits hier mit der numerischen Berechnung unseres Spektrums befassen.

Wir haben für die Berechnung des Spektrums die 121 mittleren jährlichen Abflußmengen der Jahre 1808 bis 1928 benützt, welche auf Tafel I oben enthalten und

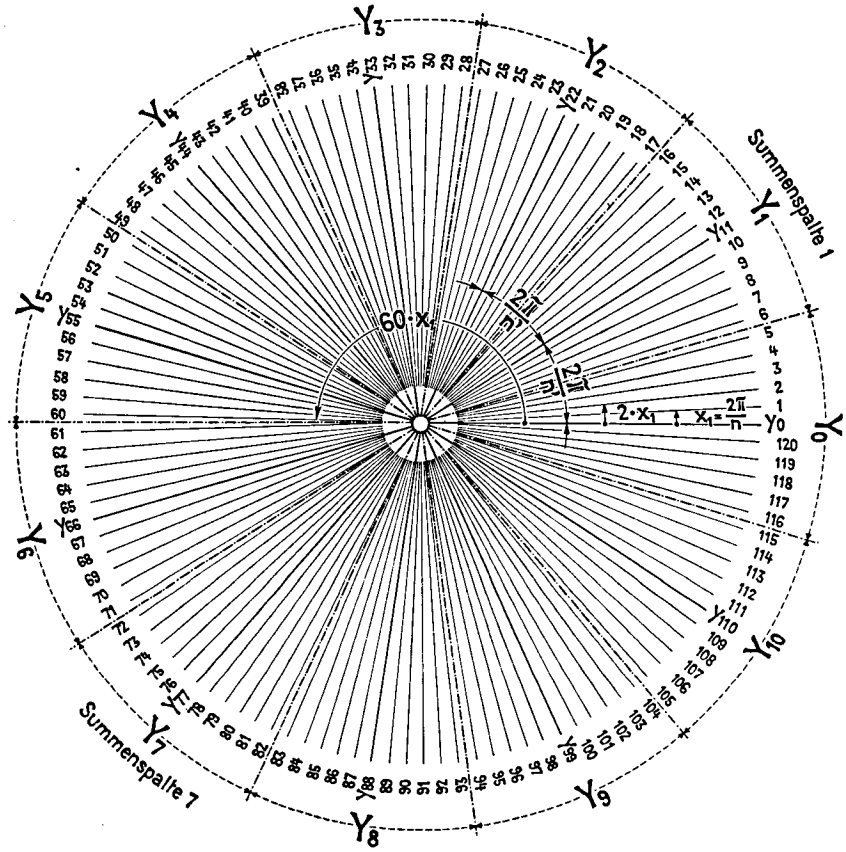


Abb. 4a. Verteilung von n = 121 Beobachtungswerten über ein Darwin-Börgen'sches Schema von n' = 11 Summenspalten für die Berechnung der Welle $\mu = 1$

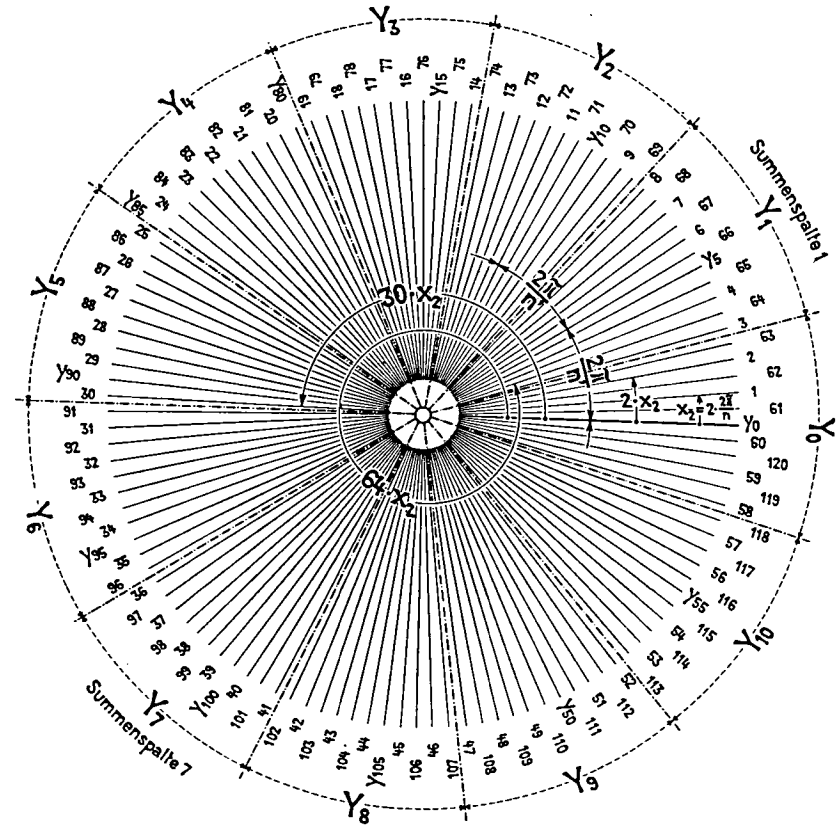


Abb. 4b. Verteilung von n = 121 Beobachtungswerten über ein Darwin-Börgen'sches Schema von n' = 11 Summenspalten für die Berechnung der Welle $\mu = 2$

fortlaufend mit y = 0, 1, 2, ··· 120 beziffert sind. Die Erklärung, warum diese Werte benützt worden sind, wird später in Teil III gegeben werden. Auf Tafel I unten ist die Zuordnung zu den «Summen»-Spalten des Darwin-Börgen'schen Schemas am Beispiel der *Welle* $\mu = 2$ gezeigt; aus einem Vergleich mit Abb. 4b erkennt man leicht, in welcher Weise die Zuordnung erfolgt. Durch Addition der 11 Beobachtungswerte, die den einzelnen Spalten zugeordnet sind, ergibt sich die in der untersten Zeile aufgeführte Summenreihe Y_0, Y_1, ··· Y_{10}. Es ist unnötig, für jede Welle eine solche Zuordnungstabelle aufzustellen. Mit Hilfe der erwähnten, in Lit. 4 enthaltenen Schlüsseltabelle werden die den einzelnen Spalten zuzuordnenden Beobachtungswerte einem Gehilfen direkt in die Additionsmaschine diktiert. Die so erhaltenen Summenreihen sind hierauf in das auf Tafel II wiedergegebene Darwin-Börgen'sche Schema eingetragen worden. Aus später in Teil III angegebenen Gründen sind die Wellen $\mu = 1 - 25$ berechnet worden. Weiter sind für jede Welle die Werte Y_0, Y_1, ··· Y_{10} mit den cos- und sin-Faktoren der zugehörigen Winkelargumente 0^0, $\frac{2\pi}{11}$, ··· bis $10 \cdot \frac{2\pi}{11}$ multipliziert und die Produkte in den beiden Tabellen auf Tafel III zusammengestellt worden. Zeilenweise sind dann in diesen Tabellen die Produktensummen gebildet und daraus die Werte a_μ und b_μ berechnet worden. Aus den Werten a_μ und b_μ sind auf Tafel II unten die Fourieramplituden $h_\mu = \sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2}$ berechnet worden. Die graphische Darstellung dieser Amplituden in Funktion der Wellenordnung μ ergibt weiter das gesuchte Spektrum (Abb. 5).

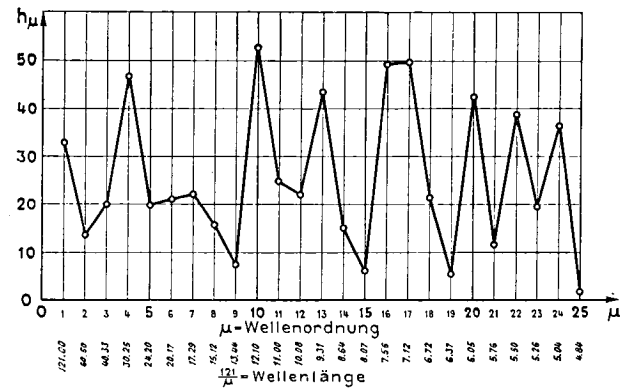


Abb. 5. Spektrum der mittleren jährlichen Abflußmengen des Rheins bei Basel für die Jahre 1808 bis 1928

II. Das Phasendiagramm

1. Allgemeines

Das Spektrum dient nur zu einer ersten angenäherten Untersuchung des Beobachtungsmaterials daraufhin, ob überhaupt Periodizitäten vorhanden sind. Dagegen können mit seiner Hilfe die Konstanten (Wellenlänge bzw. Frequenz, Amplitude, Phasenkonstante) der verborgenen Periodizitäten nicht genau berechnet werden. Wie wir schon erwähnt haben, werden die gesuchten Frequenzen durch die Maxima der Spektralfunktion nur ungenau festgelegt, da die Maxima mehr oder weniger flach sind. Dazu kommt der Einfluß des Störungsvektors, welcher eine Verschiebung der Maxima aus ihrer Lage bewirken kann. Ferner können sich benachbarte Wellen, d. h. Periodizitäten, welche nicht sehr verschieden große Wellenlängen aufweisen, stören, wozu noch die Störungen durch aperiodische Bestandteile kommen. Auch die Lage der Nullstellen 1. Ordnung, welche zu einer genaueren Bestimmung der Lage der Maxima herangezogen werden könnten, wird durch die genannten Einflüsse gestört.

Das Spektrum ist ein Periodogramm, in welchem die Ordinaten in Funktion der *Versuchsfrequenz* dargestellt sind. Für unsere Zwecke haben wir als Ordinaten die Fourieramplituden benützt. Von der Phase der gesuchten Periodizität wurde dabei kein Gebrauch gemacht. Durch diese Phase wird jedoch die Lage des Analysenintervalls auf der Zeitachse festgelegt, da ja dem Anfang des Analysenintervalls eine ganz bestimmte Phase entspricht. Ein *Periodogramm*, welches eine genauere Bestimmung der Konstanten der gesuchten Periodizität ermöglicht, ergibt sich nun, indem auch von der Phase Gebrauch gemacht wird, wie folgt: Das Analysenintervall wird in seiner Lage variiert, d. h. längs der Zeitachse durch die Beobachtungsreihe verschoben. Für die verschiedenen Lagen dieses Analysenintervalls, dessen variabler Anfangspunkt mit q bezeichnet sei, werden die zu einer bestimmten Versuchsfrequenz x gehörigen Periodogrammkomponenten a (x, q) und b (x, q) berechnet, und es wird deren Verhalten in Funktion der Lage des Analysenintervalles untersucht. Aus diesem Verhalten können dann die nötigen Schlüsse gezogen werden, welche eine genaue Berechnung der Konstanten der gesuchten Periodizität gestatten. Dieses Vorgehen wird allgemein als die Methode der *Phasendiagramme* bezeichnet.

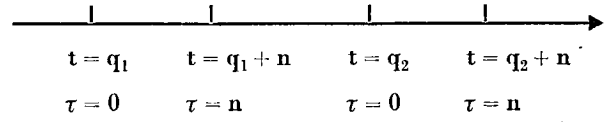
2. Ableitung der Gleichungen

Im Bestreben, dem Leser das Verständnis für die Anwendung der Methode der Phasendiagramme, sowie weiterer noch darzulegender verwendeter Methoden zu erleichtern, erscheint es uns zweckmäßig, die Ableitung der Formeln für die Methode der Phasendiagramme eingehender darzustellen, als dies im Werke von *Stumpff* (Lit. 3) getan wird.

Es sei eine Beobachtungsfunktion in der Form einer einfachen Sinuslinie

$$f(t) = c \sin [\alpha t + \beta]$$

in einem beliebig langen Zeitbereich gegeben.



Aus diesem Zeitbereich sei ein Intervall von der Länge n und dem variablen Anfangspunkt $t = q$ herausgegriffen. Dem Endpunkt des Analysenintervalls entspricht dann der Zeitpunkt $t = q + n$. Unter Benützung einer *festgewählten Versuchsfrequenz* x wird nun die Analyse dieses *variablen* Intervalles durchgeführt. Diese Art von Analyse wird als progressive Analyse bezeichnet. Gemäß Gleichung 23 ist:

$$a(x,q) = \frac{2}{n}\int_{q}^{q+n} f(t)\cos xt \cdot dt$$

$$b(x,q) = \frac{2}{n}\int_{q}^{q+n} f(t)\sin xt \cdot dt$$

Der Betrag der einzelnen Produkte $f(t)\cdot\cos xt$ und $f(t)\cdot\sin xt$ ist also dabei von der Verschiebung des Analysenintervalls unabhängig und stets gleich groß bleibend. Es wird dies so ausgedrückt, indem gesagt wird, die «Versuchswelle» mit der Frequenz x sei mit der Zeitachse und deshalb auch mit der Beobachtungsfunktion f(t) *fest verknüpft.*

Zur Durchführung der Integration wird eine neue Zeitvariable

$$\tau = t - q$$

eingeführt, deren Wert am Anfang des variablen Intervalles gleich Null und am Ende gleich n ist. Damit erhalten wir

$$a(x,q) = \frac{2}{n}\int_{0}^{n} f(\tau+q)\cos x[\tau+q]\,d\tau$$

$$b(x,q) = \frac{2}{n}\int_{0}^{n} f(\tau+q)\sin x[\tau+q]\,d\tau$$

Mit
$$\cos x[\tau+q] = \cos[x\tau + xq] = \cos x\tau\cdot\cos xq - \sin x\tau\cdot\sin xq$$
$$\sin x[\tau+q] = \sin[x\tau + xq] = \sin x\tau\cdot\cos xq + \cos x\tau\cdot\sin xq$$

wird

$$a(x,q) = \frac{2}{n}\left\{\cos xq\cdot\int_{0}^{n} f(\tau+q)\cdot\cos x\tau\,d\tau - \sin xq\cdot\int_{0}^{n} f(\tau+q)\cdot\sin x\tau\,d\tau\right\}$$

$$b(x,q) = \frac{2}{n}\left\{\sin xq\cdot\int_{0}^{n} f(\tau+q)\cdot\cos x\tau\,d\tau + \cos xq\cdot\int_{0}^{n} f(\tau+q)\cdot\sin x\tau\,d\tau\right\}$$

Es ist:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{n}\int_{0}^{n} f(\tau+q)\cdot\cos x\tau\,d\tau &= \frac{2\cdot c}{n}\int_{0}^{n}\sin[\alpha\tau+\beta+\alpha\cdot q]\cdot\cos x\tau\,d\tau\\ \frac{2}{n}\int_{0}^{n} f(\tau+q)\cdot\sin x\tau\,d\tau &= \frac{2\cdot c}{n}\int_{0}^{n}\sin[\alpha\tau+\beta+\alpha\cdot q]\cdot\sin x\tau\,d\tau\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

Ein Vergleich mit Gleichung 25, S. 27, zeigt, daß diese neuen Integrale sich von den dortigen nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle der dortigen Phasenkonstante β die neue $\beta + \alpha\cdot q$ tritt, die eine lineare Funktion des als variabel betrachteten Intervallanfanges q ist.

Setzen wir nach Gleichung 28

$$P(x) = \frac{\sin[\alpha - x]\frac{n}{2}}{[\alpha - x]\frac{n}{2}} \qquad Q(x) = \frac{\sin[\alpha + x]\frac{n}{2}}{[\alpha + x]\frac{n}{2}}$$

so ist

$$\begin{aligned}a(x,q) = {} & c\,P(x)\left\{\cos xq\cdot\sin\left[(\alpha-x)\frac{n}{2}+\beta+\alpha q\right] - \sin xq\cdot\cos\left[(\alpha-x)\frac{n}{2}+\beta+\alpha q\right]\right\}\\ & + c\,Q(x)\left\{\cos xq\cdot\sin\left[(\alpha+x)\frac{n}{2}+\beta+\alpha q\right] + \sin xq\cdot\cos\left[(\alpha+x)\frac{n}{2}+\beta+\alpha q\right]\right\}\\ b(x,q) = {} & c\,P(x)\left\{\sin xq\cdot\sin\left[(\alpha-x)\frac{n}{2}+\beta+\alpha q\right] + \cos xq\cdot\cos\left[(\alpha-x)\frac{n}{2}+\beta+\alpha q\right]\right\}\\ & + c\,Q(x)\left\{\sin xq\cdot\sin\left[(\alpha+x)\frac{n}{2}+\beta+\alpha q\right] - \cos xq\cdot\cos\left[(\alpha+x)\frac{n}{2}+\beta+\alpha q\right]\right\}\end{aligned}$$

woraus sich nach den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen ergibt:

$$\left.\begin{aligned}a(x,q) &= c\left\{P(x)\cdot\sin\left[(\alpha-x)\left(\frac{n}{2}+q\right)+\beta\right] + Q(x)\cdot\sin\left[(\alpha+x)\left(\frac{n}{2}+q\right)+\beta\right]\right\}\\ b(x,q) &= c\left\{P(x)\cdot\cos\left[(\alpha-x)\left(\frac{n}{2}+q\right)+\beta\right] - Q(x)\cdot\cos\left[(\alpha+x)\left(\frac{n}{2}+q\right)+\beta\right]\right\}\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

Als Versuchsfrequenz x *wird ein Wert gewählt, welcher sich vom wahren, aber noch unbekannten Wert* α *nur wenig unterscheidet.* Um diese Wahl treffen zu können, muß daher der Wert α auf Grund einer vorherigen Überprüfung des Beobachtungsmaterials mit Hilfe eines Spektrums angenähert bekannt sein.

3. *Veranschaulichung der Gleichungen*

Die Werte a (x, q) und b (x, q) können, in analoger Weise wie dies beim Spektrum getan wurde, als Komponenten eines Periodogrammvektors $\mathfrak{P}$ (x, q) aufgefaßt werden, welcher sich wiederum aus zwei Teilvektoren, dem Hauptvektor $\mathfrak{p}$ (x, q) und dem Störungsvektor $\mathfrak{q}$ (x, q) zusammensetzt. Die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{p}$ (x, q) und $\mathfrak{q}$ (x, q) sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{von } \mathfrak{p} & \left\{\begin{array}{l} c\,P(x)\cdot\sin\left[(\alpha-x)\left(\frac{n}{2}+q\right)+\beta\right] \\ c\,P(x)\cdot\cos\left[(\alpha-x)\left(\frac{n}{2}+q\right)+\beta\right] \end{array}\right. \\ \text{von } \mathfrak{q} & \left\{\begin{array}{l} c\,Q(x)\cdot\sin\left[(\alpha+x)\left(\frac{n}{2}+q\right)+\beta\right] \\ -c\,Q(x)\cdot\cos\left[(\alpha+x)\left(\frac{n}{2}+q\right)+\beta\right] \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (34)$$

Zur Veranschaulichung werden die beiden Vektoren $\mathfrak{p}$ (x, q) und $\mathfrak{q}$ (x, q) in einem Koordinatensystem gemäß Abb. 6 dargestellt.

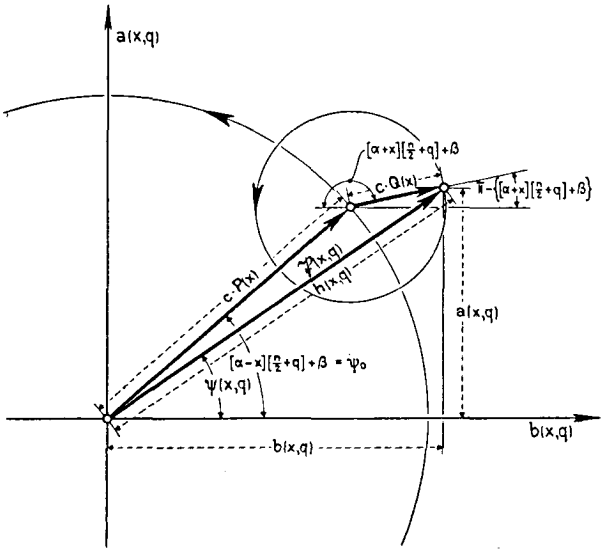


Abb. 6. Veranschaulichung der Beziehungen, welche der Methode der Phasendiagramme zugrunde liegen

Die Vektoren $\mathfrak{p}$ (x, q) und $\mathfrak{q}$ (x, q) *haben die Längen* $c\cdot P(x)$ bzw. $c\cdot Q(x)$, sowie die *Richtungswinkel*, welche mit q variieren:

$$[\alpha-x]\left[\frac{n}{2}+q\right]+\beta \quad \text{bzw.} \quad \pi-\left\{[\alpha+x]\left[\frac{n}{2}+q\right]+\beta\right\}$$

Da für x ein *fester Wert* gewählt wird, welcher angenähert gleich groß ist wie α, so ist der Betrag $\alpha - x$ klein.

Der *Hauptvektor* $\mathfrak{p}$ (x, q) dreht sich also bei wachsendem q langsam mit der Winkelgeschwindigkeit $\alpha - x$ um den Nullpunkt des Koordinatensystems und hat einen von der wahren Amplitude c nur wenig verschiedenen konstanten Betrag [$P(x) \approx 1$]. Ist zufällig $x = \alpha$ gewählt worden, so bleibt der Hauptvektor auch der Richtung nach konstant. Die Länge des Hauptvektors ist dann gleich der gesuchten Amplitude c und der Richtungswinkel des Hauptvektors gleich der gesuchten Phasenkonstanten β. Ist $x < \alpha$, also $\alpha - x$ positiv, so dreht sich der Vektor $\mathfrak{p}$ (x, q) langsam im Gegenuhrzeigersinn, dagegen im Uhrzeigersinn, wenn $x > \alpha$, also $\alpha - x$ negativ ist.

Der *Störungsvektor* $\mathfrak{q}$ (x, q) dreht sich mit einer viel größern Winkelgeschwindigkeit als der Hauptvektor, nämlich mit der Geschwindigkeit $\alpha + x$ im Gegenuhrzeigersinn um den Endpunkt des Hauptvektors. Der Störungsvektor selbst ist von kleinem Betrag.

Der Endpunkt des *Periodogrammvektors* $\mathfrak{P}$ (x, q) bewegt sich somit auf einer Epizykloide. Sein Richtungswinkel sei mit ψ (x, q) bezeichnet, wobei ist:

$$\left.\begin{array}{l} a(x,q) = h(x,q)\cdot\sin\psi(x,q) \\ b(x,q) = h(x,q)\cdot\cos\psi(x,q) \\ \operatorname{tg}\psi(x,q) = \dfrac{a(x,q)}{b(x,q)} \\ \psi(x,q) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{a(x,q)}{b(x,q)} \end{array}\right\} \quad (35)$$

Der Hauptvektor wird als «*Deferent*» und der Störungsvektor als «*Epizykel*» bezeichnet. Der Richtungswinkel ψ (x, q) des Periodogrammvektors unterscheidet sich nur wenig vom Richtungswinkel $\psi_0 = [\alpha - x]\left[\frac{n}{2}+q\right]+\beta$ des Hauptvektors. Aus Abb. 6 ist ersichtlich, daß der Betrag des Winkels ψ (x, q) um denjenigen des Winkels $\psi_0 = [\alpha - x]\left[\frac{n}{2}+q\right]+\beta$ mit kleinen Abweichungen schwankt, und zwar infolge des Einflusses des Störungsvektors. Der Richtungswinkel $\psi_0 = [\alpha - x]\left[\frac{n}{2}+q\right]+\beta$ ist eine lineare Funktion von q, also der Lage des Analysenintervalls.

4. *Berechnung der Periodogrammkomponenten für eine Beobachtungsreihe*

Für eine reine Sinuswelle in der Form

$$f(t) = c\sin[\alpha t + \beta]$$

sind die Gleichungen 33, 34 und 35 aufgestellt worden. Bei unsern Untersuchungen wird aber eine Beobachtungsreihe gegeben sein, und wir werden festzustellen haben, ob in der Beobachtungsreihe eine Periodizität verborgen ist, ob diese durch eine Sinuswelle erfaßt werden kann und welches die Konstanten der Sinuswelle sind.

Berechnen wir also für die Beobachtungsreihe die Periodogrammkomponenten a (x, q) und b (x, q) und stellen sie in einem Koordinatennetz gemäß Abb. 6 dar, so werden wir zu prüfen haben, ob sich dabei ein gleiches Bild ergibt wie jenes, welches den Gleichungen 33, 34 und 35 entspricht. Trifft dies zu, so erhalten wir weiter durch die formelmäßige Erfassung des sich ergebenden Bildes die Konstanten der gesuchten, durch eine Sinuswelle wiedergegebenen Periodizität:

Es sei somit eine Beobachtungsreihe von N äquidistanten Ordinaten gegeben:

$$y_0, y_1, y_2, \cdots\cdots y_i, \cdots\cdots y_n, \cdots\cdots y_{n+i}, \cdots\cdots y_{N-i}$$

Für die Periodogrammkomponenten, welche zu einem beliebigen Analysenintervall von n Beobachtungswerten innerhalb des Bereiches y_0 bis y_{N-1} gehören, ergibt sich dann gemäß Gleichung 29 in Analogie zu Gleichung 33

$$\left.\begin{aligned} a(x,q) &= \frac{2}{n}\sum_{i=q}^{q+n-1} y_i \cdot \cos xi \\ b(x,q) &= \frac{2}{n}\sum_{i=q}^{q+n-1} y_i \cdot \sin xi \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Jeder Beobachtungswert y_i wird also mit den trigonometrischen Faktoren $\cos x\,i$ und $\sin x\,i$ multipliziert. Der Betrag der Produkte $y_i \cdot \cos x\,i$ und $y_i \cdot \sin x\,i$ ist dabei, wie wir wissen, von der Verschiebung des Analysenintervalles unabhängig. Der Berechnungsgang ist also folgender:

Es werden gebildet die Produktenfolgen

$$y_i \cos xi \qquad y_i \sin xi \qquad i = 0, 1, \cdots\cdots N-1$$

Dann werden die Summen von je n aufeinanderfolgenden Gliedern dieser Produktenfolgen berechnet und diese Summen mit $\frac{2}{n}$ multipliziert.

Die dichteste Reihenfolge der Werte a (x, q) und b (x, q), welche auf diese Weise erzeugt werden kann, entspricht der Folge q = 1, 2, 3, ···

Ist x *insbesondere eine harmonische Frequenz*, also

$$x = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu \qquad \mu = \text{ganze Zahl},$$

so lassen sich (Lit. 3) die zu den einzelnen Analysenintervallen gehörigen Periodogrammkomponenten wie folgt sukzessive berechnen, wenn diese Komponenten für das Anfangsintervall q = 0 vorliegen:

Es ergibt sich nämlich aus Gleichung 36 unter Einführung der Bezeichnung A (x, q) und B (x, q):

$$\left.\begin{aligned} A(x,q) &= \frac{n}{2} \cdot a(x,q) = \sum_{i=q}^{q+n-1} y_i \cdot \cos xi \\ B(x,q) &= \frac{n}{2} \cdot b(x,q) = \sum_{i=q}^{q+n-1} y_i \cdot \sin xi \end{aligned}\right\} \qquad (36a)$$

und

$$A(x,q+1) = \frac{n}{2} \cdot a(x,q+1) = A(x,q) + [y_{q+n} - y_q] \cdot \cos qx$$

$$B(x,q+1) = \frac{n}{2} \cdot b(x,q+1) = B(x,q) + [y_{q+n} - y_q] \cdot \sin qx$$

Zur Herstellung einer möglichst dichten Folge von Periodogrammkomponenten werden also bei diesem Vorgehen die Differenzen $y_{q+n} - y_q$ zwischen je zwei Beobachtungswerten benützt, welche um n der gewählten Zeiteinheiten auseinanderliegen. Sind außerdem die Periodogrammkomponenten für getrennte, also nicht ineinander übergreifende Analysenintervalle

$$[0, \cdots, n-1],\ [n, \cdots, 2n-1],\ [2n, \cdots, 3n-1], \cdots$$

nach der Gleichung 36 berechnet worden, so dienen diese Werte als Kontrolle, welche nach je n Schritten des vorstehend angegebenen Verfahrens wirksam wird.

Wir haben dieses Verfahren allerdings bei unsern Untersuchungen nur ausnahmsweise zu Vergleichszwecken angewendet und sind in der Regel anders vorgegangen: Die Beobachtungsreihe wurde in getrennte, aber aneinander anschließende Analysenintervalle

$$[0, \cdots, p'-1],\ [p', \cdots, 2p'-1],\ [2p', \cdots, 3p'-1], \cdots$$

gegliedert. Die Länge p′ des Analysenintervalles wurde möglichst angenähert der Wellenlänge p der gesuchten Periodizität gewählt. Die angenäherte Wellenlänge p′ war dabei aus dem Spektrum bekannt. Als Versuchsfrequenz wurde die harmonische Frequenz $x = \frac{2\pi}{p'}$ gewählt, d. h. es wurde eine «Versuchswelle» verwendet, deren Wellenlänge gleich dem Analysenintervall ist. Für jedes Analysenintervall wurden dann, ohne Anwendung von Faltschemata, wie sie in der harmonischen Analyse üblich sind (vgl. Seite 26, rechts), nach Gleichung 36 die Komponenten a (x, q) und b (x, q) berechnet. Dies konnte mit Hilfe eines zweckentsprechenden Kolonnenschemas und einer Rechenmaschine sehr rasch vor sich gehen. Damit ergab sich bereits ein erster, sehr erwünschter Überblick über das Verhalten und die Streuung der Werte a (x, q) und b (x, q) in Funktion von q, und es wurden zahlreiche Kontrollwerte für die nachfolgende progressive Berechnung einer dichteren Folge von a (x, q)- und b (x, q)-Werten erhalten. Für diese progressive Berechnung wurden dann direkt die Differenzen zwischen

$y_i \cdot \cos xi$ und $y_{i+p'} \cdot \cos x\,[i+p'] = y_{i+p'} \cdot \cos xi$ sowie
$y_i \cdot \sin xi$ und $y_{i+p'} \cdot \sin x\,[i+p'] = y_{i+p'} \cdot \sin xi$

benützt, also gebildet

$$\frac{p'}{2} \cdot a(x, q+1) = \frac{p'}{2} \cdot a(x, q) + [y_{q+p'} \cdot \cos xq - y_q \cdot \cos xq]$$

$$\frac{p'}{2} \cdot b(x, q+1) = \frac{p'}{2} \cdot b(x, q) + [y_{q+p'} \cdot \sin xq - y_q \cdot \sin xq]$$

Die Produkte $y_q \cdot \cos x\,q$, $y_q \cdot \sin x\,q$, $y_{q+p'} \cdot \cos x\,q$ und $y_{q+p'} \cdot \sin x\,q$ liegen dabei bereits vor, indem sie schon bei der Ermittlung der Komponenten für die direkt aufeinanderfolgenden, aber nicht übergreifenden Intervalle berechnet wurden (vgl. Beispiel, Abschnitt D, II, 7). Da wegen des Einflusses des Störungsvektors natürlich ein Analysenintervall p', welches ungefähr der Wellenlänge p der gesuchten Periodizität entspricht, zu kurz ist, müssen dann die Komponenten $\bar{a}(x, q)$ und $\bar{b}(x, q)$ für ein längeres Analysenintervall $n = \varrho \cdot p'$ gebildet werden aus:

$$\bar{a}(x,q) = \frac{a(x,q) + a(x,q+p') + \cdots\cdots + a[x,q+(\varrho-1)p']}{\varrho}$$

$$\bar{b}(x,q) = \frac{b(x,q) + b(x,q+q') + \cdots\cdots + b[x,q+(\varrho-1)p']}{\varrho} \qquad (37)$$

Der gesamte Rechenaufwand bei der von uns angewendeten Methode, bemessen nach der Zahl der Einzeloperationen, ist größer als bei der zuerst genannten Methode. Der Rechnungsgang ist aber einheitlicher, primitiver, übersichtlicher, und es können deshalb zur Durchführung der Rechenoperationen Hilfskräfte verwendet werden, welche von den innern Zusammenhängen gar nichts zu verstehen brauchen und nach vorbereiteten Tabellen mit Hilfe einer Rechenmaschine schematisch sehr rasch rechnen können. Es war dies für uns wichtig, weil die numerischen Berechnungen noch während des Krieges durchgeführt wurden und die Hilfskräfte wegen Aktivdienst sehr oft gewechselt werden mußten.

5. *Ermittlung der Frequenz und der Anfangsphase der gesuchten Periodizität*

Der Richtungswinkel ψ (x, q) des *Periodogrammvektors*, der sich aus Gleichung 35 ergibt, wird in Funktion des variablen Intervallanfanges q graphisch aufgetragen. Eine solche Aufzeichnung wird als *Phasendiagramm* bezeichnet. (Dabei ist es zweckmäßig, den Winkel ψ (x, q) in Zentesimalgraden auszudrücken.)

Im Falle einer *reinen Sinuswelle* ergibt sich eine Punktfolge, die mit kleinen, vom Unterschied der Winkel ψ (x, q) und $\psi_0 = [\alpha - x]\left[\frac{n}{2} + q\right] + \beta$ herrührenden Abweichungen um die Gerade pendelt, welche die lineare Abhängigkeit des Winkels ψ_0 von q darstellt. Die Gerade kann nach der Methode der kleinsten Quadrate durch linearen Ausgleich der Punktfolge ermittelt werden.

Im Falle einer *Beobachtungsreihe*, in welcher eine Periodizität in Form einer Sinuswelle verborgen ist, wirken sich im Phasendiagramm auch noch die *aperiodischen Bestandteile* der Beobachtungsreihe aus. Die regelmäßige Schwankung der Punkte des Phasendiagramms um die Gerade $\psi_0 = [\alpha - x]\left[\frac{n}{2} + q\right] + \beta$ wird durch den Einfluß dieser aperiodischen Bestandteile verzerrt. Auch hier kann die Gerade $\psi_0 = [\alpha - x]\left[\frac{n}{2} + q\right] + \beta$ nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt werden.

In Abb. 12 ist als Beispiel das Phasendiagramm dargestellt, welches wir für die fingierte Beobachtungsreihe gemäß Tabelle 1 berechnet haben, und zwar haben wir aufgezeichnet: einmal die Punktfolge mit der Ausgleichsgeraden für die Werte y, welche der reinen Sinuswelle gemäß Gleichung 4 entsprechen. Die regelmäßige Schwankung um die Ausgleichsgerade infolge des Einflusses des Störungsvektors ist hier deutlich sichtbar. Dann ist dargestellt die Punktfolge mit der Ausgleichsgeraden für die Werte $y' = y + \eta$, welche sich aus den Werten y der reinen Sinuswelle durch Beimischung von aperiodischen, zufällig verteilten Werten η ergeben. Hier ist erkennbar, wie die regelmäßige Schwankung der Punktfolge um die Ausgleichsgerade durch den Einfluß der aperiodischen Bestandteile η verzerrt wird.

Frequenz und *Anfangsphase* werden nach unserer Abb. 7 *zahlenmäßig* wie folgt ermittelt:

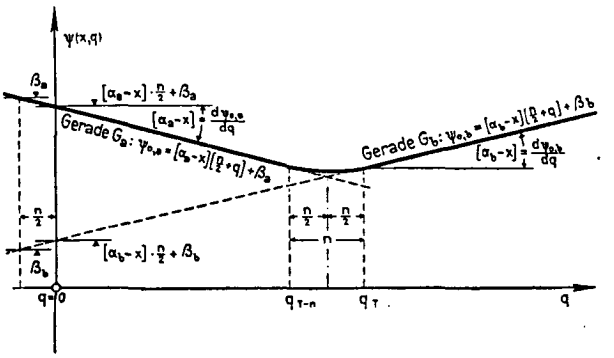


Abb. 7. Ermittlung der Frequenz und der Anfangsphase aus einem Phasendiagramm

Es sei die Ausgleichsgerade G_a erhalten worden, welche einer verborgenen Periodizität mit der Frequenz α_a entspreche. Die Ausgleichsgerade stellt definitionsgemäß den Richtungswinkel des Hauptvektors $\psi_{0,a} = [\alpha_a - x]\left[\frac{n}{2} + q\right] + \beta_a$ in Funktion des variablen Anfanges q des Analysenintervalls dar. Die Neigung der Ausgleichsgeraden ist infolgedessen

$$\frac{d\psi_{0,a}}{dq} = [\alpha_a - x] \qquad (38)$$

x ist eine bekannte, fest gewählte Größe. Es ergeben sich also die *gesuchte Frequenz* α_a und die *gesuchte Wellenlänge* p_a aus:

$$\alpha_a = \frac{d\psi_{0,a}}{dq} + x \qquad p_a = \frac{2\pi}{\alpha_a} \qquad (39)$$

Für den Schnitt der Ausgleichsgeraden mit der Ordinatenaxe, also für q = 0, ergibt sich die Ordinate $[\alpha_a - x] \cdot \frac{n}{2} + \beta_a$; es ist dies die mittlere Phase des Anfangsintervalles q = 0.

Die Anfangsphase β_a (Phasenkonstante) ergibt sich somit als Ordinate des Schnittpunktes der Ausgleichsgeraden mit einer Vertikalen im Abstand $\frac{n}{2}$ von der Ordinatenaxe.

Die Periodizität mit der Frequenz α_a, welcher die Ausgleichsgerade G_a entspricht, werde im Zeitpunkt $t = T$ durch eine andere Periodizität mit der Frequenz α_b abgelöst, für welche die Ausgleichsgerade G_b erhalten werde. Wenn wir also zur Berechnung der Werte $\psi(x, q)$ das Analysenintervall von der Länge n so weit durch die Beobachtungsreihe verschoben haben, daß das Ende des Intervalls dem Zeitpunkt $t = T$ und der Anfang dem Zeitpunkt $t = T - n$ entspricht, so werden von diesem Zeitpunkt an durch die progressive Analyse Beobachtungswerte der Periodizität mit der Frequenz α_b erfaßt. Deren Anteil nimmt bei der weiteren Verschiebung ständig zu, während der Anteil der Beobachtungswerte der Periodizität mit der Frequenz α_a entsprechend abnimmt. Wenn das Analysenintervall so weit verschoben ist, daß sein Anfang dem Zeitpunkt $t = T$ entspricht, so enthält es nur noch Beobachtungswerte der Periodizität mit der Frequenz α_b.

Die Gerade G_a gilt also bis zur Abszisse q_{T-n}, welche dem Zeitpunkt $t = T - n$ entspricht, und die Gerade G_b fängt bei der Abszisse q_T entsprechend dem Zeitpunkt T an. Zwischen q_{T-n} und q_T liegt ein Übergangsstück von der Breite n; die Punkte, welche sich durch die Darstellung der Werte $\psi(x, q)$ in Funktion von q ergeben, liegen in diesem Übergangsstück nicht längs einer Geraden, sondern längs einer Übergangskurve.

Erfolgt der Übergang von der Periodizität mit der Frequenz α_a zur Periodizität mit der Frequenz α_b ohne Phasensprung, so schneiden sich die Geraden G_a und G_b auf der Ordinate, welche in der Mitte zwischen q_{T-n} und q_T liegt. Bei einem Phasensprung ist dies nicht mehr der Fall.

In der Regel ist es am zweckmäßigsten, die Anfangsphase β_b der Periodizität mit der Frequenz α_b auf den gleichen Zeitpunkt zu beziehen, auf welchen die Anfangsphase β_a der Periodizität mit der Frequenz α_a bezogen ist. β_b wird dabei in analoger Weise wie β_a ermittelt.

6. *Ermittlung der Amplitude der gesuchten Periodizität*

a) Reine Sinuswelle

Liegt eine *reine Sinuswelle* vor, so berechnet sich die Amplitude c nach Abb. 6 aus dem Wert

$$h(x,q) = \sqrt{a^2(x,q) + b^2(x,q)}$$

Die Werte h (x, q) werden für die verschiedenen Zeitpunkte q berechnet und in Funktion von q dargestellt. Es ergibt sich dann ein *Amplitudendiagramm*, dessen Ordinaten h (x, q) infolge des Einflusses des Störungsvektors um einen Mittelwert h (x) schwanken. Die Abweichungen vom Mittelwert sind aber, wie bereits bei den Darlegungen über das Spektrum erkannt worden ist, sehr klein, wenn das Analysenintervall mindestens dreimal so lang ist wie die Wellenlänge der gesuchten Periodizität. Ist also eine hinreichende Zahl von Werten h (x, q) berechnet worden, so wird deren *arithmetischer Mittelwert* h (x) berechnet. Es darf dann mit genügender Genauigkeit gesetzt werden

$$h(x) = c \cdot P(x)$$

woraus sich die Amplitude c ergibt zu

$$c = \frac{h(x)}{P(x)} \tag{40}$$

In der Praxis ist jedoch nicht der Fall einer *reinen* Sinuswelle zu behandeln. Es wird uns vielmehr der Fall beschäftigen, daß eine Beobachtungsreihe vorliegt, deren Werte sich aus periodischen und großen aperiodischen Bestandteilen zusammensetzen. Die periodischen Bestandteile werden dabei nicht nur von einer Periodizität, sondern von mehreren Periodizitäten herrühren, welche im Beobachtungsmaterial verborgen sind. Wenn es darum geht, die Amplitude *einer* dieser Periodizitäten *möglichst genau* zu bestimmen, dann darf auf die einfache Weise, wie sie vorstehend für eine reine Sinuswelle angegeben worden ist, *nicht* mehr vorgegangen werden in Fällen, in welchen auch die Werte a (x, q) und b (x, q) sehr gestört sind und entsprechend stark streuen. Welche Fälle dafür in Frage kommen, haben wir in nachstehendem Abschnitt untersucht.

b) Beobachtungsfunktion mit großen aperiodischen Bestandteilen

Wir nehmen an, die in Tabelle 3 zusammengestellten Werte a (x, q) und b (x, q) seien für eine rein periodische Funktion, welche nicht mit aperiodischen Bestandteilen behaftet ist, berechnet worden. Das Analysenintervall sei im Verhältnis zur Wellenlänge der gesuchten Periodizität so lang gewählt, daß der Störungsvektor verschwindend klein sei. Die Endpunkte des Periodogramm*vektors*, welcher hier praktisch gleich dem Hauptvektor ist, ordnen sich dann nach Abb. 8 auf einem Kreise an.

q	a(x,q)	Δa(q)	a'(x,q)	b(x,q)	Δb(q)	b'(x,q)	$h'(x,q) = \sqrt{a'^2(x,q) + b'^2(x,q)}$
0	+5,0	+5	+10,0	0,0	−2	−2,0	10,20
1	+4,6	−5	−0,4	−1,9	+2	+0,1	0,41
2	+3,5	−2	+1,5	−3,5	−4	−7,5	7,65
3	+1,9	+1	+2,9	−4,6	+3	−1,6	3,31
4	0,0	+3	+3,0	−5,0	+3	−2,0	3,60
5	−1,9	+2	+0,1	−4,6	+1	−3,6	3,60
6	−3,5	−4	−7,5	−3,5	−3	−6,5	9,92
7	−4,6	+2	−2,6	−1,9	−4	−5,9	6,45
8	−5,0	−2	−7,0	0,0	+4	+4,0	8,06
$\frac{1}{9}\Sigma$	0,0	0	0,0	−2,78	0	−2,78	5,91 $= \frac{1}{9}\Sigma h'(x,q)$

Tabelle 3
Beispiel einer fingierten Folge von stark streuenden Periodogrammkomponenten a'(x, q) und b'(x, q)

Zu den Werten a (x, q) und b (x, q) fügen wir nun Werte Δ a (q) und Δ b (q) bei, welche Abweichungen von a (x, q) und b (x, q) infolge des Einflusses von großen aperiodischen Bestandteilen seien, welche der rein periodischen Funktion beigemischt werden. Die Beobachtungsreihe, gebildet aus der rein periodischen Funktion und den aperiodischen Beimischungen, ergebe somit die stark streuenden gestörten Komponenten a' (x, q) und b' (x, q).

Die Eintragung von a′ (x, q) und b′ (x, q) in Abb. 8 ergibt die Endpunkte 0′ bis 8′ des Periodogramm*vektors*. Diese Endpunkte streuen in bezug auf den Kreis (wahre Werte) sehr stark; ferner handelt es sich um relativ wenige Werte. In einem solchen Falle dürfen wir, wenn es sich um genauere Berechnungen und nicht um erste Annäherungsrechnungen handelt, den Betrag h′ (x) des mittleren Periodogramm*vektors* nicht mehr als arithmetisches Mittel der Werte h′ (x, q) berechnen, sondern müssen zuerst die Mittelwerte

$$a'(x,q)_m = \frac{1}{M}\sum_{q=0}^{M-1} a'(x,q) \quad \text{und}$$

$$b'(x,q)_m = \frac{1}{M}\sum_{q=0}^{M-1} b'(x,q)$$

berechnen; M bedeutet dabei die Anzahl Werte a′ (x, q) und b′ (x, q). Daraus ergibt sich

$$h'(x) = \frac{\sqrt{a'^2(x,q)_m + b'^2(x,q)_m}}{G(M)} \qquad (41)$$

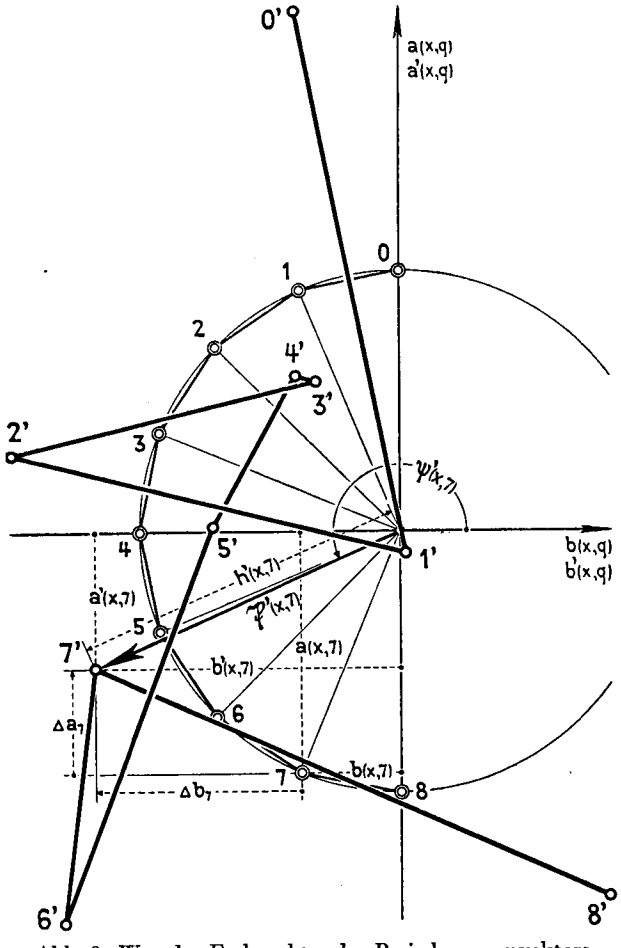


Abb. 8. Weg des Endpunktes des Periodogrammvektors für eine Beobachtungsreihe, gebildet aus einer reinen Sinuswelle und großen aperiodischen Beimischungen

Es ist G (M) ein Glättungsfaktor, welchen wir einführen müssen, weil a′ (x, q) und b′ (x, q) sich ebenfalls periodisch in Funktion von q ändern. Nach Gleichung 5 ist

$$G(M) = \frac{\sin[\alpha - x]\frac{M}{2}}{M \cdot \sin\frac{[\alpha-x]}{2}} \qquad [\alpha - x] = \frac{d\psi_0}{dq}$$

In unserm Beispiel haben wir die Werte Δ a (q) und Δ b (q) so gewählt, daß die arithmetischen Mittel der a′ (x, q) und b′ (x, q) gleich den wahren arithmetischen Mitteln aus a (x, q) und b (x, q) sind (vgl. Tabelle 3). Das arithmetische Mittel der h′ (x, q) ergibt dagegen nicht den wahren Wert h′ (x) = 5,00, weil die Bildung des arithmetischen Mittels der Vektorbeträge nicht identisch ist mit der Bildung des mittleren Vektors, welcher eine gerichtete Größe ist. Nach Gleichung 41 ergibt sich dagegen mit

$$\psi_0 = 100^g + 25^g \cdot q \qquad \frac{d\psi_0}{dq} = 25^g = 22{,}5^0$$

$$G(9) = \frac{\sin\left[22{,}5^0 \cdot \frac{9}{2}\right]}{9 \cdot \sin\frac{22{,}5^0}{2}} = 0{,}558$$

$$h'(x) = \frac{\sqrt{0{,}0^2 + 2{,}78^2}}{0{,}558} = 4{,}98 \approx 5{,}0 \text{ (wahrer Wert)*)}$$

Bei dieser Art der Berechnung ist jedoch auch folgendes zu bedenken: Auch der Wert $\frac{d\psi_0}{dq} = [\alpha - x]$ ist mit einem «Fehler» infolge der aperiodischen Bestandteile der Beobachtungswerte behaftet. Infolgedessen ist der Glättungsfaktor G (M) ebenfalls nicht «fehlerfrei». Bei ersten angenäherten Berechnungen, wenn der «Fehler» von [α−x] relativ groß ist, wird es deshalb zu weit führen, nach Gleichung 41 zu rechnen.

Ferner ist ein Vorgehen nach Gleichung 41 auch nicht mehr gegeben, wenn der Glättungsfaktor G (M) zu klein wird. Letzteres tritt ein, wenn M eine relativ große Zahl oder [α−x] relativ groß ist und besonders, wenn M eine relativ große Zahl und [α−x] gleichzeitig relativ groß ist. Die Glättung sollte sich nicht mehr als über eine halbe Schwankungsperiode der Werte a (x, q) und b (x, q) erstrecken, d. h. der Endpunkt des Periodogrammvektors (vgl. Abb. 8) sollte nicht mehr als einen halben Kreisumfang umwandern.

M wird relativ groß, wenn eine Periodizität während langer Zeit persistent ist und deshalb eine lange Beobachtungsreihe verwendet werden kann. In einem solchen Falle kann jedoch meistens auch ein Analysenintervall n verwendet werden, welches in bezug auf die Wellenlänge p der gesuchten Periodizität lang ist. Dann wird aber, wie nachfolgend noch gezeigt wird, die Streuung der Periodogrammkomponenten a (x, q) und b (x, q) in bezug auf ihre wahre Größe klein, und es darf mit praktisch genügender Genauigkeit h (x) direkt als arithmetisches Mittel der Werte h (x, q) berechnet werden.

Wir haben noch besondere Überlegungen über die *Störungen* gemacht, welchen die Werte für die Periodogrammkomponenten a (x, q) und b (x, q), sowie die

*) Es ergibt sich h′ (x) = 4,98 und nicht genau = 5,00, wie dies in unserem Beispiel der Fall sein sollte, weil die Werte a (x, q) und b (x, q) auf nur eine Dezimale abgerundet verwendet worden sind.

Werte $h(x, q)$ und $\psi(x, q)$ für die Ordinaten der Amplituden- und Phasendiagramme infolge des Einflusses aperiodischer Bestandteile der Beobachtungswerte unterworfen sind.

Sind die Beobachtungswerte mit aperiodischen Bestandteilen behaftet, welche sich verhalten wie zufällige, voneinander unabhängige Fehler, so sind auch die *Periodogrammkomponenten* $a(x,q)$ und $b(x,q)$ mit aperiodischen Bestandteilen behaftet, werden infolgedessen gestört und weisen eine entsprechende Streuung auf.

Sind dabei die Werte $a(x, q)$ und $b(x, q)$ voneinander unabhängig, indem sie aus Analysenintervallen berechnet wurden, welche direkt aneinander anschließen, aber nicht ineinander übergreifen, so verhalten sich die aperiodischen Bestandteile der Werte $a(x, q)$ und $b(x, q)$ wie zufällige, voneinander unabhängige Fehler. Sind dagegen aufeinanderfolgende Werte $a(x, q)$ und $b(x, q)$ voneinander abhängig, indem sie aus Analysenintervallen berechnet wurden, welche ineinander übergreifen, so sind die aperiodischen Bestandteile aufeinanderfolgender Werte $a(x, q)$ und $b(x, q)$ ebenfalls voneinander abhängig. Haben wir ein Analysenintervall von n Beobachtungswerten benützt und das Intervall progressiv um je einen Beobachtungswert verschoben, so sind die aperiodischen Bestandteile von n aufeinanderfolgenden Werten $a(x,q)$ und $b(x,q)$ voneinander abhängig, wobei die Abhängigkeit um so kleiner ist, je weiter die Intervalle auseinanderliegen. Infolge dieses Umstandes ergibt sich folgendes Bild: Aufeinanderfolgende Werte $a(x,q)$ und $b(x,q)$ weichen mehr oder weniger lang (je nach der Größe von n) gleichsinnig von ihrem wahren Wert ab. Wir bezeichnen diese Abweichung als *«primäre Abweichung oder Störung»*. Bei jeder Verschiebung des Analysenintervalles um einen Beobachtungswert fällt jedoch ein solcher fort und ein anderer, verschiedener tritt in die Rechnung ein. Die primäre Abweichung ändert sich somit von Wert zu Wert ständig [«sekundäre» Störung der Werte $a(x, q)$ und $b(x, q)$].

Ist die *Streuung* (mittlere quadratische Abweichung) *der Beobachtungswerte* infolge der aperiodischen Bestandteile gleich σ, so ergibt sich:

α) Die *Streuung* σ_a *und* σ_b, *bzw.* $\bar{\sigma}_a$ *und* $\bar{\sigma}_b$ *der Periodogrammkomponenten* $a(x, q)$ und $b(x, q)$ für ein Analysenintervall p', bzw. $\bar{a}(x, q)$ und $\bar{b}(x, q)$ für ein Analysenintervall $n = \varrho \cdot p'$ gleich:

$$\sigma_a = \sigma_b = \sigma\sqrt{\frac{2}{p'}},\quad \text{bzw. } \bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_b = \sigma\sqrt{\frac{2}{\varrho \cdot p'}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{n}} \tag{42}$$

Diese Formeln ergeben sich auf Grund der Herleitung der Fourierreihen, d. h. sie werden nach den bekannten Lehren der Ausgleichungsrechnung aus den Normalgleichungen (siehe Seite 25 und 26) erhalten, aus deren Auflösung sich für ein bestimmtes Intervall p', bzw. n' die Fourierkoeffizienten $a(x, q)$ und $b(x, q)$, bzw. $\bar{a}(x, q)$ und $\bar{b}(x, q)$ bestimmen lassen. Diese Normalgleichungen enthalten die Fourierkoeffizienten als Unbekannte. Diese Koeffizienten sind allerdings nicht voneinander unabhängig, sondern durch die Ausgleichung miteinander verknüpft, weshalb ihre Streuung («mittlerer Fehler») nicht direkt durch Anwendung des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die Normalgleichungen berechnet werden kann. Die Fourierkoeffizienten müssen daher zuerst als Funktionen der Beobachtungswerte $y_0, y_1, y_2, \cdots$ dargestellt werden, unter Verwendung von Hilfskoeffizienten, welche voneinander unabhängig sind, so daß das Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet werden kann. Die Hilfskoeffizienten lassen sich unter Berücksichtigung der Normalgleichungen wieder eliminieren*), und es ergeben sich dann obige Gleichungen 42.

Die Werte σ_a und σ_b sind das Maß für die «primäre Abweichung oder Störung». Sollen sie nicht aus dem Wert σ, sondern aus einer Reihe von berechneten Periodogrammkomponenten $a(x, q)$ und $b(x, q)$, bzw. $\bar{a}(x, q)$ und $\bar{b}(x, q)$ berechnet werden, so kommen natürlich dafür nur voneinander unabhängige Komponentenwerte in Frage.

β) Die *Streuung der Werte* $h(x,q)$, bzw. $\bar{h}(x, q)$ für die Ordinaten des Amplitudendiagrammes mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes aus

$h(x, q) = \sqrt{a^2(x, q) + b^2(x, q)}$ und

$\bar{h}(x, q) = \sqrt{\bar{a}^2(x, q) + \bar{b}^2(x, q)}$ zu:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_h &= \frac{\sqrt{[a(x,q)\,\sigma_a]^2 + [b(x,q)\,\sigma_b]^2}}{h(x,q)} \\ \text{bzw. } \bar{\sigma}_h &= \frac{\sqrt{[\bar{a}(x,q)\,\bar{\sigma}_a]^2 + [\bar{b}(x,q)\,\bar{\sigma}_b]^2}}{\bar{h}(x,q)} \end{aligned}\right| \tag{43}$$

Mit $\sigma_a = \sigma_b$, bzw. $\bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_b$

ist $\sigma_h = \sigma_a = \sigma_b$, bzw. $\bar{\sigma}_h = \bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_b$

γ) Die *Streuung der Werte* $\psi(x, q)$, bzw. $\bar{\psi}(x, q)$ für die Ordinaten des Phasendiagramms mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes aus $\psi(x, q) = \operatorname{arctg}\frac{a(x, q)}{b(x, q)}$, $\bar{\psi}(x, q) = \operatorname{arctg}\frac{\bar{a}(x, q)}{\bar{b}(x, q)}$ zu:

$$\sigma_\psi = \sqrt{\frac{b^2(x,q)}{[a^2(x,q)+b^2(x,q)]^2}\cdot\sigma_a^2 + \frac{a^2(x,q)}{[a^2(x,q)+b^2(x,q)]^2}\cdot\sigma_b^2}$$

bzw. (44)

$$\bar{\sigma}_\psi = \sqrt{\frac{\bar{b}^2(x,q)}{[\bar{a}^2(x,q)+\bar{b}^2(x,q)]^2}\cdot\bar{\sigma}_a^2 + \frac{\bar{a}^2(x,q)}{[\bar{a}^2(x,q)+\bar{b}^2(x,q)]^2}\cdot\bar{\sigma}_b^2}$$

Mit $\sigma_a = \sigma_b$

ist $$\sigma_\psi = \frac{\sigma_a}{h(x,q)} = \frac{\sigma_b}{h(x,q)}$$

$$\text{bzw. } \bar{\sigma}_\psi = \frac{\bar{\sigma}_a}{\bar{h}(x,q)} = \frac{\bar{\sigma}_b}{\bar{h}(x,q)}$$

c) Beobachtungsfunktion mit großen aperiodischen Bestandteilen und zeitlich veränderlicher Amplitude

Wir haben diesbezüglich noch folgende Überlegungen gemacht:

*) Dieses Verfahren ist dem Verfasser in freundlicher Weise durch Herrn Dipl. Ing. F. Kobold, damals Sektionschef der Eidg. Landestopographie, jetzt Professor für Geodäsie und Topographie an der Eidg. Technischen Hochschule, bekannt gegeben worden.

Wie aus dem vorangehenden Abschnitt hervorgeht, wird die Störung der Periodogrammkomponenten $\bar{a}(x, q)$ und $\bar{b}(x, q)$ sowie der Werte $\bar{h}(x, q)$ und $\bar{\psi}(x, q)$ infolge aperiodischer Bestandteile der Beobachtungswerte um so kleiner, je länger das Analysenintervall n gewählt wird. Je kleiner diese Störung ist, um so besser können wir Gesetzmäßigkeiten erkennen, welchen die Werte $\bar{a}(x, q)$, $\bar{b}(x, q)$, $\bar{h}(x, q)$ und $\bar{\psi}(x, q)$ unterworfen sind, und um so besser und schärfer können wir also die gesuchte, verborgene Periodizität erfassen. Wie wir später sehen werden, ist es insbesondere wichtig, möglichst ungestörte Darstellungen der genannten Werte zu erhalten, wenn es sich darum handelt, *benachbarte Periodizitäten* voneinander zu trennen.

Aus dem Verlauf der Werte $h(x, q)$ und $\bar{h}(x, q)$ im Amplitudendiagramm kann auch ersehen werden, ob die *Amplitude* der gesuchten Periodizität von konstantem oder variablem Betrag ist. Handelt es sich dabei um eine periodische Änderung des Amplitudenbetrages, so kann diese Änderung, wie wir noch sehen werden, in Gestalt einer Nebenperiodizität erfaßt werden, welche der gesuchten Periodizität überlagert ist. Die Berechnung der Nebenperiodizität kann durchgeführt werden, wenn eine genügend große Zahl von Beobachtungswerten vorliegt. Wie groß diese Zahl sein muß, wird ebenfalls später angegeben werden.

Liegt dagegen eine *aperiodische Änderung der Amplitude* vor, so ergeben sich folgende Schwierigkeiten:

Tritt eine plötzliche Änderung der Amplitude ein, so wird dies zwar im Amplitudendiagramm zum Ausdruck kommen, indem sich die Höhe der Ordinaten $h(x, q)$ und $\bar{h}(x, q)$ ändert. Diese Ordinatenwerte sind aber aus einem Intervall von p', bzw. n Beobachtungswerten berechnet worden. Der Einfluß der Amplitudenänderung wird sich somit nur ganz *allmählich* im Amplitudendiagramm bemerkbar machen. Theoretisch beginnt dieser Einfluß sich auszuwirken, wenn der erste von der Amplitudenänderung betroffene Beobachtungswert von der Analyse erfaßt wird. Der Einfluß wird immer um so größer, je größer der Anteil von Beobachtungswerten am Analysenintervall wird, welche von der Amplitudenänderung betroffen sind. Umfaßt das Analysenintervall nur noch solche Beobachtungswerte, so kann aus den sich nun ergebenden Werten $h(x, q)$ und $\bar{h}(x, q)$ die veränderte Amplitude berechnet werden. Schwierig und oft unmöglich ist es dagegen, den *genauen Zeitpunkt* zu bestimmen, in welchem die Amplitudenänderung eintritt, da eben im Amplitudendiagramm nur ein allmählicher Übergang stattfindet, welcher noch von Störungen infolge des Störungsvektors, der aperiodischen Bestandteile der Beobachtungswerte und infolge allfälliger anderer Periodizitäten verwischt wird. Es wird auch nur sehr schwer oder meistens gar nicht möglich sein, festzustellen, ob die Amplitudenänderung plötzlich oder allmählich eintritt. Ist die Amplitude während einer Zeitdauer verändert, welche kürzer ist als das Analysenintervall, so kann auch die Größe der Änderung bei einem solchen Analysenintervall nicht genau erfaßt werden. Es sollten also zwei sich widersprechende Anforderungen erfüllt werden: Die genaue Erfassung der Konstanten der gesuchten Periodizität erfordert möglichst ungestörte Phasen- und Amplitudendiagramme auf Grund langer Analysenintervalle; die Feststellung von zeitlich kurzfristigen Veränderungen im Verhalten der Periodizität erfordert dagegen kürzere Analysenintervalle. Man wird daher durch Versuch die günstigste Länge des Analysenintervalles herauszufinden suchen. Auf Grund einer ersten Berechnung der Periodizitäten wird man ferner die Störungen durch den Störungsvektor und durch andere Periodizitäten auf eine bestimmte Periodizität wegrechnen und dann eine genauere Berechnung dieser Periodizität mit Hilfe kürzerer Analysenintervalle durchführen.

7. *Beispiel für die Berechnung einer verborgenen Periodizität mit Hilfe des Phasen- und Amplitudendiagramms*

Wir untersuchen das bereits bekannte, in Tabelle 1 zusammengestellte Beispiel von 48 Beobachtungswerten (vgl. die zugehörigen Erläuterungen auf S. 18, rechts). Um zahlenmäßig zu zeigen, mit welcher Genauigkeit die Konstanten der gesuchten Periodizität mit Hilfe der Phasendiagramme an und für sich, unbeeinflußt durch Störungen infolge aperiodischer Beimischungen, erhalten werden, haben wir auch die Werte y analysiert. Die Zeiteinheit sei gleich ein Jahr.

Wir wählen die Versuchsfrequenz zu $x = 60^0$; die Periodenlänge der Versuchswelle ist somit $p' = 6$ Jahre. Die Folge der nach Gleichung 36 zu benützenden trigonometrischen Argumente $x \cdot i$ ist somit 0^0, 60^0, 120^0, 180^0, 240^0, 300^0.

i =		q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	i =	q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5
x · i =		0°	60°	120°	180°	240°	300°	x · i =	0°	60°	120°	180°	240°	300°
cos xi =		1,000	0,500	−0,500	−1,000	−0,500	0,500	sco xi =	1,000	0,500	−0,500	−1,000	−0,500	0,500
sin xi =		0,000	0,866	0,866	0,000	−0,866	−0,866	sin xi =	0,000	0,866	0,866	0,000	−0,866	−0,866
q	y_i							y'_i						
0	0– 5	0,00	+9,51	+5,88	− 5,88	−9,51	0,00	0– 5	+10,00	− 0,49	+ 1,88	− 3,88	− 3,51	+ 4,00
6	6–11	+ 9,51	+5,88	−5,88	− 9,51	0,00	+ 9,51	6–11	+ 1,51	+ 9,88	− 9,88	− 1,51	− 2,00	+ 3,51
12	12–17	+ 5,88	−5,88	−9,51	0,00	+9,51	+ 5,88	12–17	− 4,12	− 3,88	− 6,51	− 2,00	+11,51	+ 8,88
18	18–23	− 5,88	−9,51	0,00	+ 9,51	+5,88	− 5,88	18–23	+ 2,12	−15,51	+ 5,00	+ 5,51	+ 2,88	− 3,88
24	24–29	− 9,51	0,00	+9,51	+ 5,88	−5,88	− 9,51	24–29	−13,51	− 2,00	+11,51	+ 6,88	+ 4,12	− 8,51
30	30–35	0,00	+9,51	+5,88	− 5,88	−9.51	0,00	30–35	− 1,00	+13,51	+ 9,88	− 6,88	−19,51	+ 4,00
36	36–41	+ 9,51	+5,88	−5,88	− 9,51	0,00	+ 9,51	36–41	+ 5,51	+ 4,88	− 6,88	−14,51	+ 1,00	+14,51
42	42–47	+ 5,88	−5,88	−9,51	0,00	+9,51	+ 5,88	42–47	+ 7,88	− 7,88	−11,51	− 5,00	+11,51	+10,88
Kontroll-$\sum$		+15,39	+9,51	−9,51	−15,39	0,00	+15,39	$\sum$	+ 8,39	− 1,49	− 6,51	−21,39	+ 6,00	+33,39

Tabelle 4

Zuordnung der Beobachtungswerte zu den trigonometrischen Faktoren für die progressive Analyse mit einem verschiebbaren Intervall $p' = 6$ Jahre

a) Analysenintervall $p' = 6$ Jahre

Wir berechnen zuerst nach Gleichung 36 die *Periodogrammkomponenten* $a(x,q)$ *und* $b(x,q)$, bzw. $a'(x,q)$ *und* $b'(x,q)$ für die Werte y, bzw. $y' = y + \eta$ mit dem *Analysenintervall* $p' = 6$ *Jahre und für* $q = 0, 6, 12, 18: 24, 30, 36, 42:$

In Tabelle 4 sind die Werte y und y' entsprechend zusammengestellt, und die zu den einzelnen Kolonnen gehörigen trigonometrischen Faktoren sind eingetragen.

Hierauf wurden die Produkte $y_i \cdot \cos x_i$ und $y_i \cdot \sin x_i$ sowie $y'_i \cdot \cos x_i$ und $y'_i \cdot \sin x_i$ berechnet und ferner nach Gleichung 36a die Summen gebildet:

$$A(x,q) = \frac{p'}{2} \cdot a(x,q) = \sum_{i=q}^{q+p'-1} y_i \cdot \cos x_i;$$

$$B(x,q) = \frac{p'}{2} \cdot b(x,q) = \sum_{i=q}^{q+p'-1} y_i \cdot \sin x_i$$

$$A'(x,q) = \frac{p'}{2} \cdot a'(x,q) = \sum_{i=q}^{q+p'-1} y'_i \cdot \cos x_i;$$

$$B'(x,q) = \frac{p'}{2} \cdot b'(x,q) = \sum_{i=q}^{q+p'-1} y'_i \cdot \sin x_i$$

wobei $p'-1 = 5$ und $\frac{p'}{2} = 3$ ist.

Beispielsweise sind diese Produkte und Summen für die Komponenten $b(x, q)$ und $b'(x, q)$ in Tabelle 5 zusammengestellt.

i =	$y_i \cdot \sin x_i$						$B(x,q) = \sum_{i=q}^{q+5} y_i \cdot \sin x_i$	$y'_i \cdot \sin x_i$						$B'(x,q) = \sum_{i=q}^{q+5} y'_i \cdot \sin x_i$
	q + 0	q + 1	q + 2	q + 3	q + 4	q + 5		q + 0	q + 1	q + 2	q + 3	q + 4	q + 5	
q														
0	0,00	+8,23	+5,09	0,00	+8,23	0,00	+21,55	0,00	− 0,43	+1,63	0,00	+ 3,04	− 3,46	+ 0,78
6	0,00	+5,09	−5,09	0,00	0,00	− 8,23	− 8,23	0,00	+ 8,55	−8,55	0,00	+ 1,73	− 3,04	− 1,31
12	0,00	−5,09	−8,23	0,00	−8,23	− 5,09	−26,64	0,00	− 3,36	−5,63	0,00	− 9,96	− 7,68	−26,63
18	0,00	−8,23	0,00	0,00	−5,09	+ 5,09	− 8,23	0,00	−13,42	+4,33	0,00	− 2,50	+ 3,36	− 8,23
24	0,00	0,00	+8,23	0,00	+5,09	+ 8,23	+21,55	0,00	− 1,73	+9,96	0,00	− 3,57	+ 7,36	+12,02
30	0,00	+8,23	+5,09	0,00	+8,23	0,00	+21,55	0,00	+11,69	+8,55	0,00	+16,89	− 3,46	+33,67
36	0,00	+5,09	−5,09	0,00	0,00	− 8,23	− 8,23	0,00	+ 4,22	−5,96	0,00	− 0,87	−12,56	−15,17
42	0,00	−5,09	−8,23	0,00	−8,23	− 5,09	−26,64	0,00	− 6,82	−9,96	0,00	− 9,96	− 9,42	−36,16
Σ	0,00	+8,23	−8,23	0,00	0,00	−13,32	−13,32	0,00	− 1,30	−5,63	0,00	− 5,20	−28,90	−41,03

Tabelle 5

Dann wurden auch für die Analysenintervalle $q = 1, 2, 3, 4, 5; 7, 8, 9, 10, 11; \cdots; 43, 44, 45, 46, 47$ gemäß dem auf Seite 37, rechts, dargelegten Verfahren die $\frac{p'}{2}$ fachen Werte der Periodogrammkomponenten nach folgenden Formeln berechnet, wobei wie oben zur Abkürzung $\frac{p'}{2} a(x, q) = A(x, q)$ und $\frac{p'}{2} b(x, q) = B(x, q)$ gesetzt wurde:

$$A(x, q+1) = A(x, q) + [y_{q+p'} \cdot \cos x_q - y_q \cdot \cos x_q]$$

$$B(x, q+1) = B(x, q) + [y_{q+p'} \cdot \sin x_q - y_q \cdot \sin x_q]$$

$$A'(x, q+1) = A'(x, q) + [y'_{q+p'} \cdot \cos x_q - y'_q \cdot \cos x_q]$$

$$B'(x, q+1) = B'(x, q) + [y'_{q+p'} \cdot \sin x_q - y'_q \cdot \sin x_q]$$

und daraus durch Division mit $\frac{p'}{2}$ die Periodogrammkomponenten selbst, z. B. ergibt sich nach Tabelle 5:

$$B(x, 1) = B(x, 0) + [y_6 \cdot \sin 0^0 - y_0 \cdot \sin 0^0] = + 21{,}55$$

$$B(x, 2) = B(x, 1) + [y_7 \cdot \sin x^0 - y_1 \cdot \sin x^0] = 21{,}55 + [5{,}09 - 8{,}23] = + 18{,}41$$

$$B(x, 3) = B(x, 2) + [y_8 \cdot \sin(2x^0) - y_2 \cdot \sin(2x^0)] = 18{,}41 + [-5{,}09 - 5{,}09] = + 8{,}23$$

und daraus

$$b(x, 1) = \frac{1}{3} \cdot 21{,}55 = + 7{,}18; \quad b(x, 2) = \frac{1}{3} \cdot 18{,}41 = + 6{,}13;$$

$$b(x, 3) = \frac{1}{3} \cdot 8{,}23 = + 2{,}74$$

Die Komponenten $a(x, q)$, $b(x, q)$, $a'(x, q)$ und $b'(x, q)$ sind in Tabelle 6 zusammengestellt und in Abb. 9 a und b graphisch dargestellt worden. In Tabelle 6 sind auch die aus den rechtwinkligen Periodogrammkomponenten sich ergebenden Werte für die Beträge $h(x, q)$ und $h'(x, q)$ des Periodogrammvektors und dessen Richtungswinkel $\psi(x, q)$ und $\psi'(x, q)$ eingetragen. Die Bestimmung dieser Werte erfolgte mit Hilfe einer in Lit. 4 enthaltenen Tafel zur «Verwandlung der rechtwinkligen Komponenten eines Periodogrammvektors (a, b) in Polarkoordinaten (h, ψ)».

q	a (x, q)	b (x, q)	$h(x,q) = \sqrt{a^2(x,q) + b^2(x,q)}$	$\psi(x,q) = \operatorname{arctg} \frac{a(x,q)}{b(x,q)}$	a′ (x, q)	b′ (x, q)	$h'(x,q) = \sqrt{a'^2(x,q) + b'^2(x,q)}$	$\psi'(x,q) = \operatorname{arctg} \frac{a'(x,q)}{b'(x,p)}$
0	+4,15	+7,18	8,3	33^g	+ 5,48	+ 0,26	5,5	97^g
1	+7,32	+7,18	10,2	51	+ 2,65	+ 0,26	2,7	93
2	+6,70	+6,13	9,1	53	+ 4,37	+ 3,25	5,5	59
3	+8,67	+2,74	9,1	80	+ 6,34	− 0,13	6,3	101
4	+9,90	+2,74	10,2	83	+ 5,56	− 0,13	5,6	101
5	+8,30	0,00	8,3	100	+ 5,30	− 0,58	5,3	107
6	+9,88	−2,74	10,2	117^g	+ 5,24	− 0,43	5,2	105^g
7	+8,67	−2,74	9,1	119	+ 3,36	− 0,43	3,4	108
8	+6,70	−6,13	9,1	147	+ 1,05	− 4,40	4,5	185
9	+7,32	−7,18	10,2	149	+ 0,48	− 3,43	3,5	191
10	+4,15	−7,18	8,3	167	+ 0,65	− 3,43	3,5	188
11	+2,56	−9,93	10,2	184	− 1,60	− 7,33	7,5	214
12	+1,96	−8,88	9,1	186^g	− 0,71	− 8,88	8,9	205^g
13	−1,96	−8,88	9,1	214	+ 1,37	− 8,88	9,0	190
14	−2,56	−9,93	10,2	216	− 0,56	−12,23	12,2	203
15	−4,15	−7,18	8,3	233	− 2,49	− 8,91	9,2	217
16	−7,32	−7,18	10,2	251	− 4,99	− 8,91	10,2	233
17	−6,70	−6,13	9,1	253	− 3,54	− 6,42	7,3	232
18	−8,67	−2,74	9,1	281^g	− 5,69	− 2,74	6,3	271^g
19	−9,88	−2,74	10,2	283	−10,88	− 2,74	11,2	284
20	−8,30	0,00	8,3	300	− 8,63	+ 1,15	8,7	308
21	−9,90	+2,74	10,2	317	− 9,71	+ 3,03	10,2	319
22	−8,67	+2,74	9,1	319	−10,17	+ 3,03	10,6	318
23	−6,70	+6,13	9,1	347	−10,38	+ 2,68	10,7	316
24	−7,32	+7,18	10,2	349^g	−11,15	+ 4,00	11,9	322^g
25	−4,15	+7,18	8,3	367	− 6,98	+ 4,00	8,1	333
26	−2,56	+9,93	10,2	384	− 4,39	+ 8,48	9,5	370
27	−1,96	+8,88	9,1	386	− 4,13	+ 8,01	9,0	370
28	+1,96	+8,88	9,1	414	+ 0,46	+ 8,01	8,0	404
29	+2,56	+9,93	10,2	416	+ 4,39	+14,83	15,4	418
30	+4,15	+7,18	8,3	433^g	+ 6,48	+11,22	12,9	433^g
31	+7,32	+7,18	10,2	451	+ 8,65	+11,22	14,2	442
32	+6,70	+6,13	9,1	453	+ 7,21	+ 8,74	11,3	444
33	+8,67	+2,74	9,1	481	+10,00	+ 3,89	10,8	476
34	+9,88	+2,74	10,2	483	+12,55	+ 3,89	13,2	481
35	+8,30	0,00	8,3	500	+ 9,13	− 2,02	9,3	514
36	+9,90	−2,74	10,2	517^g	+10,88	− 5,05	11,9	528^g
37	+8,67	−2,74	9,1	519	+11,67	− 5,05	12,6	526
38	+6,70	−6,13	9,1	547	+ 9,54	− 8,74	12,7	547
39	+7,32	−7,18	10,2	549	+10,32	−10,07	14,5	549
40	+4,15	−7,18	8,3	567	+ 7,15	−10,07	12,4	560
41	+2,56	−9,93	10,2	584	+ 5,39	−13,10	14,3	575
42	+1,96	−8,88	9,1	586^g	+ 4,79	−12,05	12,9	576^g

Tabelle 6

In Abb. 10a sind ferner die Komponenten a (x, q) und b (x, q), sowie a′ (a, q) und b′ (x, q) in einem rechtwinkligen Koordinatennetz dargestellt worden (vgl. entsprechende theoretische Darstellung der Abb. 6). Wir haben zum Vergleich auch den Kreis mit dem Radius eingetragen, welcher gleich dem noch zu berechnenden theoretischen (fehlerfreien) Betrag h (x) = c · P (x) des Periodogrammhauptvektors ist.

Wir berechnen nun noch die Streuungen der Werte a′ (x, q), b′ (x, q), h′ (x, q) und ψ' (x, q):

Wie auf Seite 18, rechts, bereits angegeben wurde, ist die Streuung der Werte y′ um die Werte y:

$$\sigma = \pm 4{,}93$$

Daraus ergeben sich nach Gleichungen 42, 43 und 44 folgende *theoretische Streuungen:*

$$\sigma_a = \sigma_b = \sigma_h = \pm \sigma \sqrt{\frac{2}{p'}} = \pm 4{,}93 \sqrt{\frac{2}{6}} = \pm 2{,}85$$

$$\sigma_\psi = \frac{\sigma_a}{h(x)} = \frac{\pm 2{,}85}{9{,}36} = \pm 0{,}304 = \pm 19{,}4^g$$

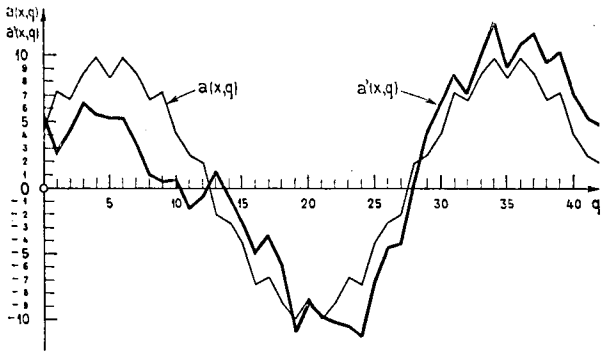


Abb. 9a. Periodogrammkomponenten a (x, q) und a′ (x, q) des fingierten Beispiels nach Tabelle 1 für Analysenintervall p′ = 6 Jahre

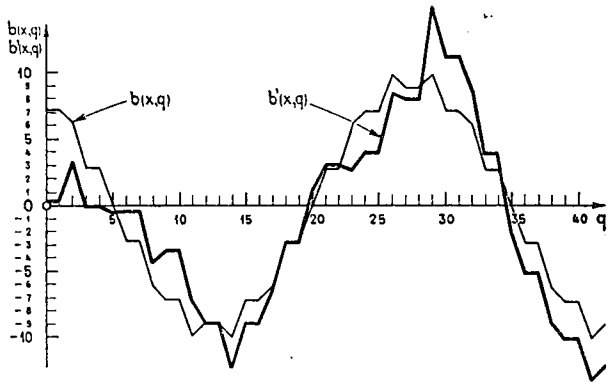


Abb. 9b. Periodogrammkomponenten b (x, q) und b′ (x, q) des fingierten Beispiels nach Tabelle 1 für Analysenintervall p′ = 6 Jahre

Zur Berechnung der *empirischen* Streuungen stehen nach Tabelle 6 folgende 7 Gruppen von je 7 voneinander unabhängigen Werten zur Verfügung:

$$\begin{array}{lllllll} q_0, & q_6, & q_{12}, & q_{18}, & q_{24}, & q_{30}, & q_{36} \\ q_1, & q_7, & q_{13}, & q_{19}, & q_{25}, & q_{31}, & q_{37} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_6, & q_{12}, & q_{18}, & q_{24}, & q_{30}, & q_{36}, & q_{42} \end{array}$$

Es wurden die Differenzen $\Delta\, a(q) = a'(x, q) - a(x, q)$, $\Delta\, b(q) = b'(x, q) - b(x, q)$, $\Delta\, h(q) = h'(x, q) - h(x, q)$ und $\Delta\, \psi(q) = \psi'(x, q) - \psi(x, q)$ gebildet und für jede Gruppe die Streuung berechnet, z. B. für die Komponente a′(x, q):

$$\sigma_{a\,i} = \sqrt{\frac{1}{7}\left[\Delta\, a_i^2 + \Delta\, a_{i+6}^2 + \Delta\, a_{i+12}^2 + \Delta a_{i+18}^2 + \Delta a_{i+24}^2 + \Delta\, a_{i+30}^2 + \Delta\, a_{i+36}^2\right]}$$

Als Mittelwerte aus allen 7 Gruppen ergaben sich folgende empirische Streuungen:

$\sigma_a = \pm\ 3{,}03$; $\sigma_b = \pm\ 2{,}73$; $\sigma_h = \pm\ 3{,}28$; $\sigma_\psi = \pm\ 19{,}4^g$

Die Übereinstimmung mit den theoretischen Streuungen ist in Anbetracht der relativ kleinen Zahl von Werten, welche zur Verfügung stehen, eine recht gute.

Aus Abb. 9 und 10a erkennt man nun deutlich folgendes:

α) die große «primäre» Abweichung der Werte a′(x, q), b′(x, q) und h′(x, q) von den wahren Werten a(x, q), b(x, q) und h(x, q) infolge des Einflusses der aperiodischen Bestandteile der Beobachtungswerte y′. Diese «primäre» Abweichung bleibt längere Zeit gleichsinnig und wenig veränderlich, weil immer je 6 aufeinanderfolgende Werte a′(x, q), b′(x, q) und h′(x, q) voneinander abhängig sind.

β) die kleinere «sekundäre» Störung im Verlaufe der Werte a′(x, q), b′(x, q) und h′(x, q), welche sich ergibt, weil von Punkt zu Punkt immer ein neuer Beobachtungswert in die Rechnung eingeht und ein anderer nicht mehr verwendet wird.

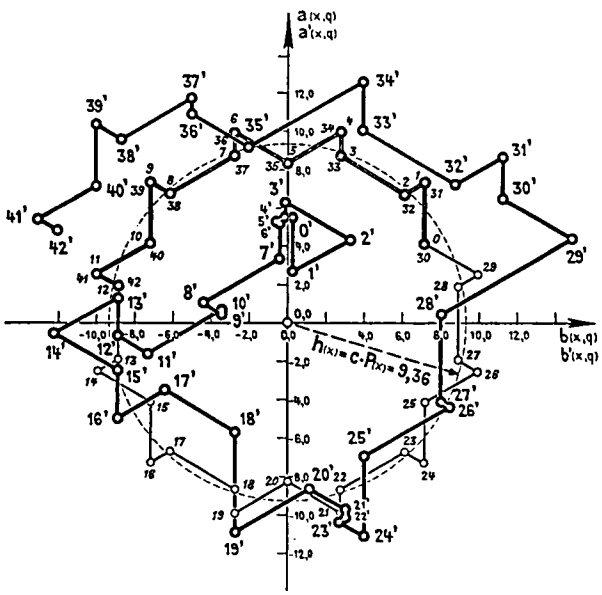


Abb. 10a. Periodogrammkomponenten des fingierten Beispiels nach Tabelle 1 für Analysenintervall p′ = 6 Jahre

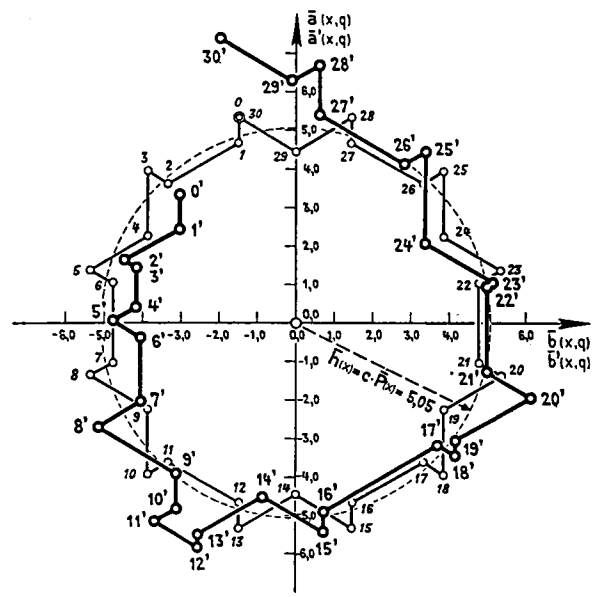


Abb. 10b. Periodogrammkomponenten des fingierten Beispiels nach Tabelle 1 für Analysenintervall n = 18 Jahre

γ) den Einfluß des Störungsvektors, insbesondere gut aus Abb. 10a ersichtlich.

δ) die aus den graphischen Darstellungen ersichtlichen Abweichungen stehen in ihrer Größe in Übereinklang mit der berechneten Streuung («mittlerer Fehler»).

Es wird also dadurch bestätigt, was in den vorangehenden Abschnitten 6b und c gesagt worden ist, nämlich daß bei so starken Streuungen der Beobachtungswerte, wie sie hier vorliegen und wie sie auch bei den jährlichen Abflußmengen des Rheins bei Basel vorhanden sind (vgl. Seite 18, rechts), lange Analysenintervalle verwendet werden müssen; ferner, daß es viele Beobachtungswerte braucht, um eine verborgene Periodizität genau zu erfassen. Kurzfristige Änderungen im Verhalten der Periodizität während einer Zeitdauer, welche kürzer ist als etwa die dreifache Wellenlänge der gesuchten Periodizität, können gar nicht oder doch nur ungenau erfaßt werden.

b) Analysenintervall n = 18 Jahre

Es wurden nun die Periodogrammkomponenten $\bar{a}(x, q)$, $\bar{b}(x, q)$, $\bar{a}'(x, q)$, $\bar{b}'(x, q)$ (rechtwinklige Koordinaten) und $\bar{h}(x, q)$, $\bar{\psi}(x, q)$, $\bar{h}'(x, q)$, $\bar{\psi}'(x, q)$ (Polarkoordinaten) für ein Analysenintervall $n = 3 \cdot p' = 18$ Jahre nach Gleichung 37 aus jenen für das Intervall $p' = 6$ Jahre berechnet und in Tabelle 7 zusammengestellt. Es ist z. B.

$$\bar{a}(x,7) = \frac{a(x,7) + a(x,13) + a(x,19)}{3} = \frac{+8{,}67 - 1{,}96 - 9{,}90}{3} = -1{,}06$$

q	a (x, q)	$\bar{b}(x, q)$	$\bar{h}(x, q) = \sqrt{\bar{a}^2(x,q) + \bar{b}^2(x,q)}$	$\bar{\psi}(x, q) = \text{arc tg}\frac{\bar{a}(x,q)}{\bar{b}(x,q)}$	$\bar{a}'(x, q)$	$\bar{b}'(x, q)$	$\bar{h}'(x, q) = \sqrt{\bar{a}'^2(x,q) + \bar{b}'^2(x,q)}$	$\bar{\psi}'(x, q) = \text{arc tg}\frac{\bar{a}'(x,q)}{\bar{b}'(x,q)}$
0	+5,33	−1,48	5,5	117g	+3,34	−3,02	4,5	147g
1	+4,68	−1,48	4,9	120	+2,46	−3,02	3,9	157
2	+3,62	−3,31	4,9	147	+1,62	−4,47	4,8	178
3	+3,95	−3,87	5,5	149	+1,44	−4,16	4,4	179
4	+2,24	−3,87	4,5	167	+0,41	−4,16	4,2	194
5	+1,38	−5,35	5,5	184	+0,05	−4,78	4,8	199
6	+1,06	−4,78	4,9	186g	−0,39	−4,02	4,0	206g
7	−1,06	−4,78	4,9	214	−2,05	−4,02	4,5	230
8	−1,38	−5,35	5,5	216	−2,71	−5,16	5,9	231
9	−2,24	−3,87	4,5	233	−3,91	−3,10	5,0	257
10	−3,95	−3,87	5,5	251	−4,84	−3,10	5,7	264
11	−3,62	−3,31	4,9	253	−5,17	−3,69	6,4	261
12	−4,68	−1,48	4,9	280g	−5,85	−2,54	6,4	274g
13	−5,33	−1,48	5,5	283	−5,50	−2,54	6,1	272
14	−4,47	0,00	4,5	300	−4,53	−0,87	4,6	288
15	−5,33	+1,48	5,5	317	−5,44	+0,71	5,4	308
16	−4,68	+1,48	4,9	320	−4,90	+0,71	5,0	309
17	−3,62	+3,31	4,9	347	−3,18	+3,70	4,9	355
18	−3,95	+3,87	5,5	349g	−3,45	+4,16	5,4	356g
19	−2,24	+3,87	4,5	367	−3,07	+4,16	5,2	360
20	−1,38	+5,35	5,5	384	−1,94	+6,12	6,4	380
21	−1,06	+4,78	4,9	386	−1,28	+4,98	5,1	384
22	+1,06	+4,78	4,9	414	+0,95	+4,98	5,1	412
23	+1,38	+5,35	5,5	416	+1,05	+5,16	5,3	413
24	+2,24	+3,87	4,5	433g	+2,07	+3,39	4,0	435g
25	+3,95	+3,87	5,5	451	+4,45	+3,39	5,6	458
26	+3,62	+3,31	4,9	453	+4,12	+2,83	5,0	462
27	+4,68	+1,48	4,9	480	+5,40	+0,61	5,4	493
28	+5,33	+1,48	5,5	483	+6,72	+0,61	6,7	494
29	+4,47	0,00	4,5	500	+6,30	−0,10	6,3	501
30	+5,33	−1,48	5,5	517g	+7,38	−1,96	7,6	516g

Tabelle 7

In Abb. 11a und 11b sind die Komponenten $\bar{a}(x, q)$, $\bar{b}(x, q)$, $\bar{a}'(x, q)$ und $\bar{b}'(x, q)$ in Funktion von q dargestellt. Aus dem Vergleich mit Abb. 9 ist ohne weiteres die Verbesserung des Verlaufes der durch aperiodische Einflüsse gestörten Linien zu sehen, welche infolge der Wahl eines längeren Analysenintervalles erzielt wurde; immerhin kann die Abweichung zwischen gestörter und wahrer Linie zeitweise noch recht lange eine einseitige bleiben.

Besonders gut ersichtlich ist die infolge Wahl eines längeren Analysenintervalles erzielte Verbesserung aus Abb. 10b. Man erkennt nun, wie die Endpunkte des

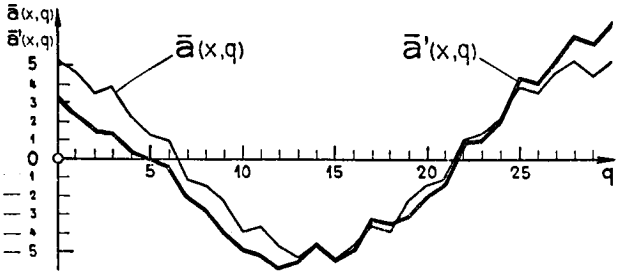


Abb. 11a. Periodogrammkomponenten $\bar{a}$ (x, q) und $\bar{a}'$ (x, q) des fingierten Beispiels nach Tabelle 1, für Analysenintervall n = 18 Jahre

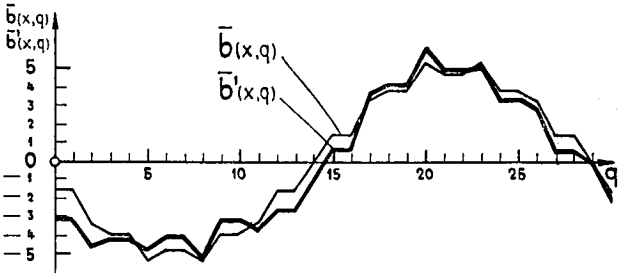


Abb. 11b. Periodogrammkomponenten $\bar{b}$ (x, q) und $\bar{b}'$ (x, q) des fingierten Beispiels nach Tabelle 1, für Analysenintervall n = 18 Jahre

Periodogrammvektors mit den Komponenten $\bar{a}'$ (x, q) und $\bar{b}'$ (x, q), welche durch die aperiodischen Bestandteile der Beobachtungswerte gestört sind, sich eindeutig auf einem Kreise anordnen. In Abb. 12 und 13 sind die Komponenten $\overline{\varphi}$ (x, q) und $\overline{\varphi}'$ (x, q) sowie $\bar{h}$ (x, q) und $\bar{h}'$ (x, q) als Phasen- bzw. Amplitudendiagramm dargestellt.

c) Berechnung der Konstanten der Periodizität

α) *Auf Grund der Werte* y (ohne aperiodische Bestandteile)

Nach Abb. 12 ergibt sich aus der Ausgleichsgeraden*):

$$\frac{d\overline{\varphi}_0}{dq} = \frac{400^g}{30} = 13{,}33^g = 12{,}0^0$$

$$\alpha - x = \alpha - 60^0 = 12{,}0^0$$

Frequenz $\alpha = 72^0$ *Wellenlänge* p = *5,00 Jahre.*

Da hier nach Abb. 10b der Endpunkt des Periodogrammvektors einen ganzen Kreisumfang zurücklegt, so kommt die Ermittlung der mittlern Länge des Periodogrammvektors von $\bar{h}$ (x) aus den arithmetischen Mitteln von $\bar{a}$ (x, q) und $\bar{b}$ (x, q) nicht in Frage, der Glättungseffekt wäre viel zu groß. Bei einer Reihe von der vorliegenden Länge mit relativ nur noch kleinen Streuungen der Werte $\bar{h}$ (x, q) ergibt sich $\bar{h}$ (x) genau genug als arithmetischer Mittelwert der $\bar{h}$ (x, q):

$$\bar{h}(x) = \frac{1}{31}\sum_{q=0}^{30} \bar{h}(x,q) = 5{,}09$$

$$\overline{P}(x) = \frac{\sin\left[13{,}33^g \cdot \frac{18}{2}\right]}{13{,}33^g \cdot \frac{18}{2}} = \frac{\sin 120^g}{120^g} = 0{,}505 \quad \text{(nach 28)}$$

Der Wert $\frac{\sin 120^g}{120^g} = 0{,}505$ wurde direkt einer entsprechenden Tafel von Lit. 4 entnommen.

$$\textit{Amplitude } c = \frac{\bar{h}(x)}{\overline{P}(x)} = \frac{5{,}09}{0{,}505} = 10{,}07 \qquad \text{(nach 40)}$$

Anfangsphase β: Nach Abb. 12 ist

$$\beta = 111^g - 13{,}33 \cdot \frac{18}{2} = -9^g \approx -8^0$$

Wir erhalten somit

$$y = 10{,}07 \sin\left[72^0 t - 8^0\right] \text{ an Stelle von } y = 10{,}00 \sin 72^0 t$$

β) *Auf Grund der Werte* y' (inkl. aperiodische Bestandteile)

Die Lage der Punkte, welche sich bei der Darstellung der $\overline{\varphi}'$ (x, q) in Abb. 12 ergeben, ist zu unregelmäßig, als daß ein nur graphischer Ausgleich nach Augenmaß

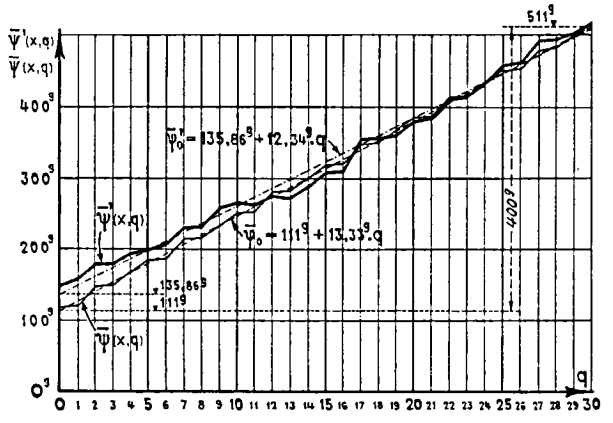


Abb. 12. Phasendiagramm für fingiertes Beispiel nach Tabelle 1, Analysenintervall n = 18 Jahre, Versuchsfrequenz x = 60°

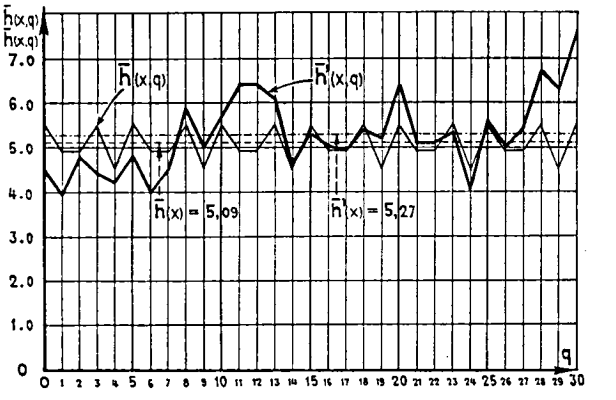


Abb. 13. Amplitudendiagramm für fingiertes Beispiel nach Tabelle 1, Analysenintervall n = 18 Jahre, Versuchsfrequenz x = 60°

*) Infolge der regelmäßigen Lage der Punkte konnte die Ausgleichsgerade nach Augenmaß gezogen werden.

vorgenommen werden könnte. Die Gleichung der Ausgleichsgeraden wurde deshalb nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt zu

$$\overline{\psi}_0' = 135{,}86^g + 12{,}34^g \cdot q$$

$$\frac{d\overline{\psi}_0'}{dq} = 12{,}34^g = 11{,}11^0 \qquad \alpha - x = \alpha - 60^0 = 11{,}11^0$$

Frequenz $\alpha = 71{,}11^0$ *Wellenlänge* $p = 5{,}06$ *Jahre*

Amplitude c:

$$\overline{h}'(x) = \frac{1}{31}\sum_{q=0}^{30}\overline{h}'(x,q) = 5{,}27$$

$$\overline{P}'(x) = \frac{\sin\left[12{,}34^g \cdot \frac{18}{2}\right]}{12{,}34^g \cdot \frac{18}{2}} = 0{,}567$$

$$c = \frac{5{,}27}{0{,}567} = 9{,}3$$

Anfangsphase $\beta = 135{,}86^g - 12{,}34^g \cdot \frac{18}{2} \approx 22^0$

$$\text{Also } y = 9{,}3 \sin\left[71{,}11^0\, t + 22^0\right] = 9{,}3 \sin\left[\frac{2\pi}{5{,}06} t + 22^0\right]$$

In Abb. 2b ist die Sinuswelle, welche dieser Gleichung entspricht, der wahren Sinuswelle $y = 10{,}00 \cdot \sin 72^0\, t$ graphisch zum Vergleich gegenübergestellt worden. Die größte vorkommende Phasenverschiebung gegenüber dem Verlauf der wahren Welle entspricht etwa 0,2 Jahren.

Bei der Ermittlung der Periodizität durch übergreifende Mittelbildung (Abschnitt A, 3b, des II. Teiles) ist noch eine zufällige Periodizität mit einer Wellenlänge von rund 12 Jahren, also einer Frequenz von $\alpha_{12} = 30^0$, störend in Erscheinung getreten. Bei der soeben durchgeführten Periodogrammrechnung wirkte sich diese zufällige Periodizität jedoch nicht störend aus; denn die Frequenz $\alpha_{12} = 30^0$ fällt weit außerhalb der Maximumsbreite (vgl. Seite 30, rechts) und die durchschnittliche Amplitude dieser Periodizität ist relativ klein. Der Betrag des Periodogrammvektors der zufälligen Periodizität $p = 12$ ist also gegenüber jenem der gesuchten Periodizität $p = 5$ sehr klein.

III. Die Trennung benachbarter Periodizitäten

1. Allgemeines

Es ist bereits auf die Aufgabe hingewiesen worden, benachbarte Periodizitäten, also Periodizitäten, deren Frequenzen sich nur wenig voneinander unterscheiden, zu trennen. Wir werden diese Aufgabe bei unseren konkreten Untersuchungen über die Abflußmengen des Rheins mehrmals zu lösen haben; sie ist deshalb für uns von großer Wichtigkeit.

Eine Beobachtungsfunktion setze sich aus mehreren persistenten Periodizitäten, welche als reine Sinuswellen gegeben seien, nach folgender Formel zusammen:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t) = c_1 \sin\left[\alpha_1 t + \beta_1\right] + c_2 \sin\left[\alpha_2 t + \beta_2\right] + \cdots + c_n \sin\left[\alpha_n t + \beta_n\right]$$

Entsprechend Gleichung 23 erhalten wir mit einem Analysenintervall n und einer Versuchsfrequenz $x = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu$ (μ = ganze Zahl) für die Komponenten des Periodogramms:

$$a(x) = \frac{2}{n}\int_0^n f_1(t)\cos xt\, dt + \frac{2}{n}\int_0^n f_2(t)\cos xt\, dt + \cdots + \frac{2}{n}\int_0^n f_n(t)\cos xt\, dt$$

$$b(x) = \frac{2}{n}\int_0^n f_1(t)\sin xt\, dt + \frac{2}{n}\int_0^n f_2(t)\sin xt\, dt + \cdots + \frac{2}{n}\int_0^n f_n(t)\sin xt\, dt$$

Die Periodogrammkomponenten der Funktion f(t) setzen sich somit aus den Periodogrammkomponenten der n Teilwellen zusammen. Sollen also die Periodogrammkomponenten *einer* der verschiedenen Periodizitäten berechnet werden, so tritt eine Störung der Berechnung durch das Hinzutreten der Periodogrammkomponenten der andern Periodizitäten ein. In vielen Fällen wird es aber möglich sein, durch eine geeignete Wahl des Analysenintervalls die Störung klein zu halten.

Kann nämlich das Analysenintervall so gewählt werden, daß die Perioden der Teilwellen *harmonische* Perioden von n sind, also

$$[\alpha_1 - x] = \frac{2\pi}{n} \cdot \nu_1, \quad [\alpha_2 - x] = \frac{2\pi}{n} \cdot \nu_2, \quad \cdots, \quad [\alpha_n - x] = \frac{2\pi}{n} \cdot \nu_n$$

ist, wobei $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_n$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, so werden nach den Ausführungen auf Seite 28, rechts, und 31, links, die Periodogrammkomponenten derjenigen Teilwellen zu Null, für welche ν von

Null verschieden ist. Nur für diejenige Teilwelle, für welche ν gleich Null, also $\alpha = x$ ist, erhalten wir einen Periodogrammvektor $\mathfrak{P}(x)$, welcher dann gleich dem Hauptvektor $\mathfrak{p}(x)$ und gleich der Amplitude c ist. Liegt also eine Beobachtungsfunktion vor, von welcher wir, z. B. auf Grund einer Spektraluntersuchung, wissen, daß sie mehrere Periodizitäten enthält, und wollen wir diese Periodizitäten durch Phasendiagramme näher untersuchen, so wird man, wenn möglich, wie folgt vorgehen:

Es wird eine Periodizität nach der andern einzeln untersucht und der Einfluß der übrigen Periodizitäten auf den Periodogrammvektor möglichst unterdrückt. Zu diesem Zwecke wird z. B. zur Untersuchung der Periodizität $f_1(t)$ gewählt:

a) die Versuchsfrequenz x möglichst genau gleich der Frequenz α_1 der zu isolierenden Periodizität $f_1(t)$.

b) das Analysenintervall als ein ganzes Vielfaches der Versuchsperiode $p' = \frac{2\pi}{x}$, also $n = \frac{2\pi}{x} \cdot \varrho$ (ϱ = ganze Zahl).

c) das Analysenintervall gleichzeitig möglichst als ein ganzes Vielfaches der Wellenlängen der übrigen, für die Berechnung von $f_1(t)$ zu unterdrückenden Periodizitäten $f_i(t)$, also z. B. $n = \frac{2\pi}{\alpha_i} \cdot \zeta$ (ζ = ganze Zahl).

Es ist dann $\alpha_i = \frac{2\pi}{n} \cdot \zeta$, und damit wird $[\alpha_i - x] = \frac{2\pi}{n} \cdot [\zeta - \varrho]$, also ein ganzes Vielfaches von $\frac{2\pi}{n}$; die Beträge von $P(x, \alpha_i)$, sowie $Q(x, \alpha_i)$ werden zu Null und damit die Einflüsse der Periodizitäten $f_i(t)$ auf den Periodogrammvektor der Funktion $f_1(t)$ ausgeschaltet.

Je genauer die obigen Bedingungen a) bis c) erfüllt werden können, um so schärfer wird die zu isolierende Periodizität erfaßt und um so mehr werden die übrigen Periodizitäten unterdrückt. Je kleiner der Unterschied zwischen den Frequenzen der zu unterdrückenden Periodizitäten und der Frequenz der zu isolierenden Periodizität ist, um so schärfer muß die Bedingung c) erfüllt werden und umgekehrt. Wenn daher die Periodizitäten sehr eng benachbart sind und sich die Bedingung c) nur unvollkommen erfüllen läßt, so muß zu einem andern Verfahren geschritten werden, um die Periodizitäten voneinander zu isolieren. Der einfachste Fall liegt vor, wenn zwei Teilperiodizitäten vorhanden sind.

2. *Trennung von zwei benachbarten Periodizitäten*

a) Einleitende Ausführungen

Es sei eine Beobachtungsfunktion gegeben, welche sich aus zwei Periodizitäten mit den Wellenlängen $p_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1}$ und $p_2 = \frac{2\pi}{\alpha_2}$ in folgender Form zusammensetzt:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = c_1 \sin[\alpha_1 t + \beta_1] + c_2 \sin[\alpha_2 + \beta_2]$$

Für diese Funktion sollen mit der Versuchsfrequenz $x = \frac{2\pi}{p'}$ die Periodogrammkomponenten berechnet werden, wobei *nicht* nach dem im vorangehenden Abschnitt dargelegten Verfahren vorgegangen werden könne; das Analysenintervall könne also nicht so gewählt werden, daß p_1 und p_2 gleichzeitig harmonische Perioden desselben sind.

Sind α_1 und α_2 *genügend stark voneinander* verschieden, so werden sich die Periodizitäten gegenseitig nur wenig stören, wenn für eine derselben die Periodogrammkomponenten berechnet werden. Wird zur Berechnung von $f_1(t)$ die Versuchsfrequenz x gleich α_1 gewählt oder doch so, daß sie im Bereiche des Hauptmaximums des Hauptvektors $\mathfrak{p}_1(x)$ von $f_1(t)$ liegt (vgl. Seite 30), so wird der Hauptvektor $\mathfrak{p}_2(x)$ von $f_2(t)$ gegenüber $\mathfrak{p}_1(x)$ klein sein, wenn nicht gerade die Amplitude c_2 viel größer ist als c_1. Je kleiner $\mathfrak{p}_2(x)$ im Vergleich zu $\mathfrak{p}_1(x)$ ist, um so kleiner ist also die von $\mathfrak{p}_2(x)$ herrührende Störung des Verhaltens von $\mathfrak{p}_1(x)$. Wir haben also dann drei Störungen von $\mathfrak{p}_1(x)$, nämlich den Störungsvektor $\mathfrak{q}_1(x)$ von $f_1(t)$, sowie den Hauptvektor $\mathfrak{p}_2(x)$ und den Störungsvektor $\mathfrak{q}_2(x)$ von $f_2(t)$.

Wir untersuchen diese Verhältnisse weiter anhand des Bildes, welches das «Spektrum» bietet, und *folgen dabei den Ausführungen von Stumpff in Lit. 3:*

Wird der Periodogrammvektor von f(t) für ein Analysenintervall n in Form eines Spektrums als Funktion einer variablen Versuchsfrequenz x (Abszisse) dargestellt, so wird dieses Spektrum bei $x = \alpha_1$ und $x = \alpha_2$ zwei deutlich getrennte Maxima aufweisen. Dies wird mit aller Deutlichkeit auch noch der Fall sein, wenn der Abstand zwischen $x = \alpha_1$ und $x = \alpha_2$ noch eine volle Maximumsbreite, also $\frac{4\pi}{n}$, beträgt; denn dann liegt in der Mitte zwischen den Abszissen α_1 und α_2 des Spektrums eine Nullstelle der beiden Hauptvektoren. Das Periodogramm wird also an dieser Stelle nur durch die kleinen Anteile der Störungsvektoren gebildet. Das Spektrum zeigt also zwischen den beiden Maxima bei $x = \alpha_1$ und $x = \alpha_2$ einen sehr tiefen Einschnitt. Wird aber der Unterschied zwischen den beiden Frequenzen α_1 und α_2 immer kleiner, so nimmt der Anteil der beiden Hauptvektoren an der Bildung der Ordinaten zwischen den Maxima bei $x = \alpha_1$ und $x = \alpha_2$ immer mehr zu, und die beiden Maxima fließen immer mehr ineinander.

Die «Trennbarkeit» benachbarter Perioden hängt somit ganz wesentlich von der Länge des Analysenintervalls n ab, welches für die Maximumsbreite $\frac{4\pi}{n}$ bestimmend ist. Handelt es sich also um benachbarte, *persistente* Periodizitäten, so können letztere durch Verwendung eines genügend langen Analysenintervalles getrennt werden. Die Periodizitäten im Abflußvorgang des Rheins bei Basel sind jedoch nur quasipersistent; das Analysenintervall kann somit nicht beliebig lang gewählt werden, und es mußte ein anderes in Lit. I, 3, angegebenes Verfahren verwendet werden. Im folgenden Abschnitt sollen die Gleichungen, welche diesem Verfahren zugrunde liegen, so ausführlich als dies zum Verständnis der Anwendung nötig ist, abgeleitet werden.

b) Ableitung der Gleichungen

Es werde angenommen, daß sich die Amplituden c_1 und c_2 nicht allzusehr voneinander unterscheiden und α_1 von α_2 wenig verschieden sei. Ist c_1 die größere Amplitude, so wird die größte Ordinate des Spektrums die ungefähre Lage von α_1 angeben, womit auch die ungefähre Wellenlänge der Periodizität $f_1(t)$ gegeben ist. Nun werde nach dem Verfahren der Phasendiagramme

ein Analysenintervall von der Länge n stetig durch die ganze Beobachtungsfunktion f (t) hindurchbewegt, und es werde der Periodogrammvektor $\mathfrak{P}$ (x, q) als Funktion des variablen Intervallanfanges q graphisch in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. Dabei wird sich bei einem genügend langen Intervall n der Periodogrammvektor $\mathfrak{P}$ (x, q) zur Hauptsache aus den beiden Hauptvektoren $\mathfrak{p}_1$ (x, q) und $\mathfrak{p}_2$ (x, q) zusammensetzen, während die beiden Störungsvektoren $\mathfrak{q}_1$ (x, q) und $\mathfrak{q}_2$ (x, q) lediglich eine kleine kurzperiodische epizykloidische Schwankung des Periodogrammvektors hervorrufen (vgl. Seite 36). Diese epizyklische Schwankung soll vernachlässigt werden. Die Wegkurve des Endpunktes des Periodogrammvektors $\mathfrak{P}$ (x, q) von f (t) wird somit zur Hauptsache durch folgende Bewegungen erzeugt werden (vgl. Abb. 6 und 14):

1. Der Endpunkt des Hauptvektors $\mathfrak{p}_1$ (x, q) bewegt sich um den Nullpunkt des Koordinatensystems auf einem Kreise mit dem Radius $|\,\Phi_1\,| = c_1 \cdot |\,P_1(x)\,|$ und der Winkelgeschwindigkeit $\alpha_1 - x$.

2. Der Endpunkt des Hauptvektors $\mathfrak{p}_1$ (x, q) wird seinerseits durch den Endpunkt des Hauptvektors $\mathfrak{p}_2$ (x, q) auf einem Kreise mit dem Radius $|\,\Phi_2\,| = c_2 \cdot |\,P_2(x)\,|$ und der Winkelgeschwindigkeit $\alpha_2 - x$ umwandert.

Es ergibt sich also wiederum eine epizyklische Bewegung, wie sie beim Zusammenwirken von Hauptvektor und Störungsvektor entsteht (vgl. Seite 36). Während aber die Bewegung im Epizykel infolge des Störungsvektors vernachlässigt, d. h. ausgeglichen werden darf, ist dies hier nicht mehr der Fall, falls $|\,\Phi_2\,|$ größenordnungsmäßig nicht viel kleiner ist als $|\,\Phi_1\,|$.

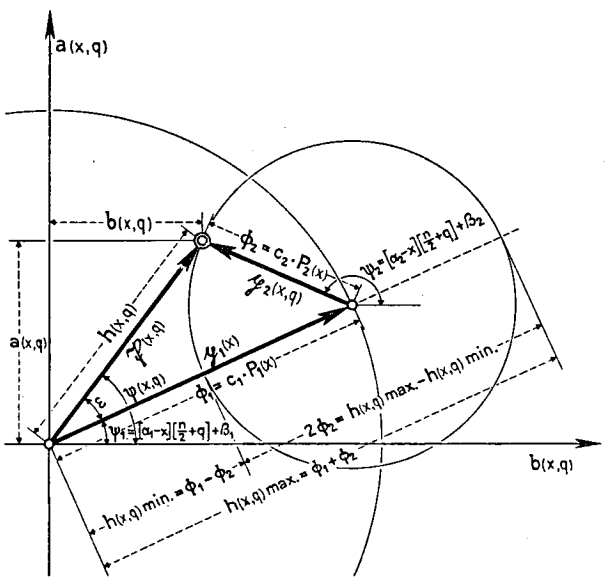


Abb. 14. Veranschaulichung des Zusammenhanges zwischen den Hauptvektoren zweier benachbarter Periodizitäten

Die Trennung der beiden Periodizitäten erfolgt mit Hilfe des *Phasendiagramms* gemeinsam mit dem «*Intensitätsdiagramm*», an dessen Stelle in der Praxis in der Regel das Amplitudendiagramm treten kann.

Als «*Intensitätsdiagramm*» wird die graphische Darstellung des Quadrates des Betrages des Periodogrammvektors von f (t) als Funktion des variablen Intervallanfanges q bezeichnet. Bezeichnet man den Betrag des Periodogrammvektors mit h (x, q), so berechnen sich also die Ordinaten des Intensitätsdiagrammes aus:

$$h^2(x,q) = a^2(x,q) + b^2(x,q)$$

Nach Gleichung 33 ist, unter Vernachlässigung der Störungsglieder, mit:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= c_1 \cdot P_1(x) = c_1 \cdot \frac{\sin\left[\alpha_1 - x\right]\frac{n}{2}}{\left[\alpha_1 - x\right]\frac{n}{2}} \\ \Phi_2 &= c_2 \cdot P_2(x) = c_2 \cdot \frac{\sin\left[\alpha_2 - x\right]\frac{n}{2}}{\left[\alpha_2 - x\right]\frac{n}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

$$a^2(x,q) = \left\{\Phi_1 \cdot \sin\left[(\alpha_1 - x)\left(\frac{n}{2} + q\right) + \beta_1\right] + \Phi_2 \cdot \sin\left[(\alpha_2 - x)\left(\frac{n}{2} + q\right) + \beta_2\right]\right\}^2$$

$$b^2(x,q) = \left\{\Phi_1 \cdot \cos\left[(\alpha_1 - x)\left(\frac{n}{2} + q\right) + \beta_1\right] + \Phi_2 \cdot \cos\left[(\alpha_2 - x)\left(\frac{n}{2} + q\right) + \beta_2\right]\right\}^2$$

woraus sich leicht ableiten läßt:

$$h^2(x,q) = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + 2\,\Phi_1\,\Phi_2 \cdot \cdot \cos\left\{\left[\alpha_1 - \alpha_2\right]\cdot\frac{n}{2} + \beta_1 - \beta_2 + \left[\alpha_1 - \alpha_2\right]\cdot q\right\} \quad (46)$$

h^2 (x, q) schwankt somit um den Mittelwert $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$ sinusförmig mit der Amplitude $2 \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2$ und der Frequenz $\alpha_1 - \alpha_2$. Eine entsprechende Schwankung mit der Frequenz $[\alpha_1 - \alpha_2]$ zeigt natürlich auch das *Amplitudendiagramm*, also die Darstellung von h (x, q) als Funktion von q, nur ist der Verlauf keine reine Sinuslinie. Nach Abb. 14 ist

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{h(x,q)\ \text{max.} + h(x,q)\ \text{min.}}{2} \\ \Phi_2 &= \frac{h(x,q)\ \text{max.} - h(x,q)\ \text{min.}}{2} \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Die Wellenlänge der Schwankung des Intensitäts- und des Amplitudendiagramms ist

$$p_s = \frac{2\pi}{|\alpha_1 - \alpha_2|} \quad (48)$$

Die Ordinaten des *Phasendiagrammes* berechnen sich nach Gleichung 35 aus:

$$\psi(x,q) = \text{arc tg}\,\frac{a(x,q)}{b(x,q)}$$

Aus Abb. 14 ist ersichtlich, daß der Richtungswinkel ψ (x, q) des Periodogrammvektors $\mathfrak{P}$ (x, q) während des Vorganges der Epizykelbewegung um den Richtungswinkel ψ_1 des Hauptvektors $\mathfrak{p}_1$ (x, q) schwankt. Diese

Schwankung erfolgt mit der gleichen Frequenz, also mit $\alpha_1 - \alpha_2$, mit welcher der Betrag des Periodogrammvektors schwankt. Der Richtungswinkel ψ (x, q) setzt sich also aus dem linear zunehmenden Richtungswinkel ψ_1 und einem periodisch um Null schwankenden Zusatzwinkel ε zusammen. Die Amplitude der Schwankung von ε ist um so kleiner, je kleiner Φ_2 im Verhältnis zu Φ_1 ist. Es läßt sich zeigen (Lit. 3), daß die Schwankung nicht genau sinusförmig ist, sondern um so mehr von der Sinusform abweicht, je größer Φ_2 im Verhältnis zu Φ_1 wird.

Die Berechnung der beiden Periodizitäten $f_1(t)$ und $f_2(t)$ erfolgt in zwei Schritten:

Wenn man festgestellt hat, daß der Endpunkt des Periodogrammvektors $\mathfrak{P}$ (x, q) eine Epizykloide beschreibt, so bestimmt man zunächst durch lineare Ausgleichung des Phasendiagramms die Frequenz α_1 der Hauptperiode. Aus den periodischen Schwankungen des Phasendiagramms und des Amplitudendiagramms, welche nach obigem von gleicher Wellenlänge sein müssen, erhält man sodann diese Wellenlänge p_s. Mit p_s und α_1 ergibt sich weiter nach Gleichung 48 auch die Frequenz α_2. Aus dem Amplitudendiagramm ergeben sich sodann mit Hilfe der Gleichungen 45 und 47 auch die Amplituden c_1 und c_2. Aus dem Phasendiagramm werden auch die Anfangsphasen abgeleitet, und zwar auf Grund der in Abb. 6 und 14 veranschaulichten Zusammenhänge. Wie diese Ableitung im einzelnen durchzuführen ist, werden wir bei den konkreten Berechnungen für die Abflußmengen des Rheins sehen.

3. Periodizität mit periodisch veränderlicher Amplitude

Bei unsern Untersuchungen über die Periodizitäten im Abflußvorgang des Rheins wird auch der Fall von Bedeutung sein, daß eine Periodizität in Form einer Sinuswelle vorliegt, deren Amplitude sich periodisch, und zwar ebenfalls nach dem Sinusgesetz, ändert, weshalb wir diesen Fall hier noch besonders untersuchen. Eine solche Periodizität habe also die Form:

$$f(t) = c \cdot \sin[\gamma t + \delta] \cdot \sin[\alpha t + \beta] \qquad (49)$$

Diese Form kann nach den Sätzen über die Summen und Differenzen gleichnamiger Funktionen zweier Winkel übergeführt werden in:

$$\left.\begin{aligned} f(t) = \frac{c}{2} \cdot \sin\left[(\alpha+\gamma)t + \beta + \delta - \frac{\pi}{2}\right] - \\ - \frac{c}{2} \cdot \sin\left[(\alpha-\gamma)t + \beta - \delta - \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Eine Sinusschwingung mit der Frequenz α, deren Amplitude sich nach dem Sinusgesetz mit einer Frequenz γ ändert, setzt sich also zusammen aus zwei einfachen Sinusschwingungen, deren Frequenzen symmetrisch zur Frequenz α liegen. Es liegt somit der Fall zweier Teilschwingungen vor, welcher nach den in den vorangehenden Abschnitten dargelegten Regeln zu behanden ist.

Liegt eine Beobachtungsfunktion f (t) von mehr als zwei Teilschwingungen vor, deren Konstanten zu bestimmen sind, so kann eine solche Aufgabe in Analogie zu jener, welche sich bei zwei Teilschwingungen stellte, dadurch gelöst werden, daß die Wegkurve des Endpunktes des Periodogrammvektors von f (t) als eine Kombination so vieler Kreisbewegungen dargestellt wird, als Teilschwingungen vorhanden sind.

IV. Der Summationsvektorenzug

1. Allgemeines und Ableitung der Beziehungen

Das Phasendiagramm wurde erhalten, indem — bei festgewählten Werten für die Versuchsfrequenz x und für das Analysenintervall — der Anfangspunkt q des Analysenintervalls durch die Beobachtungsreihe verschoben worden ist. Es kann nun auch, außer der Versuchsfrequenz x, der Anfangspunkt q des Analysenintervalls festgehalten werden und dafür die Länge des Analysenintervalles variiert werden. Man geht dabei wie folgt vor:

Es sei eine Beobachtungsreihe gegeben durch ihre äquidistanten Werte:

$$y_0, y_1, y_2, \cdots\cdots y_i, \cdots\cdots y_n, y_{N-1}$$

Bildet man die (N – 1)-fachen Periodogrammkomponenten für den ganzen Bereich 0 bis N – 1, also nach Gleichung 29 die Produktensummen

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i \cdot \cos x\,i \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cdot \sin x\,i$$

so kann der (N – 1)-fache Periodogrammvektor als Resultante aus N Einzelvektoren aufgefaßt werden, deren Komponenten sind

$$y_i \cdot \cos x\,i \quad \text{und} \quad y_i \cdot \sin x\,i$$

Diese Einzelvektoren haben also nacheinander als Länge die Beträge der Beobachtungswerte $y_0, y_1, \cdots y_i, \cdots$ und als Richtungswinkel die trigonometrischen Argumente der Versuchswelle. Bei konkreten Aufgaben würde die Aufzeichnung so zahlreicher Einzelvektoren zu weit führen; es werden deshalb mehrere Einzelvektoren zu Teilsummen zusammengefaßt. Als zweckmäßig erweist es sich, die Einzelvektoren zusammenzufassen, welche in den aufeinanderfolgenden Versuchsperioden

$$[0, \cdots, p'-1],\ [p', \cdots, 2\,p'-1],\ [2\,p', \cdots, 3\,p'-1], \cdots$$

enthalten sind, wobei $p' = \frac{2\pi}{x}$ ist. Es werden also die, nach Seite 37 bereits für das Phasendiagramm benützten, voneinander unabhängigen Komponenten verwendet:

$$a(x,q) = \frac{2}{p'} \sum_{i=q}^{q+p'-1} y_i \cdot \cos x i$$

$$q = 0, p', 2p', \cdots$$

$$b(x,q) = \frac{2}{p'} \sum_{i=q}^{q+p'-1} y_i \cdot \sin x i$$

Diese Komponenten werden entsprechend den Analysenintervallen p', $2p'$, $3p'$, $\cdots$ zu folgenden *fortschreitenden Summen* $\Sigma a(x,q)$ und $\Sigma b(x,q)$ zusammengezählt:

$$\sum a(x,q)_{\varrho^*} = a(x,0) + a(x,p') + a(x,2p') + \cdots + a(x,\varrho^* p') = \sum_{q=0}^{\varrho^* \cdot p'} a(x,q)$$

$$\sum b(x,q)_{\varrho^*} = b(x,0) + b(x,p') + b(x,2p') + \cdots + b(x,\varrho^* p') = \sum_{q=0}^{\varrho^* \cdot p'} b(x,q)$$

wobei $\varrho^* = 0, 1, 2, 3, \cdots$ und $q = 0, p', 2p', \cdots$

Es entstehen so die Komponenten einer Folge von Vektoren, welche man als *Summationsvektoren* bezeichnet. Die Zusammensetzung dieser Summationsvektoren aus ihren Teilvektoren kann graphisch sehr anschaulich dargestellt werden, indem die aufeinanderfolgenden Teilvektoren zu einem *Summationsvektorenzug* aneinandergereiht werden (vgl. Abb. 15 und 16). Diese Teilvektoren haben

den Betrag $h(x,q) = \sqrt{a^2(x,q) + b^2(x,q)}$ und

den Richtungswinkel $\psi(x,q) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a(x,q)}{b(x,q)}$

Die Knickpunkte des Summationsvektorenzuges entsprechen den Anfangs- und Endpunkten der aufeinanderfolgenden Teilvektoren und den Endpunkten der aus den Teilvektoren zusammengesetzten Summationsvektoren.

Liegt insbesondere eine *reine Sinusfunktion* vor, so haben die Hauptvektoren $\mathfrak{p}(x,q)$ der aufeinanderfolgenden Analysenintervalle

den Richtungswinkel $[a - x] \cdot \left[\frac{p'}{2} + q\right] + \beta$

den konstanten Betrag $c\,P(x) = c \cdot \frac{\sin[\alpha - x]\frac{p'}{2}}{[\alpha - x]\frac{p'}{2}}$ und

die Komponenten $c\,P(x) \cdot \sin\left\{[\alpha - x]\left[\frac{p'}{2} + q\right] + \beta\right\}$

$c\,P(x) \cdot \cos\left\{[\alpha - x]\left[\frac{p'}{2} + q\right] + \beta\right\}$

Zur Abkürzung setzen wir $[\alpha - x] \cdot \frac{p'}{2} = \chi$

Die Folge der Richtungswinkel für $q = 0, p', 2p', \cdots$ ist damit

$$[\alpha - x] \cdot \frac{p'}{2} + \beta = \chi + \beta; \quad [\alpha - x] \cdot \frac{3p'}{2} + \beta = 3\chi + \beta;$$

$$[\alpha - x] \cdot \frac{5p'}{2} + \beta = 5\chi + \beta; \cdots$$

Die aufeinanderfolgenden Hauptvektoren $\mathfrak{p}(x,q)$ werden nun gemäß Abb. 15 graphisch zu einem Summationsvektorenzug zusammengereiht. Zu diesem Zwecke werden nach obigen Ausführungen am besten die fortschreitenden Summen der Komponenten aufgetragen, nämlich:

$$\sum_{q=0}^{\varrho^* \cdot p'} c\,P(x) \cdot \sin\left\{[\alpha - x]\left[\frac{p'}{2} + q\right] + \beta\right\} \text{ und}$$

$$\sum_{q=0}^{\varrho^* \cdot p'} c\,P(x) \cdot \cos\left\{[\alpha - x]\left[\frac{p'}{2} + q\right] + \beta\right\}$$

$\varrho^* = 0, 1, 2, 3, \cdots$ und $q = 0, p', 2p', \cdots$

Die Richtungsänderung der aufeinanderfolgenden Hauptvektoren ist immer die gleiche, nämlich gleich $2\chi = [\alpha - x] \cdot p'$. Die Knickpunkte des Summationsvektorenzuges, welcher auf diese Weise aus den Hauptvektoren unter Vernachlässigung der Störungsvektoren gebildet wird, liegen somit auf einem Kreise. Dieser Kreis liegt tangential zu der Geraden, die mit der Abszissenaxe den Winkel β (Phasenkonstante) einschließt. Der *Radius des Kreises* ergibt sich aus den in Abb. 15 eingetragenen Winkelbeziehungen zu

$$R = \frac{c\,P(x)}{2\sin\chi} = \frac{c\sin[\alpha - x]\frac{p'}{2}}{2[\alpha - x]\frac{p'}{2} \cdot \sin[\alpha - x]\frac{p'}{2}} = \frac{c}{[\alpha - x]p'} \tag{51}$$

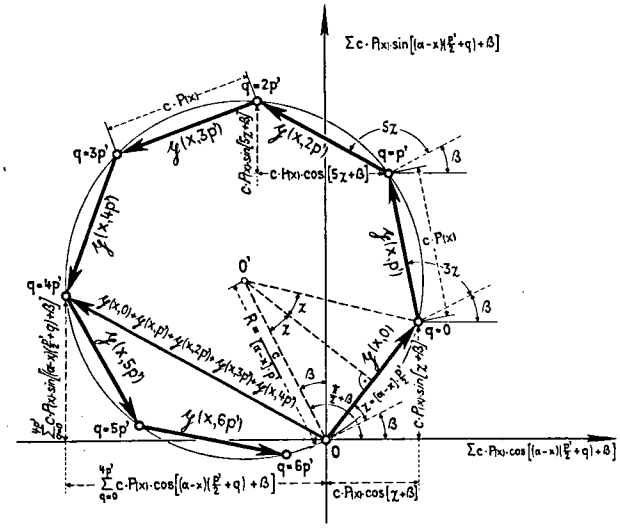


Abb. 15. Zusammensetzung der Hauptvektoren $\mathfrak{p}(x,q)$ der Analysenintervalle $q = 0, p', 2p', \cdots$ zu einem Summationsvektorenzug

Der *Mittelpunkt des Kreises* entspricht dem Endpunkt eines Vektors vom Betrage R und dem Richtungswinkel

$$\frac{\pi}{2} + \beta$$

Die Störungsvektoren reihen sich ebenfalls zu einem Vektorenzug zusammen, dessen Knickpunkte auch auf einem Kreise liegen. Dieser Kreis ist aber im Vergleich zu jenem, welcher dem Hauptvektorenzug entspricht, sehr klein, und er wird mit großer Geschwindigkeit umlaufen. Die Störungsvektoren werden also lediglich zur Folge haben, daß die Lage der Knickpunkte des Hauptvektorenzuges ein wenig gestört erscheinen und nicht genau auf dem Kreise mit dem Radius R liegen, sondern um die Kreislinie herumpendeln. Größere Störungen werden die aperiodischen Bestandteile der Beobachtungswerte zur Folge haben. Aber bei Vorhandensein einer verborgenen sinusförmigen Periodizität wird doch für $\alpha \approx x$ ein Summationsvektorenzug entstehen, welcher angenähert gesetzmäßig nach einer Kreislinie verläuft. Je größer $\alpha - x$ ist, um so stärker gekrümmt ist die Kreislinie und um so kleiner ist der Radius R. Ist dagegen α genau gleich x, so streckt sich die Kreislinie zu einer Geraden, welche mit der Abszissenaxe den Winkel β einschließt.

Ist dagegen die Beobachtungsfunktion gänzlich *unperiodisch*, besteht sie z. B. aus Werten von der Art einer Folge zufälliger Fehler, so ergibt sich kein gesetzmäßiger Verlauf des Summationsvektorenzuges. Jeder Teilvektor ändert seine Richtung unabhängig von den andern Teilvektoren und willkürlich, so daß eine gesetzlose Zickzacklinie entsteht, welche als «*Irrlauf*» bezeichnet wird.

2. Beispiel

In Abb. 16 sind die Summationsvektorenzüge für das Beispiel nach Tabelle 1 dargestellt, welches wir im Abschnitt über das Phasendiagramm behandelt haben, und zwar ist einmal der Vektorenzug für die ungestörten Beobachtungswerte y und dann ist auch jener für die Beobachtungswerte y′ aufgetragen, welche mit aperiodischen Bestandteilen behaftet sind. Aus den mit dem Analysenintervall $p' = 6$ berechneten Komponenten a (x, q), b (x, q) und a′ (x, q), b′ (x, q) für q = 0, 6, 12, ··· 42, welche in Tabelle 6 enthalten sind, wurden die in Tabelle 8 zusammengestellten Summen $\Sigma\, a\,(x, q)_{\varrho^*}$, $\Sigma\, b\,(x, q)_{\varrho^*}$, $\Sigma\, a'\,(x, q)_{\varrho^*}$ und $\Sigma\, b'\,(x, q)_{\varrho^*}$ gebildet. Die graphische Auftragung dieser Summen ergibt die Knickpunkte der Summationsvektorenzüge.

q	a (x, q)	$\Sigma\, a\,(x, q)_{\varrho^*}$	b (x, q)	$\Sigma\, b\,(x, q)_{\varrho^*}$	a′ (x, q)	$\Sigma\, a'\,(x, q)_{\varrho^*}$	b′ (x, q)	$\Sigma\, b'\,(x, q)_{\varrho^*}$
0	+4,15	+ 4,15	+7,18	+7,18	+ 5,48	+ 5,48	+ 0,26	+ 0,26
6	+9,88	+14,03	−2,74	+4,44	+ 5,24	+10,72	− 0,43	− 0,17
12	+1,96	+15,99	−8,88	−4,44	− 0,71	+10,01	− 8,88	− 9,05
18	−8,67	+ 7,32	−2,74	−7,18	− 5,69	+ 4,32	− 2,74	−11,79
24	−7,32	0,00	+7,18	0,00	−11,15	− 6,83	+ 4,00	− 7,79
30	+4,15	+ 4,15	+7,18	+7,18	+ 6,48	− 0,35	+11,22	+ 3,43
36	+9,88	+14,03	−2,74	+4,44	+10,88	+10,53	− 5,05	− 1,62
42	+1,96	+15,99	−8,88	−4,44	+ 4,79	+15,32	−12,05	−13,67

Tabelle 8
Berechnung der Komponenten der Summationsvektoren für das fingierte Beispiel nach Tabelle 1

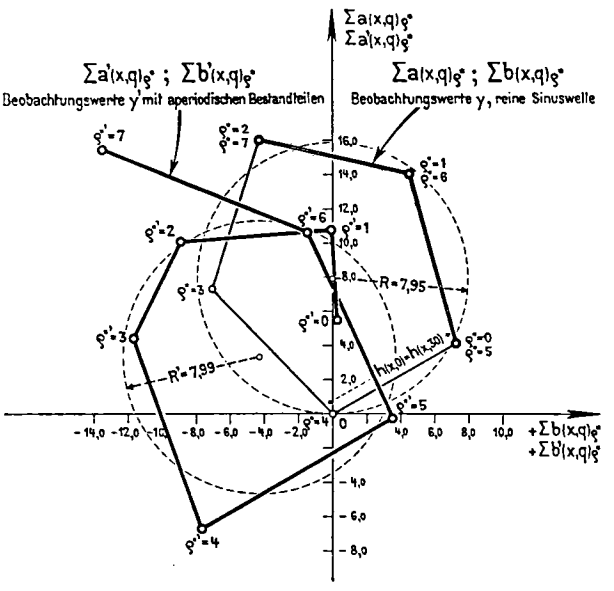


Abb. 16. Summationsvektorenzug für das fingierte Beispiel nach Tabelle 1

Summationsvektorenzug für die Beobachtungswerte y, welche nach Gleichung 4 einer reinen Sinuswelle entsprechen:

Nach Seite 47 ist $\alpha - x = 13{,}33^g$. Somit ergibt sich für den theoretischen Wert des Radius R des Kreises, auf welchem die Knickpunkte des Hauptvektorenzuges liegen:

$$R = \frac{c}{[\alpha - x]\, p'} = \frac{10{,}00}{13{,}33^g \cdot 6} = 7{,}95$$

Aus Abb. 16 ersieht man, daß die Eckpunkte infolge des Einflusses der Störungsvektoren, wie erwartet, nicht genau auf der Kreislinie liegen, sondern um diese herumpendeln. Da nach Gleichung (4) $\beta = 0$ ist, so berührt der Kreis die Abszissenaxe, und sein Mittelpunkt liegt auf der Ordinatenaxe. Die Seitenlängen des Summationsvektorenzuges sind gleich den Werten h (x, 0), h (x, 6), h (x, 12) ··· der Tabelle 6.

Summationsvektorenzug für die Beobachtungswerte y′ mit aperiodischen Bestandteilen:

Nach Seite 48 hatten wir erhalten: Amplitude c = 9,3; $\alpha - x = 12{,}34^g$. Der Radius des Hauptvektorenzuges ist somit

$$R' = \frac{9{,}3}{12{,}34^{g} \cdot 6} = 7{,}99$$

Aus Abb. 16 ersieht man, wie die Knickpunkte infolge des Einflusses der Störungsvektoren und vor allem der aperiodischen Bestandteile der Beobachtungswerte stark streuen. Immerhin ist ein gesetzmäßiger, kreisförmiger Verlauf des Summationsvektorenzuges unverkennbar. Die Lage des Mittelpunktes des Kreises ist aber auch verschoben infolge der aperiodischen Einflüsse.

Nicht nur aperiodische Bestandteile der Beobachtungswerte können das Bild des Summationsvektorenzuges stark verzerren, sondern auch *konstante* und *säkular wachsende* oder *abnehmende Bestandteile* der Beobachtungswerte, sowie *langwellige Periodizitäten*. Solche Bestandteile sollten daher vor Bildung der Summationsvektoren *ausgeschaltet* werden. Dies ist jedoch nur möglich, wenn diese Bestandteile selbst genügend genau bekannt sind. Vor der ersten Periodogrammanalyse des Abflußvorganges des Rheins bei Basel haben wir aber die säkulare Welle und die langperiodischen Wellen, welche wir dann gefunden haben, noch zu wenig genau gekannt, um sie eliminieren zu können. Die Durchmusterung des Materials mit Hilfe des Spektrums lieferte dazu noch zu wenig sichere Unterlagen. Die Phasendiagramme und Summationsvektorenzüge, die wir bei der ersten Analyse erhalten, werden deshalb noch besonders stark verzerrt sein, und die Periodizitäten können zuerst nur mit geringer Genauigkeit ermittelt werden, immerhin so genau, daß dann diejenigen Periodizitäten ausgeschaltet werden können, welche die Bestimmung *einer* bestimmten Welle durch einen zweiten Rechnungsgang stören könnten. Die zweite Analyse, verbunden mit einer weitgehenden Ausschaltung störender Einflüsse, wird dann genauere Resultate für die einzelnen Periodizitäten liefern.

Es können nicht ausgeschaltet werden die aperiodischen Bestandteile der Beobachtungswerte; ferner werden auch die kleinen, bei der Ausschaltung zurückgebliebenen Reste anderer Periodizitäten die zweite Berechnung *einer* bestimmten Periodizität noch störend beeinflussen. Insbesondere werden solche Einflüsse sich bei den Summationsvektorenzügen auswirken, da sie durch die Summierung vergrößert werden. Diese Störungen werden aber in bezug auf den Verlauf der Vektorenzüge kurzperiodischer Art sein, da für sie $\alpha - x$ groß ist, während die gesuchte Periode, deren Frequenz α von der Versuchsfrequenz x wenig verschieden ist, den langperiodischen Charakter des Vektorenzuges prägen wird.

E. *Die benützten wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungsmethoden*

1. Die Expektanz

Wir haben bereits im ersten Teil auf Seite 13 darauf hingewiesen, daß Periodizitäten durch das Spiel eines merkwürdigen Zufalles entstehen können und daß die Wahrscheinlichkeitstheorie die Mittel in die Hand gibt, um a priori zu berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit für das Zustandekommen einer Periodizität durch Zufall ist. Bei der Behandlung des in Tabelle 1 zusammengestellten Beispieles sind wir bereits auf eine durch Zufall entstandene Periodizität gestoßen und haben uns über dieselbe auf Seite 19 geäußert.

Ferner haben wir am Schlusse des ersten Teiles auf Seite 15 und im Abschnitt über «Unsymmetrische Verteilungskurven» auf Seite 22 erwähnt, daß bei der wahrscheinlichkeitstheoretischen Überprüfung der Realität einer Periodizität berücksichtigt werden muß:

a) eine Erhaltungstendenz der Beobachtungswerte, aus welchen die Periodizität ermittelt worden ist, und

b) eine unsymmetrische Verteilung der Häufigkeit dieser Beobachtungswerte in bezug auf ihre Größe.

Wir haben aber beigefügt, daß bei unseren Untersuchungen der *mehrjährigen Periodizitäten* der Abflußmengen des Rheins eine solche Berücksichtigung nicht nötig sein wird, indem die verwendeten Beobachtungswerte weder eine Erhaltungstendenz noch eine unsymmetrische Verteilung aufweisen. Wir können deshalb unsere nachfolgenden, auf Lit. 3 sich stützenden Darlegungen auf den *Fall beschränken, daß sich die Beobachtungswerte oder gegebenenfalls deren Abweichungen von ihrem arithmetischen Mittel wie eine Folge zufälliger, voneinander unabhängiger Fehler verhalten und sich infolgedessen nach dem Gauß'schen Fehlergesetz verteilen.*

Einerseits können die *Glieder* der *Reihe von äquidistanten Beobachtungswerten* (Abflußmengen), die wir unseren Berechnungen zugrunde legen werden und welche nacheinander in einer bestimmten zeitlichen Reihenfolge infolge eines Naturvorganges entstanden sind, als Individuen eines *Kollektivs* angesehen werden, wie dies z. B. bei der Aufstellung von Verteilungskurven getan wird (vgl. Seite 21). Bei einer solchen Verwandlung in ein Kollektiv werden die Beobachtungswerte aus ihrem naturbedingten, zeitlichen Zusammenhang herausgelöst.

Anderseits kann man aber die *Individuen eines statistischen Kollektivs*, für welche die Reihenfolge belanglos ist, willkürlich oder nach bestimmten Vorschriften numerieren, in der Reihenfolge der Nummern ordnen und so eine *Folge* herstellen, welche sich äußerlich von einer natürlichen Beobachtungsreihe nicht unterscheidet.

Im allgemeinen wird die Verwandlung einer natürlichen Beobachtungsreihe in ein Kollektiv mit der Zerstörung wichtiger Eigenschaften, z. B. von Periodizitäten, verbunden sein, der umgekehrte Prozeß der Verwandlung eines Kollektivs in eine *Folge* dagegen mit dem Aufbau fiktiver Eigenschaften, welche die Individuen als Kollektiv von Natur aus gar nicht besitzen. Nur dann werden diese beiden Verwandlungen die genannten Konsequenzen *nicht* haben, wenn es sich um eine Folge oder ein Kollektiv von Werten handelt, die von der Art zufälliger, voneinander unabhängiger Fehler sind. Solche Fehler bilden wohl eine *Folge*, da sie zu bestimmten Zeiten in einer bestimmten Reihenfolge festgestellt worden sind; trotzdem ist ihre Reihenfolge, da ihre Entstehung eine zufällige ist, ohne Belang. Sie dürfen also beliebig umnumeriert und auf diesem Wege in jeder möglichen Reihenfolge angeordnet wer-

den, wobei allerdings die Umnumerierung (Permutation) eine zufällige sein muß.

Bei der Durchführung aller dieser Permutationen können auch Reihenfolgen entstehen, welche einen *systematischen Gang* der Fehlerfolge zeigen, z. B. solche, in welchen eine Periodizität im Auftreten negativer und positiver Werte vorhanden ist. Jemand, der nicht wüßte, wie eine solche Folge entstanden ist, wäre geneigt, sie als einen systematischen periodischen Vorgang zu betrachten. In Wirklichkeit handelt es sich aber um das zu Beginn dieses Abschnittes erwähnte Spiel eines eigenartigen Zufalles und nicht um einen naturgesetzlichen Vorgang. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein solcher Zufall eintrifft, ist allerdings eine sehr kleine.

Wenn also eine Periodizität gefunden wird aus einer *Reihe von Beobachtungswerten, von welchen vorerst, bis zur Feststellung des Gegenteils angenommen werden darf, daß sie den Charakter zufälliger Fehler besitzen*, so muß geprüft werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Amplitude von der Größenordnung erwartet werden darf, wie sie die gefundene Periodizität aufweist. Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von *Amplituden bestimmter Größe* ist dabei gegeben durch das Verhältnis der Zahl aller Fälle, welche für das Entstehen solcher Amplituden günstig sind, zu der Gesamtzahl aller möglichen Fälle, in welchen Amplituden überhaupt entstehen. Wie groß diese Wahrscheinlichkeit ist, soll nun für den Fall einer Reihe von n äquidistanten Beobachtungswerten angegeben werden. Deren Abweichungen von ihrem *arithmetischen Mittel* seien:

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\cdots\ \lambda_i,\ \cdots\cdots\ \lambda_{n-1}$$

wobei, nach der gemachten Voraussetzung, gemäß Gleichungen 7 und 8 sei:

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \cdot e^{\frac{-\lambda^2}{2\,\sigma^2}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\,\lambda^2}{n-1}}$$

Aus *jeder*, unter Berücksichtigung des Verteilungsgesetzes $\varphi\,(\lambda)$ *möglichen Kombination der Werte* λ, seien nun nach den Gleichungen 24 berechnet worden die μ-ten Fourierkoeffizienten:

$$a_\mu = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot \cos x_\mu i \qquad x_\mu = \frac{2\,\pi}{n} \cdot \mu$$

(Versuchswelle = Fourierwelle des Analysenintervalles)

$$b_\mu = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot \sin x_\mu i$$

und die *Fourieramplitude*:

$$h_\mu = \sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2}$$

Es muß nun berechnet werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß diese Fourieramplitude numerische Werte von einer bestimmten Größe annimmt, d. h. es ist also das Verteilungsgesetz für h_μ aufzustellen.

Diese Berechnung, welche von *Stumpff* in Lit. I, 3 durchgeführt ist, ergibt das folgende, über das Gebiet $(0, +\infty)$ gültige Verteilungsgesetz:

$$\varphi^*(h_\mu) = \frac{n}{2\,\sigma^2}\, h_\mu\, e^{-\frac{n\,h_\mu^2}{4\,\sigma^2}}$$

Mit wachsender Amplitude h_μ nimmt nach diesem Gesetz die Häufigkeit $\varphi^*\,(h_\mu)$ zunächst bis zu einem Maximum zu und dann asymptotisch gegen Null ab. Ferner ist aus dem Gesetz ersichtlich, daß die Verteilung der Fourieramplituden nach ihrer Größe von der Versuchsfrequenz x_μ, also von der Ordnung μ unabhängig ist. Es kann also im folgenden der Index μ weggelassen werden.

Der quadratische Mittelwert aller möglichen Amplituden h wird als *Expektanz E* bezeichnet. Die Expektanz ergibt sich nach obiger Gleichung für φ^* (h)

$$\text{aus} \int_0^\infty h^2\,\varphi^*(h)\,dh$$

$$\text{zu } E = \frac{2\,\sigma}{\sqrt{n}} \tag{52}$$

Ferner ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich eine Fourieramplitude h ergibt, welche größer als eine bestimmte Zahl S ist, gleich

$$\int_S^\infty \varphi^*(h)\ dh = e^{-\frac{n\,S^2}{4\,\sigma^2}}$$

Benützt man als Maßstab für die Zahl S die Expektanz E, wird also gesetzt $S = s \cdot E$, so ergibt sich als Wahrscheinlichkeit für das Überschreiten der s-fachen Expektanz

$$w_s = e^{-s^2} \tag{53}$$

Die Gleichungen 52 und 53 sind erstmals von *A. Schuster* abgeleitet worden.

w_s ist also eine Funktion von s allein. Die Wahrscheinlichkeit, die Expektanz E um das 3-fache, bzw. 4-fache zu übertreffen, ist 0,000 123, bzw. 0,000 000 1, also bereits sehr klein (vgl. entsprechende Tabellen in Lit. 3 und 4). Wird also in einem konkreten Falle eine Fourieramplitude gefunden, welche 3- bis 4-fach so groß ist wie die Expektanz, so ist man berechtigt, dieses Ergebnis mit großer Wahrscheinlichkeit *nicht* als ein Zufallsprodukt zu betrachten (vgl. die Ausführungen auf Seite 22, rechts, über die in der Vermessungskunde übliche Konvention betreffend den «maximalen Fehler»).

2. Die Punktwolke

Im vorhergehenden Abschnitt wurden aus jeder Kombination der Werte $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_i, \cdots \lambda_{n-1}$, welche auf Grund des idealen Verteilungsnetzes der λ-Werte möglich ist, die Fourierkoeffizienten

$$a = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot \cos x\,i$$

$$b = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot \sin x\,i$$

berechnet und dann das Verteilungsgesetz für die Fourieramplitude angegeben. Es interessiert nun auch

die Verteilung der Punkte (a, b) in der Koordinatenebene mit der Abszissenaxe b und der Ordinatenaxe a. Das Gesetz für diese Verteilung lautet (vgl. Lit. 3):

$$\varphi^*(a,b) = \frac{n}{4\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{n[a^2+b^2]}{4\sigma^2}}$$

Dies ist die Gleichung einer glockenförmigen Rotationsfläche (vgl. Abb. 17a).

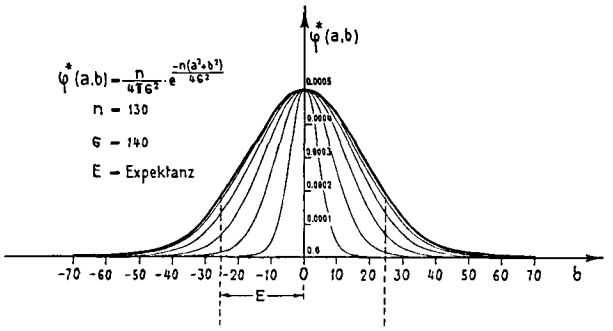


Abb. 17a. Verteilung der Fourierkoeffizienten a und b

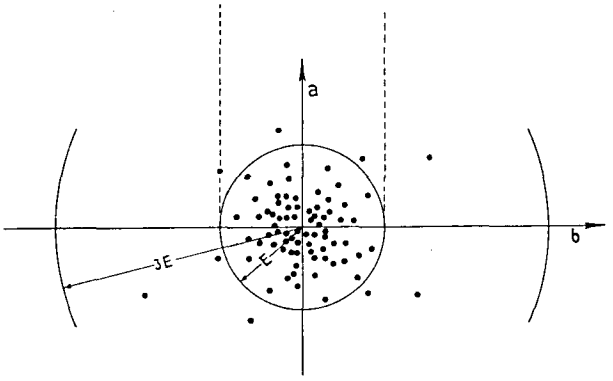


Abb. 17b. Verteilung von M = 80 Fourierkoeffizienten (a, b) auf Grund des Verteilungsgesetzes

$$\varphi^*(a,b) = \frac{n}{4\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{n[a^2+b^2]}{4\sigma^2}}$$

Haben wir eine endliche Zahl von Wertepaaren (a, b) aus M verschiedenen Kombinationen der n Werte berechnet und tragen die durch die zusammengehörigen Werte a und b definierten Punkte gemäß Abb. 17b in eine Koordinatenebene ein, so ergibt sich eine Menge von M Punkten, deren Dichte gemäß dem Verteilungsgesetz $\varphi^*(a,b)$ in der Nähe des Verteilungsmaximums, also des Koordinatennullpunktes, am größten ist und mit wachsender Entfernung vom Koordinatenanfang abnimmt.

Eine solche Zusammenstellung von (a, b)-Punkten ist von *J. Bartels* als «*Punktwolke*» bezeichnet worden.

Wir haben uns bisher vorgestellt, daß die M Punkte entstanden seien, indem man aus den n Beobachtungswerten $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_{n-1}$ durch Umordnung der Einzelwerte M verschiedene Kombinationen gebildet und aus jeder dieser Kombinationen die Werte a und b berechnet habe. Wir können uns nun auch vorstellen, daß diese M Kombinationen der Beobachtungswerte λ sukzessive aneinandergereiht werden, wodurch eine Reihe von $M \cdot n$ Beobachtungswerten entsteht. Die M Wertepaare a und b kann man sich also auch so entstanden denken, daß diese Beobachtungsreihe in M Intervalle zu je n Beobachtungswerten λ unterteilt wird und für jedes Intervall die Fourierkoeffizienten a und b berechnet werden.

Entsteht also eine Punktwolke auf diese Weise durch die Analyse von M Intervallen zu je n Werten λ von der Art zufälliger Fehler, so wird sie sich radial-symmetrisch um den Nullpunkt des Koordinatensystems anordnen. Die mittlere Entfernung oder der mittlere «Radius» dieser Punktwolke ist gleich dem quadratischen Mittelwert der Amplituden, ist also nach Gleichung 52 gleich der *Expektanz*

$$E = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

Nach den Ausführungen auf Seite 55, rechts, ergibt sich ferner, daß zufällige Punkte der Wolke außerhalb eines Kreises, dessen Radius gleich dem 3-fachen, bzw. 4-fachen Expektanzwert ist, sehr selten, bzw. so gut wie gar nicht vorkommen, wie dies auch in Abb. 17b zum Ausdruck kommt.

Aus der Gleichung für die Expektanz ergibt sich ferner, daß der mittlere Radius (es kann auch ein durchschnittlicher oder wahrscheinlicher eingeführt werden) der Punktwolke mit wachsendem n wie $\frac{1}{\sqrt{n}}$ abnimmt. Wird also die Anzahl der zur Berechnung jedes Wertpaares (a, b) benutzten Werte λ durch Hinzufügung weiterer *zufälliger* Glieder fortlaufend erhöht, so schrumpft die Punktwolke immer mehr um den Koordinatennullpunkt zusammen. Entsteht bei diesem Vorgang ein Schrumpfungszentrum, welches außerhalb des Koordinatennullpunktes liegt, so ist dies das sicherste Zeichen dafür, daß die statistischen Eigenschaften der Punktmenge von den vorausgesetzten wesentlich verschieden sind.

Ein solches Schrumpfungszentrum außerhalb des Koordinatenanfanges wird in folgendem Falle entstehen: Es liege eine sehr lange Reihe von Beobachtungswerten vor, von denen man vorerst annehmen muß, daß sie den Charakter zufälliger Fehler haben. Die Beobachtungsreihe enthalte jedoch eine, unter großen aperiodischen Bestandteilen verborgene Periodizität in Gestalt einer reinen Sinuswelle mit einer Periode p (vgl. fingiertes Beispiel der Tabelle 1). Es werde nun die Beobachtungsreihe in Analysenintervalle von der Länge $n = \varrho \cdot p$ (ϱ = ganze Zahl) zerlegt und für jedes dieser Intervalle mit der Versuchswelle $x = \frac{2\pi}{n} \cdot \varrho = \frac{2\pi}{p}$ analysiert (Berechnung der Welle ϱ-ter Ordnung). Die entstehenden Periodogrammvektoren setzen sich dann aus einem *konstanten* Vektor, welcher vom periodischen Bestandteil der Beobachtungswerte herrührt, und einem *zufälligen* Vektor, der dem obigen Verteilungsgesetz für die Periodogrammkomponenten unterworfen ist, zusammen. Trägt man also die berechneten Periodogrammkomponenten (a, b) in ein ebenes, rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so wird eine Punktwolke von normalen Verteilungseigenschaften entstehen, deren Schwerpunkt (Schrumpfungszentrum) jedoch nicht mehr mit dem Koordinatennullpunkt zusammenfällt, sondern mit dem Endpunkt des *konstanten* Vektors. Die Polarkoordinaten dieses Schrumpfungszentrums liefern direkt Amplitude und Phase der verborgenen, persistenten Periodizität mit der Wellenlänge p.

Die Beobachtungsreihe sei so lang, daß aus ihr M Intervalle von der Länge $n = \varrho \cdot p$ gebildet werden können, sie umfasse also insgesamt $M \cdot n = M \cdot \varrho \cdot p$

Beobachtungswerte. Die Punktwolke wird also aus M Punkten bestehen, deren *Mittelpunkt (Schrumpfungszentrum)* bestimmt werde. Die Koordinaten des Schrumpfungszentrums sind:

$$\bar{a} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} a_i \qquad \bar{b} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} b_i$$

und die Fourieramplitude ist:

$$\bar{h} = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}$$

Dieses Resultat würde man auch erhalten, wenn der gesamte Bereich von $M \cdot \varrho \cdot p$ Beobachtungswerten als einziges Analysenintervall nach der Fourierwelle von der Ordnung $M \cdot \varrho$ analysiert würde; denn es ist

$$x = \frac{2\pi}{n} \cdot \varrho = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{M \cdot \varrho \cdot p} \cdot M \cdot \varrho$$

Die Expektanz für die ganze Beobachtungsreihe, mit der Streuung (mittlerer Fehler) σ ist:

$$E = \frac{2\sigma}{\sqrt{M\,n}}$$

Nehmen wir als Kriterium an, daß die Realität einer Periode gegeben sei, wenn deren Fourieramplitude größer als der dreifache Betrag der Expektanz ist, so wird also die verborgene Periodizität als reell betrachtet werden können, wenn das Schrumpfungszentrum der Punktwolke außerhalb eines Kreises liegt, welcher mit dem Radius

$$\frac{6\sigma}{\sqrt{M\,n}}$$

um den Nullpunkt des Koordinatensystems gezogen wird.

III. TEIL

Berechnung der mehrjährigen Periodizitäten der Abflußmengen des Rheins bei Basel

A. *Hydrographische Unterlagen*

1. Die Bestimmung der Abflußmengen

a) Allgemeines über das Einzugsgebiet

Die hydrographische Unterlage für unsere Untersuchungen bilden die Abflußmengen des Rheins durch das Pegelprofil bei der *Schifflände* in Basel. Die Abflußverhältnisse des Rheins an dieser Stelle sind vom Eidg. Amt für Wasserwirtschaft gründlich untersucht und abgeklärt worden. Diese verdienstvolle Arbeit wurde unter der Leitung des damaligen Sektionschefs für Hydrographie, Ing. C. Ghezzi, durchgeführt und als Mitteilung Nr. 19 des Amtes für Wasserwirtschaft veröffentlicht (Lit. 39). Eine kurze Darstellung des Eidg. Amtes für Wasserwirtschaft über die Hydrographie des Rheins bei Basel findet sich in Nr. 4/5 der Rheinquellen, 1939. Bis zum Einstau des Pegels Schifflände durch das Kraftwerk Kembs wurden die Abflußmengen in Basel selbst gemessen. Seither ist die offizielle Pegel- und Wassermeßstation bei *Rheinfelden*; die Ergebnisse von Rheinfelden konnten aber, wie noch erwähnt wird, einwandfrei auf Basel umgerechnet werden.

Das Einzugsgebiet des Rheins beim Pegel Schifflände beträgt 35 929 km². Der schweizerische Anteil an diesem Einzugsgebiet macht rund zwei Drittel der Gesamtfläche der Schweiz aus. *Gletscher- und Firnoberflächen* beanspruchen 663 km², also 1,8% des Gesamteinzugsgebietes. Die *Seen* im Einzugsgebiete nehmen eine Fläche von 1239 km² ein, ihr Anteil beträgt somit 3,4%. Ihre ausgleichende Wirkung im Laufe eines Jahres ist von großer Bedeutung. Auf die mehrjährigen Schwankungen des Abflusses haben jedoch die Seen keinen beachtenswerten Einfluß. Die gesamte durchschnittliche jährliche Wasserfracht des Rheins beläuft sich nämlich auf rund 32 400 Millionen m³, was bei der genannten gesamten Seeoberfläche einer jährlichen Seespiegelschwankung von rund 26 m entsprechen würde. Die vorkommenden Differenzen zwischen den Seespiegeln zu Beginn und nach Ablauf eines Jahres im Betrage von einigen Dezimetern sind gegenüber diesem Betrage von 26 m verschwindend klein. Daraus ist ohne weiteres erkennbar, daß auch die Wassermenge, welche durch die Wirkung der Seen von einem Jahr zum andern verschoben werden kann, verschwindend klein ist gegenüber dem Gesamtabfluß.

b) Beobachtung der Wasserstände und Messung der Abflußmengen

Der Pegel bei der Schifflände besteht seit dem 12. März 1808. Seit diesem Tage liegen regelmäßige Pegelbeobachtungen vor. Im Dezember 1868 wurde der Pegel durch einen Limnigraphen ergänzt. Vor 1868 wurde der Pegel zuerst nur einmal und dann dreimal täglich abgelesen. Dies würde zu einer genaueren Bestimmung der täglichen mittleren Abflußmengen nicht genügen; denn einmal haftet natürlich schon der Pegelablesung ein zufälliger Ablesefehler an, und dann kann durch eine einzige Ablesung die Tagesschwankung nicht genau genug erfaßt werden. Bei der Berechnung der mittleren jährlichen Abflußmenge tritt aber bei der Mittelbildung ein Ausgleich ein, und das Jahresmittel wird genau genug erhalten. Es wurde dies anhand eines beliebig ausgewählten Jahres überprüft, von welchem Limnigraphenaufzeichnungen und nebst denselben noch tägliche Pegelablesungen (einmal pro Tag) vorliegen. Das aus den täglichen Pegelablesungen berechnete Jahresmittel weicht um rund 1‰ vom Werte ab, der sich aus den Limnigraphenaufzeichnungen ergab. Die Monatsmittel, welche sich auf Grund der täglichen Pegelablesungen ergaben, weichen im Durchschnitt rund 1% und im Maximum rund 4% von denjenigen ab, die aus den Limnigraphenaufzeichnungen ermittelt wurden.

Der *Nullpunkt* des Pegels Schifflände liegt auf der Kote 243,91 (neuer schweizerischer Horizont R.P.N. 373,60 m).

Die erste *Wassermessung* des Rheins bei Basel fand im Jahre 1867 statt. Nachher folgten in Zeitabständen von mehreren Jahren weitere Messungen, und seit 1914 bis 1932 (Einstau durch das Kraftwerk Kembs) regelmäßig jedes Jahr mehrmalige Messungen. Seit dem Einstau des Pegels durch das Kraftwerk Kembs werden die Messungen beim Pegel und Limnigraphen Rheinfelden durchgeführt. Neuerdings werden wiederum auch Abflußmengenbestimmungen in Basel vorgenommen. Wegen des Einstaues durch das Kraftwerk Kembs genügt aber dazu *eine* Limnigraphenstation nicht mehr, sondern es müssen zwei Limnigraphenstationen benützt werden; denn die Beziehung zwischen Wasserstand und Abflußmenge kann wegen der wechselnden Stauhöhe nicht mehr durch *eine* Abflußmengenkurve dargestellt werden, es muß vielmehr eine Kurvenschar mit dem Gefälle als Parameter verwendet werden. Die Ergebnisse dieser neuesten Messungen in Basel sind in vorliegender Arbeit nicht verwendet worden, weil noch zu wenig Erfahrungen über die Genauigkeit dieser Messungen vorliegen und die Station bei Rheinfelden weiterbetrieben worden ist.

Da die *Sohle des Rheins bei Basel* einer beträchtlichen und fortwährenden *Vertiefung* unterworfen war, so

besteht keine Beziehung zwischen Pegelstand und Abflußmenge (Abflußmengenkurve), welche für die ganze Beobachtungsdauer seit 1808 einheitlich gültig wäre. Diese Beziehung war vielmehr ständigen Änderungen unterworfen. Seitdem regelmäßige Wassermessungen vorliegen, konnte sie fortwährend, entsprechend der eingetretenen Vertiefung neu aufgestellt werden. Für die früheren Jahre mußte zur Bestimmung der Abflußmengen die Pegelstation Säckingen zu Hilfe genommen werden.

Die Pegelstation Säckingen befindet sich rund 37 km rheinaufwärts der Schifflände und hat ein Einzugsgebiet von 34 298 km². Pegelbeobachtungen bei Säckingen liegen seit dem Jahre 1819 vor. Der Pegel steht in einem geschlossenen, beiderseits hochwasserfrei begrenzten Profil 15 m oberhalb der Brückenaxe. Die Sohle besteht dort zum größten Teil aus Buntsandstein; ca. 150 m unterhalb der Brücke liegt mitten im Rhein eine bewachsene Kiesbank mit altem Baumbestand, was darauf hindeutet, daß sie nur geringfügige Änderungen im Laufe der Zeit erfahren haben dürfte. Bei Wallbach, rund 5 km unterhalb des Pegels Säckingen, fließt der Rhein durch einen Felsriegel, und auf der ganzen Strecke zwischen Wallbach bis rund 100 m oberhalb des Pegels Säckingen finden sich Vorkommen von anstehendem Fels (Buntsandstein und Rotliegendes). Wegen dieser auf einer längern Strecke vorhandenen felsigen Beschaffenheit der Sohle ist in Säckingen nur mit kleinen Änderungen der Beziehung zwischen Pegelstand und Abflußmenge zu rechnen. Aus einem Vergleich der Pegelbeobachtungen in Basel mit denjenigen in Säckingen konnte somit ermittelt werden, in welcher Weise sich die Wasserstände in Basel infolge der dortigen Sohlenvertiefung in Funktion der Zeit gesenkt haben. Es wurden die Senkungen bezogen auf den Zustand Juni 1910 berechnet. Diese Senkungen sind also gleich den Korrekturen, welche an den vor 1910 gemachten Pegelbeobachtungen in Basel anzubringen sind, um aus diesen mit Hilfe der von 1910 bis 1916 gültigen Abflußmengenkurve die Abflußmengen zu berechnen. Dabei wurden auch die Ergebnisse der *Wassermessungen* berücksichtigt, welche seit 1867 in Basel durchgeführt worden sind, indem für die Zeitabschnitte, in denen diese Wassermessungen stattfanden, der vertikale Abstand zwischen der betreffenden Abflußmengenkurve (1867, 1889, 1896, 1908) und der Abflußmengenkurve 1910 bis 1916 gleich der Senkung, bzw. Korrektur der Pegelstände ist.

Die sich aus dem Vergleich der Pegelstände Basel mit jenen in Säckingen ergebenden Korrekturen und jene, welche auf Grund der Wassermessungen erhalten wurden, stimmen für die Zeit vor 1896 gut miteinander überein. Für die Jahre 1896 bis 1910 ergaben sich kleinere Differenzen, welche zeigen, daß in diesem Zeitabschnitt die Beziehung zwischen Pegelstand und Abflußmenge auch in Säckingen kleinere Veränderungen erfahren haben muß (lokale Änderungen derjenigen Tiefen des Flußbettes, welche aus Kies bestehen). Es wurden daher für diesen Zeitabschnitt nur die auf Grund der Wassermessungen erhaltenen Korrekturen verwendet.

Wir haben nun geprüft, ob die Berechnung der Abflußmengen unter Verwendung der Pegelbeobachtungen in Säckingen hätte Anlaß zu Fehlern geben können, welche auf Periodizitäten im Abflußvorgang von Einfluß wären. Dies ist nicht der Fall, nur bei der gefundenen säkularen Schwankung könnte ein solcher Einfluß möglich sein. Ein positiver Anhaltspunkt über deren Beeinflussung wurde jedoch nicht festgestellt. Sollte aber Säckingen größere Änderungen des Pegelprofils erlitten haben, als man anzunehmen berechtigt ist, so wäre dies von Einfluß nur auf die festgestellte Amplitude der säkularen Schwankung, dagegen für die Voraussage des Abflußcharakters auf Grund der gefundenen Periodizitäten ohne Bedeutung.

Seit dem Einstau des Pegels Schifflände durch das Kraftwerk Kembs werden, wie bereits erwähnt, die Abflußmengen des Rheins *bei Rheinfelden*, 18,5 km rheinaufwärts von der Schifflände, bestimmt (Einzugsgebiet bei Rheinfelden: 34 550 km²). Mit Hilfe einer vom Verfasser aufgestellten Formel des Amtes für Wasserwirtschaft kann jedoch die Abflußmenge des Rheins bei der Schifflände Basel genügend genau aus jener bei Rheinfelden berechnet werden, und zwar unter Berücksichtigung des Zwischeneinzugsgebietes. Das gesamte Zwischeneinzugsgebiet umfaßt 1379 km², wovon 1172 km² durch die Wassermeßstationen bei Liestal (Ergolz) und Münchenstein (Birs) direkt erfaßt werden, so daß eine rechnerische Ermittlung auf Grund des spezifischen Abflusses (aus demjenigen der Birs und Ergolz berechnet) nur noch für 207 km² nötig ist.

2. Berechnung der mittleren jährlichen Abflußmenge

Von 1808 bis 1868 wurde der Pegel Schifflände, wie bereits gesagt, zuerst nur einmal, dann dreimal täglich beobachtet. Ferner fehlen für diesen Zeitabschnitt direkte Wassermessungen vollständig. Es wurde infolgedessen darauf verzichtet, für diesen Zeitabschnitt die Tagesmittel der Abflußmengen zu berechnen, und es hatte keinen Sinn, zur Berechnung der Monats- und Jahresmittel der Abflußmengen ein übertrieben genaues Verfahren anzuwenden. Die Monatsmittel der Abflußmengen wurden deshalb aus den mittleren monatlichen Pegelständen berechnet. Die auf diese Weise berechneten Monatsmittel und die daraus abgeleiteten Jahresmittel der Abflußmengen fallen systematisch zu klein aus. Aus einer in Lit. 39 angestellten Untersuchung geht hervor, daß die Differenz im Durchschnitt nur etwa 0,7% des Jahresmittels beträgt. Diese Differenz ist für die Ermittlung der Periodizitäten ohne Belang. Ihre Berücksichtigung kann auch in bezug auf die säkulare Schwankung unterbleiben, da deren Amplitude wegen der Fehler, welche infolge der oben erwähnten Korrektur der Pegelstände möglich sind, ohnehin nur angenähert bestimmt werden kann.

Seit 1. Januar 1869 wurde für jeden Tag die mittlere Abflußmenge bestimmt und daraus das Monats- und Jahresmittel berechnet. Die Jahresmittel sind für die Jahre 1808 bis 1944 auf Tafel I, oben, tabellarisch und auf Tafel XIX graphisch zusammengestellt.

3. Berechnung der mittleren vierteljährlichen Abflußmengen unter Ausschaltung der jährlichen Periode

a) Allgemeines

Wir werden eine Periodizität finden, deren Wellenlänge, welche sich von Zeit zu Zeit ändert, Werte

zwischen rund 4–5,5 Jahren annehmen kann. Der Verlauf der Welle innerhalb eines Jahres darf infolgedessen für genauere Berechnungen nicht mehr als geradlinig angenommen werden, wie dies bei längern Wellen statthaft ist. Bei der Berechnung der mittleren jährlichen Abflußmenge wird somit nicht nur, wie erwünscht, die jährliche Periode (Jahresgang) ausgeschaltet (vgl. Seite 16), sondern es werden auch in wesentlicher Weise Eigenschaften der oben genannten rund 4–5,5-jährigen Periodizität beeinflußt. Für eine möglichst genaue Bestimmung dieser Periodizität ergeben also die mittleren jährlichen Abflußmengen eine zu wenig dichte Beobachtungsreihe. Wir mußten deshalb eine Beobachtungsreihe mit einer engeren Ordinatenfolge benützen und sind auf die Verwendung von mittleren vierteljährlichen Abflußmengen übergegangen.

Die *sehr ausgeprägte jährliche* Periode muß aber vorher bestimmt und die vierteljährlichen Abflußmengen müssen von ihr befreit werden.

Vor der Bestimmung der jährlichen Periode hatten wir uns Rechenschaft darüber zu geben, ob diese im Verlaufe der Jahre selbst systematische Veränderungen erlitten haben könnte, welche für unsere Untersuchungen von nennenswerter Bedeutung wären.

Die *wasserwirtschaftlichen* Veränderungen infolge des Rückhaltes von Wasser in Speicherbecken erfolgen nach einer jährlichen Ganglinie periodischer Art, welche eine Phasenverschiebung von rund 180° gegenüber der großen natürlichen Jahresschwankung aufweist. Die durch den Rückhalt von Wasser in Speicherbecken erzeugte Periodizität ist aber in bezug auf ihre Amplitude im Vergleich zu derjenigen der großen natürlichen Jahresperiode sehr klein; der Einfluß wird bei der Periodogrammanalyse unter Verwendung von vierteljährlichen Abflußmengen praktisch vollständig abgeblendet.

Es ist weiter die Frage abzuklären, ob die große natürliche Jahresperiode etwa systematischen zeitlichen Veränderungen *natürlicher* Art unterworfen sei. Es werden somit mehrere Zeitabschnitte zu untersuchen und miteinander zu vergleichen sein.

b) Bezeichnungen und Definitionen

MQ_j Jahresmittel = mittlere jährliche Abflußmenge eines Einzeljahres j.

MMQ Durchschnittliches Jahresmittel = durchschnittliche jährliche Abflußmenge einer Reihe von Jahren.

$mQ_{i,j}$ Monatsmittel = mittlere monatliche Abflußmenge eines bestimmten Monates i im Einzeljahr j.

mmQ_i Durchschnittliches Monatsmittel = durchschnittliche monatliche Abflußmenge eines bestimmten Monats i, berechnet als Durchschnitt für eine Reihe von Jahren.

$mQ^*_{r,}$ Mittlere vierteljährliche Abflußmenge oder Vierteljahresmittel = mittlere Abflußmenge während eines Vierteljahres r im Einzeljahr j.

mmQ^*_r Durchschnittliche, vierteljährliche Abflußmenge einer Jahresreihe oder durchschnittliches Vierteljahresmittel = durchschnittliche Abflußmenge während eines Vierteljahres r, berechnet als Durchschnitt der Einzelwerte einer Reihe von Jahren.

$mq_{i,j}$ Von der jährlichen Abflußperiode befreites Monatsmittel.

$mq^*_{r,j}$ Von der jährlichen Abflußperiode befreites Vierteljahresmittel.

$\Delta\, mmQ_i$ Schwankung der Monatsmittel $mQ_{i,j}$ infolge der jährlichen Abflußperiode.

$\Delta\, mmQ^*_r$ Schwankung der Vierteljahresmittel $mQ^*_{r,j}$ infolge der jährlichen Abflußperiode.

c) Ausschaltung der jährlichen Periode bei Monatsmitteln

$$MQ_j = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} mQ_{i,j}$$

Im Einzeljahre j schwanken die $mQ_{i,j}$ um den Wert MQ_j wie folgt:

$$\Delta\, mQ_{i,j} = mQ_{i,j} - MQ_j$$

Für eine Reihe von n Jahren ergibt sich die durchschnittliche Schwankung des Monatsmittels mmQ_i um das Jahresmittel MMQ, welche als *Schwankung infolge der jährlichen Periode* zu betrachten ist, zu

$$\Delta\, mmQ_i = mmQ_i - MMQ \qquad (54)$$

Dabei ist:

$$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} \Delta\, mmQ_i = 0$$

Das von der Schwankung infolge der jährlichen Periode befreite Monatsmittel in einem einzelnen Jahre j ergibt sich somit zu

$$mq_{i,j} = mQ_{i,j} - \Delta\, mmQ_i = mQ_{i,j} - [mmQ_i - MMQ]$$

dabei ist:

$$\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} mq_{i,j} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} mQ_{i,j} - \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} \Delta\, mmQ_i = MQ_j$$

d) Ausschaltung der jährlichen Periode bei Vierteljahresmitteln

Es ist:

$$mQ^*_{1,j} = \frac{mQ_{1,j} + mQ_{2,j} + mQ_{3,j}}{3}$$

$$mQ^*_{2,j} = \frac{mQ_{4,j} + mQ_{5,j} + mQ_{6,j}}{3}$$

usf.

Im Einzeljahr j schwanken die $mQ^*_{r,j}$ um den Wert MQ_i wie folgt:

$$\Delta\, mQ^*_{r,j} = mQ^*_{r,j} - MQ_j$$

Für eine Reihe von n Jahren ergibt sich die durchschnittliche Schwankung des Vierteljahresmittel mmQ^*_r um das Jahresmittel, welche als *Schwankung infolge der jährlichen Periode* zu betrachten ist zu

$$\Delta\, mmQ^*_r = mmQ^*_r - MMQ \qquad (55)$$

Das von der Schwankung infolge der jährlichen Periode befreite Vierteljahresmittel in einem einzelnen Jahre j ergibt sich somit zu:

$$m\,q^*_{r,j} = m\,Q^*_{r,j} - \Delta\, m\,m\,Q^*_r = m\,Q^*_{r,j} - [m\,m\,Q^*_r - M\,M\,Q] \qquad (56)$$

e) Ermittlung der Schwankung der Monats- und Vierteljahresmittel infolge der jährlichen Periode

Nach Gleichung 54 wurde die durchschnittliche Schwankung $\Delta\, m\,m\,Q$ in den verschiedenen Monaten für folgende Zeitabschnitte berechnet und miteinander verglichen:

1808–1925; 1808–1944; 1869–1925; 1901–1925; 1901–1944 und 1925–1944.

Es wurden keine systematischen Änderungen festgestellt. Für den Zeitabschnitt 1925–1944 hätte im Vergleich zu den andern Zeitabschnitten die größte Änderung infolge wasserwirtschaftlicher Maßnahme erwartet werden können. Der Vergleich der Zeitabschnitte 1925–1944 und 1901–1925 mit dem Zeitabschnitt 1808 bis 1925 ergibt jedoch zwischen den Zeitabschnitten 1808–1925 und 1925–1944 eine bessere Übereinstimmung als zwischen jenen von 1808–1925 und 1901–1925. Es hat sich ergeben, daß es in erster Linie nötig ist, alle vorhandenen Beobachtungen zu verwenden, um die jährliche Periode bestmöglichst zu erhalten. Natürliche oder künstliche zeitliche Änderungen dieser Periode, welche für unsere Untersuchungen von Bedeutung sein könnten, ließen sich nicht erkennen. Wir betrachten deshalb im folgenden die durchschnittliche Jahresganglinie für den Zeitabschnitt 1808–1944 als Normalform der großen *natürlichen Jahresperiode*, welche wir auszuschalten haben. In Abb. 18 sind die durchschnittlichen Monatsmittel $m\,m\,Q_i$ für den Zeitabschnitt 1808–1944 aufgetragen und durch eine Linie ausgeglichen worden. Diese Linie zeigt den Verlauf der durchschnittlichen Jahresganglinie. (Da wir sie nur mit Hilfe von Monatsmitteln konstruiert haben, so gibt sie kleinere Schwankungen des Verlaufes innerhalb der einzelnen Monate nicht wieder.)

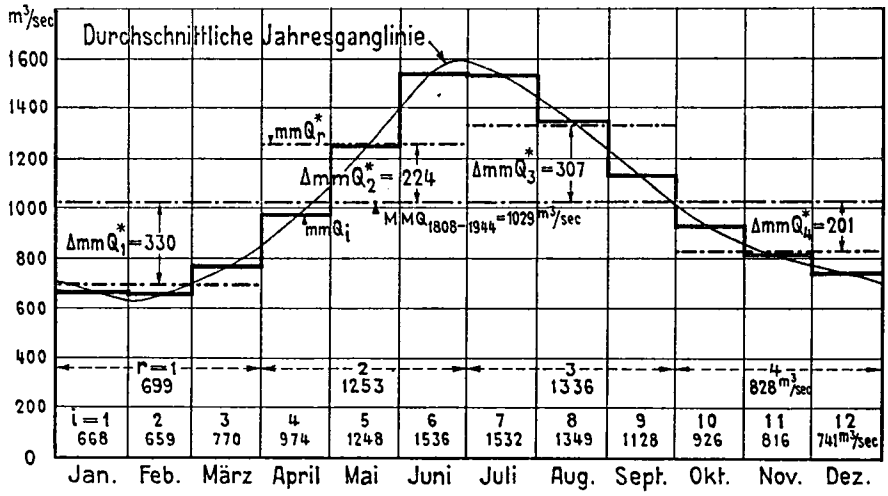


Abb. 18. Durchschnittliche Jahresganglinie, durchschnittliche Monatsmittel $m\,m\,Q_i$, durchschnittliche Vierteljahresmittel $m\,m\,Q_r^*$ und Schwankung $\Delta\, m\,m\,Q_r^*$ der Vierteljahresmittel infolge der Jahresperiode für den Zeitabschnitt 1808–1944

Aus den durchschnittlichen Monatsmitteln $m\,m\,Q_i$ wurden dann die durchschnittlichen Vierteljahresmittel $m\,m\,Q_r^*$ berechnet und ebenfalls in Abb. 18 eingetragen. Der Unterschied dieser Werte gegenüber dem durchschnittlichen Jahresmittel stellt dann gemäß Gleichung 55 die Schwankung $\Delta\, m\,m\,Q^*$ der Vierteljahresmittel infolge der jährlichen Abflußperiode dar. Die Werte $\Delta\, m\,m\,Q^*$ für die verschiedenen Vierteljahre sind in Tabelle 9 zusammengestellt.

Vierteljahr	$\Delta\, m\,m\,Q^*$
	m³/sec
1. Vierteljahr (Jan., Febr., März)	−330
2. Vierteljahr (April, Mai, Juni)	+224
3. Vierteljahr (Juli, Aug., Sept.)	+307
4. Vierteljahr (Okt., Nov., Dez.)	−201

Tabelle 9
Schwankungen der Vierteljahresmittel infolge der jährlichen Abflußperiode

Um also die einjährige Periode auszuschalten, müssen wir nach Gleichung 56 die effektiv festgestellten Vierteljahresmittel (vgl. Kolonne 2 von Tafel IV) im ersten Vierteljahr um 330 m³/sec und im vierten Vierteljahre um 201 m³/sec vergrößern, dagegen im zweiten Vierteljahr um 224 m³/sec und im dritten Vierteljahre um 307 m³/sec verkleinern. Die auf diese Weise berechneten Werte $m\,q^*_{r,j}$ sind für die Jahre 1888 bis 1944 in Kolonne 3 der Tafel IV aufgeführt und auf Tafel XX graphisch dargestellt. Die Berechnung der Werte $m\,q^*_{r,j}$ war gemäß den Ausführungen auf Seite 60 (Abschnitt III A, 3, a) nötig für die Berechnung der rund 4–5,5-jährigen Periodizität p_5 (vgl. auch Seiten 63, rechts, und 93, links).

B. *Morphologische Untersuchungen*

I. Streuung und Verteilung der mittleren jährlichen, sowie der mittleren vierteljährlichen Abflußmengen des Rheins bei Basel

1. Streuung und Verteilung der mittleren jährlichen Abflußmengen MQ *um ihren Durchschnittswert* MMQ *für die Jahresreihe 1808–1943*

Die zeitraubenden Berechnungen zur Ermittlung des Verteilungsgesetzes der Abweichungen der mittleren jährlichen Abflußmengen von ihrem Durchschnittswert sind bereits im Jahre 1944 durchgeführt worden, das Jahr 1944 selbst konnte deshalb nicht mehr berücksichtigt werden. Dagegen war die Berücksichtigung des Jahres 1944 bei den Berechnungen betreffend die Verteilung der Vierteljahresmittel möglich, weil diese Berechnungen erst im Jahre 1945 durchgeführt worden sind.

Es sind berechnet worden:

die durchschnittlichen jährlichen Abflußmengen MMQ je der Jahresreihen 1808–1928, 1929–1943 und 1808–1943, sowie

nach Gleichung 8 die Streuung σ der mittleren jährlichen Abflußmenge Q um die durchschnittliche jährliche Abflußmenge MMQ der genannten Jahresreihe.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 10 zusammengestellt:

Jahresreihe und Anzahl n der Jahre	1808–1928 n = 121	1929–1943 n = 15	1808–1943 n = 136
Durchschnittliche jährliche Abflußmenge MMQ	1024 m^3/sec	1069 m^3/sec	1029 m^3/sec
Streuung $\sigma = \sqrt{\frac{\sum[MQ - MMQ]^2}{n-1}}$	$\pm$ 160 m^3/sec	$\pm$ 196 m^3/sec	$\pm$ 164 m^3/sec

Tabelle 10

Hierauf wurde noch speziell für die Jahresreihe 1808 bis 1943 die Verteilung der mittleren jährlichen Abflußmengen MQ um ihren durchschnittlichen Wert MMQ = 1029 m^3/sec bestimmt. Für die Auszählung der Häufigkeit wurde eine Klassenbreite von 100 m^3/sec gewählt. Die Zahl z der in die einzelnen Klassen fallenden Werte ist in Abb. 19 graphisch dargestellt worden. Die Auftragung der Anzahl z von Einzelwerten als Ordinate erfolgte nicht schematisch über dem Abszissenwert, welcher der Klassenmitte entspricht; es wurde vielmehr auch die durchschnittliche Abweichung der betreffenden Klasse vom Werte MMQ berechnet und die Anzahl z der Einzelwerte über jener Abszisse aufgetragen, welche dieser durchschnittlichen Abweichung der Klassenwerte entspricht.

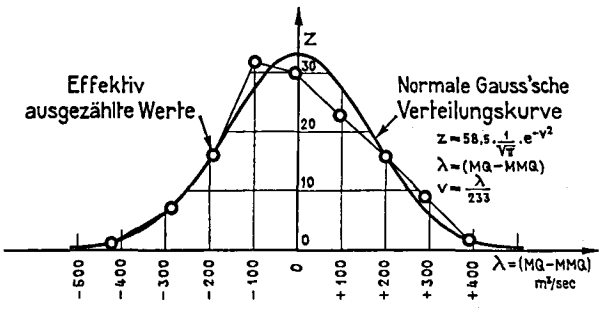


Abb. 19. Verteilung der Abweichungen der mittleren jährlichen Abflußmengen MQ von ihrem Durchschnittswert MMQ für die Jahresreihe 1808–1943

Zum Vergleich wurde weiter die normale Gauß'sche Verteilungskurve nach Gleichung 10 berechnet, wobei hier bedeuten:

λ = (MQ – MMQ);
z = Anzahl der Klassenwerte;
ΔQ = 100 die Klassenbreite;
n = 136 die Anzahl Jahre und
$\sigma = \pm$ 164 die Streuung.

Wenn diese Werte in Gleichung 10 eingesetzt werden, ergibt sich:

$$z = 58{,}5 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-v^2}$$

wobei nach Gleichung 11 $\lambda = 233 \cdot v$ ist.

Die ausgezählten Werte entsprechen in ihrer Lage relativ gut der Gauß'schen Glockenkurve, insbesondere für größere Abweichungen λ. Die Abweichungen der mittleren jährlichen Abflußmengen MQ von ihrem langjährigen Durchschnittswert MMQ sind also in bezug auf ihre Häufigkeit angenähert nach dem Gaußschen Fehlergesetz verteilt. Das zeigt sich auch darin, daß die ebenfalls berechnete durchschnittliche Abweichung aller Einzelwerte δ = 128 recht gut mit dem theoretischen Wert übereinstimmt, welcher sich aus der Streuung σ nach der bekannten Beziehung $\delta = \sigma \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ zu δ = 131 ergibt.

2. Streuung und Verteilung der mittleren jährlichen Abflußmengen MQ *um die säkulare Ganglinie für die Jahre 1808–1943*

Der ermittelten säkularen Ganglinie*) (vgl. Tafel XIX) wurden die Werte Q'_j entnommen, welche den einzelnen Jahren mit den mittleren Abflußmengen MQ entsprechen, und es wurde für jedes Jahr die Differenz $MQ - Q'_j$ gebildet. Aus diesen Differenzen wurden die Streuungen

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum[MQ - Q'_j]^2}{n-1}}$$

für verschiedene Zeitabschnitte berechnet, wie aus Tabelle 11 hervorgeht.

Zeitabschnitt	Anzahl Jahre n	Streuung σ in m^3/sec
1808–1830	23	166
1831–1853	23	143
1854–1876	23	170
1877–1899	23	157
1900–1922	23	171
1921–1943	23	206
1876–1909	34	140
1910–1943	34	196
1808–1943	136	162

Tabelle 11
Streuung der mittleren jährlichen Abflußmengen um die säkulare Ganglinie

Dann wurde noch speziell für die Jahresreihe 1808 bis 1943 die Verteilung der mittleren jährlichen Abflußmengen um die säkulare Ganglinie bestimmt, auf analoge Weise wie in vorigem Abschnitt ergeben sich die ausgezählten Werte der Abb. 20 und die dort eingetragene Glockenkurve, deren Gleichung lautet:

$$z = 59{,}3 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-v^2} \quad \text{mit } \lambda = 229 \cdot v$$

Aus Abb. 20 geht hervor, daß die Abweichungen der mittleren jährlichen Abflußmengen MQ von der säkularen Ganglinie sich in bezug auf ihre Häufigkeit sehr gut nach dem Gauß'schen Fehlergesetz verteilen.

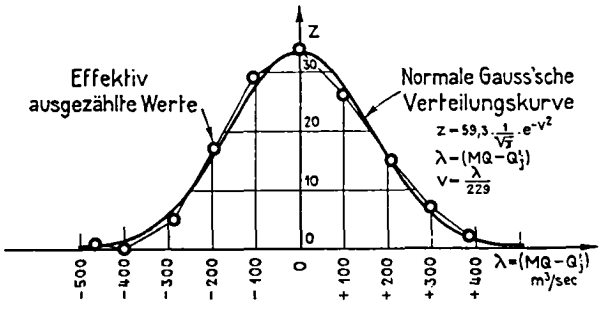


Abb. 20. Verteilung der Abweichungen der mittleren jährlichen Abflußmengen MQ von den Werten Q'_j der säkularen Ganglinie für die Jahre 1808–1943

3. Streuung und Verteilung der mittleren vierteljährlichen Abflußmengen um die säkulare Ganglinie

Untersucht wurden die 57 Jahre des Zeitabschnittes 1888–1944.

Der säkularen Ganglinie (Welle p_{120}) wurden die Werte Q'_r entnommen, welche den einzelnen Vierteljahren mit der von der Jahresperiode befreiten mittleren Abflußmenge mq* entsprechen (vgl. Tafel XX). Dann wurde für jedes Vierteljahr die Differenz $mq^* - Q'_r$ gebildet, und aus diesen Differenzen wurde berechnet die Streuung

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum[mq^* - Q'_r]^2}{228-1}} = 235$$

Die Verteilung der mittleren vierteljährlichen Abflußmengen um die säkulare Welle geht aus Abb. 21 hervor. Auch hier ergibt sich eine angenäherte Verteilung nach einer Gauß'schen Glockenkurve, deren Gleichung lautet:

$$z = 34{,}3 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-v^2} \quad \text{mit } \lambda = 332 \cdot v$$

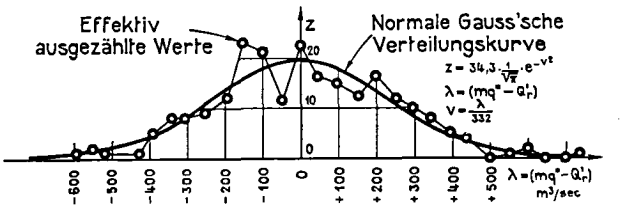


Abb. 21. Verteilung der Abweichungen der mittleren vierteljährlichen Abflußmengen mq* (nach Ausschaltung des Jahresganges) von den Werten Q'_r der säkularen Ganglinie

4. Verteilung der mittleren vierteljährlichen Abflußmengen nach Ausschaltung der einjährigen Periode, des säkularen Ganges, sowie der Periodizitäten p_6 *bis* p_{30}

Zur genaueren Berechnung der bereits auf Seite 60 erwähnten rund 4–5,5-jährigen Periodizität (kurz Welle p_5 genannt) auf Grund der Vierteljahresmittel der Abflußmengen, haben wir diese Vierteljahresmittel nicht nur von der einjährigen Periodizität befreit, sondern wir haben auch alle andern gefundenen Periodizitäten p_6 bis p_{30} mit den Nominalwellenlängen von 6, 7, 9, 12 und 30 Jahren, sowie den säkularen Gang ausgeschaltet. Die Berechnung ist nach Tafel IV so durchgeführt worden, daß von den Beträgen mq* abgezogen wurden die Beträge $Q'_r + \Sigma y\,(6 \div 30)$, wobei $Q'_r + \Sigma y\,(6 \div 30)$ die Summe der mittleren Ausschläge der säkularen Welle und der Wellen p_6 bis p_{30} während eines bestimmten Vierteljahres bedeutet. Diese mittleren Ausschläge wurden graphischen Auftragungen der betreffenden Wellen in genügend großem Zeitmaßstab entnommen (Tafel XX). Die Differenzen

$$d_5 = mq^* - [Q'_r + \Sigma y\,(6 \div 30)]$$

enthalten also, außer den aperiodischen Bestandteilen und allfälligen noch unbekannten kurzwelligen Periodizi-

*) Als Werte der säkularen Ganglinie, welche wir auch als säkulare Welle p_{120} bezeichnen, sind im folgenden nicht nur die um eine Nullage schwankenden Werte, sondern diese schwankenden Werte plus das konstante Glied, welches der Nullage entspricht, zu verstehen. Es sind also die Abflußmengen, welche wir erhalten, nachdem alle anderen Periodizitäten weggeglättet worden sind.

täten, von den gefundenen Periodizitäten nur noch die oben genannte 4–5,5-jährige Periodizität p_5. Für diese neue «Beobachtungsreihe», welche als Unterlage für die genauere Berechnung der Periodizität p_5 dient, ist auch die Streuung der Werte d_5 um ihr arithmetisches Mittel, sowie die Verteilung der Werte d_5 um dieses arithmetische Mittel berechnet worden. Es ergab sich für den 57-jährigen Zeitabschnitt von 1888–1944:

Arithmetisches Mittel der Werte d_5: $2{,}14 \approx 2$ m³/sec.

Streuung der d_5 um das arithmetische Mittel: $\sigma = \pm 225$ m³/sec;

Verteilung der d_5 um das arithmetische Mittel entspricht angenähert einer normalen Gauß'schen Verteilung (Annäherung der ausgezählten Werte an die theoretischen Werte etwa gleich wie in Abb. 21).

5. *Verteilung der mittleren jährlichen Abflußmengen nach jeweiliger Ausschaltung mehrerer Periodizitäten zwecks genauerer Berechnung einer einzelnen Periodizität*

Im folgenden werden zur Abkürzung die gefundenen Periodizitäten (Wellen) mit den Nominalwellenlängen von 5, 6, 7, 9, 12, 30 und 120 Jahren nur noch bezeichnet mit p_5, p_6, p_7, p_9, p_{12}, p_{30} und p_{120}.

Da verschiedene dieser Wellen im Sinne der Darlegungen auf Seite 48 benachbarte sind, so mußte bei ihrer Berechnung auf dem Annäherungswege vorgegangen werden. Folgender Weg ist eingeschlagen worden:

A. Erster Berechnungsgang

a) *Angenäherte Berechnung von* p_5, p_7, p_{12} *und* p_{30}
p_7, p_5 vor 1888, sowie zeitweise auch p_{12} schon mit guter Annäherung erfaßt;
p_6 und p_9 konnten noch nicht erfaßt werden.

b) *Berechnung der säkularen Welle* p_{120}
auf Grund der beobachteten Jahresmittel der Abflußmengen.

B. Zweiter Berechnungsgang

unter Ausschaltung der säkularen Welle p_{120} und der jeweilen störenden Periodizitäten, welche angenähert oder definitiv bereits berechnet waren (wenn definitives Ergebnis schon vorlag, so wurde dieses gebraucht, wenn es nicht vorlag, so wurde angenähertes Ergebnis verwendet).

a) *Definitive Berechnung von* p_6
unter Ausschaltung von p_{120}, p_5 und p_7;
Berechnung der *Verteilung* der von p_{120}, p_5 und p_7 befreiten Abflußmengen.

b) *Angenäherte Berechnung von* p_9
unter Ausschaltung von p_{120}, p_7 und p_{12};
Berechnung der *Verteilung* der von p_{120}, p_7 und p_{12} befreiten Abflußmengen.

c) *Definitive Berechnung von* p_7
unter Ausschaltung von p_{120}, p_5, p_6, p_9, p_{12} und p_{30};
Berechnung der *Verteilung* der von p_{120}, p_5, p_6, p_9, p_{12} und p_{30} befreiten Abflußmengen.

d) *Zweite angenäherte Berechnung von* p_5
unter Ausschaltung von p_{120}, p_6, p_7, p_9, p_{12} und p_{30};
Berechnung der *Verteilung* der von p_{120}, p_6, p_7, p_9, p_{12} und p_{30} befreiten Abflußmengen.

e) *Definitive Berechnung von* p_{12} *mit zwei Nebenperioden* p_{10} *und* p_{15}
unter Ausschaltung von p_{120}, p_5, p_6, p_7, p_9 und p_{30};
Berechnung der *Verteilung* der von p_{120}, p_5, p_6, p_7, p_9 und p_{30} befreiten Abflußmengen.

f) *Zweite angenäherte Berechnung von* p_{30}
unter Ausschaltung von p_{120}, p_5, p_6, p_7, p_9 und p_{12}.

C. Dritter Berechnungsgang

a) *Definitive Berechnung von* p_9 *und Kontrolle der Nebenperiode* p_{10}
unter Ausschaltung von p_{120}, p_5, p_6, p_7, p_{12} samt Nebenperiode p_{15} und p_{30} (p_5 und p_{30} je zweite Annäherung).

b) *Definitive Berechnung von* p_{30}
unter Ausschaltung von p_{120}, p_5, p_6, p_7, p_9 und p_{12} (p_5 zweite Annäherung, p_9 angenähert).

c) *Definitive Berechnung von* p_5
auf Grund der Vierteljahresmittel für die Jahre 1888 bis 1944, unter Ausschaltung der einjährigen Periode, von p_{120}, p_6, p_7, p_9, p_{12} und p_{30} (alles definitive Werte; vgl. vorhergehender Abschnitt 4). 1888 tritt eine Änderung im Verhalten der Periodizität p_5 ein. Für die Jahre vor 1888 gibt der zweite Berechnungsgang ein genügend genaues Resultat für p_5.

Die Werte der Streuung der Jahresmittel der Abflußmengen nach Ausschaltung von Periodizitäten, für welche nach obiger Zusammenstellung die Verteilung berechnet worden ist, sind in Tabelle 12 zusammengestellt. Zum Vergleich ist auch die Streuung der unveränderten Jahresmittel der Abflußmengen, ohne Ausschaltung von Periodizitäten, beigefügt.

Man ersieht aus der Tabelle, wie die *Streuung* immer um so kleiner wird, je mehr und je besser berechnete Periodizitäten ausgeschaltet werden. Insbesondere nimmt die Streuung stark ab, wenn nebst den andern auch die beiden Periodizitäten p_5 und p_7, die große Amplituden aufweisen, ausgeschaltet sind. *Die Verteilung der Abflußmengen um ihre arithmetischen Mittel, mit oder ohne Ausschaltung der Periodizitäten, entspricht angenähert einer normalen Gauß'schen Verteilung.*

Auf eine Wiedergabe aller Verteilungskurven kann verzichtet werden; als Beispiel wird in Abb. 22 nur die Kurve für die Verteilung der mittleren jährlichen Abflußmengen um ihr arithmetisches Mittel nach Ausschaltung der Wellen p_6, p_7, p_9, p_{12}, p_{30} und p_{120} wiedergegeben. Diese Werte wurden nach obigem benützt zur zweiten angenäherten Berechnung von p_5.

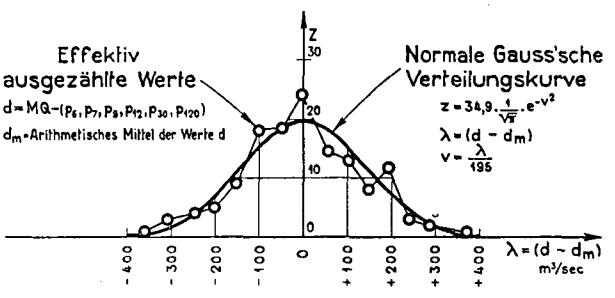


Abb. 22. Verteilung der mittleren jährlichen Abflußmengen um ihr arithmetisches Mittel nach Ausschaltung der Wellen p_6, p_7, p_9, p_{12}, p_{30} und p_{120} der Jahre 1808–1943

Jahresmittel der Abflußmengen		Jahre	Anzahl Jahre	Durchschnittliches Mittel m^3/sec	Streuung σ m^3/sec
mit Ausschaltung der Wellen	ohne Ausschaltung der Wellen				
Angenäherte Berechnung von p_5, p_7, p_{12} und p_{30}					
Keine Welle ausgeschaltet, beobachtete Werte		1808–1943	136	1029	±164
Definitive Berechnung von p_6					
p_{120} definitive Werte*) p_5 Werte der 1. Annäherung p_7 angenäherte Werte	p_9, p_{12}, p_{30}	1808–1939	132	+2	±143
Angenäherte Berechnung von p_9					
p_{120} definitive Werte p_7 angenäherte Werte p_{12} angenäherte Werte	p_5, p_6, p_{30}	1808–1942	135	+4	±146
Definitive Berechnung von p_7					
p_{120} definitive Werte p_5 Werte der 1. Annäherung p_6 definitive Werte p_9 angenäherte Werte p_{12} angenäherte Werte p_{30} angenäherte Werte	———	1808–1943	136	−2	±137
Zweite angenäherte Berechnung von p_5					
p_{120} definitive Werte p_6 definitive Werte p_7 definitive Werte p_9 angenäherte Werte p_{12} angenäherte Werte p_{30} angenäherte Werte	———	1808–1943	136	−2	±138
Definitive Berechnung von p_{12}					
p_{120} definitive Werte p_5 Werte der 2. Annäherung p_6 definitive Werte p_7 definitive Werte p_9 angenäherte Werte p_{30} angenäherte Werte	———	1808–1943	136	−3	±127

*) Vgl. Fußnote auf Seite 63

Tabelle 12

Streuung der Jahresmittel der Abflußmengen des Rheins bei Basel

II. Untersuchungen der Jahres- und Vierteljahresmittel der Abflußmengen in bezug auf eine Erhaltungstendenz

1. Untersuchung mit Hilfe der Streuung

Es wurde aus den beobachteten Jahresmitteln der Abflußmengen berechnet:

a) Nach Gleichung 14 die Streuung σ_5 der 27 Fünfjahresmittel 1808–1812, 1813–1817, ··· 1933–1937, 1938–1942 um das durchschnittliche Jahresmittel der Jahresreihe 1808–1942, welches gleich 1031 m^3/sec ist. Es ergab sich $\sigma_5 = \pm$ 73 m^3/sec. Die Streuung des einzelnen Jahresmittels um die durchschnittliche jährliche Abflußmenge ist $\sigma_n = \pm$ 164 m^3/sec.

Damit ergibt sich nach Gleichung 15:

$$\omega = \left[\frac{\sigma_5}{\sigma_n/\sqrt{5}}\right]^2 \approx 1{,}0$$

b) Nach Gl. 14 die Streuung σ_{30} der 4 Dreißigjahresmittel 1808–1837, 1838–1867, 1868–1897, 1898–1927 um das durchschnittliche Jahresmittel der Jahresreihe 1808–1927, welches gleich 1024 m³/sec ist. Es ergibt sich mit $\sigma_{30} = \pm 21{,}8$ m³/sec und $\sigma_n = \pm 160$ m³/sec:

$$\omega \approx \left[\frac{21{,}8}{160/\sqrt{30}}\right]^2 = 0{,}56$$

c) Die Streuung σ_2 der 68 Zweijahresmittel 1808–1809, 1810–1811, ··· 1940–1941, 1942–1943 um die säkulare Ganglinie. Mit $\sigma_2 = \pm 129$ m³/sec und $\sigma_n \approx \pm 162$ m³/sec (nach Tabelle 11) ergibt sich:

$$\omega = \left[\frac{129}{162/\sqrt{2}}\right]^2 = 1{,}27$$

d) Für die Jahresreihe 1888–1944 die Streuung σ_n der von der Jahresperiode befreiten 228 Vierteljahresmittel mq* um die säkulare Ganglinie. Nach Seite 63 ergab sich für $\sigma_n = \pm 235$ m³/sec, und für die Streuung der Jahresmittel der Jahresreihe 1888–1944 um die säkulare Ganglinie wurde berechnet $\sigma_4 = \pm 171$ m³/sec. Damit ergibt sich:

$$\omega = \left[\frac{171}{235/\sqrt{4}}\right]^2 = 2{,}12$$

2. *Untersuchung mit Hilfe von Autokorrelationskoeffizienten*

Nachdem wir aus der Untersuchung mit Hilfe der Streuung bereits erkannt hatten, daß die Reihe der jährlichen mittleren Abflußmengen keine Erhaltungstendenz aufweist, konnten wir uns auf eine Kontrolle mit Hilfe der Korrelationskoeffizienten erster Ordnung beschränken, welche einmal für eine größere Zahl von je 5 Wertepaaren und dann von je 30 Wertepaaren berechnet wurden.

Die Berechnung der *Autokorrelationskoeffizienten erster Ordnung* nach Gleichung 18 *aus je 5 Wertepaaren* erfolgte für die 28 Intervalle, welche in Tabelle 14 angegeben sind.

Jahr	i	Q_i	$Q_i - Q_{m,0}$	$[Q_i - Q_{m,0}]^2$	Jahr	i+1	Q_{i+1}	$Q_{i+1} - Q_{m,1}$	$[Q_{i+1} - Q_{m,1}]^2$	$[Q_i - Q_{m,0}] \cdot [Q_{i+1} - Q_{m,1}]$
1810	1	925	− 95	9 025	1811	2	955	−104	10 816	+ 9 880
1811	2	955	− 65	4 225	1812	3	1215	+156	24 336	−10 140
1812	3	1215	+195	38 025	1813	4	1088	+ 29	841	+ 5 655
1813	4	1088	+ 68	4 624	1814	5	918	−141	19 881	− 9 588
1814	5	918	−102	10 404	1815	6	1120	+ 61	3 721	− 6 222
		$Q_{m,0} = 1020$		$\Sigma[Q_i - Q_{m,0}]^2 = 66\,303$			$Q_{m,1} = 1059$	$\Sigma[Q_{i+1} - Q_{m,1}]^2 = 59\,595$		

$$\Sigma[Q_i - Q_{m,0}][Q_{i+1} - Q_{m,1}] = -10\,415$$

$$k_1 = \frac{-10\,415}{\sqrt{66\,303 \cdot 59\,595}} = -0{,}17 \qquad \sigma_{k_1} = \frac{1 - 0{,}0289}{\sqrt{5}} = 0{,}434$$

Tabelle 13

Berechnung des Autokorrelationskoeffizienten erster Ordnung k_1 und dessen Streuung σ_{k_1} für die Abflußmengen 1810–1815

Jahre	k_1	σ_k	Jahre	k_1	σ_k
1808–1813	+0,33	±0,398	1920–1925	−0,40	±0,375
09– 14	+0,12	0,441	21– 26	−0,66	0,252
10– 15	−0,17	0,434	22– 27	−0,25	0,419
11– 16	−0,04	0,446	23– 28	−0,41	0,372
12– 17	+0,46	0,352	24– 29	−0,19	0,432
13– 18	+0,13	0,439	25– 30	−0,21	0,427
14– 19	+0,31	0,404	26– 31	+0,09	0,444
15– 20	+0,48	0,344	27– 32	−0,10	0,442
16– 21	+0,26	0,416	28– 33	+0,10	0,442
17– 22	+0,06	0,445	29– 34	+0,20	0,430
18– 23	−0,64	0,264	30– 35	+0,17	0,434
19– 24	+0,05	0,445	31– 36	+0,19	0,432
20– 25	−0,29	0,409	32– 37	+0,45	0,356
1821–1826	−0,07	±0,444	1933–1938	+0,29	±0,409
Σ	+0,99	±5,681	Σ	−0,73	±5,666
Mittelwerte	+0,071	±0,406	Mittelwerte	−0,052	±0,405

Gesamtmittel aller Koeffizienten k = +0,0095 Gesamtmittel aller Werte $\sigma_{k_1} = \pm 0{,}4055$

Tabelle 14

Autokorrelationskoeffizienten erster Ordnung und ihre Streuung für je 5 Wertepaare von Abflußmengen des Rheins bei Basel

Aus Tabelle 13 geht für das Beispiel des Abschnittes 1810–1814 hervor, wie die Berechnung des Korrelationskoeffizienten durchgeführt worden ist. Es ist ferner auch die Berechnung der Streuung σ_{k_1} des Koeffizienten nach Gleichung 17 angegeben.

In Tabelle 14 sind die berechneten Korrelationskoeffizienten und ihre Streuungen zusammengestellt. Es ergibt sich aus dieser Tabelle, daß die Koeffizienten um Null schwanken mit einem Betrage, welcher innerhalb der Unsicherheitsgrenze liegt. Der durchschnittliche Korrelationskoeffizient wird sich mit wachsender Zahl von Zeitabschnitten zu je 5 Wertepaaren dem Betrage Null nähern. Es ist also keine Erhaltungstendenz vorhanden.

Die graphische Darstellung der Werte $(Q_i - Q_{m,0})$ in Funktion von $(Q_{i+1} - Q_{m,1})$ ergab entsprechend dem Werte $k_1 = 0$ eine Punktwolke von kreisförmiger Ausdehnung und damit einen linear stochastischen Zusammenhang zwischen Q_i und Q_{i+1}. Die auf Seite 24 rechts erwähnte Voraussetzung ist also erfüllt.

Die Berechnung der *Autokorrelationskoeffizienten erster Ordnung aus je 30 Wertepaaren* erfolgte in analoger Weise für die 14 Intervalle, welche in Tabelle 15 angegeben sind. In dieser Tabelle sind die berechneten Korrelationskoeffizienten und ihre Streuungen zusammengestellt. Die Koeffizienten schwanken innerhalb der Unsicherheitsgrenze um den Betrag Null. Auch hier ergibt es sich also, daß keine Erhaltungstendenz vorliegt.

Jahre	k_1	σ_{k_1}
1808–1838	+0,034	0,182
09– 39	+0,026	0,182
10– 40	+0,014	0,182
11– 41	−0,021	0,182
12– 42	+0,017	0,182
13– 43	−0,020	0,182
14– 44	−0,002	0,182
15– 45	+0,013	0,182
16– 46	−0,020	0,182
17– 47	−0,200	0,175
1818–1848	−0,193	0,176
1911–1941	−0,053	0,182
12– 42	−0,042	0,182
1913–1943	+0,020	0,182
Σ	−0,427	2,535
Mittelwerte	−0,031	0,181

Tabelle 15
Autokorrelationskoeffizienten erster Ordnung und ihre Streuung für je 30 Wertepaare von Abflußmengen des Rheins bei Basel

III. Ergebnisse und Schlußfolgerungen

1. Mittlere jährliche Abflußmengen

Die mittleren jährlichen Abflußmengen verteilen sich um ihr arithmetisches Mittel in bezug auf Betrag und Häufigkeit angenähert nach dem normalen Gauß'schen Verteilungsgesetz, und eine Erhaltungstendenz ist nicht vorhanden; sie *dürfen deshalb vorerst als eine Reihe zufälliger, voneinander statistisch unabhängiger Werte von der Art zufälliger Fehler betrachtet werden.* (Erst *nachträglich*, auf Grund der Periodogrammrechnung, werden wir feststellen, daß in der Reihe der mittleren jährlichen Abflußmengen Periodizitäten enthalten sind. Vorerst sind letztere jedoch verborgen.)

Die Streuung ist bedingt durch die aperiodischen Bestandteile, sowie durch das Zusammenwirken von mehreren Periodizitäten, deren Wellenlängen in keinem rationalen Verhältnis stehen. Schaltet man diese Periodizitäten aus, so wird die Streuung kleiner.

Graßberger (vgl. unsere Ausführungen unter Punkt 4 auf Seite 14) hat in Lit. 6, im Zusammenhang mit seinen sehr interessanten, wertvollen und neuartigen Untersuchungen über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Wasserführung der Gewässer, ebenfalls die Frage periodischer Schwankungen der mittleren jährlichen Abflußmenge aufgeworfen. Er hat für die von ihm untersuchten österreichischen Gewässer gefunden, daß eine, an das normale Gauß'sche Fehlergesetz angenäherte Verteilung vorliegt. An der Art, wie bei den Gewässern Österreichs nasse und trockene Jahre aufeinanderfolgen, sei nicht die geringste Abweichung von dem Bild zu erkennen, welches ein reines Zufallsspiel biete.*) Es fehle jede erkennbare Andeutung einer Periodizität, insbesondere einer Abhängigkeit von der Sonnenfleckenperiode. *Graßberger* kommt also für die österreichischen Gewässer, wie wir für den Rhein bei Basel, zum Schluß, daß *vorerst* die mittleren jährlichen Abflußmengen als eine Reihe zufälliger, voneinander statistisch unabhängiger Werte betrachtet werden dürfen.

Ohne besondere Untersuchungen neigt er aber weiter zur Ansicht, daß in der Reihe der mittleren jährlichen Abflußmengen überhaupt keine oder doch nur unwesentliche Periodizitäten oder andere Regeln (Abhängigkeit von der Sonnenfleckenperiode) *verborgen* seien. *Wir haben dagegen dargelegt* (vgl. Seite 14), *daß ein Abflußvorgang als nicht periodisch erscheinen und das Bild einer Reihe von zufälligen Werten bieten, sich aber trotzdem additiv aus mehreren Periodizitäten von beachtlicher Ampli-*

*) Graßberger stellte ein «ähnliches Bild», wie sie die Aufeinanderfolge übernormaler oder unternormaler Abflußjahre bietet, in zu schematischer Art durch die Anwendung von Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung her, die bei Untersuchungen über die zufällige Ziehung von weißen oder schwarzen Kugeln gebraucht werden.

tude, vermischt mit aperiodischen Bestandteilen, zusammensetzen kann. Unsere Untersuchungen beweisen, daß bei den mittleren jährlichen Abflußmengen des Rheins bei Basel tatsächlich ein solcher Vorgang mit verborgenen Periodizitäten vorliegt. Ob bei den von *Graßberger* untersuchten österreichischen Flüssen, insbesondere bei solchen mit größerem Einzugsgebiet, wie Donau, Inn usw., nicht doch verborgene Periodizitäten vorhanden sind, welche eine beachtliche Amplitude und allfällig für die Voraussage eine Bedeutung haben, wäre erst noch zu beweisen. Jedenfalls hat *von Keßlitz* (1938) für die Mur, welche *Graßberger* (1932) ebenfalls erwähnt, wie bereits gesagt, Periodizitäten gefunden.

2. Mittlere vierteljährliche Abflußmengen, nach Ausschaltung der einjährigen Periode

Diese sind ebenfalls in bezug auf Größe und Häufigkeit genähert nach einer normalen Gauß'schen Glockenkurve um ihr arithmetisches Mittel verteilt. Es wurde jedoch die Maßzahl für die Erhaltungstendenz zu $\omega = 2{,}12$ gefunden, was auf eine leichte Erhaltungstendenz hinweist. Wenn wir also bei unsern *Expektanzuntersuchungen* (Seite 98 usf.) davon ausgehen werden, daß die Beobachtungswerte *vorerst* als zufällige, normal verteilte Größen betrachtet werden dürfen, so gilt dies nicht für die Viertelsjahresmittel, sondern nur für die Jahresmittel der Abflußmengen.

C. *Berechnung des Spektrums*

1. Wahl des untersuchten Zeitabschnittes

Bereits auf Seiten 32 und 34 ist dargelegt worden, wie das Spektrum der mittleren jährlichen Abflußmengen des Rheins der Jahre 1808 bis 1928 ermittelt worden ist. Der Zeitabschnitt 1808 bis 1928 wurde dabei aus folgenden Gründen gewählt:

Wir wußten nicht, ob und welche Periodizitäten dem Abflußvorgang des Rheins innewohnen. Auf Grund vorhandener Veröffentlichungen über andere Flüsse, wie Mur und Penobscot-River (vgl. Seite 8), Viktoriasee, usw., vermuteten wir am ersten das Vorhandensein einer etwa 11-jährigen Periode (Sonnenfleckenrhythmus). Wir dachten auch an die 35-jährige Brücknerperiode, zu deren Bestimmung u. a. die Wasserstände des Bodensees verwendet worden waren.

Als wir nun im Sommer 1944 mit unseren rechnerischen Untersuchungen, deren erster Teil die Ermittlung des Spektrums war, anfingen, wollten wir zuerst in dieselben nicht alle damals für den Zeitabschnitt 1808 bis 1943 vorhandenen jährlichen Abflußmengen einbeziehen. Wir wollten vielmehr nur die Jahresmittel bis zu einem rund 11–17 Jahre vor 1943 gelegenem Zeitpunkt, also bis und mit etwa 1926 oder 1932, verwenden, um dann die gefundenen Periodizitäten auf Grund der Berechnungen (die 11-jährige auf eine Wellenlänge, die 35-jährige wenigstens auf eine halbe Wellenlänge) extrapolieren (voraussagen) zu können. Ein Vergleich mit den nicht verwendeten Jahresmitteln hätte dann ergeben, wie weit eine solche Extrapolation berechtigt wäre und welche Genauigkeit einer solchen Voraussage zukommen würde. Im Verlaufe der ersten Berechnungen der Periodizitäten, welche das Spektrum anzeigte, stellte sich dann der quasipersistente Charakter der wichtigsten Periodizitäten heraus. Wir waren deshalb genötigt, sämtliche vorhandenen Jahresmittel zu verwenden, um die in neuester Zeit gültigen Periodizitäten möglichst genau herausarbeiten zu können.

Ferner trachteten wir darnach, die enorme Rechenarbeit möglichst einzuschränken, um rasch erkennen zu können, ob Periodizitäten wirklich vorhanden seien und sich die Fortführung der Arbeit lohne. Wir wollten also Rechenerleichterungen auf Grund des vorhandenen Tabellenwerkes (Lit. 4) möglichst ausnützen; insbesondere die dort vorhandene Schlüsseltabelle für ein Darwin-Börgensches Schema von 11 Spalten, also für 121 Beobachtungswerte. Mit einem solchen Schema war es also möglich, die Jahre 1808 bis 1928 zu verwenden. Das Ende dieses Zeitabschnittes entspricht ungefähr jenem, welches uns im Hinblick auf die oben erwähnte Extrapolation und deren Erprobung als gegeben erschien. Daher entschlossen wir uns, für die Bestimmung des Spektrums den Zeitabschnitt 1808 bis 1928 zu verwenden. Wir konnten uns auf die Berechnung der Wellen der Ordnung $\mu = 1-25$, entsprechend einer Wellenlänge von 120 Jahren bis rund fünf Jahren beschränken; denn für die Berechnung von kürzeren Wellen geben die Jahresmittel eine Beobachtungsreihe, deren Werte nicht dicht genug beieinander liegen (vgl. Seite 60, links). Auf die Verwendung von Mittelwerten der Abflußmengen, welche über einen kürzeren Zeitabschnitt als ein Jahr gebildet sind, wollten wir aber aus den auf Seite 15, rechts, und 23, links, angegebenen Gründen verzichten. Wir waren dann allerdings am Schlusse genötigt, noch Vierteljahresmittel zur genaueren Berechnung der Welle p_5 zu verwenden, aber nur ausnahmsweise und ohne diese Vierteljahresmittel bei den Expektanzbetrachtungen verwenden zu müssen.

2. Schlüsse, welche aus dem Spektrum zu ziehen sind

Das Spektrum (Abb. 5) besitzt deutliche Spitzen bei:

Ordnung μ =	1	4	10	13	16–17	20	22	24
Wellenlänge p = rd.	121	30	12	9	7–8	6	5,5	5,0

Der Verlauf bei $\mu = 22-24$ konnte auch so aufgefaßt werden, daß dort ein Bandenspektrum (vgl. Seite 28, links) vorliegt und eine stark quasipersistente Welle angezeigt wird. Diese Auffassung ist durch die weitern Berechnungen bestätigt worden. Die genauere Untersuchung wurde jedoch nur mit *einer* Versuchswelle $p' = 5$ ($\mu = 24$) durchgeführt, da die Welle bei $\mu = 22$ als benachbart miterfaßt wird.

Wir haben nach der genaueren Berechnung (Phasendiagramme) der im Spektrum deutlich angegebenen Periodizitäten und der Nebenperioden, welche die genaueren Berechnungen noch aufdeckten, geprüft, ob allfällig weitere Periodizitäten vorhanden sein könnten, welche das Spektrum zu wenig deutlich anzeigt und die auch anläßlich der genaueren Berechnung nicht erfaßt wurden. Diese Frage stellte sich insbesondere für Periodizitäten, die nur während einer im Vergleich zu 121 Jahren kurzen Zeitspanne vorhanden sind. Die Fourieramplitude solcher Periodizitäten wird im Spektrum für 121 Jahre stark verkleinert erhalten und kann deshalb übersehen werden, wenn die betreffende Periodizität nicht bei der genaueren Berechnung mit Hilfe von Phasendiagrammen erfaßt wird. Es ergab sich aus einfachen Betrachtungen über die Maximumsbreiten und die Größe der Funktion P (x) (vgl. Seite 30), auf deren Wiedergabe verzichtet werden kann, daß alle Wellen mit Amplituden von Bedeutung erfaßt worden sind.

D. *Berechnung der Periodizitäten mit Hilfe der Periodogrammrechnung*

I. Erster Berechnungsgang

Für den ersten Berechnungsgang wurden die unveränderten beobachteten Jahresmittel MQ der Abflußmengen (Tafel I, oben) verwendet.

1. Angenäherte Berechnung der Welle p_7

Das Spektrum (vgl. Seite 68) zeigt deutlich das Vorhandensein einer Periodizität mit einer Wellenlänge von 7–8 Jahren an. Wir wählen dementsprechend die *Wellenlänge der Versuchswelle zu* $p' = 7$ *Jahre.*

Damit ergibt sich eine *Versuchsfrequenz* $x = \frac{360^0}{7} = 51{,}43^0$.

Es wurden entsprechend den Ausführungen auf Seiten 37 und 43 zuerst die Periodogrammkomponenten für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten q = 0,7, 14, ··· 126 und der Länge $p' = 7$ Jahre berechnet. In Analogie zu Tabelle 4 (Seite 42) wurden die Beobachtungswerte in Zeilen zu 7 Werten angeordnet und mit den entsprechenden trigonometrischen Faktoren multipliziert. Die auf diese Weise ermittelten Produkte $MQ_i \cdot \cos xi$, $MQ_i \cdot \sin xi$ und die Werte A (x, q), B (x, q); $\Sigma A\,(x, q)_{\varrho^*}$, $\Sigma B\,(x, q)_{\varrho^*}$; a (x, q), b (x, q) sind auf Tafel V zusammengestellt. Die Werte $\Sigma A\,(x, q)_{\varrho^*}$ und $\Sigma B\,(x, q)_{\varrho^*}$ sind in Abb. 23 als Summationsvektorenzug dargestellt. Da $A\,(x, q) = \frac{p'}{2}\,a\,(x, q)$ und $B\,(x, q) = \frac{p'}{2}\,b\,(x, q)$ ist, so werden also *bei der numerischen Berechnung die* $\frac{p'}{2}$*-fachen Werte der Summen der Periodogrammkomponenten aufgetragen.* Es geschieht dies in Übereinstimmung mit Lit. 4 im Interesse der Schaffung einer einheitlichen Praxis und weil sich dadurch in verschiedenen Fällen auch einige rechnerische Vorteile ergeben können.

Hierauf wurde zur progressiven Analyse mit einem Analysenintervall von $n = \varrho \cdot p' = 5 \cdot p' = 35$ Jahren und einer Intervallverschiebung von 1 Jahr geschritten. Das Analysenintervall ist so lange gewählt worden, damit der Einfluß der Periodizitäten p_5, p_9, p_{12} und p_{30} unmerklich wird (Nominalwellenlänge von p_5 ist eine harmonische Welle des Analysenintervalls, vgl. Seite 49). Welle p_6 wird sich als benachbarte Welle noch bemerkbar machen. Es wurden also nach Seite 37 unten die Werte a (x, q) und b (x, q) für q = 0, 1, 2, 3, ··· berechnet, und daraus nach Gleichung 37 die Komponenten $\bar{a}\,(x, q)$ und $\bar{b}\,(x, q)$ gebildet und daraus die Werte $\bar{h}\,(x, q)$ und $\bar{\psi}\,(x, q)$ bestimmt, welche in Abb. 24 und 25 dargestellt sind.

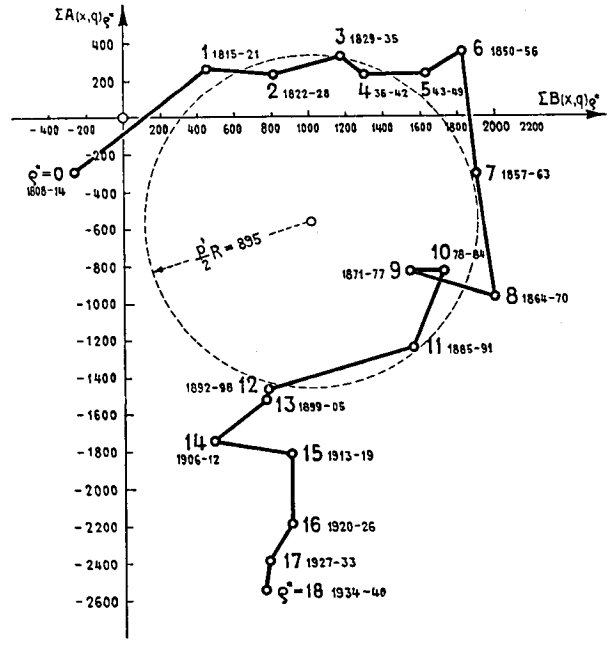


Abb. 23. Summationsvektorenzug für Welle p_7, angenäherte Berechnung, Analysenintervall $p' = 7$ Jahre

Aus dem Summationsvektorenzug, Abb. 23, ist ersichtlich, daß bei $\varrho^* = 12$ (q = 84; Jahr 1892) eine Richtungsänderung, entsprechend einer Änderung des Verhaltens der Periodizität eintritt. Diese Änderung geht auch aus dem Phasendiagramm Abb. 25 hervor: Das Phasendiagramm läßt sich durch 2 Geraden ausgleichen, welche sich auf der Ordinate bei q = 65 (Jahr 1873) schneiden. Nach den Betrachtungen auf Seite 38 tritt also bei dem Analysenintervall n = 35 die Änderung im Verhalten der Welle p_7 im Jahre $1873 + \frac{35}{2} \approx 1890$ ein. Diese Bestimmung des Übergangsjahres ist sicherer als jene aus dem Summationsvektorenzug. Die erste Gerade gilt somit von 1808 bis 1889, die zweite von 1890 bis 1943.

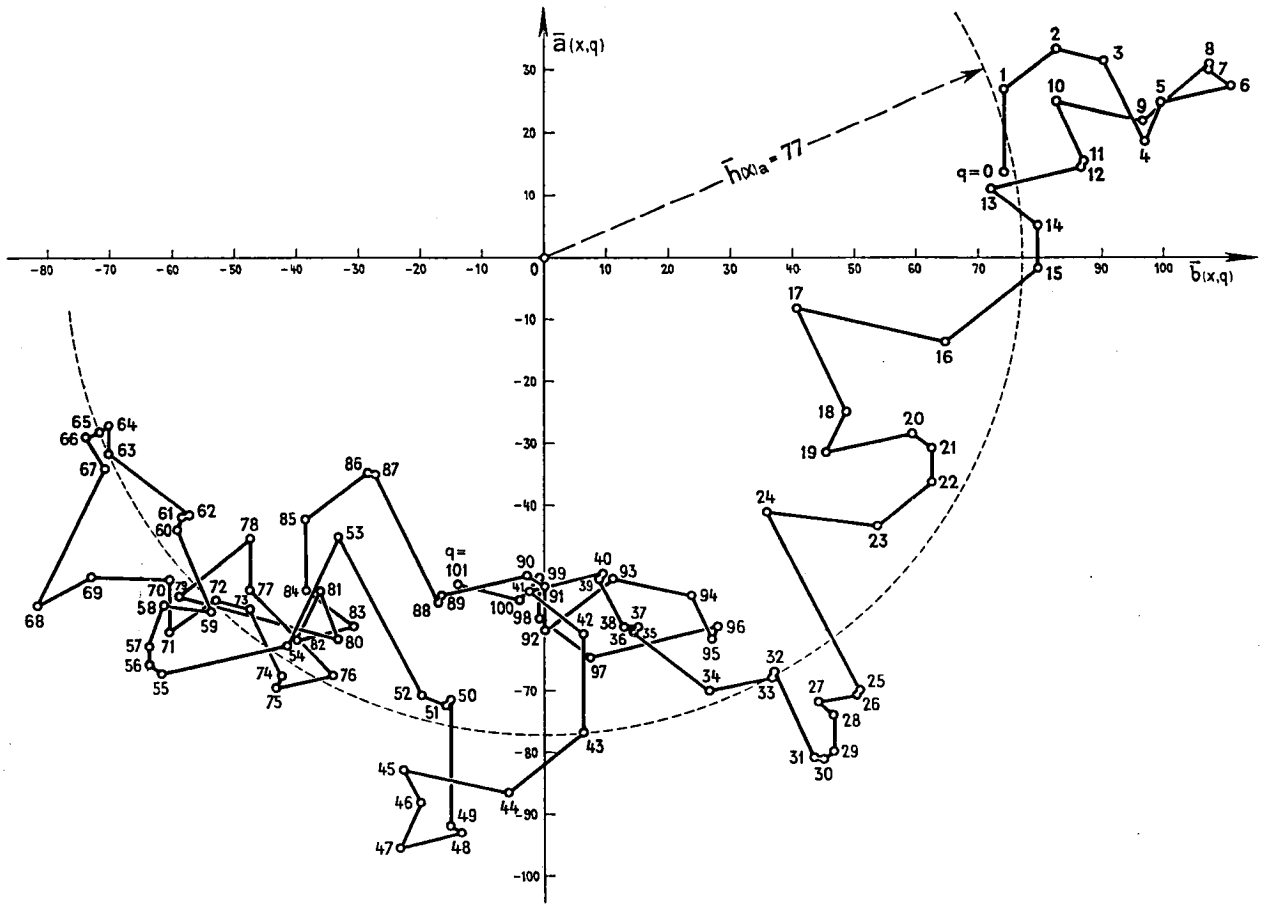


Abb. 24. Periodogrammkomponenten $\bar{a}$ (x, q) und $\bar{b}$ (x, q) für Welle p_7, erster Berechnungsgang, Analysenintervall n = 35 Jahre

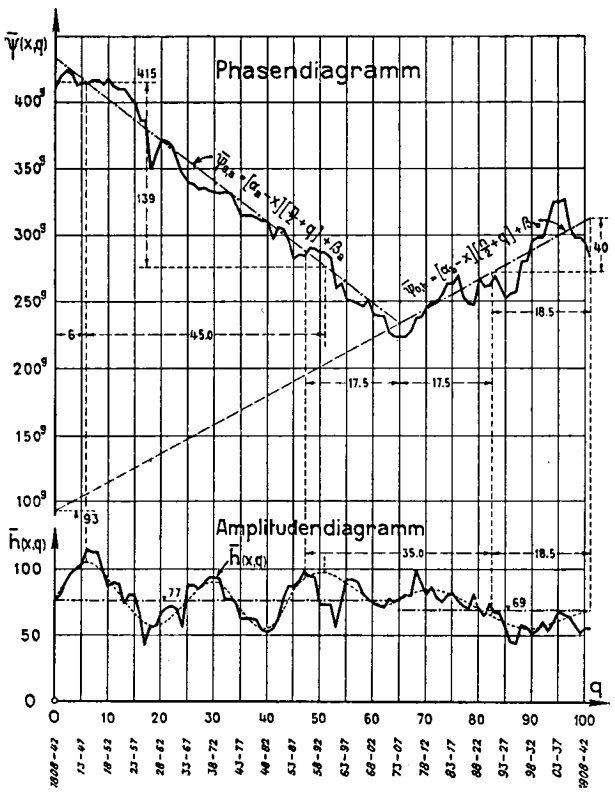


Abb. 25. Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_7, angenäherte Berechnung, Analysenintervall n = 35 Jahre, Versuchswelle p′ = 7 Jahre

Aus den periodischen Schwankungen des Amplitudendiagramms Abb. 25, sowie aus dem epizyklischen Verlauf des Endpunktes des Periodogrammvektors in Abb. 24 geht hervor, daß noch eine zweite Welle erfaßt worden ist. Da die Epizykelschleifen nach außen zeigen, dreht also der Periodogrammvektor der miterfaßten Welle in entgegengesetztem Sinne als derjenige der Welle p_7. Die Frequenz der miterfaßten Schwingung weicht somit von der Versuchsfrequenz im entgegengesetzten Sinne ab als die Frequenz α_7 der Welle p_7. Bei der miterfaßten Periodizität handelt es sich um die Welle p_6. Aus dem stark gestörten Verlauf des Amplitudendiagramms kann jedoch diese Welle p_6 zu wenig genau bestimmt werden, wie dies eine Versuchsrechnung bestätigte. Die Welle p_6 ist deshalb durch eine weitere spezielle Berechnung mit einer Versuchsfrequenz p′ = 6 Jahren bestimmt worden.

a) Zeitabschnitt 1808 bis 1889

Nach Abb. 25 ist mit p′ = 7, n = 35 u. $x = \frac{360^0}{7} = 51{,}43^0$:

$$\frac{d\,\bar{\psi}_{0,a}}{d\,q} = \frac{-139}{45} = -3{,}09^g = -2{,}78^0 = \alpha_a - x$$

Frequenz $\alpha_a = 51{,}43^0 - 2{,}78^0 \approx 48{,}6^0$;

Periode $p_a = \frac{2\pi}{48{,}6^0} = 7{,}40$ *Jahre*

$$\bar{h}(x)_a = 77 \qquad P(x)_a = \frac{\sin[\alpha_a - x]\frac{n}{2}}{[\alpha_a - x]\frac{n}{2}} = \frac{\sin[3{,}09^g \cdot 17{,}5]}{3{,}09^g \cdot 17{,}5} = 0{,}888$$

$$\textit{Amplitude } c_a = \frac{\bar{h}(x)_a}{P(x)_a} = \frac{77}{0{,}888} \approx 87\ m^3/sec$$

Der Betrag von $\bar{h}(x) = 77$ wurde als arithmetisches Mittel der zwischen $q = 6$ und $q = 51$ liegenden Werte $\bar{h}(x, q)$ gebildet, damit zwei *ganze* Wellenlängen der Schwankung des Amplitudendiagramms erfaßt werden und nicht ein systematischer Fehler entsteht. Dabei ist es ohne Belang, daß sich dieses Intervall noch etwas in den Bereich hinein erstreckt, welcher bereits durch die oben erwähnte Änderung der Periodizität p_7 beeinflußt ist.

Für die Berechnung der *Anfangsphase* gehen wir hier vom Wert $\bar{\psi}(x, q) = 15^g$ bei $q = 6$ aus; denn dieser Wert entspricht dem ersten Maximum der Schwankung des Amplitudendiagramms, und die Genauigkeit der Werte $\bar{\psi}(x, q)$ ist um so größer, je größer die zugehörigen Amplituden sind.

$$\textit{Anfangsphase } \beta_a = 15^g + [17{,}5 + 6] \cdot 3{,}09^g = 87{,}6^g \approx 79^0$$

Radius des Summationsvektorenzuges:

Da in Abb. 23 die $\frac{p'}{2}$-fachen Werte der Summen der Periodogrammkomponenten aufgetragen sind (vgl. Seite 43 und 69), so ist auch der $\frac{p'}{2}$-fache Radius einzutragen, und es ist entsprechend Gleichung 51

$$\frac{p'}{2} \cdot R = \left| \frac{c_a}{2[\alpha_a - x]} \right| = \frac{87}{2 \cdot 2{,}78^0 \cdot \frac{2\pi}{360^0}} = 895$$

Die Punkte des Summationsvektorenzuges ordnen sich nach Abb. 23 überraschend gut mit den zu erwartenden Streuungen um eine Kreislinie mit dem Radius $\frac{p'}{2} R$ an.

b) Zeitabschnitt 1890 bis 1943

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,b}}{dq} = \frac{40}{18{,}5} = 2{,}16^g = 1{,}95^0 = \alpha_b - x$$

Frequenz $\alpha_b = 51{,}43^0 + 1{,}95^0 \approx 53{,}4^0$;

$$\textit{Periode } p_b = \frac{2\pi}{53{,}4^0} = 6{,}75 \textit{ Jahre}$$

$$\bar{h}(x)_b = 69 \qquad P(x)_b = \frac{\sin[\alpha_b - x]\frac{n}{2}}{[\alpha_b - x]\frac{n}{2}} = \frac{\sin[2{,}16^g \cdot 17{,}5]}{2{,}16^g \cdot 17{,}5} = 0{,}942$$

$$\textit{Amplitude } c_b = \frac{\bar{h}(x)_b}{P(x)_b} = \frac{69}{0{,}942} \approx 73\ m^3/sec$$

Zur Berechnung von $\bar{h}(x)_b$ konnte nicht nur der Bereich $q = 82{,}5$ bis $q = 101$ verwendet werden, weil sich sonst wegen der Schwankung des Amplitudendiagramms ein systematisch zu kleiner Wert ergeben würde. Wir mußten $\bar{h}(x)_b$ über eine *ganze* Periode der Schwankung ermitteln, was uns aber auch gezwungen hat, Werte zu verwenden, welche noch durch die Änderung der Periodizität p_7 beeinflußt sind. Wie aus dem Amplitudendiagramm hervorgeht, ist aber der daher rührende Fehler unwesentlich.

$$\textit{Anfangsphase } \beta_b = 93^g - 17{,}5 \cdot 2{,}16^g = 55^g \approx 50^0$$

Der kreisartige Verlauf des *Summationsvektorenzuges* kann ab 1890 nicht erkannt werden, weil das vorhandene Stück zu kurz ist.

Wir erhalten somit als erste Näherung:

1808–1889: (57)

$$y_a = 87 \sin[48{,}6^0 t + 79^0] = 87 \sin\left[\frac{2\pi}{7{,}40} t + 79^0\right] \text{in } m^3/sec$$

1890–1943:

$$y_b = 73 \sin[53{,}4^0 t + 50^0] = 73 \sin\left[\frac{2\pi}{6{,}75} t + 50^0\right] \text{in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: $t = 0$ ist.

Die sich nach diesen Gleichungen für jede Jahresmitte von 1808 bis 1943 ergebenden Ausschläge der Periodizität p_7 sind auf Tafel VIII zusammengestellt.

2. *Erste angenäherte Berechnung der Welle* p_5

Das Spektrum (vgl. Seite 68) zeigt das Vorhandensein einer Periodizität mit einer Wellenlänge von rund 5 Jahren an. Es wird dementsprechend gewählt:

Wellenlänge der Versuchswelle $p' = 5$ *Jahre*, also

$$\textit{Versuchsfrequenz } x = \frac{360^0}{5} = 72^0$$

Es wurden zuerst die Periodogrammkomponenten für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten $q = 0, 5, 10, \cdots, 130$ und der Länge $p' = 5$ Jahre berechnet. Die Produkte $MQ_i \cdot \cos xi$, $MQ_i \cdot \sin xi$ und die Werte $A(x,q)$, $B(x,q)$; $\Sigma A(x,q)_{\varrho^*}$, $\Sigma B(x,q)_{\varrho^*}$; $a(x,q)$, $b(x,q)$ sind auf Tafel VI zusammengestellt. Die Werte $\Sigma A(x,q)_{\varrho^*}$ und $\Sigma B(x,q)_{\varrho^*}$ wurden in Abb. 26 als Summationsvektorenzug aufgetragen ($\frac{p'}{2}$-fache Werte der Summen der Periodogrammkomponenten).

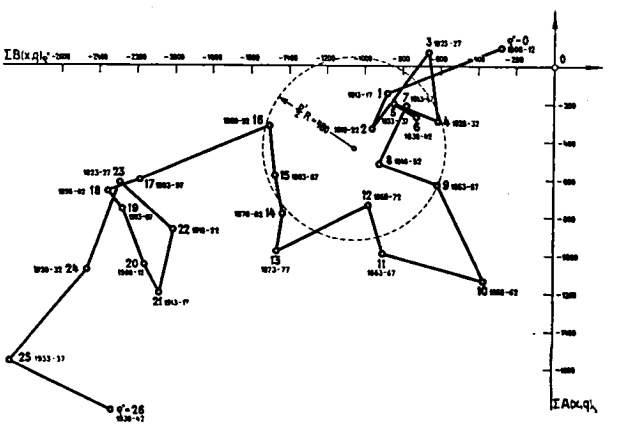


Abb. 26. Summationsvektorenzug für Welle p_5, erste angenäherte Berechnung, Analysenintervall $p' = 5$ Jahre

Hierauf wurden aus den Werten a (x, q) und b (x, q) für ein Analysenintervall $n = \varrho \cdot p' = 6 \cdot p' = 30$ Jahre und die Anfangszeiten des Intervalls $q = 0, 5, 10, \cdots$ die Periodogrammkomponenten $6 \cdot \bar{a}(x, q)$ und $6 \cdot \bar{b}(x, q)$, sowie $6 \cdot \bar{h}(x, q)$ und $\bar{\psi}(x, q)$ berechnet. Letztere sind in Abb. 27 graphisch als *Phasen-* und *Amplitudendiagramm* dargestellt.

Die Verschiebung des Anfangspunktes q des Intervalles ist also hier zu $p' = 5$ Jahre angenommen worden. Damit konnte die arithmetische Berechnung bedeutend abgekürzt werden, und es wurde, da p' relativ klein ist, trotzdem ein genügend dichtes Phasen- und Amplitudendiagramm erhalten. Die Werte $6 \cdot \bar{a}(x, q)$ und $6 \cdot \bar{b}(x, q)$ ergaben sich dabei in einfacher Weise als Summe von je 6 aufeinanderfolgenden Werten a (x, q) und b (x, q), ohne daß nach dem Verfahren, welches auf Seite 32 unten angegeben ist, übergreifende Zwischenwerte für die Komponenten a (x, q) und b (x, q) zu berechnen waren. Das Analysenintervall wurde zu n = 30 Jahren gewählt, um insbesondere die benachbarte Welle p_6 möglichst vollständig auszuschalten.

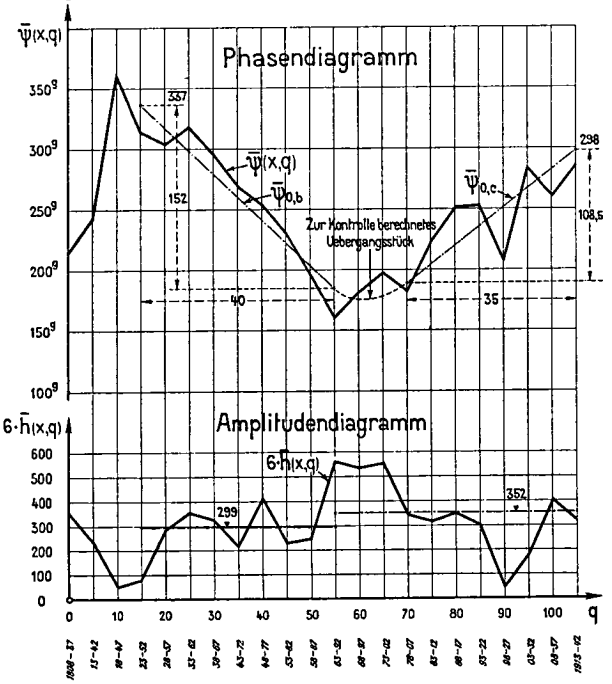


Abb. 27. Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_5, erste angenäherte Berechnung, Analysenintervall n = 30 Jahre, Versuchswelle $p' = 5$ Jahre

Aus dem Summationsvektorenzug, Abb. 26, ist folgendes ersichtlich: Bei $\varrho^* = 2$, $\varrho^* = 16$ und $\varrho^* = 22$ ändert der Summationsvektorenzug seinen Drehsinn, es sind also vier Zeitabschnitte 1808 bis 1822; 1823 bis 1892; 1893 bis 1922 und 1923 bis 1942 mit verschiedenem Verhalten der Periodizität p_5 zu unterscheiden. Diese vier Zeitabschnitte lassen sich aus dem Phasendiagramm weniger deutlich erkennen, da das Analysenintervall mit n = 30 Jahren im Verhältnis zur Länge der genannten Zeitabschnitte groß ist und sich Störungen stark auswirken. Es werden sich deshalb nachstehend bei der Auswertung des Phasendiagrammes Schwierigkeiten ergeben.

a) Zeitabschnitt 1808 bis 1822

Für diesen kurzen Zeitabschnitt können die langen übergreifenden Analysenintervalle n = 30 Jahre nicht verwendet werden. Wir mußten uns damit begnügen, mit Hilfe der Periodogrammkomponenten der nicht übergreifenden Intervalle $p' = 5$ Jahre eine rohe Abschätzung der Konstanten von p_5 vorzunehmen.

Frequenz $\alpha_a \approx 77{,}7^0$ *Periode* $p_a = 4{,}63$ *Jahre*
Amplitude $c_a \approx 154\ m^3/sec$ *Anfangsphase* $\beta_a \approx 146^0$

b) Zeitabschnitt 1823 bis 1892

Aus dem Phasendiagramm ist aus oben erwähnten Gründen nicht eindeutig ersichtbar, ob dieser Zeitabschnitt tatsächlich mit dem Jahre 1823 beginnt. Wir haben dieses Jahr auf Grund des Summationsvektorenzuges gewählt. Das Gleiche gilt für das Ende des Zeitabschnittes. In erster Annäherung rechnen wir also mit dem Zeitabschnitt 1823 bis 1892, welchem im Phasendiagramm der Abschnitt zwischen q = 15 (1823 bis 1852) und q = 55 (1863 bis 1892) entspricht. Dieser Abschnitt umfaßt keine Jahre vor 1823 und nach 1892, er ist also vom Verhalten der Periodizität in den Jahren vor 1823 und nach 1892 unbeeinflußt und darf somit zur Bestimmung der Konstanten von p_5 für den Zeitabschnitt 1823 bis 1892 verwendet werden.

Mit $x = 72^0$ und n = 30 ergibt sich nach Abb. 27:

$$\frac{d\,\bar{\psi}_{0,b}}{dq} = \frac{-152^g}{40} = -3{,}8^g = -3{,}42^0 = \alpha_b - x$$

Frequenz $\alpha_b = 72^0 - 3{,}42^0 = 68{,}58^0 \approx 68{,}6^0$;

Periode $p_b = 5{,}24$ *Jahre*

$$\bar{h}(x)_b = \frac{299}{6} \approx 50$$

$$P(x)_b = \frac{\sin[\alpha_b - x]\frac{n}{2}}{[\alpha_b - x]\frac{n}{2}} = \frac{\sin[3{,}8^g \cdot 15]}{3{,}8^g \cdot 15} = 0{,}87$$

Amplitude $c_b = \frac{\bar{h}(x)_b}{P(x)_b} = \frac{50}{0{,}87} = 57{,}5\ m^3/sec$

Anfangsphase $\beta_b = 337^g + \left[15 + \frac{30}{2}\right] \cdot 3{,}8^g = 451^g \approx 46^0$

Radius des Summationsvektorenzuges:

Da in Abb. 26 die $\frac{p'}{2}$-fachen Werte der Summen der Periodogrammkomponenten aufgetragen sind, so ist auch der $\frac{p'}{2}$-fache Radius einzutragen, und es ist entsprechend Gleichung 51:

$$\frac{p'}{2} R = \left| \frac{c_b}{2[\alpha_b - x]} \right| = \frac{57{,}5}{2 \cdot 3{,}42^0 \cdot \frac{2\pi}{360^0}} = 480$$

Aus Abb. 26 ist ersichtlich, daß die Streuung der Punkte des Summationsvektorenzuges um den Kreis mit dem Radius R = 480 recht groß ist.

c) Zeitabschnitte 1893 bis 1942

Aus Abb. 26 und 27 ist ersichtlich, daß sich die Periodizität p_5 in bezug auf die Frequenz in den Zeitabschnit-

ten 1893 bis 1922 und 1923 bis 1942 nicht stark verschieden verhalten wird. Eine Berechnung der Konstanten von p_5 getrennt nach diesen beiden Zeitabschnitten ist noch nicht möglich. Auch die Angabe der Jahre 1922/23 als Zeitpunkt der Änderung ist noch eine sehr rohe; der Summationsvektorenzug ist nämlich gerade zur Zeit, wo die Änderung etwa stattfindet, sehr stark gestört, und der ganze Abschnitt des Phasen- und des Amplitudendiagramms zwischen q = 55 und q = 85 ist noch vom Verhalten von p_5 im Abschnitt 1823 bis 1892 beeinflußt. Ferner ist der ganze Abschnitt des Phasen- und Amplitudendiagramms zwischen q = 85 und q = 105 vom Verhalten von p_5 im Zeitabschnitt 1893 bis 1922 abhängig. Wegen den starken Störungen dürfen wir das Analysenintervall nicht kürzer wählen, um Abschnitte des Phasen- und Amplitudendiagramms zu erhalten, welche voneinander unabhängig wären. Es blieb nichts anderes übrig, als vorerst für den ganzen Zeitabschnitt 1893 bis 1942 ein einheitliches Verhalten von p_5 anzunehmen.

Verschiedene Versuchsrechnungen ließen erkennen, daß das Phasendiagramm ab q = 70 vom Verhalten von p_5 vor 1893 nicht mehr so stark beeinflußt ist, als daß der Abschnitt q = 70 bis q = 85 nicht auch zur (besseren) Bestimmung der Ausgleichsgeraden für den Abschnitt q = 85 bis q = 105 benützt werden dürfte. Der Abschnitt q = 85 bis q = 105 ist nämlich wohl vom Verhalten von p_5 vor 1893 gänzlich unbeeinflußt, jedoch wegen der starken Streuungen für ein einigermaßen sicheres Ziehen der Ausgleichsgeraden zu kurz. Mit x = 72° und n = 30 ergibt sich nach Abb. 27:

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,c}}{dq} = \frac{108{,}5^g}{35} = +3{,}1^g = +2{,}79^0 = \alpha_c - x$$

Frequenz $\alpha_c = 72^0 + 2{,}79^0 = 74{,}79^0 \approx 74{,}8^0$;

Periode $p_c = 4{,}81$ *Jahre*

Amplitude c_c:

Versuchsrechnungen und spezielle Überlegungen zeigten, daß das am besten angenäherte Resultat erhalten werden dürfte, wenn wegen der starken Schwankungen des Amplitudendiagramms der Wert $\bar{h}(x)_c$ als arithmetisches Mittel aller Werte $\bar{h}(x, q)$ des Abschnittes q = 55 bis q = 105 berechnet wird.

$$\bar{h}(x)_c = 58 \quad P(x)_c = \frac{[\sin\alpha_c - x]\frac{n}{2}}{[\alpha_c - x]\frac{n}{2}} = \frac{\sin[3{,}1^g \cdot 15]}{3{,}1^g \cdot 15} = 0{,}91$$

$$c_c = \frac{\bar{h}(x)_c}{P(x)_c} = \frac{58}{0{,}91} = 63{,}5\ m^3/sec$$

$$\textit{Anfangsphase}\ \beta_c = 189{,}5^g - \left[70 + \frac{30}{2}\right] \cdot 3{,}1^g = -74^g \approx -67^0$$

$$\textit{Radius des Summationsvektorenzuges}\ \frac{p'}{2}\ R = \left|\frac{c_c}{2[\alpha_c - x]}\right| = \frac{63{,}5}{2 \cdot 2{,}79^0 \cdot \frac{2\pi}{360^0}} = 650$$

Wir erhalten somit als erste Näherung:

1808–1822: (58)

$$y_a \approx 154 \sin[77{,}7^0\,t + 146^0] = 154 \sin\left[\frac{2\pi}{4{,}63}t + 146^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

1823–1892:

$$y_b \approx 57{,}5 \sin[68{,}6^0\,t + 46^0] = 57{,}5 \sin\left[\frac{2\pi}{5{,}24}t + 46^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

1893–1942:

$$y_c \approx 63{,}5 \sin[74{,}8^0\,t - 67^0] = 63{,}5 \sin\left[\frac{2\pi}{4{,}81}t - 67^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Zur Kontrolle haben wir das Übergangsstück zwischen q = 55 und q = 85 nachgerechnet, indem wir für die Intervalle mit den Anfangspunkten q = 55, 60, ···, 80 auf Grund der Gleichung für y_b (Gleichung 58) und für die Intervalle mit den Anfangspunkten q = 85, 90, ···, 110 auf Grund der Gleichung für y_c (Gleichung 58) die Periodogrammkomponenten mit einer Intervallänge p′ = 5 nach Gleichung 33 berechneten und dann übergreifende Mittelwerte für die Intervallänge n = 30 bildeten. Nach Abb. 27 ergibt sich ein befriedigender Verlauf des so berechneten Übergangsstückes.

Die sich nach obigen Gleichungen für jede Jahresmitte von 1808 bis 1943 ergebenden Ausschläge der Periodizität p_5 sind auf Tafel VIII zusammengestellt.

3. *Angenäherte Berechnung der Welle* p_{12}

Das Spektrum zeigt auch eine Periodizität mit einer Wellenlänge von rund 12 Jahren an. Es wurde deshalb gewählt:

Die *Versuchswelle* $p' = 12$ *Jahre* und die

Versuchsfrequenz $x = \frac{360^0}{12} = 30^0$

Es wurden zuerst die Periodogrammkomponenten für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten q = 0, 12, 24, ···, 120 und der Länge p′ = 12 Jahre berechnet. Die Produkte $MQ_i \cdot \cos xi$, $MQ_i \cdot \sin xi$ und die Werte A (x, q), B (x, q); $\Sigma A(x, q)_{\varrho^*}$, $\Sigma B(x, q)_{\varrho^*}$; a (x, q), b (x, q) sind auf Tafel VII zusammengestellt. Die Werte $\Sigma A(x, q)_{\varrho^*}$ und $\Sigma B(x, q)_{\varrho^*}$ ergaben den Summationsvektorenzug der Abb. 28, mit den $\frac{p'}{2}$-fachen Werten der Summen der Periodogrammkomponenten:

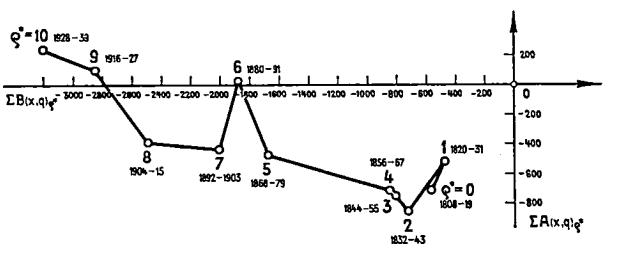


Abb. 28. Summationsvektorenzug für Welle p_{12}, angenäherte Berechnung, Analysenintervall p′ = 12 Jahre

Hierauf wurde die progressive Analyse mit einem Analysenintervall von $n = \varrho \cdot p' = 3 \cdot 12 = 36$ Jahren und einer Intervallverschiebung um 1 Jahr durchgeführt. Das Analysenintervall wurde zu n = 36 Jahren gewählt, um insbesondere die benachbarte Welle p_9 möglichst vollständig auszuschalten. Die Werte $\bar{\psi}(x, q)$ und $\bar{h}(x, q)$ sind in Abb. 29 als Phasen- und Amplitudendiagramm dargestellt.

Das Amplitudendiagramm zeigt deutlich eine sinusförmige Schwankung, welche man auch beim Phasendiagramm wahrnehmen kann, wenn man sich das ganze Diagramm durch *eine* Gerade ausgeglichen denkt. Dies deutet auf benachbarte Periodizitäten hin. In der Tat werden wir später beim zweiten definitiven Berechnungsgang zwei Nebenperioden von rund 10 und 15 Jahren Wellenlänge finden. Wegen der großen Streuungen, mit welchen insbesondere auch der Weg*) des Endpunktes des Periodogrammsvektors behaftet ist, war es uns aber nicht möglich, im ersten Berechnungsgang diese Nebenperioden in bezug auf die Wellenlänge zu erkennen oder gar zu bestimmen. Wir nahmen vorläufig als erste Näherung an, daß das Phasendiagramm in zwei Teile zerfalle, wobei wir der Schwankung des Amplitudendiagramms Rechnung getragen haben in einer Weise, welche im folgenden noch angegeben wird.

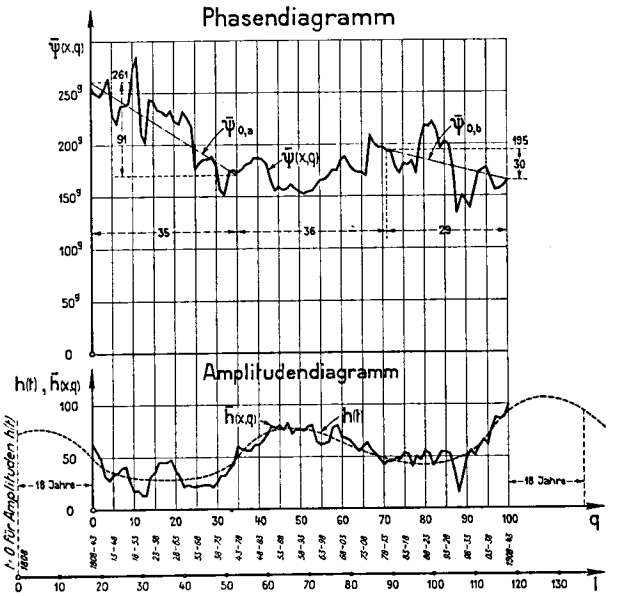


Abb. 29. Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_{12}, angenäherte Berechnung, Analysenintervall n = 36 Jahre, Versuchswelle p' = 12 Jahre

a) Zeitabschnitt 1808 bis 1878

Das entsprechende Stück des Phasendiagramms zwischen q = 0 und q = 35 läßt sich leicht durch eine Gerade ausgleichen. Nach Abb. 29 ist mit $x = 30^0$ und n = 36:

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,a}}{dq} = \frac{-91^g}{35} = -2{,}6^g = -2{,}34^0 = \alpha_a - x$$

Frequenz $\alpha_a = 30^0 - 2{,}34^0 = 27{,}66^0 \approx 27{,}7^0$;

Periode $p_a = 13{,}00$ *Jahre*

Amplitude c_a:

Um den starken periodischen Schwankungen des Amplitudendiagramms Rechnung zu tragen, wurde die Amplitude nicht aus einem Mittelwert berechnet, sondern es wurde das Diagramm durch eine glatte sinusförmige Linie ausgeglichen; die Ordinaten h (t) dieser Linie wurden zur Berechnung der veränderlichen Amplitude der Periodizität p_{12} verwendet, wobei auf eine formelmäßige Erfassung der Ausgleichslinie der Einfachheit halber verzichtet wurde. Die in den nachfolgenden Formeln für p_{12} enthaltenen Werte h (t) sind einfach der Ausgleichslinie des Amplitudendiagramms (Abb. 29) zu entnehmen. Der Anfangspunkt t = 0 der Linie liegt bei $q = -\frac{36}{2} = -18$; die Linie muß bis dorthin extrapoliert werden.

$$P(x)_a = \frac{\sin\left[\alpha_a - x\right]\frac{n}{2}}{\left[\alpha_a - x\right]\frac{n}{2}} = \frac{\sin\left[2{,}6^g \cdot 18\right]}{2{,}6^g \cdot 18} = 0{,}912$$

$$c_a = \frac{h(t)}{0{,}912} = 1{,}09 \cdot h(t)$$

Anfangsphase $\beta_a = 261^g + 18 \cdot 2{,}6^g = 307{,}8^g = 277^0$

b) Zeitabschnitt 1879 bis 1943

Das entsprechende Stück des Phasendiagrammes zwischen q = 71 und q = 100 wurde ebenfalls durch eine Gerade ausgeglichen. Nach Abb. 29 ist mit $x = 30^0$ und n = 36:

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,b}}{dq} = \frac{-30^g}{29} = -1{,}035^g = -0{,}93^0 = \alpha_b - x$$

Frequenz $\alpha_b = 30^0 - 0{,}93^0 = 29{,}07^0 \approx 29{,}1^0$;

Periode $p_b = 12{,}38$ *Jahre*

$$P(x)_b = \frac{\sin\left[\alpha_b - x\right]\frac{n}{2}}{\left[\alpha_b - x\right]\frac{n}{2}} = \frac{\sin\left[1{,}035^g \cdot 18\right]}{1{,}035^g \cdot 18} = 0{,}985$$

Amplitude $c_b = \frac{h_b}{0{,}985} = 1{,}01 \cdot h(t)\ m^3/sec$

Anfangsphase $\beta_b = 195^g + \left[71 + 18\right] \cdot 1{,}035^g = 287^g = 258^0$

Wir erhalten somit als erste Näherung:

$$\left.\begin{aligned} &\textit{1808–1878:}\\ &y_a = 1{,}09 \cdot h(t) \cdot \sin\left[27{,}7^0\, t + 277^0\right] =\\ &\quad = 1{,}09 \cdot h(t) \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{13{,}00} t + 277^0\right] \text{ in } m^3/sec\\ &\textit{1879–1943:}\\ &y_b = 1{,}01 \cdot h(t) \cdot \sin\left[29{,}1^0\, t + 258^0\right] =\\ &\quad = 1{,}01 \cdot h(t) \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{12{,}38} t + 258^0\right] \text{ in } m^3/sec \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

*) Auf die Darstellung dieses Weges in Form einer Abbildung kann hier verzichtet werden.

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist und die Werte für h (t) direkt der ausgleichenden Linie der Abb. 29 zu entnehmen sind. Die sich aus diesen Gleichungen für jede Jahresmitte von 1808 bis 1943 ergebenden Ausschläge der Periodizität p_{12} sind auf Tafel VIII zusammengestellt.

4. Erste angenäherte Berechnung der Welle p_{30}

Das Spektrum zeigt auch eine Periodizität mit einer Wellenlänge von rund 30 Jahren an. Es wird somit gewählt:

Die *Versuchswelle* $p' = 30$ *Jahre* und die

Versuchsfrequenz $x = \frac{360^0}{30} = 12^0$

Es wurden zuerst die Periodogrammkomponenten für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten q = 0, 30, 60 und 90 und der Länge p′ = 30 Jahre berechnet. Diese Berechnung erfolgte hier ausnahmsweise interessehalber und zu Vergleichszwecken mit Hilfe eines Faltschemas, wie sie in der Praxis der harmonischen Analyse üblich sind (vgl. unsere diesbezügliche Bemerkung auf Seiten 26 und 37). Hierauf wurde die progressive Analyse durchgeführt. Ein Versuch zeigte, daß von q = 0 bis q = 70 eine Intervallverschiebung um 10 Jahre ein Phasen- und Amplitudendiagramm ergibt, welches für eine erste Näherungsrechnung genügend dicht ist. Ab q = 70 treten große Störungen ein, weshalb von da an eine Intervallverschiebung um nur 2 Jahre gewählt worden ist. Die berechneten Werte ψ (x, q) und h (x, q) sind in Abb. 30 als Phasen- und Amplitudendiagramm dargestellt. Das Amplitudendiagramm zeigt eine sinusförmige Schwankung, welche durch die einfache Formel

$$h(t) = 54 + 18 \sin [3{,}6^0\, t - 83^0]$$

erfaßt werden kann. Die Schwankung des Amplitudendiagramms deutet auf eine Nebenperiode hin. Wir werden diese beim zweiten und dritten Berechnungsgang nach Ausschaltung von Störungen durch andere Periodizitäten erfassen können. Hier im ersten Berechnungsgang war es aber nicht möglich, die Nebenperiode genauer zu erkennen oder gar zu bestimmen. Wir glaubten damals annehmen zu müssen, daß das Phasendiagramm, wie folgt angegeben, in zwei Teile zerfalle. Es schien uns auch nicht gegeben, ein längeres Analysenintervall als p′ = 30 Jahre anzuwenden, da sonst der zweite Teil des Phasendiagramms auf seine ganze Länge vom Verhalten der Periodizität im ersten Zeitabschnitt beeinflußt würde. Bei einem Analysenintervall p′ = 30 Jahre mußten wir aber zum vorneherein mit starken Verzerrungen des Phasen- und Amplitudendiagramms durch den Störungsvektor rechnen (vgl. Darlegungen auf Seite 30). Es handelt sich um eine erste, rohe Näherungsrechnung, deren Ergebnisse in der Folge aber doch in nützlicher Weise zur Ausschaltung der Welle p_{30} bei der Berechnung von andern Periodizitäten verwendet werden konnten.

a) Zeitabschnitt 1808 bis 1911

Das entsprechende Stück des Phasendiagramms zwischen q = 0 und q = 74 läßt sich leicht durch eine Gerade ausgleichen. Nach Abb. 30 ist mit x = 12° und p′ = 30:

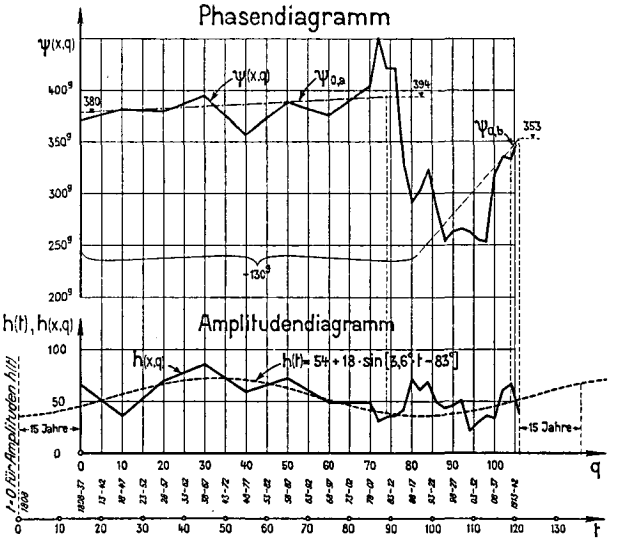


Abb. 30. Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_{30} erste angenäherte Berechnung, Analysenintervall = Versuchswelle p′ = 30 Jahre

$$\frac{d\psi_{0,a}}{dq} = \frac{394^g - 380^g}{74} = +0{,}19^g = +0{,}17^0 = \alpha_a - x$$

Frequenz $\alpha_a = 12^0 + 0{,}17^0 = 12{,}17^0 \approx 12{,}2^0$;

Periode $p_a = 29{,}6$ *Jahre*

$$P(x)_a = \frac{\sin\left[\alpha_a - x\right]\frac{p'}{2}}{\left[\alpha_a - x\right]\frac{p'}{2}} = \frac{\sin\left[0{,}19^g \cdot 15\right]}{0{,}19^g \cdot 15} \approx 1$$

Amplitude $c_a = h(t) = 54 + 18 \sin\left[3{,}6^0\, t - 83^0\right]$ *m³/sec*

Anfangsphase $\beta_a =$

$$380^g - 15 \cdot 0{,}19^g = 377{,}15^g = -22{,}85^g \approx -21^0$$

b) Zeitabschnitt 1912 bis 1943:

Die Ausgleichsgerade (Abb. 30) wurde in Richtung der Punkte des Phasendiagramms, welche den Abszissen q = 100 bis q = 106 entsprechen, gezogen. (Die Punkte bei q = 100 und 102 sind vom Verhalten der Periodizität vor 1911 nicht mehr stark beeinflußt.)

$$\frac{d\psi_{0,b}}{dq} = \frac{353^g + 130^g}{106} = +4{,}55^g = +4{,}1^0 = \alpha_b - x$$

Frequenz $\alpha_b = 12^0 + 4{,}1^0 = 16{,}1^0$; *Periode* $p_b = 22{,}4$ *Jahre*

$$P(x)_b = \frac{\sin\left[\alpha_b - x\right]\frac{p'}{2}}{\left[\alpha_b - x\right]\frac{p'}{2}} = \frac{\sin\left[4{,}55^g \cdot 15\right]}{4{,}55^g \cdot 15} = 0{,}82 \approx 1{,}0 \text{ gesetzt,}$$

was bei der hier vorliegenden ersten rohen Annäherung der Einfachheit halber erlaubt ist.

Amplitude $c_b \approx 54 + 18 \sin\left[3{,}6^0\, t - 83^0\right]$ *m³/sec*

Anfangsphase $\beta_b = -130^g - 15 \cdot 4{,}54^g = -198^g = -178^0$

Wir erhalten somit als erste Näherung:

1808–1911: (60)

$$y_a = [54 + 18\sin(3{,}6^0 t - 83^0)] \cdot \sin[12{,}2^0 t - 21^0]$$

$$= [54 + 18\sin(3{,}6^0 t - 83^0)] \cdot \sin\left|\frac{2\pi}{29{,}6} t - 21^0\right| \text{ in } m^3/sec$$

1912–1943:

$$y_b = [54 + 18\sin(3{,}6^0 t - 83^0)] \cdot \sin[16{,}1^0 t - 178^0]$$

$$= [54 + 18\sin(3{,}6^0 t - 83^0)] \cdot \sin\left|\frac{2\pi}{22{,}4} t - 178^0\right| \text{ in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Die sich aus diesen Gleichungen für jede Jahresmitte von 1808 bis 1943 ergebenden Ausschläge der Periodizität p_{30} sind auf Tafel VIII zusammengestellt.

5. *Berechnung der säkularen Welle* p_{120}

Da die Welle p_{120} beinahe so lang ist wie die ganze zur Verfügung stehende Beobachtungsreihe, so kann das Verfahren der Phasendiagramme nicht angewendet werden. Die Welle p_{120} kann aber genügend genau durch eine Glättung mit Hilfe von übergreifenden Mittelwerten erhalten werden, wobei zuerst die Welle p_{30} ausgeschaltet wurde.

Ausschaltung der Welle p_{30}

Für jedes Jahr der Reihe 1808 bis 1943 wurde vom Werte des mittleren jährlichen Abflusses MQ der für die betreffende Jahresmitte berechnete Wert des Ausschlages der Periodizität p_{30} abgezogen, also für ein Jahr i gebildet.

$$MQ_i - y_i^{(30)}$$

Auf Tafel VIII sind die Werte MQ in Kolonne 3 und die Werte $y^{(30)}$ in Kolonne 7 enthalten.

Ausschaltung der Welle p_{12} und p_6

Wichtig ist es auch, die relativ lange Welle p_{12} auszuschalten. Dies erfolgte durch eine Glättung mittels übergreifenden Mittelwerten für ein Intervall von 12 Jahren. Damit wird gleichzeitig die Welle p_6 weitgehend ausgeschaltet. Diese Glättung genügte aber noch nicht, die erhaltenen Werte ergaben einen noch zu wenig glatt verlaufenden Linienzug. Es war notwendig, noch eine zweite Glättung durchzuführen.

Ausschaltung der Welle p_7

Es schien angezeigt, bei der zweiten Glättung noch insbesondere gut die kräftige Welle p_7 auszuschalten. Deshalb wurde die zweite Glättung mit einem Intervall von 7 Jahren durchgeführt. Die sich so ergebenden Mittelwerte wurden aufgetragen und durch eine von Auge gezogene glatte Linie ausgeglichen. Diese Linie ist auf den Tafeln XIX und XX als Welle p_{120} eingetragen. Es wurden ihr für die Mitte eines jeden Jahres die Werte Q′ entnommen, welche auf Tafel VIII in Kolonne 8 zusammengestellt sind.

Es konnte sich erübrigen, die Wirkung der Glättung durch einen Glättungsfaktor, welcher vom Werte 1 nicht sehr verschieden ist, zu berücksichtigen. Die bei der Glättung verlorengegangenen Glieder zu Beginn und am Ende der Beobachtungsreihe wurden durch Extrapolation der Welle p_{120} gewonnen.

II. Zweiter Berechnungsgang

1. *Definitive Berechnung der Welle* p_6

Gemäß dem Spektrum (vgl. Seite 68) ist auch eine Periodizität mit einer Wellenlänge von rund 6 Jahren vorhanden:

Bei Verwendung der unveränderten, beobachteten Jahresmittel der Abflußmengen erwies es sich, wie längere Versuchsrechnungen zeigten, als unmöglich, die Welle p_6 angenähert zu isolieren. Die Amplitude dieser Welle ist im Vergleich zu den Amplituden der benachbarten Wellen p_5 und p_7 zu klein. Auch die säkulare Welle p_{120} wirkt sich störend aus. Wir haben deshalb die beobachteten Abflußmengen MQ zuerst von den Periodizitäten p_5, p_7 und p_{120} befreit, so gut dies auf Grund der ersten angenäherten Berechnung von p_5 und p_7 möglich ist. Es wurden also auf Grund der auf Tafel VIII zusammengestellten Zahlenwerte die Differenzen berechnet

$$d = MQ - [Q' + y^{(5)} + y^{(7)}]$$

und so eine neue Zahlenreihe gebildet, welche der Periodogrammrechnung unterworfen wurde. Der Mittelwert dieser Reihe für die Jahre 1808 bis 1939 ist $d_m = 2\ m^3/sec$ und die Streuung $\sigma = \pm 143\ m^3/sec$ (vgl. Tabelle 12, Seite 65).

Da die Wellenlänge der gesuchten Periodizität gleich rund 6 Jahre ist, so wird gewählt:

Versuchswelle $p' = 6$ *Jahre*,

Versuchsfrequenz $x = \frac{360^0}{6} = 60^0$

Die Produkte $d_i \cdot \cos xi$, $d_i \cdot \sin xi$ und die Werte A (x, q), B (x, q); Σ A (x, q) $_{\varrho*}$, Σ B (x, q) $_{\varrho*}$; a (x, q) und

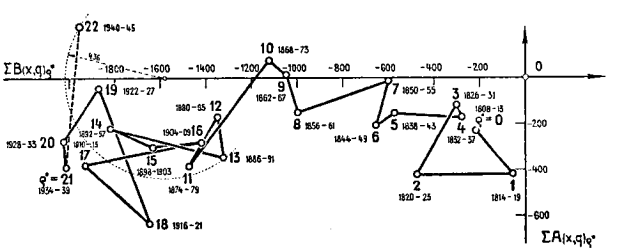


Abb. 31. Summationsvektorenzug für Welle p_6, definitive Berechnung, Analysenintervall p′ = 6 Jahre. (Der Punkt 22 wurde erst nach Abschluß der Arbeit, als dann noch das Jahr 1945 vorlag, berechnet. Vgl. diesbezüglich die Fußnote auf Seite 77)

b (x, q) für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten q = 0, 6, 12, · · ·, 126 und der Länge p′ = 6 Jahre sind auf Tafel IX zusammengestellt. Die Werte Σ A (x, q) $_{\varrho^*}$ und Σ B (x, q) $_{\varrho^*}$ wurden als Summationsvektorenzug aufgetragen (Abb. 31), ($\frac{p'}{2}$-fache Werte der Summen der Periodogrammkomponenten).

Ferner haben wir die Periodogrammkomponenten a (x, q) und b (x, q) als Abb. 32 in einem rechtwinkligen Koordinatennetz aufgetragen. Es ergibt sich ein Bild von der Art einer Punktwolke. Verfolgt man an Hand der Ziffern, welche die Reihenfolge der Punkte angeben, den Weg des Endpunktes des Periodogrammvektors, so kann man bei der großen Streuung der Punkte keine systematische Drehung des Vektors feststellen. Die Frequenz der Versuchswelle wird sich somit von der Frequenz der gesuchten Welle nur wenig unterscheiden.

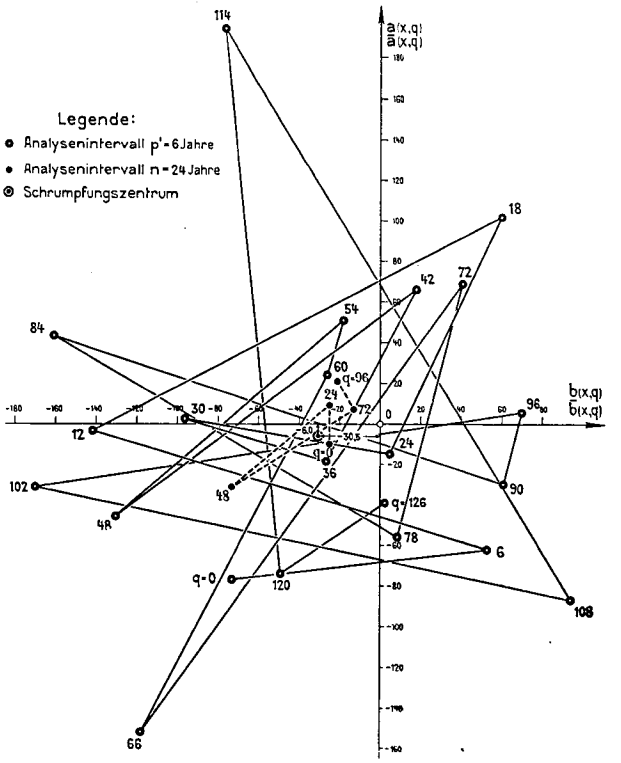


Abb. 32. Welle p_6, definitive Berechnung, Periodogrammkomponenten a (x, q), b (x, q) für Analysenintervall p′ = 6 Jahre und $\bar{a}$ (x, q), $\bar{b}$ (x, q) für Analysenintervall n = 24 Jahre

Immerhin scheint der Summationsvektorenzug eine leichte Krümmung aufzuweisen, was auf eine ganz langsame Drehung des Periodogrammvektors hindeutet. Wir haben deshalb in analoger Weise, wie bei der ersten angenäherten Berechnung von Welle p_5, aus den Werten a (x, q) und b (x, q) die Periodogrammkomponenten $\bar{a}$ (x, q), $\bar{b}$ (x, q), $\bar{h}$ (x, q) und $\bar{\psi}$ (x, q) berechnet für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten q = 0, 6, 12, · · · und der Länge n = ϱ · p′ = 4 · p′ = 24 Jahre. Die voneinander unabhängigen Komponenten $\bar{a}$ (x, 0), $\bar{b}$ (x, 0); $\bar{a}$ (x, 24), $\bar{b}$ (x, 24); · · ·; $\bar{a}$ (x, 96), $\bar{b}$ (x, 96) wurden ebenfalls in Abb. 32 eingetragen. Man sieht deutlich, wie die «Punktwolke» entsprechend den Ausführungen auf Seite 56 zusammenschrumpft um ein Schrumpfungszentrum, welches außerhalb des Koordinatennullpunktes liegt. Dies weist also auf das Vorhandensein einer persistenten Periodizität hin. Das Schrumpfungszentrum hat die Koordinaten $\bar{a}$ (x, q)$_m$ = −6,0; $\bar{b}$ (x, q)$_m$ = − 30,5. Die Komponenten $\bar{\psi}$ (x, q) und $\bar{h}$ (x, q) sind in Abb. 33 als Phasen- und Amplitudendiagramm aufgetragen.

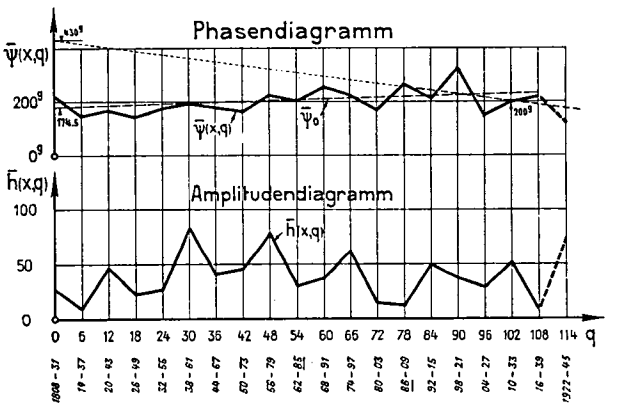


Abb. 33. Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_6, definitive Berechnung, Analysenintervall n = 24 Jahre. (Die Werte $\bar{\psi}$ (x, q) und $\bar{h}$ (x, q) für q = 114 wurden erst nach Abschluß der Arbeit, als dann noch das Jahr 1945 vorlag, berechnet.

Das Phasendiagramm wurde mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate durch eine Gerade ausgeglichen.*) Es ergab sich eine

$$\text{Neigung } \frac{d\,\bar{\psi}_0}{d\,q} = 0{,}52^g = 0{,}46^0 \text{ und für } q = 0\text{: } \bar{\psi}_0 = 174{,}5^g$$

Wir erhalten also mit x = 60°:

Frequenz $\alpha = 60^0 + 0{,}46^0 = 60{,}46^0 \approx 60{,}5^0$;

Periode p = *5,95 Jahre*

Amplitude c:

Wegen den großen aperiodischen Streuungen der Periodogrammkomponenten und dem kleinen Wert $\alpha - x$ ist so vorzugehen, wie auf Seite 40 angegeben ist. Es ist mit n = 24:

$$\bar{a}(x,q)_m = \frac{1}{22}\sum_{q=0}^{21} a(x,q) = -6{,}0$$

$$\bar{b}(x,q)_m = \frac{1}{22}\sum_{q=0}^{21} b(x,q) = -30{,}5$$

Es sind dies die Koordinaten des Schrumpfungszentrums (Abb. 32)

*) Im Phasendiagramm ist ab q = 78 eine Neigung zu einer leichten Richtungsänderung erkennbar; auch beim Summationsvektorenzug muß man sich fragen, ob von Punkt ϱ^* = 13 an nicht eine Richtungsänderung eingesetzt hat. Nach Abschluß der Arbeit stand dann noch das Jahr 1945 zur Verfügung, und es konnte nachträglich noch je ein weiterer Punkt des Phasendiagramms und des Summationsvektorenzuges berechnet werden (Punkt ϱ^* = 22 und Punkt bei q = 114). Es ließ sich mit Hilfe dieser weitern Punkte erkennen, daß vom Jahre 1886 an die Periodizität p_6 eine leichte Änderung erfahren hat, wie im Abschnitt «Zusammenfassung und Erörterung der Ergebnisse» auf Seite 111, rechts, noch näher ausgeführt wird.

$$c \approx \bar{h}(x) = \sqrt{\bar{a}^2(x,q)_m + \bar{b}^2(x,q)_m} \approx 31\ m^3/sec$$

Glättungsfaktor $\approx 1{,}00$; $P(x) \approx 1{,}00$

Anfangsphase $\beta = 174{,}5^g - 12 \cdot 0{,}52^g = 168{,}26^g \approx 151{,}4^0$

(61)

$$y = 31 \sin[60{,}5^0 t + 151{,}4^0] = 31 \sin\left|\frac{2\pi}{5{,}95} t + 151{,}4^0\right| \text{ in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Die sich nach dieser Gleichung für jede Jahresmitte von 1808 bis 1943 ergebenden Ausschläge der Periodizität p_6 sind auf Tafel XV zusammengestellt, und die Periodizität ist auf Tafel XIX graphisch aufgetragen.

2. *Angenäherte Berechnung von Welle* p_9

Aus dem Spektrum (vgl. Seite 68) ist auch eine Periodizität mit einer Wellenlänge von rund 9 Jahren ersichtlich. Bei Verwendung der unveränderten, beobachteten Jahresmittel der Abflußmengen erwies es sich ebenfalls als unmöglich, die Welle p_9 einigermaßen angenähert zu isolieren. Die Störung durch die benachbarte Welle p_7 ist zu groß. Auch wirkt sich der säkulare Gang störend aus. Die beobachteten Abflußmengen MQ wurden deshalb zuerst von den Wellen p_7 und p_{120}, sowie vorsichtigerweise auch von p_{12} befreit. Es wurde also auf Grund der auf Tafel VIII zusammengestellten Zahlenwerte die Differenzen berechnet

$$d = MQ - [Q' + y^{(7)} + y^{(12)}]$$

und so eine neue Zahlenreihe gebildet, welche der Periodogrammrechnung unterworfen wurde. Der Mittelwert dieser Reihe für die Jahre 1808 bis 1942 ist $d_m = +4\ m^3/sec$ und die Streuung $\sigma = \pm 146\ m^3/sec$ (vgl. Tabelle 12, Seite 65).

Da die Wellenlänge der gesuchten Periodizität gleich rund 9 Jahre ist, so wird gewählt:

Versuchswelle $p' = 9$ *Jahre*

Versuchsfrequenz $x = \frac{360^0}{9} = 40^0$.

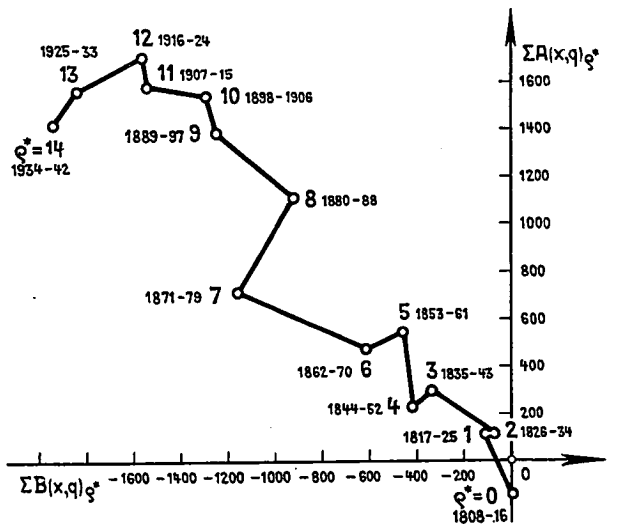


Abb. 34. Summationsvektorenzug für Welle p_9, angenäherte Berechnung, Analysenintervall p' = 9 Jahre

Die Produkte $d_i \cdot \cos xi$, $d_i \cdot \sin xi$ und die Werte $A(x,q)$, $B(x,q)$; $\Sigma A(x,q)_{\varrho^*}$, $\Sigma B(x,q)_{\varrho^*}$; $a(x,q)$ und $b(x,q)$ für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten $q = 0, 9, 18, \cdots, 126$ und der Länge $p' = 9$ Jahre sind auf Tafel X zusammengestellt. Aus den Werten $\Sigma A(x,q)_{\varrho^*}$ und $\Sigma B(x,q)_{\varrho^*}$ wurde der in Abb. 34 dargestellte Summationsvektorenzug ($\frac{p'}{2}$-fache Werte, vgl. Bemerkung auf Seite 69 bei Berechnung von Welle 7) gebildet, welcher in einer Hauptrichtung angenähert geradlinig fortschreitet und so das Vorhandensein einer persistenten Periodizität angibt, deren Frequenz sich von der Versuchsfrequenz nur wenig unterscheidet.

Ferner wurden die Periodogrammkomponenten $a(x,q)$ und $b(x,q)$ als Abb. 35 in einem rechtwinkligen Koordinatennetz aufgetragen, wobei sich, wie bei Welle p_6, eine Punktwolke ergab, was bestätigt, daß zwischen der Frequenz der gesuchten Welle p_9 und der Versuchsfrequenz x nur ein kleiner Unterschied besteht.

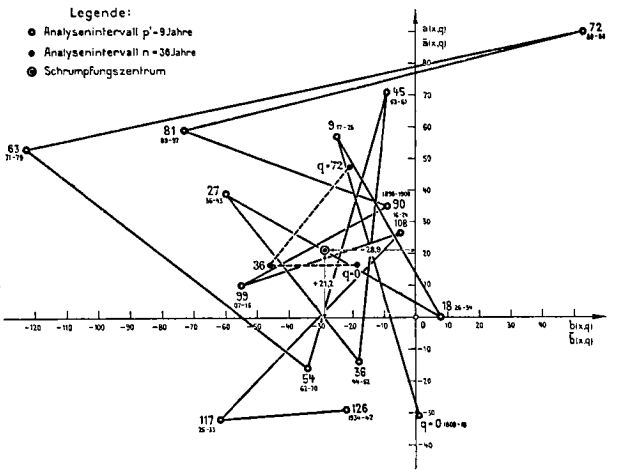


Abb. 35. Welle p_9, erste angenäherte Berechnung, Periodogrammkomponenten a (x, q), b (x, q) für Analysenintervall p' = 9 Jahre und $\bar{a}$ (x, q), $\bar{b}$ (x, q) für Analysenintervall n = 36 Jahre

In analoger Weise, wie bei Welle p_6, haben wir dann aus den Werten a (x, q) und b (x, q) die Periodogrammkomponenten $\bar{a}(x,0)$, $\bar{b}(x,0)$, $\bar{h}(x,q)$ und $\bar{\psi}(x,q)$ berechnet für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten $q = 0, 9, 18, \cdots$ und der Länge $n = \varrho \cdot p' = 4 \cdot p' = 36$ Jahre. Trägt man die voneinander unabhängigen Komponenten $\bar{a}(x,q)$, $\bar{b}(x,q)$; $\bar{a}(x,36)$, $\bar{b}(x,36)$ und $\bar{a}(x,72)$, $\bar{b}(x,72)$ ebenfalls in Abb. 35 ein, so sieht man, wie die Punktwolke um ein Schrumpfungszentrum zusammenschrumpft, welches mit den Koordinaten $\bar{a}(x,q)_m = +21{,}2$ und $\bar{b}(x,q)_m = -28{,}9$ außerhalb des Koordinatennullpunktes liegt.

Die Komponenten $\bar{\psi}(x,q)$ und $\bar{h}(x,q)$ sind in Abb. 36 als Phasen- und Amplitudendiagramm aufgetragen. Wegen den geringen Streuungen und der einfachen Gestalt des Phasendiagramms könnten wir uns mit einer Intervallverschiebung um 9 Jahre begnügen.

Das Phasendiagramm wurde mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate durch eine Gerade ausgeglichen.

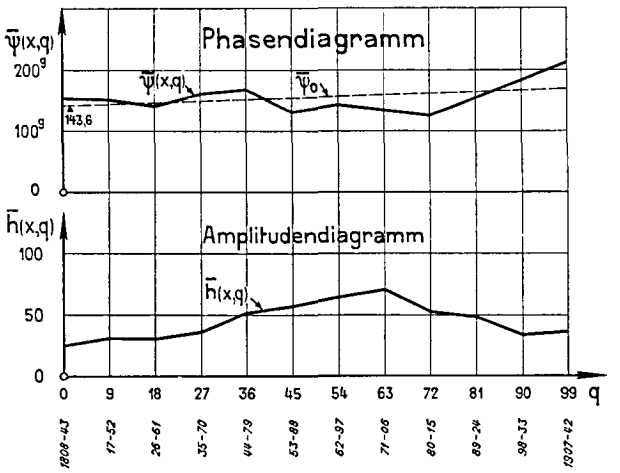


Abb. 36. Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_9, angenäherte Berechnung, Analysenintervall n = 36 Jahre

Es ergab sich:

$$\frac{d\bar{\psi}_0}{dq} = +\,0{,}26^g = 0{,}23^0 \text{ und } \bar{\psi}_0 = 143{,}6^g \text{ für } q = 0$$

Wir erhalten also auf analoge Weise wie bei der Berechnung der Welle p_6 mit $x = 40^0$ und $n = 36$:

Frequenz $\alpha = 40^0 + 0{,}23^0 = 40{,}23^0 \approx 40{,}2^0$;

Periode $p = 8{,}94$ *Jahre*

Amplitude $c : \bar{a}(x,q)_m = +21{,}2 ; \bar{b}(x,q)_m = -28{,}9 ; P(x) \approx 1{,}00$

$$c \approx \bar{h}(x) = \sqrt{\bar{a}^2(x,q)_m + \bar{b}^2(x,q)_m} \approx 36\ m^3/sec$$

Anfangsphase $\beta = 143{,}6^g - 18 \cdot 0{,}26^g = 138{,}9^g \approx 125^0$

$$y = 36 \sin\left[40{,}2^0\, t + 125^0\right] = 36 \sin\left|\frac{2\pi}{8{,}94} t + 125^0\right| \text{ in } m^3/sec \qquad (62)$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Die sich nach dieser Gleichung für jede Jahresmitte von 1808 bis 1943 ergebenden Ausschläge der Periodizität p_9 sind auf Tafel XV zusammengestellt.

3. *Definitive Berechnung der Welle* p_7

Um die Konstanten der Welle p_7 noch genauer aus einem möglichst ungestörten Phasendiagramm berechnen zu können, haben wir die beobachteten Jahresmittel der Abflußmengen von den bereits berechneten Periodizitäten p_5 (angenäherte Werte nach Gl. 58), p_6 (definitive Werte nach Gl. 61), p_9 (angenäherte Werte nach Gl. 62), p_{12} (angenäherte Werte nach Gl. 59), p_{30} (angenäherte Werte nach Gl. 60) und p_{120} (definitive Werte = Q') befreit. Es wurden also auf Grund der auf Tafel VIII [Q', $y^{(5)}$, $y^{(12)}$, $y^{(30)}$] und Tafel XV [$y^{(6)}$, $y^{(9)}$] zusammengestellten Werten die Differenzen berechnet:

$$d = M\,Q - [Q' + y^{(5)} + y^{(12)} + y^{(30)}] - [y^{(6)} + y^{(9)}]$$

und so eine neue Zahlenreihe gebildet, welche der Periodogrammrechnung unterworfen wurde. Der Mittelwert dieser Reihe für die Jahre 1808 bis 1943 ist $d_m = -2 m^3/sec$ und die Streuung $\varrho = \pm 137\ m^3/sec$ (vgl. Tabelle 12, Seite 65).

Wir wählen wiederum:

Versuchswelle $p' = 7$ *Jahre*

Versuchsfrequenz $x = \frac{360^0}{7} = 51{,}43^0$

Die Produkte $d_i \cdot \cos x\,i$, $d_i \cdot \sin x\,i$ und die Werte $A(x,q)$, $B(x,q)$; $\Sigma A(x,q)_{\varrho^*}$, $\Sigma B(x,q)_{\varrho^*}$; $a(x,q)$ und $b(x,q)$ für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten $q = 0, 7, 14, \cdots, 126$ und der Länge $p' = 7$ Jahre sind auf Tafel XI zusammengestellt. Aus den Werten $\Sigma A(x,q)_{\varrho^*}$ und $\Sigma B(x,q)_{\varrho^*}$ wurde der in Abb. 37 dargestellte Summationsvektorenzug gebildet ($\frac{p'}{2}$-fache Werte). Die Streuungen dieses Summationsvektorenzuges sind im Vergleich zu demjenigen der angenäherten Berechnung, Abb. 23, kleiner geworden. Die Änderung im Verhalten der Periodizität p_7 bei Punkt $\varrho^* = 12$ (1892 bis 1898) kommt sehr schön zum Ausdruck.

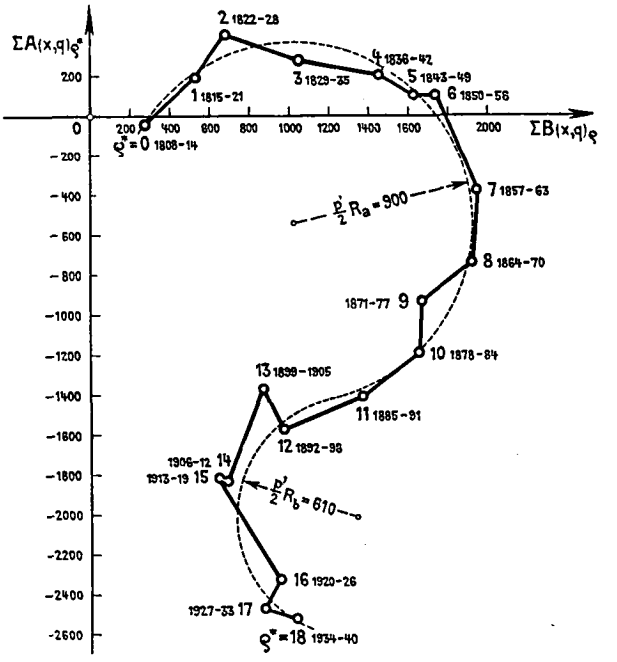


Abb. 37. Summationsvektorenzug für Welle p_7, definitive Berechnung, Analysenintervall p' = 7 Jahre

Um die Veränderung im Verhalten der Periodizität im Phasendiagramm möglichst gut erfassen und um den Weg des Endpunktes des Periodogrammvektors in Abb. 38 interessehalbers in kleinen Schritten verfolgen zu können, ferner wegen den relativ noch starken kurzfristigen Schwankungen im Verlaufe des Phasendiagramms wurde zu einer progressiven Analyse mit einer Intervallverschiebung von nur 1 Jahr geschritten. Das Analysenintervall wurde zu $n = \varrho \cdot p' = 21$ Jahren gewählt. Es wurden also nach Seite 37 rechts die Werte $a(x,q)$ und $b(x,q)$ für $q = 0, 1, 2, 3, \cdots$ berechnet und nach Gl. 37 die Komponenten $\bar{a}(x,q)$ und $\bar{b}(x,q)$ sowie $\bar{h}(x,q)$ und $\bar{\psi}(x,q)$ bestimmt.

In Abb. 38 sind die Komponenten $\bar{a}(x,q)$ und $\bar{b}(x,q)$ in einem rechtwinkligen Koordinatennetz dargestellt. Im Vergleich zu der analogen Darstellung für die erste Berechnung, Abb. 24, ersieht man, daß der Weg des Endpunktes des Periodogrammvektors weniger Streuungen aufweist, trotzdem das Analysenintervall kürzer ist. Dies ist die Folge der Ausschaltung der andern Periodizitäten.

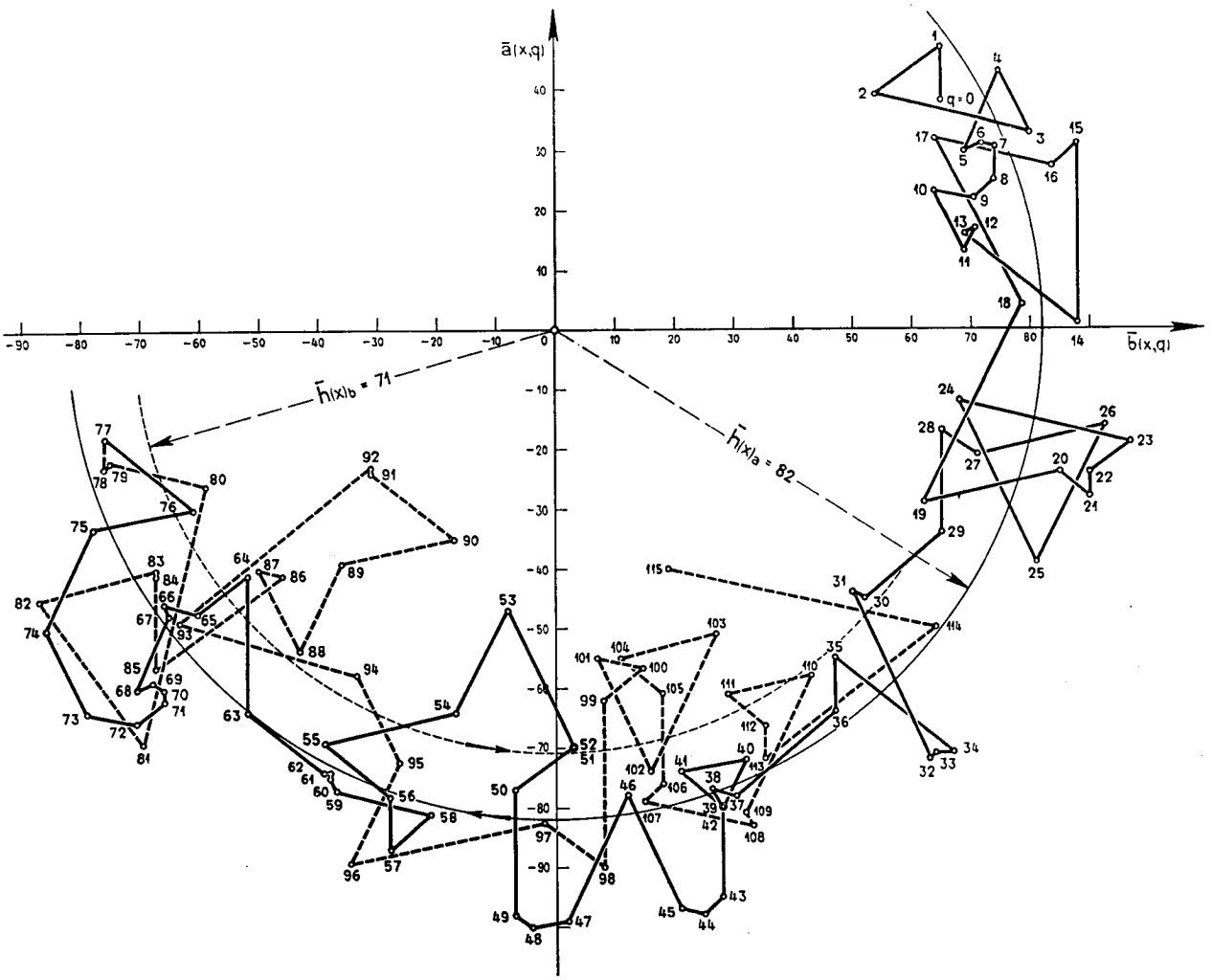


Abb. 38. Periodogrammkomponenten $\bar{a}$ (x, q) und $\bar{b}$ (x, q) für Welle p_7, definitive Berechnung, Analysenintervall n = 21 Jahre

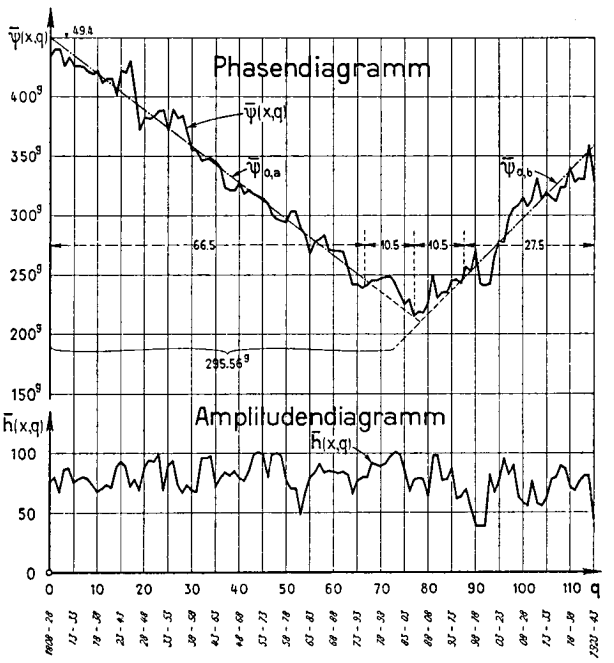


Abb. 39. Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_7, definitive Berechnung, Analysenintervall n = 21 Jahre

Das Phasen- und Amplitudendiagramm Abb. 39 zeigt infolge der Ausschaltung der benachbarten Periodizitäten ebenfalls keine periodischen Schwankungen mehr. Das Phasendiagramm konnte nach der Methode der kleinsten Quadrate leicht durch zwei Geraden ausgeglichen werden. Aus dem Summationsvektorenzug und dem Phasendiagramm ist nun leicht und genau erkennbar, daß der Wechsel im Verhalten der Periodizität im Jahre 1895 eintritt.

Es ergab sich (vgl. Abb. 39) mit x = 51,43° und n = 21:

Zeitabschnitt 1808 bis 1894:

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,a}}{dq} = -3{,}05^g = -2{,}74^0 \text{ und } \bar{\psi}_{0,a} = 49{,}40^g \text{ für } q = 0$$

Frequenz $\alpha_a = 51{,}43^0 - 2{,}74^0 = 48{,}69^0 \approx 48{,}7^0$;

Periode $p_a = 7{,}39$ *Jahre*

$\bar{h}(x)_a = 82$ [als arithmetisches Mittel der h (x, q) berechnet, vgl. Seite 40.]

$$P(x)_a = \frac{\sin[3{,}05^g \cdot 10{,}5]}{3{,}05^g \cdot 10{,}5} = 0{,}958$$

Amplitude $c_a = \frac{82}{0{,}958} \approx 86\ m^3/sec$

Anfangsphase $\beta_a = 49{,}40^g + 10{,}5 \cdot 3{,}05^g = 81{,}37^g \approx 73{,}2^0$

Radius des Summationsvektorenzuges

$$\frac{p'}{2} R_a = \left| \frac{c_a}{2[\alpha_a - x]} \right| = \frac{86}{2 \cdot 2{,}74^0 \cdot \frac{2\pi}{360^0}} = 900$$

Zeitabschnitt 1895 bis 1943:

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,b}}{dq} = +4{,}01^g = +3{,}61^0$$

Frequenz $\alpha_b = 51{,}43^0 + 3{,}61^0 = 55{,}04^0 \approx 55{,}0^0$;
Periode $p_b = 6{,}54$ *Jahre*

$$\bar{h}(x)_b = 71;\ P(x)_b = \frac{\sin[4{,}01^g \cdot 10{,}5]}{4{,}01^g \cdot 10{,}5} = 0{,}929$$

Amplitude $c_b = \frac{71}{0{,}929} \approx 77\ m^3/sec$

Anfangsphase $\beta_b = 295{,}56^g - 10{,}5 \cdot 4{,}01^g = 253{,}44^g = 228{,}1^0$

Radius des Summationsvektorenzuges

$$\frac{p'}{2} R_b = \left| \frac{c_b}{2[\alpha_b - x]} \right| = \frac{77}{2 \cdot 3{,}61^0 \cdot \frac{2\pi}{360^0}} = 610$$

Es gelten also die Gleichungen:

1808 – 1894: (63a)

$$y_a = 86 \sin[48{,}7^0 t + 73{,}2^0] = 86 \sin\left| \frac{2\pi}{7{,}39} t + 73{,}2^0 \right| \text{ in } m^3/sec$$

1895 – 1943: (63b)

$$y_b = 77 \sin[55{,}0^0 t + 228{,}1^0] = 77 \sin\left| \frac{2\pi}{6{,}54} t + 228{,}1^0 \right| \text{ in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Die sich nach Gleichung 63 für jede Jahresmitte von 1808 bis 1943 ergebenden Ausschläge der Periodizität p_7 sind auf Tafel XV zusammengestellt, und die Periodizität ist auf Tafel XIX graphisch aufgetragen.

4. Zweite angenäherte Berechnung der Welle p_5

Die Konstanten der Welle p_5 wurden in einem zweiten Berechnungsgang noch genauer bestimmt. Zu diesem Zwecke sind die beobachteten Jahresmittel der Abflußmengen von den bereits berechneten Periodizitäten p_6 (definitive Werte nach Gl. 61), p_7 (definitive Werte nach Gl. 63), p_9 (angenäherte Werte nach Gl. 62), p_{12} (angenäherte Werte nach Gl. 59), p_{30} (angenäherte Werte nach Gl. 60) und p_{120} (definitive Werte = Q') befreit worden. Es sind also auf Grund der auf Tafel VIII [$p_{120} = Q'$, $y^{(12)}$, $y^{(30)}$] und Tafel XV [$y^{(6)}$, $y^{(7)}$, $y^{(9)}$] zusammengestellten Werte die Differenzen berechnet worden:

$$d = MQ - [Q' + y^{(12)} + y^{(30)}] - [y^{(6)} + y^{(7)} + y^{(9)}]$$

womit sich eine neue Zahlenreihe ergab, welche der Periodogrammrechnung unterworfen wurde. Der Mittelwert dieser Reihe für die Jahre 1808 bis 1943 ist $-2\ m^3/sec$ und die Streuung $\sigma = \pm 138\ m^3/sec$ (vgl. Tabelle 12, Seite 65).

Der zweite Berechnungsgang ergibt die Konstanten der Periodizität p_5 bis zum Jahre 1887 genau genug und definitiv. Für die Jahre nach 1887 ist ein dritter Berechnungsgang nötig.

Es wird wiederum gewählt:

Versuchswelle $p' = 5$ *Jahre*

Versuchsfrequenz $x = \frac{360^0}{5} = 72^0$

Die Produkte $d_i \cdot \cos x\,i$, $d_i \cdot \sin x\,i$ und die Werte A (x, q), B (x, q); Σ A (x, q)$_{\varrho^*}$, Σ B (x, q)$_{\varrho^*}$; a (x, q) und b (x, q) für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten q = 0, 5, 10, · · · und der Länge p' = 5 Jahre sind auf Tafel XII zusammengestellt. Aus den Werten Σ A (x, q)$_{\varrho^*}$ und Σ B (x, q)$_{\varrho^*}$ wurde der in Abb. 40 dargestellte Summationsvektorenzug gebildet. Die Streuungen dieses Summationsvektorenzuges sind im Vergleich zu demjenigen der ersten angenäherten Berechnung, Abb. 26, kleiner geworden. Eindeutig ist nun ersichtlich, daß vier Zeitabschnitte mit einem verschiedenen periodischen Verhalten der Welle p_5 zu unterscheiden sind.

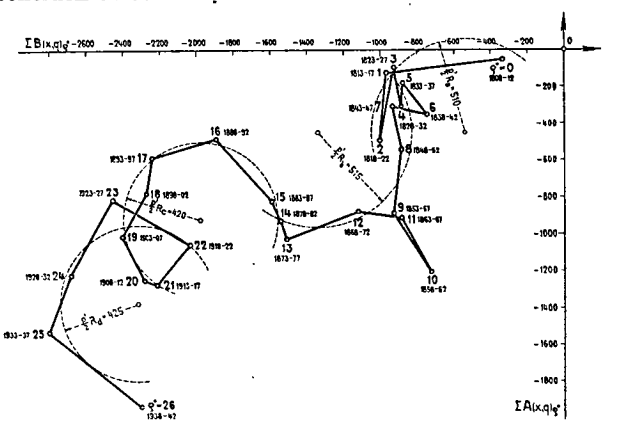


Abb. 40. Summationsvektorenzug für Welle p_5, zweite angenäherte Berechnung, Analysenintervall = Versuchsperiode p' = 5 Jahre

Aus den Werten a (x, q) und b (x, q) wurden für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten q = 0, 5, 10, · · · und mit der Länge $n = \varrho \cdot p' = 15$ Jahre die Periodogrammkomponenten $\bar{a}$ (x, q) und $\bar{b}$ (x, q), sowie $\bar{h}$ (x, q) und $\bar{\psi}$ (x, q) berechnet.

In Abb. 41 sind die Komponenten $\bar{a}$ (x, q) und $\bar{b}$ (x, q) in einem rechtwinkligen Koordinatennetz dargestellt, womit sich der Weg des Endpunktes des Periodogrammvektors ergibt. Verfolgt man diesen Weg mit Hilfe der bezifferten Punkte, so kann man ebenfalls die vier Zeitabschnitte mit verschiedenem periodischem Verhalten unterscheiden. Interessant und überzeugend ist ein Vergleich mit Abb. 8, wo der Weg des Endpunktes des Periodogrammvektors für eine fingierte Beobachtungsreihe, gebildet aus einer reinen Sinuswelle und großen aperiodischen Beimischungen, dargestellt ist. Wir erhalten für die Welle p_5 ein ganz analoges Bild.

Die Komponenten $\bar{\psi}$ (x, q) und $\bar{h}$ (x, q) sind in Abb. 42 als Phasen- und Amplitudendiagramm dargestellt. Da

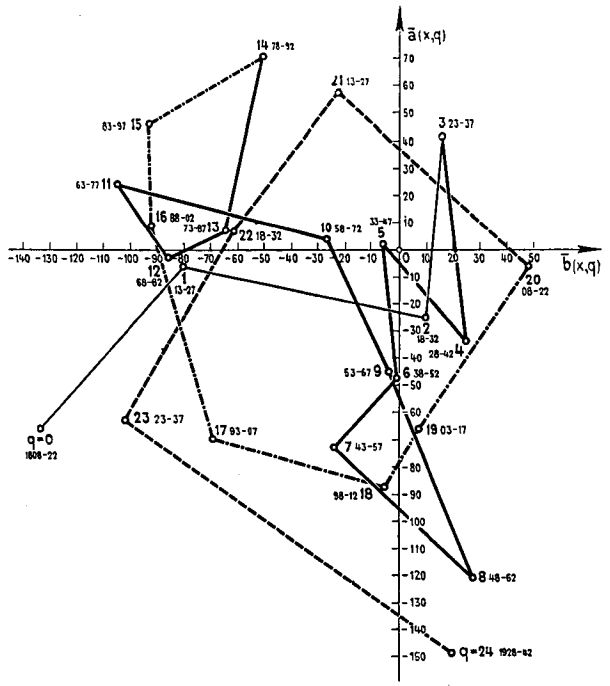


Abb. 41. Periodogrammkomponenten $\bar{a}\,(x, q)$ und $\bar{b}\,(x, q)$ für Welle p_5, zweite angenäherte Berechnung, Analysenintervall n = 15 Jahre

für die Berechnung der Konstanten für den Zeitabschnitt 1808 bis 1822 die 15-jährigen Analysenintervalle nicht verwendet werden können, sind auch noch die Werte $\psi\,(x, q)$ für das Analysenintervall $p' = 5$ Jahre und $q = 0, 1, 2$ und 3 eingetragen worden.

Aus dem Summationsvektorenzug und dem Phasendiagramm ist ersichtlich, daß folgende Zeitabschnitte zu unterscheiden sind: a) 1808 bis 1822; b) 1823 bis 1887; c) 1888 bis 1917; d) 1918 bis 1942.

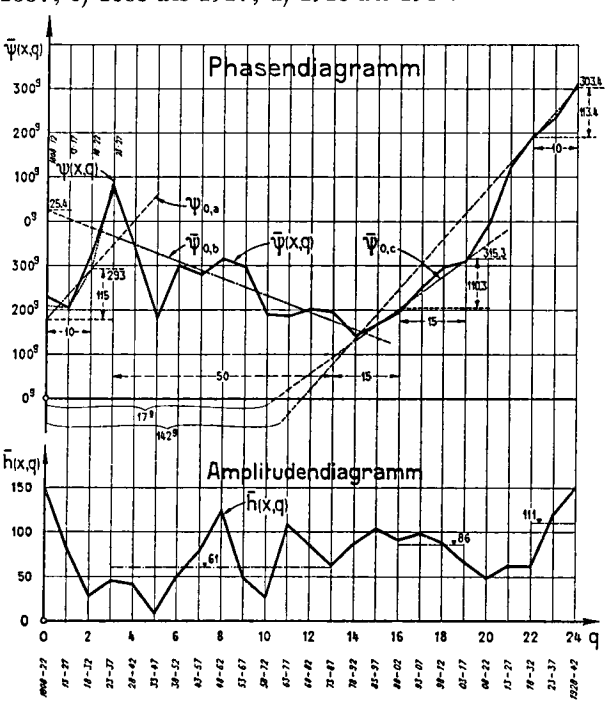


Abb. 42. Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_5, zweite angenäherte Berechnung, Analysenintervall n = 15 Jahre, Versuchswelle $p' = 5$ Jahre

Nach Abb. 42 erhalten wir mit $x = 72^0$, $p' = 5$ und $n = 15$:

a) Zeitabschnitt 1808 bis 1822:

Das Phasendiagramm ist für diesen Abschnitt von Auge durch eine Gerade ausgeglichen worden.

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,a}}{dq} = \frac{115}{10} = +11{,}5^g \approx +10{,}4^0$$

Frequenz $\alpha_a = 72^0 + 10{,}4^0 = 82{,}4^0$

Periode $p_a = 4{,}36$ *Jahre*

$$h(x)_a = 179;\ P(x)_a = \frac{\sin\left[\alpha_a - x\right]\frac{p'}{2}}{\left[\alpha_a - x\right]\frac{p'}{2}} = \frac{\sin\left[11{,}5^g \cdot 2{,}5\right]}{11{,}5^g \cdot 2{,}5} = 0{,}966$$

Amplitude $c_a = \frac{179}{0{,}966} \approx 185\ m^3/sec$

Anfangsphase $\beta_a = 178^g - 2{,}5 \cdot 11{,}5^g = 149{,}2^g = 134{,}3^0$

Radius des Summationsvektorenzuges $\frac{p'}{2}\ R_a = \left|\frac{c_a}{2\left[\alpha_a - x\right]}\right| = \frac{185}{2 \cdot 10{,}4^0 \cdot \frac{2\pi}{360^0}} = 510$

b) Zeitabschnitt 1823 bis 1887:

Das Phasendiagramm wurde nach der Methode der kleinsten Quadrate durch eine Gerade ausgeglichen. Es ergab sich

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,b}}{dq} = -3{,}91^g \approx -3{,}5^0$$

Frequenz $\alpha_b = 72^0 - 3{,}5^0 = 68{,}5^0$

Periode $p_b = 5{,}25$ *Jahre*

$$\bar{h}(x)_b = 61;\ P(x)_b = \frac{\sin\left[\alpha_b - x\right]\frac{n}{2}}{\left[\alpha_b - x\right]\frac{n}{2}} = \frac{\sin\left[3{,}91^g \cdot 7{,}5\right]}{3{,}91^g \cdot 7{,}5} = 0{,}965$$

Amplitude $c_b = \frac{61}{0{,}965} \approx 63\ m^3/sec$

Anfangsphase $\beta_b = 25{,}4^g + 7{,}5 \cdot 3{,}91^g = 54{,}7^g = 49{,}2^0$

Radius des Summationsvektorenzuges $\frac{p'}{2}\ R_b = 515$

c) Zeitabschnitt 1888 bis 1917:

Das Phasendiagramm ist von Auge durch eine Gerade ausgeglichen worden.

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,c}}{dq} = \frac{110{,}3}{15} = +7{,}36^g \approx +6{,}6^0$$

Frequenz $\alpha_c = 72^0 + 6{,}6^0 = 78{,}6^0$

Periode $p_c = 4{,}58$ *Jahre*

$h(x)_c = 86$ $\qquad$ $P(x)_c = 0{,}879$

Amplitude $c_c = 98\ m^3/sec$

Anfangsphase $\beta_c = 17^g - 7{,}5 \cdot 7{,}36^g = 361{,}8^g = 325{,}6^0$

Radius des Summationsvektorenzuges $\frac{p'}{2}\ R_c = 420$

d) Zeitabschnitt 1918 bis 1942:

Das Phasendiagramm ist von Auge durch eine Gerade ausgeglichen worden.

$$\frac{d\,\bar{\psi}_{0,d}}{dq} = \frac{113{,}4}{10} = +\,11{,}34^g \approx +\,10{,}2^0$$

Frequenz $\alpha_d = 82{,}2^0$

Periode $p_d = 4{,}38$ *Jahre*

$$h\,(x)_d = 111 \qquad P\,(x)_d = 0{,}728$$

Amplitude $c_d = 152\ m^3/sec$

Anfangsphase $\beta_d = 142^g - 7{,}5 \cdot 11{,}34^g = 56{,}9^g = 51{,}2^0$

Radius des Summationsvektorenzuges $\frac{p'}{2} R_d = 425$

Es ergeben sich somit folgende Gleichungen:

Definitiv

1808 – 1822: (64a)

$$y_a = 185 \sin\left[82{,}4^0 t + 134{,}3^0\right] = 185 \sin\left[\frac{2\pi}{4{,}36} t + 134{,}3^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

1823 – 1887: (64b)

$$y_b = 63 \sin\left[68{,}5^0 t + 49{,}2^0\right] = 63 \sin\left[\frac{2\pi}{5{,}25} t + 49{,}2^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

In zweiter Annäherung

1888 – 1917: (65a)

$$y_c = 98 \sin\left[78{,}6^0 t + 325{,}6^0\right] = 98 \sin\left[\frac{2\pi}{4{,}58} t + 325{,}6^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

1918 – 1942: (65b)

$$y_d = 152 \sin\left[82{,}2^0 t + 51{,}2^0\right] = 152 \sin\left[\frac{2\pi}{4{,}38} t + 51{,}2^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Die sich nach Gleichungen 64 und 65 für jede Jahresmitte von 1808 bis 1943 ergebenden Ausschläge der Periodizität p_5 sind auf Tafel XV zusammengestellt, und die Welle p_5 entsprechend Gl. 64 ist auf Tafel XIX graphisch aufgetragen.

5. *Definitive Berechnung der Welle* p_{12} *mit 2 Nebenperioden* p_{10} *und* p_{15}

a) Allgemeines:

Um die Konstanten der Welle p_{12} noch genauer aus einem möglichst ungestörten Phasen- und Amplitudendiagramm berechnen zu können, haben wir die beobachteten Jahresmittel der Abflußmengen von den bereits berechneten Periodizitäten p_5 (Werte der zweiten Berechnung nach Gl. 64 und 65), p_6 (definitive Werte nach Gl. 61), p_7 (definitive Werte nach Gleichung 63), p_9 (angenäherte Werte nach Gl. 62), p_{30} (angenäherte Werte nach Gl. 60) und p_{120} (definitive Werte Q') befreit. Es wurden also auf Grund der auf Tafel VIII [MQ, Q', $y^{(30)}$] und Tafel XV [$y^{(5)}$, $y^{(6)}$, $y^{(7)}$, $y^{(9)}$] zusammengestellten Werten die Differenzen berechnet:

$$d = MQ - [Q' + y^{(30)}] - [y^{(5)} + y^{(6)} + y^{(7)} + y^{(9)}]$$

womit sich eine neue Zahlenreihe ergab, welche der Periodogrammrechnung unterworfen wurde. Der Mittelwert dieser Reihe für die Jahre 1808 bis 1943 ist $d_m = -3\ m^3/sec$ und die Streuung $\sigma = \pm 127\ m^3/sec$ (vgl. Tabelle 12, Seite 65).

Es wird wiederum gewählt:

Versuchswelle $p' = 12$ *Jahre* *Versuchsfrequenz* $x = 30^0$

Die Berechnung wurde wie folgt durchgeführt:

Berechnung der *Periodogrammkomponenten* gemäß Tafel XIII für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten q = 0, 12, 24, 120 und der Länge p' = 12 Jahre.

Bildung des *Summationsvektorenzuges*, Abb. 43 ($\frac{p'}{2}$-fache Werte).

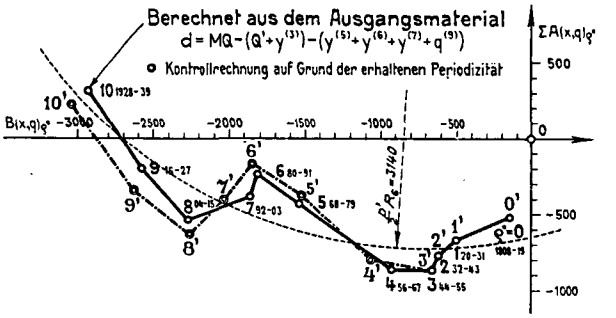


Abb. 43. Summationsvektorenzug für Welle p_{12}, definitive Berechnung, Analysenintervall = Versuchsperiode p' = 12 Jahre

Der Summationsvektorenzug zeigt relativ kleine Streuungen, dagegen regelmäßige Schwankungen, welche auf das Vorhandensein von Nebenperioden hinweisen.

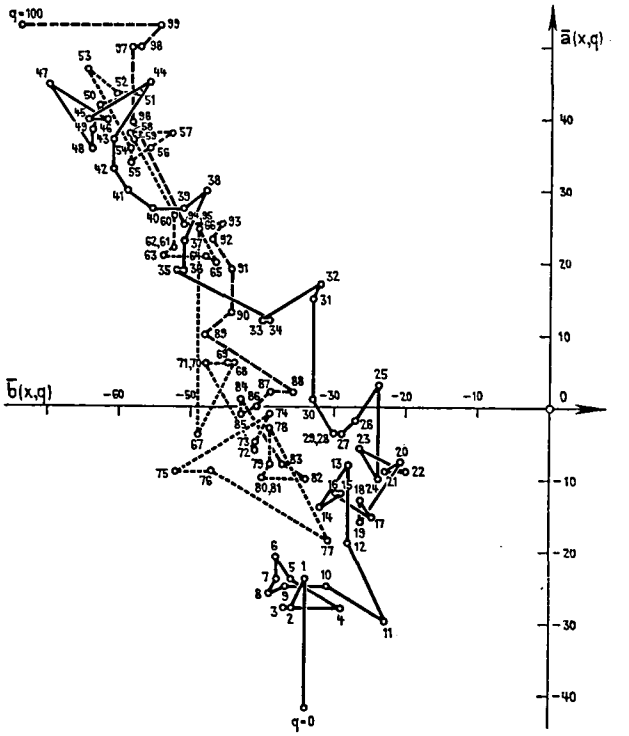


Abb. 44. Welle p_{12}, definitive Berechnung, Weg des Endpunktes des Periodogrammvektors, Analysenintervall n = 36 Jahre

Progressive Analyse mit einem Analysenintervall $n = 3 \cdot p' = 36$ Jahre und einer Intervallverschiebung um je 1 Jahr.

Auftragung der Komponenten $\bar{a}(x, q)$ und $\bar{b}(x, q)$ in einem rechtwinkligen Koordinatennetz, womit sich der *Weg* des *Endpunktes des Periodogrammvektors* ergibt (Abb. 44).

Auftragung der Komponenten $\bar{\psi}(x, q)$ und $\bar{h}(x, q)$ als *Phasen- und Amplitudendiagramm* (Abb. 45).

In der gleichen Abb. 45 haben wir auch je die Komponenten $\bar{a}(x, q)$ und $\bar{b}(x, q)$ in Funktion von q dargestellt.

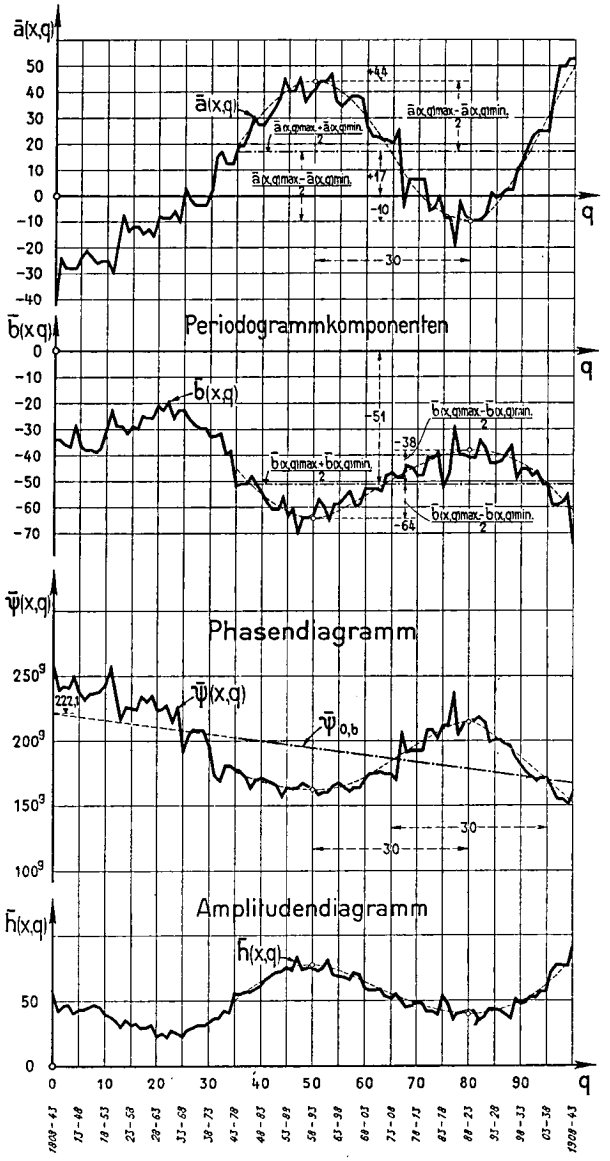


Abb. 45. Periodogrammkomponenten, Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_{12}, definitive Berechnung, Analysenintervall n = 36 Jahre

Es erwies sich als notwendig, auch die *Komponenten* $\psi(x, q)$ *und* $h(x, q)$ für das Analysenintervall $p' = 12$ Jahre als *Phasen-* und *Amplitudendiagramm* (Abb. 46) darzustellen. In der gleichen Abb. 46 haben wir auch je die Komponenten a (x, q) und b (x, q) in Funktion von q dargestellt.

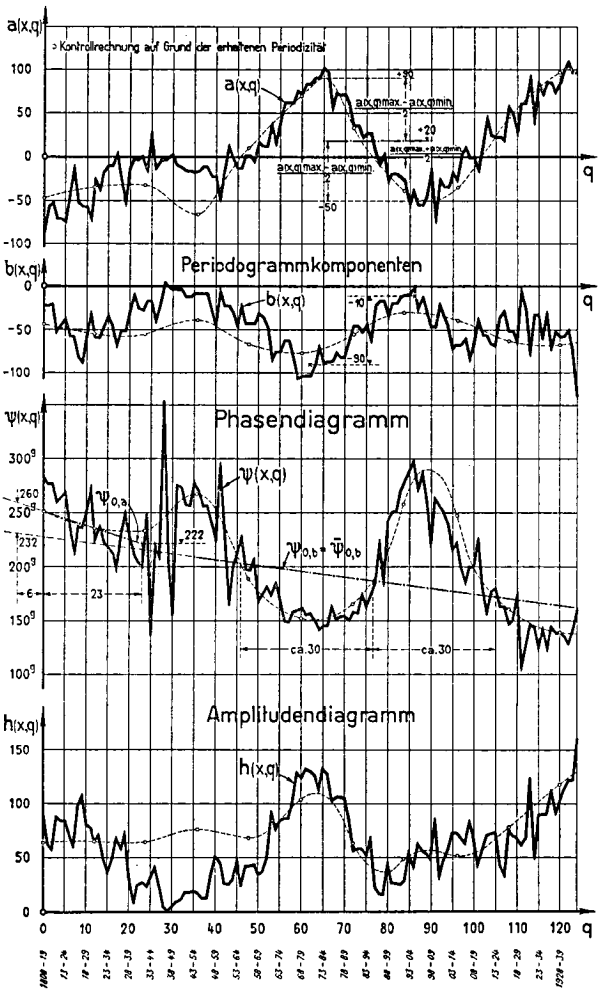


Abb. 46. Periodogrammkomponenten, Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_{12}, definitive Berechnung, Analysenintervall n = 12 Jahre

Nach Abb. 44 bewegt sich der Endpunkt des Periodogrammvektors in geradliniger Hauptrichtung schräg links aufwärts, kehrt dann in geradliniger Hauptrichtung zurück, jedoch nicht ganz bis zum Ursprung der ersten Aufwärtsbewegung; dann bewegt er sich wiederum in geradliniger Hauptrichtung schräg links aufwärts, jedoch weiter hinauf als das erste Mal. Die Hauptrichtung bei den drei Phasen der Bewegung, einmal schräg links hinauf, dann zurück und wieder hinauf, ändert sich ganz wenig von einer Phase zur andern. Die ersten Punkte, insbesondere von q = 0 bis 10 fallen aus dem Rahmen der geschilderten Bewegung, und eine Störung macht sich bis und mit Punkt q = 34 (1842 bis 1877) hinauf geltend. Wie wir noch sehen werden, rührt dieses von einem andern Verhalten der Periodizität p_{12} vor dem Jahre 1843 her. Im übrigen ist die seitliche unregelmäßige Streuung der einzelnen Punkte um die geradlinigen Hauptrichtungen eine Folge der Störungen durch aperiodische Bestandteile und Reste von andern Periodizitäten.

Entsprechend dieser Pendelbewegung des Periodogrammendpunktes ändern sich natürlich die Periodogrammkomponenten a (x, q) und b (x, q); h (x, q) und ψ (x, q); $\bar{a}$ (x, q) und $\bar{b}(x, q)$ sowie $\bar{h}(x, q)$ und $\bar{\psi}(x, q)$.

Nach Abb. 45 und 46 erfolgt diese Änderung sinuswellenförmig. Die Form der Schwankung ist bei den

Komponenten a (x, q), b (x, q); ā (x, q) und b̄ (x, q), abgesehen von den, eine Ausnahme machenden, genannten. Punkten q = 0 bis q = 34, angenähert rein sinusförmig. Das zeigt, daß die Pendelbewegung in der geradlinigen Hauptrichtung eine geradlinige harmonische Schwingung ist. Der Umstand, daß die Hauptrichtung, wie erwähnt, einer leichten Änderung unterworfen ist, ferner daß der Endpunkt des Periodogrammvektors bei der Rückwärtsbewegung nicht mehr ganz zur Anfangslage zurückkehrt, dafür bei der zweiten Aufwärtsbewegung über die Endlage bei der ersten Bewegungsphase hinausführt, weist darauf hin, daß das Zentrum der geradlinigen harmonischen Schwingung nicht ganz konstant ist; wir werden sehen, daß es sich langsam auf einem Kreise um den Koordinatennullpunkt bewegt.

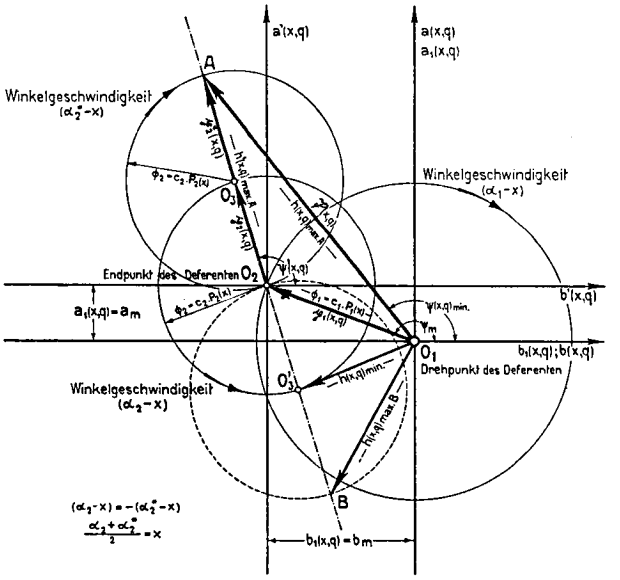


Abb. 47. Veranschaulichung der Zusammenhänge zwischen den Hauptvektoren der einzelnen Periodizitäten bei einer geradlinigen Epizykelbewegung (Störungsvektoren vernachlässigt)

Eine solche geradlinige harmonische Bewegung kommt nach Abb. 47 durch eine Kombination von zwei Kreisbewegungen wie folgt zustande. Das Schwingungszentrum 0_2 habe die Polar-Koordinaten Φ_1 und ψ_m und die rechtwinkligen Koordinaten a_m und b_m. Es sei vorläufig als fest angenommen. Auf einem Kreise um dieses Zentrum 0_2 drehe sich der Mittelpunkt 0_3 eines weitern Kreises. Die beiden Kreise haben einen gleich großen Radius Φ_2, und die Bewegung auf ihnen erfolgt mit entgegengesetzt gleich großen Winkelgeschwindigkeiten $[\alpha_2 - x]$ und $[\alpha_2^* - x]$. Es ist also (66)

$$[\alpha_2 - x] = -[\alpha_2^* - x], \text{ woraus sich ergibt } \frac{\alpha_2 + \alpha_2^*}{2} = x$$

Es liegt somit eine Kombination der Bewegungen von drei Teil-Hauptvektoren vor: Ein Teilvektor $\mathfrak{p}_1(x, q)$ (Deferent) mit dem Betrag Φ_1 bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit $(\alpha_1 - x)$ um den Koordinatennullpunkt 0_1. Vorerst nehmen wir jedoch an, dieser Vektor stehe still. Um den Endpunkt 0_2 dieses Vektors $\mathfrak{p}_1(x,q)$ dreht sich ein zweiter Vektor $\mathfrak{p}_2(x, q)$ vom Betrage Φ_2 mit der Winkelgeschwindigkeit $(\alpha_2 - x)$ und um den Endpunkt des Vektors $\mathfrak{p}_2(x, q)$ ein dritter Vektor $\mathfrak{p}_2^*(x, q)$ ebenfalls vom Betrage Φ_2 mit der Winkelgeschwindigkeit $(\alpha_2^* - x) = -(\alpha_2 - x)$. x bedeutet dabei die Versuchsfrequenz. Wir haben es also mit drei benachbarten Periodizitäten mit den Frequenzen α_1, α_2 und α_2^* zu tun. Die Periodizität mit der Frequenz α_1, welche die Bewegung im «Deferenten» verursacht, bezeichnen wir als Hauptperiode und die beiden Periodizitäten mit den Frequenzen α_2 und α_2^*, welche nach Gl. 66 im Spektrum symmetrisch zur Versuchsfrequenz x liegen und welche gleich große Amplituden haben, als Nebenperioden.

Betrachten wir nur die Bewegung der Endpunkte der Teil-Hauptvektoren $\mathfrak{p}_2(x, q)$ und $\mathfrak{p}_2^*(x, q)$ in einem festen Koordinatensystem durch den Endpunkt des Hauptvektors $\mathfrak{p}_1(x, q)$, d. h. denken wir uns letzteren eliminiert, so haben wir den Fall von zwei benachbarten Periodizitäten, welchen wir auf Seiten 49 usf. behandelt haben. Da die Frequenzen α_2 und α_2^* dieser beiden Periodizitäten symmetrisch zur Versuchsfrequenz x liegen und die Amplituden c_2 der beiden Periodizitäten gleich groß sind, so artet die auf Seite 50 beschriebene epizyklische Bewegung in eine geradlinige harmonische Bewegung aus.

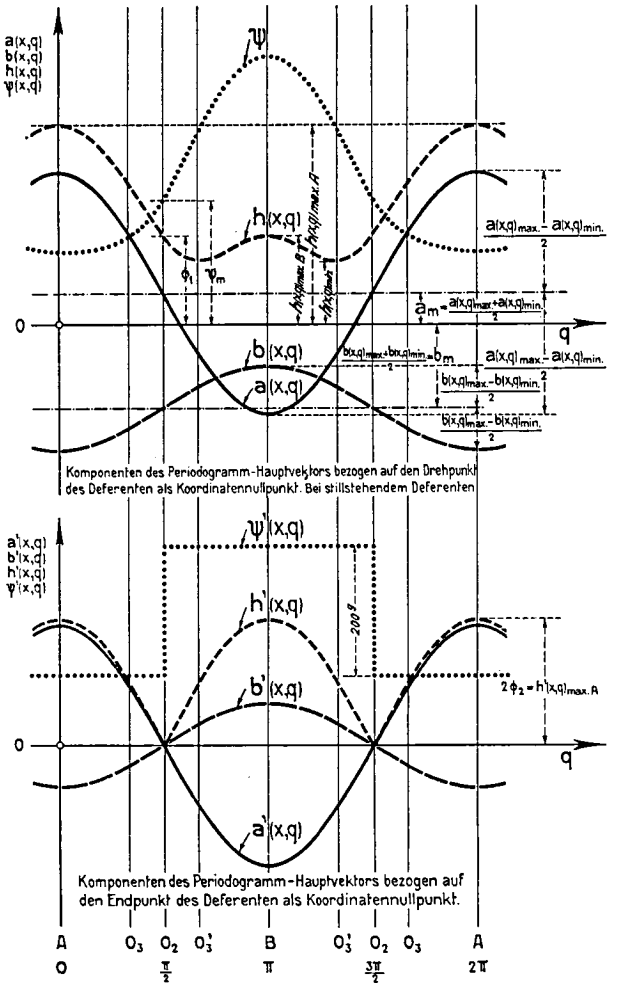


Abb. 48. Komponenten des Periodogramm-Hauptvektors in Funktion des variablen Anfangspunktes q des Analysenintervalls für eine geradlinige Epizykelbewegung (vgl. Abb. 44)

In Abb. 48 haben wir die Komponenten des Periodogramm-Hauptvektors in Funktion des variablen An-

fangspunktes q des Analysenintervalls dargestellt, bezogen einmal auf den Drehpunkt 0_1 des Teil-Hauptvektors $\mathfrak{p}_1(x, q)$, wobei wir uns $\mathfrak{p}_1(x, q)$ festgehalten denken, und dann auf den Endpunkt 0_2 von $\mathfrak{p}_1(x, q)$. Die dargestellten Zusammenhänge ergeben sich auf Grund der Abb. 47, indem man für verschiedene Bewegungszustände die Werte der in Abb. 48 dargestellten Größen aus Abb. 47 abliest.

Dabei wird angenommen, der Endpunkt des Periodogramm-Hauptvektors entspreche in Abb. 47 zur Zeit 0 dem Punkte A, zur Zeit π, d. h., wenn die Endpunkte der Hauptvektoren $\mathfrak{p}_2(x, q)$ und $\mathfrak{p}_2^*(x, q)$ eine halbe Kreisdrehung durchgeführt haben, dem Punkte B und zur Zeit 2π wiederum dem Punkte A. Aus Abb. 47 kann z. B. für die Lage des Endpunktes des Periodogramm-Hauptvektors bei Punkt 0_2, d. h. nach einer Viertelkreisdrehung der Endpunkte der Hauptvektoren $\mathfrak{p}_2(x, q)$ und $\mathfrak{p}_2^*(x, q)$ abgelesen werden, daß $h(x, q) = \Phi_1$, $h'(x, q) = 0$, $a(x, q) = a_m$, $b(x, q) = b_m$ und $\psi(x, q) = \psi_m$ ist, während $\psi'(x, q)$ in diesem Zeitpunkt eine sprungweise Änderung um 200^g erfährt.

Steht der Vektor $\mathfrak{p}_1(x, q)$ nicht still, sondern dreht er sich langsam um den Punkt 0_1, so erfolgen die in Abb. 48 dargestellten Schwingungen nicht um eine horizontale, sondern um eine geneigte Gerade, wie dies besonders deutlich aus den Phasendiagrammen der Abb. 45 und 46 ersichtlich ist.

b) Berechnung der Hauptperiode (Deferent)

Aus dem Phasendiagramm Abb. 46 ist deutlich ersichtlich, daß dieses in zwei Teile zerfällt; der erste Teil entspricht den Jahren von 1808 bis 1842, der zweite Teil den Jahren von 1843 bis 1943.

aa. Zeitabschnitt 1808 bis 1842:

In diesem Zeitabschnitt sind keine Nebenperioden vorhanden. Wegen der relativen Kürze des Zeitabschnittes können die Konstanten nicht mit Hilfe der 36 Jahre langen Analysenintervalle berechnet werden. Wir müssen uns deshalb mit einer Berechnung mittels der Periodogrammkomponenten für das Intervall $p' = 12$ Jahre begnügen. Nach Abb. 46 ist mit $x = 30^0$ und $p' = 12$:

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,a}}{dq} = -1{,}30^g = -1{,}17^0 = \alpha_{1,a} - x$$

Frequenz $\alpha_{1,a} = 28{,}83^0 \approx 28{,}8^0$

Periode $p_{1,a} = 12{,}5$ *Jahre*

Amplitude $c_{1,a} \approx 64\ m^3/sec$

Anfangsphase $\beta_{1,a} = 260{,}0^g = 234{,}0^0$

bb. Zeitabschnitt 1843 bis 1943:

Aus Abb. 45 und 46 ergibt sich aus der Lage der Maxima und Minima der dargestellten Kurven in bezug auf den Zeitmaßstab, daß die Wellenlänge der geradlinigen harmonischen Bewegung des Endpunktes des Periodogrammvektors rund 60 Jahre ist. Wir haben nun durch die beiden *Phasendiagramme* unter Beachtung der in Abb. 48 dargestellten Zusammenhänge die schräg von links oben nach rechts unten verlaufenden Geraden wie folgt gezogen: Die Schnittpunkte der Geraden mit den Phasendiagrammen liegen in gleichmäßigen Abständen von rund 30 Jahren auseinander; die Neigung der Geraden wurde aus der allgemeinen Richtung der Phasendiagramme mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Diese geneigt verlaufenden Geraden geben den Richtungswinkel des Hauptvektors $\mathfrak{p}_1(x, q)$, also des Deferenten in Funktion von q, wieder. Der Endpunkt dieses Hauptvektors ist somit, da die Gerade geneigt ist, nicht fest, sondern dreht sich, wie bereits erkannt, langsam auf einem Kreise mit dem Radius $\Phi_1 = c_1 \cdot P_1(x)$. Es ergab sich mit $x = 30^0$ und $n = 36$:

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,b}}{dq} = -0{,}547^g = -0{,}492^0 = \alpha_{1,b} - x$$

Frequenz $\alpha_{1,b} = 29{,}508^0 \approx 29{,}51^0$;

Periode $p_{1,b} = 12{,}2$ *Jahre*

$$P_{1,b}(x) = \frac{\sin\left[\alpha_{1,b} - x\right]\frac{n}{2}}{\left[\alpha_{1,b} - x\right]\frac{n}{2}} = \frac{\sin\left[0{,}547^g \cdot 18\right]}{0{,}547^g \cdot 18} = 0{,}996$$

entsprechend Abb. 47 und 48 ist ferner allgemein:

$$\Phi_1 = c_1 \cdot P_1(x) = \sqrt{\bar{a}_m^2 + \bar{b}_m^2}$$

$$\bar{a}_m = \frac{\bar{a}(x, q)_{max.} + \bar{a}(x, q)_{min.}}{2}$$

$$\bar{b}_m = \frac{\bar{b}(x, q)_{max.} + \bar{b}(x, q)_{min.}}{2}$$

Nach Abb. 45 ist in unserem Falle:

$$\Phi_1 = c_{1,b} \cdot P_{1,b}(x) = \sqrt{17^2 + 51^2} = 53{,}7$$

Amplitude $c_{1,b} = \frac{\Phi_1}{P_{1,b}(x)} = \frac{53{,}7}{0{,}996} \approx 54\ m^3/sec$

Anfangsphase $\beta_{1,b} = 222{,}1^g + 18 \cdot 0{,}547^g = 232{,}0^g = 208{,}8^0$

Radius des Summationsvektorenzuges $\frac{p'}{2} R_b = 3140$

Zur Kontrolle haben wir Φ_1 und $c_{1,b}$ auch noch aus Abb. 46 berechnet. Es ergibt sich ebenfalls $c_{1,b} \approx 54\ m^3/sec$. Auf die sehr langsame Drehung des Hauptvektors $\mathfrak{p}_1(x, q)$ mußte bei der Bestimmung von Φ_1 nicht Rücksicht genommen werden. Wir durften einfach mit einer mittleren Lage des Endpunktes von $\mathfrak{p}_1(x, q)$ rechnen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß in Abb. 46 bei $q = 90$ das Maximum ersichtlich ist, welches dem Werte $h(x, q)_{max.\ B}$ der Abb. 47 und 48 entspricht.

Wir erhalten also für die Bewegung im Deferenten folgende definitive Gleichungen:

1808–1842: (67)

$$y_a = 64 \sin\left[28{,}8^0 t + 234{,}0^0\right] = 64 \sin\left[\frac{2\pi}{12{,}5} t + 234{,}0^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

$y_a = y_{a,1}$, da hier keine Unterscheidung gegenüber Nebenperioden nötig ist.

1843–1943: (68)

$$z_1 = 54 \sin\left[29{,}51^0 t + 208{,}8^0\right] = 54 \sin\left[\frac{2\pi}{12{,}2} t + 208{,}8^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: $t = 0$ ist.

c) Berechnung der Nebenperioden

Um die Nebenperioden möglichst gut herausarbeiten zu können, sowie auch interessehalbers, haben wir den Deferenten $\mathfrak{p}_1(x, q)$ [Hauptperiode] wie folgt ausgeschaltet:

Für die Komponenten des Hauptvektors $\mathfrak{p}_1(x, q)$ gelten nach obigem folgende Gleichungen für das *Analysenintervall* n = 36 Jahre und x = 30°:

$$\bar{a}_1(x, q) = \Phi_1 \cdot \sin \overline{\psi}_{0,b} = 53{,}7 \cdot \sin \overline{\psi}_{0,b}$$
$$\bar{b}_1(x, q) = \Phi_1 \cdot \cos \overline{\psi}_{0,b} = 53{,}7 \cdot \cos \overline{\psi}_{0,b}$$
$$\overline{\psi}_{0,b} = 222{,}1^g - 0{,}547^g \cdot q$$

Wir haben nun aus diesen Gleichungen für q = 35 bis q = 100 die Werte $\bar{a}_1(x, q)$ und $\bar{b}_1(x, q)$ berechnet und von den entsprechenden (gleiches q) Werten $\bar{a}(x, q)$ und $\bar{b}(x, q)$ der Abb. 45 abgezogen. Es ergaben sich damit die Periodogrammkomponenten $\bar{a}'(x, q)$ und $\bar{b}'(x, q)$ für die beiden Nebenperioden bezogen auf ein festes Koordinatennetz durch den Endpunkt des Deferenten (Punkt 0_2 der Abb. 47).

$$\bar{a}'(x, q) = \bar{a}(x, q) - \bar{a}_1(x, q); \bar{b}'(x, q) = \bar{b}(x, q) - \bar{b}_1(x, q)$$

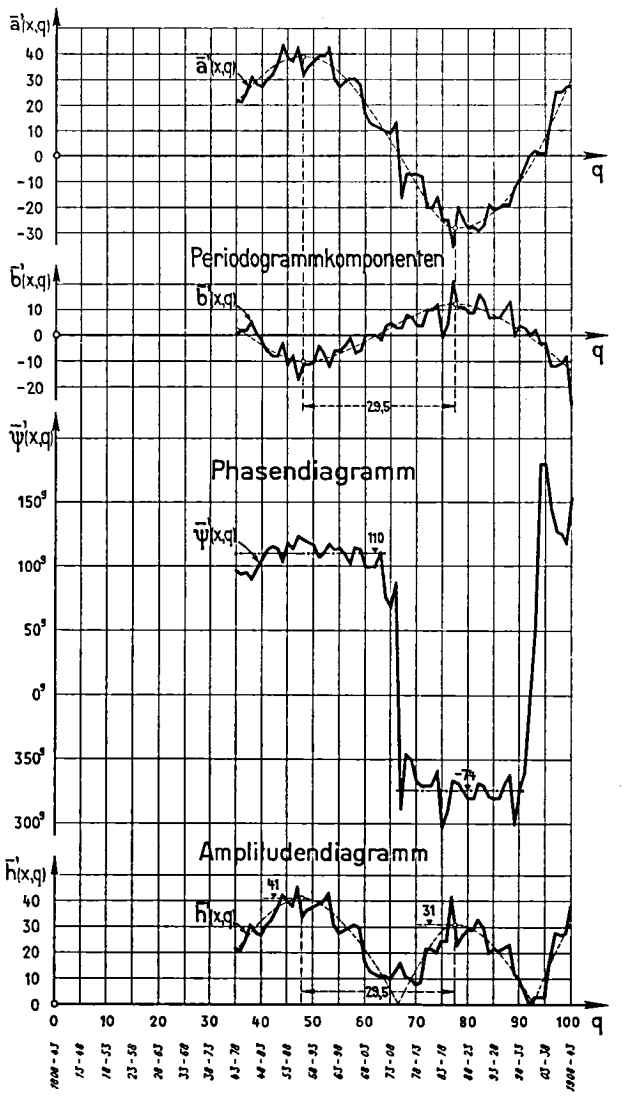


Abb. 49. Periodogrammkomponenten, Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_{12}, definitive Berechnung der Nebenperioden, Analysenintervall n = 36 Jahre

Aus den Komponenten $\bar{a}'(x, q)$ und $\bar{b}'(x, q)$ wurden wie üblich die Polarkoordinaten $\overline{\psi}'(x, q)$ und $\bar{h}'(x, q)$ berechnet. Die Werte $\bar{a}'(x, q)$, $\bar{b}'(x, q)$, $\overline{\psi}'(x, q)$ und $\bar{h}'(x, q)$ sind in Abb. 49 in Funktion von q dargestellt.

In analoger Weise haben wir für das Analysenintervall p′ = 12 Jahre berechnet:

$$a'(x, q) = a(x, q) - a_1(x, q); \; b'(x, q) = b(x, q) - b_1(x, q)$$

und daraus ermittelt $\psi'(x, q)$ und $h'(x, q)$. Diese Werte wurden ebenfalls in Funktion von q dargestellt; auf eine Wiedergabe dieser Diagramme kann aber hier verzichtet werden.

Frequenzen:

Durch Ausmessung aller Diagramme wurde die *Wellenlänge* der geradlinigen harmonischen Bewegung noch genauer zu 59 Jahre ermittelt. Diese Wellenlänge entspricht einer Frequenz von $6{,}1^0$, $= 6{,}78^g$ welche nach Abb. 47 gleich $|\alpha_2 - x| = |\alpha_2^* - x|$ ist. Nehmen wir die Drehsinne gemäß Abb. 47 an, so ist mit x = 30° und n = 36:

$$[\alpha_2 - x] = +\,6{,}1^0, \; [\alpha_2^* - x] = -\,6{,}1^0, \text{ somit}$$
$$\alpha_2 = 36{,}1^0, \; \textit{Wellenlänge } p = 9{,}97 \textit{ Jahre};$$
$$\alpha_2^* = 23{,}9^0, \; \textit{Wellenlänge } p^* = 15{,}06 \textit{ Jahre}$$

Amplitude:

Nach Abb. 47 ist $\Phi_2 = \frac{1}{2} \cdot \bar{h}'(x, q)$ max.

Aus Abb. 49 erhalten wir als Mittelwert aus den beiden Maxima von $\bar{h}'(x, q)$ mit $\alpha_2 - x = 6{,}1^0 = 6{,}78^g$:

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$$

$$P_2(x) = \frac{\sin[\alpha_2 - x]\frac{n}{2}}{[\alpha_2 - x]\frac{n}{2}} = \frac{\sin[6{,}78^g \cdot 18]}{6{,}78^g \cdot 18} = 0{,}491$$

$$c_2 = \frac{\Phi_2}{P_2(x)} = \frac{18}{0{,}491} = 36{,}6 \; m^3/sec$$

Unter Berücksichtigung einer Kontrollrechnung, welche wir auf Grund der Werte h′ (x, q) max. durchführten, wird gesetzt

$$c_2 = 38$$

Anfangsphase:

Nach Abb. 47 und 49 sind die Phasen der beiden Nebenperioden zur Zeit q = 48 und 77,5 der Maxima und Minima von $\bar{a}'(x, q)$ und $\bar{b}'(x, q)$ entsprechend den Maxima von $\bar{h}'(x, q)$ (Abb. 49) gleichgerichtet.

Nach dem Phasendiagramm, Abb. 49, ist zur Zeit q = 48 $\overline{\psi}'(x, q) = 110^g$ und zur Zeit q = 77,5: $\overline{\psi}'(x, q) = -\,74^g$.

$$q = 48: \quad \beta_2 = 110^g - [48 + 18] \cdot 6{,}78^g = 62{,}52^g$$
$$\beta_2^* = 110^g + [48 + 18] \cdot 6{,}78^g = 157{,}48^g$$

$$q = 77{,}5: \quad \beta_2 = -\,74^g - [77{,}5 + 18] \cdot 6{,}78^g = 78{,}52^g$$
$$\beta_2^* = -\,74^g + [77{,}5 + 18] \cdot 6{,}78^g = 173{,}48^g$$

Wir haben die Mittelwerte aus beiden Ermittlungen benützt, ferner noch die Ergebnisse einer Kontroll-

rechnung auf Grund der Werte h′ (x, q) berücksichtigt und schließlich gesetzt:

$$\beta_2 \approx 66^0 \qquad \beta_2^* = 151^0$$

Wir erhalten somit für *die Zeit von 1843 bis 1943* folgende *definitive* Gleichungen:

Für die Nebenperiode p_{10}: (69)

$$z_2 = 38 \sin\left[36{,}1^0\, t + 66^0\right] = 38 \sin\left[\frac{2\pi}{9{,}97} t + 66^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

Für die Nebenperiode p_{15}: (70)

$$z_2^* = 38 \sin\left[23{,}9^0\, t + 151^0\right] = 38 \sin\left[\frac{2\pi}{15{,}06} t + 151^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

oder zu einer Formel vereinigt (71)

$$z_2 + z_2^* = 76 \sin\left[6{,}1^0\, t + 47{,}5^0\right] \cdot \sin\left[30{,}0^0\, t + 108{,}5^0\right]$$

$$= 76 \sin\left[\frac{2\pi}{59{,}0} t + 47{,}5^0\right] \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{12{,}0} t + 108{,}5^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Für Hauptperiode und Nebenperioden zusammen:

nach Gl. 68 und 71

$$y_b = z_1 + z_2 + z_2^* \qquad (72)$$

$$= 54 \sin\left[29{,}51^0\, t + 208{,}8^0\right] + 76 \sin\left[6{,}1^0\, t + 47{,}5^0\right] \cdot \sin\left[30{,}0^0\, t + 108{,}5^0\right]$$

$$= 54 \sin\left[\frac{2\pi}{12{,}2} t + 208{,}8^0\right] + 76 \sin\left[\frac{2\pi}{59{,}0} t + 47{,}5^0\right] \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{12{,}0} t + 108{,}5^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Die sich nach den Gleichungen 67, 68, 69, 70 und 72 für jede Jahresmitte von 1808 bis 1943 ergebenden Ausschläge y_a, z_1, z_2, z_2^* und y_b sind auf Tafel XV zusammengestellt, und die Welle p_{12} entsprechend den Gl. 67 und 72 ist auf Tafel XIX graphisch aufgetragen.

Auf Grund der nach Gl. 67 und Gl. 72 für jede Jahresmitte berechneten Ausschläge der Periodizität p_{12} haben wir dann zur Kontrolle die Periodogrammkomponenten für das Analysenintervall p′ = 12 Jahre in gleicher Weise durchgerechnet wie nach Tafel XIII für die Ausgangswerte d. In Abb. 43 ist der aus diesen Komponenten ermittelte *Summationsvektorenzug* für den dort besonders interessierenden Zeitabschnitt ab $\varrho^* = 3$ als Linienzug 3′ bis 10′ eingetragen. In Abb. 46 sind diese Komponenten in Funktion von q aufgetragen als *Phasen-* und *Amplitudendiagramm*, sowie als *Diagramm der Werte* a (x, q) *und* b (x, q). Die Übereinstimmung mit den Diagrammen, welche aus den Ausgangswerten berechnet wurden, ist in Anbetracht der großen aperiodischen Störungen eine befriedigende, insbesondere was das Phasendiagramm anbetrifft.

6. Zweite angenäherte Berechnung der Welle p_{30} *mit der Nebenperiode* p_{20}

Die Konstanten der Welle p_{30} wurden im zweiten Berechnungsgang noch genauer bestimmt. Zu diesem Zwecke sind die beobachteten Jahresmittel der Abflußmengen von den bereits berechneten Periodizitäten p_5 (definitive Werte nach Gl. 64 und angenäherte Werte nach Gl. 65), p_6 (definitive Werte nach Gl. 61), p_7 (definitive Werte nach Gl. 63), p_9 (angenäherte Werte nach Gl. 62), p_{12} (definitive Werte nach Gl. 76 und 72) und p_{120} (definitive Werte = Q′) befreit worden. Es wurden also auf Grund der auf Tafel VIII (p_{120} = Q′) und Tafel XV [$y^{(5)}$, $y^{(6)}$, $y^{(7)}$, $y^{(9)}$, $y^{(12)}$] zusammengestellten Werten die Differenzen berechnet

$$d = MQ - Q' - [y^{(5)} + y^{(6)} + y^{(7)} + y^{(9)} + y^{(12)}]$$

womit sich eine neue Zahlenreihe ergab, welche der Periodogrammrechnung unterworfen wurde.

Wiederum wurde gewählt:

Versuchswelle p′ = *30 Jahre*

Versuchsfrequenz $x = \frac{360^0}{30} = 12^0$

Die Berechnung wurde wie folgt durchgeführt:

Berechnung der *Periodogrammkomponenten* gemäß Tafel XIV für ein Analysenintervall mit den Anfangszeiten q = 0, 30, 60 und 90 und der Länge p′ = 30 Jahre.

Bildung des *Summationsvektorenzuges* (Abb. 50) ($\frac{p'}{2}$-fache Werte).

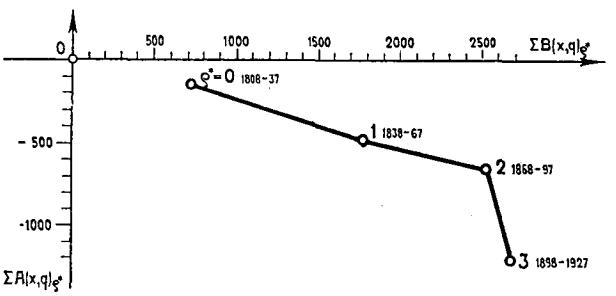


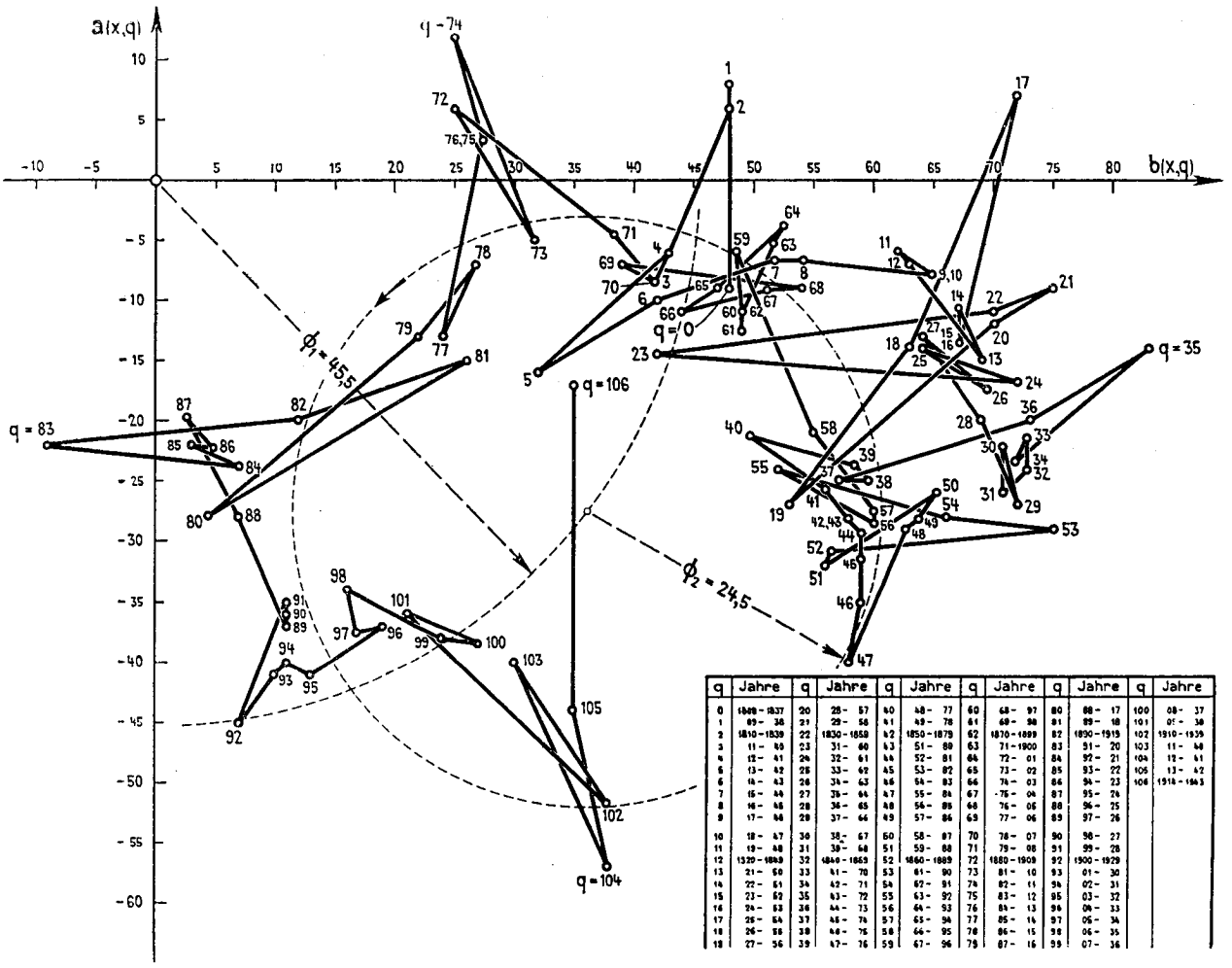
Abb. 50. Summationsvektorenzug für Welle p_{30}, zweite angenäherte Berechnung, Analysenintervall = Versuchsperiode p′ = 30 Jahre

Progressive Analyse mit einem Analysenintervall p′ = 30 Jahre und einer Intervallverschiebung um je 1 Jahr.

Auftragen der Komponenten a (x, q) und b (x, q) in einem rechtwinkligen Koordinatennetz, womit sich der *Weg des Endpunktes des Periodogrammvektors* ergibt (Abb. 51).

Auftragung der Komponenten a (x, q), b (x, q), ψ (x, q) *und* h (x, q) *in Funktion von* q (Abb. 52).

Nach Abb. 51 bewegt sich der Endpunkt des Periodogrammvektors bis q = 47 (1855 bis 1884) mit den Schwankungen, welche infolge des Einflusses des Störungsvektors und der Reste von andern Periodizitäten zu erwarten sind, ganz langsam im Uhrzeigersinne um den Nullpunkt des Koordinatensystems. Von q = 47 an vollführt er zusätzlich zu dieser langsamen Bewegung noch eine deutliche Kreisbewegung im Gegenuhrzeigersinn. Dieses Verhalten kommt auch deutlich in den Diagrammen der Abb. 52 zum Ausdruck. Wir haben es also mit einer



q	Jahre	q	Jahre	q	Jahre	q	Jahre	q	Jahre	q	Jahre
0	1808 – 1837	20	28 – 57	40	48 – 77	60	68 – 97	80	88 – 17	100	08 – 37
1	09 – 38	21	29 – 58	41	49 – 78	61	69 – 98	81	89 – 18	101	09 – 38
2	1810 – 1839	22	1830 – 1859	42	1850 – 1879	62	1870 – 1899	82	1890 – 1919	102	1910 – 1939
3	11 – 40	23	31 – 60	43	51 – 80	63	71 – 1900	83	91 – 20	103	11 – 40
4	12 – 41	24	32 – 61	44	52 – 81	64	72 – 01	84	92 – 21	104	12 – 41
5	13 – 42	25	33 – 62	45	53 – 82	65	73 – 02	85	93 – 22	105	13 – 42
6	14 – 43	26	34 – 63	46	54 – 83	66	74 – 03	86	94 – 23	106	1914 – 1943
7	15 – 44	27	35 – 64	47	55 – 84	67	75 – 04	87	95 – 24		
8	16 – 45	28	36 – 65	48	56 – 85	68	76 – 05	88	96 – 25		
9	17 – 46	29	37 – 66	49	57 – 86	69	77 – 06	89	97 – 26		
10	18 – 47	30	38 – 67	50	58 – 87	70	78 – 07	90	98 – 27		
11	19 – 48	31	39 – 68	51	59 – 88	71	79 – 08	91	99 – 28		
12	1820 – 1849	32	1840 – 1869	52	1860 – 1889	72	1880 – 1909	92	1900 – 1929		
13	21 – 50	33	41 – 70	53	61 – 90	73	81 – 10	93	01 – 30		
14	22 – 51	34	42 – 71	54	62 – 91	74	82 – 11	94	02 – 31		
15	23 – 52	35	43 – 72	55	63 – 92	75	83 – 12	95	03 – 32		
16	24 – 53	36	44 – 73	56	64 – 93	76	84 – 13	96	04 – 33		
17	25 – 54	37	45 – 74	57	65 – 94	77	85 – 14	97	05 – 34		
18	26 – 55	38	46 – 75	58	66 – 95	78	86 – 15	98	06 – 35		
19	27 – 56	39	47 – 76	59	67 – 96	79	87 – 16	99	07 – 36		

Abb. 51. Welle p_{30}, zweite angenäherte Berechnung, Weg des Endpunktes des Periodogrammvektors, Analysenintervall $p' = 30$ Jahre

Hauptperiode zu tun, deren Frequenz sich von der Versuchsfrequenz nur wenig unterscheidet und die von 1855 an von einer Nebenperiode (in der Folge als Nebenperiode p_{20} bezeichnet) begleitet ist.

Berechnung der Hauptperiode:

Das Phasendiagramm wird über seine ganze Länge durch eine Gerade ausgeglichen. Nach Abb. 52 ist mit $x = 12^0$ und $p' = 30$:

$$\frac{d\psi_0}{dq} = -0{,}54^g = -0{,}49^0 = \alpha_1 - x$$

Frequenz $\alpha_1 = 11{,}51^0 \approx 11{,}5^0$;

Periode $p = 31{,}2$ *Jahre*

$$P_1(x) \approx 1$$

Amplitude $c_{1,a}$:

Zeitabschnitt 1808 bis 1854:

$$h_1(x) = 62\left\{\begin{array}{l}\text{Wegen den Störungen zu Beginn des Amplitudendiagrammes aus dem Abschnitt } q \\ = 0 - 32 \text{ bestimmt, was zulässig erscheint}\end{array}\right\}$$

$$c_{1,a} \approx 62 \text{ m}^3/\text{sec}$$

Zeitabschnitt 1855 bis 1943: nach Abb. 51 und 52

$\Phi_1 = 45{,}5$ $\qquad c_{1,b} \approx 46\ m^3/sec$

Anfangsphase $\beta_1 = 5^g = 4{,}5^0$

Wir erhalten somit für die Hauptperiode:

1808–1854: (73)

$$y_a = 62 \sin\left[11{,}5^0\, t + 4{,}5^0\right] = 62 \sin\left[\frac{2\pi}{31{,}2} t + 4{,}5^0\right] \text{ in } \text{m}^3/\text{sec}$$

1855–1943: (74)

$$z_1 = 46 \sin\left[11{,}5^0\, t + 4{,}5^0\right] = 46 \sin\left[\frac{2\pi}{31{,}2} t + 4{,}5^0\right] \text{ in } \text{m}^3/\text{sec}$$

wobei für das Jahr 1808: $t = 0$ ist.

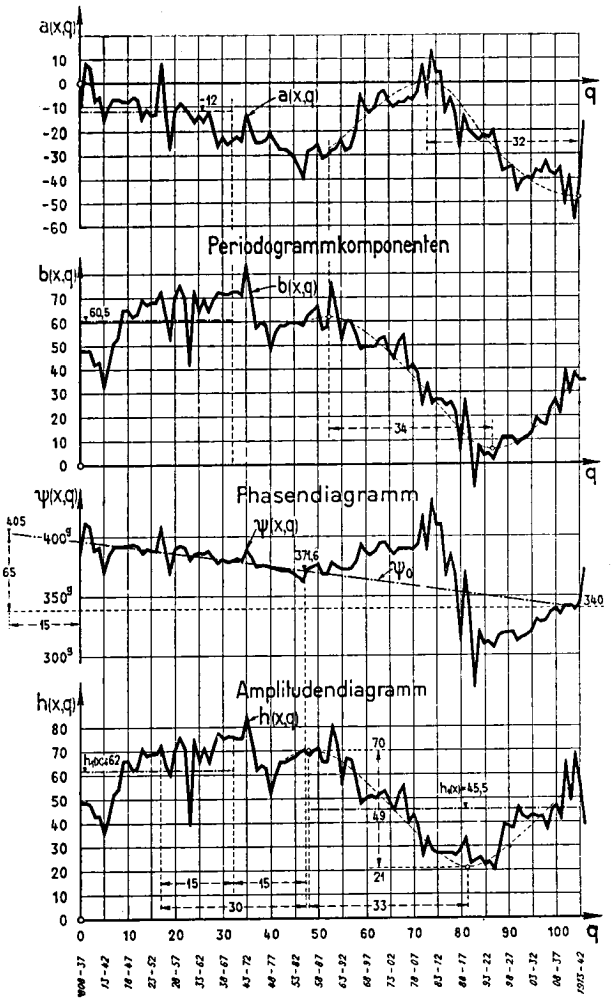
Berechnung der Nebenperiode:

Aus den Diagrammen der Abb. 52 ist ersichtlich, daß die Wellenlänge der Schwankung des Phasen- und Amplitudendiagramms infolge der Nebenperiode rund $p_s = 2 \cdot 33 = 66$ Jahre ist. Nach Gl. 48 ist mit $x = 12^0$, $p' = 30$ und $\alpha_1 = 11{,}51^0$:

$$p_s = \frac{2\pi}{|\alpha_1 - \alpha_2|}, \text{ somit } |\alpha_1 - \alpha_2| = \frac{2\pi}{p_s} = 5{,}45^0$$

Frequenz $\alpha_2 = 5{,}45^0 + 11{,}51^0 = 16{,}96^0$;

Periode $p = 21{,}2$ *Jahre*



$\alpha_2 = x - 4{,}96^0 = 5{,}51^g \qquad P_2(x) = 0{,}74; \quad \Phi_2 = 24{,}5$

Amplitude $c_2 = \dfrac{24{,}5}{0{,}74} \approx 33\ m^3/sec$

Anfangsphase: Beim Maximum von h (x, q), bei q = 47, sind die Phasen der Haupt- und Nebenperioden gleichgerichtet.

$$\beta_2 = 371{,}6^g - [47 + 15] \cdot 5{,}51^g = 30^g = 27^0$$

Wir erhalten somit für die Zeit 1854 bis 1943 für die Nebenperiode:

(75)

$$z_2 = 33 \sin\left[16{,}96^0\, t + 27^0\right] = 33 \sin\left[\frac{2\pi}{21{,}2} t + 27^0\right] \text{in } m^3/sec$$

Für die Hauptperiode und Nebenperiode zusammen:

$$y_b = z_1 + z_2 = 46 \sin\left[11{,}5^0\, t + 4{,}5^0\right] + 33 \sin\left[16{,}96^0\, t + 27^0\right]$$

(76)

$$= 46 \sin\left[\frac{2\pi}{31{,}2} t + 4{,}5^0\right] + 33 \sin\left[\frac{2\pi}{21{,}2} t + 27^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Die sich nach den Gleichungen 73, 74, 75 und 76 für jede Jahresmitte von 1808 bis 1943 ergebenden Ausschläge sind auf Tafel XV zusammengestellt.

Abb. 52. Periodogrammkomponenten, Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_{30}, zweite angenäherte Berechnung, Analysenintervall n = 30 Jahre

III. Dritter Berechnungsgang

1. Definitive Berechnung der Welle p_9 *und Kontrolle der Nebenperiode* p_{10}

Für die erste angenäherte Berechnung der Welle p_9 hatten wir außer p_{120} nur die angenähert berechneten Wellen p_7 und p_{12} ausgeschaltet. Nun werden für eine genauere Berechnung von Welle p_9 die beobachteten Jahresmittel der Abflußmengen von allen übrigen Periodizitäten befreit mit Ausnahme der Nebenperiode p_{10}. Diese soll zur Kontrolle noch einmal berechnet werden, und zwar diesmal als benachbarte Periode der Welle p_9. Das erste Mal hatten wir sie zusammen mit der Welle p_{12} berechnet.

Es werden die Differenzen berechnet:

1808 bis 1842:

$$d = MQ - Q' - [y^{(5)} + y^{(6)} + y^{(7)} + y^{(12)} + y^{(30)}]$$

1843 bis 1943:

$$d = MQ - Q' - [y^{(5)} + y^{(6)} + y^{(7)} + z^{(12)} + z^{(15)} + y^{(30)}]$$

wobei entnommen sind:

Q′ der Tafel VIII und $y^{(5)}$, $y^{(6)}$, $y^{(7)}$, $y^{(12)}$, $z^{(12)}$ und $z^{(15)}$ der Tafel XV; während für $y^{(30)}$ die Werte einer überholten und sonst nicht interessanten Zwischenrechnung der Periodizität p_{30} entnommen worden sind, auf deren Wiedergabe der Einfachheit halber verzichtet werden kann. Eine nochmalige, sehr zeitraubende Durchrechnung auf Grund der Werte $y^{(30)}$, welche sich nach Gl. 73 und 76 ergeben, konnte sich erübrigen; denn der Einfluß der Periodizität p_{30} auf die Bestimmung der Welle p_9 ist ohnehin klein, und eine teilweise Ausschaltung ist durch die Verwendung der Ergebnisse der erwähnten Zwischenrechnung doch erfolgt, wie eine entsprechende Kontrolle auf Grund der definitiven Werte für p_{30} nach Tabelle 17 ergibt.

Wir wählen wiederum:

Versuchswelle p′ = 9 *Jahre*

Versuchsfrequenz $x = \dfrac{360^0}{9} = 40^0$

Die Berechnung wurde wie folgt durchgeführt:

Berechnung der *Periodogrammkomponenten* gemäß Tafel XVI für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten q = 0, 9, 18, · · ·, 126 und der Länge p′ = 9 Jahre.

Bildung des *Summationsvektorenzuges* (Abb. 53) ($\frac{p'}{2}$-fache Werte, vgl. Bemerkung bei der Berechnung von Welle 7, Seite 69).

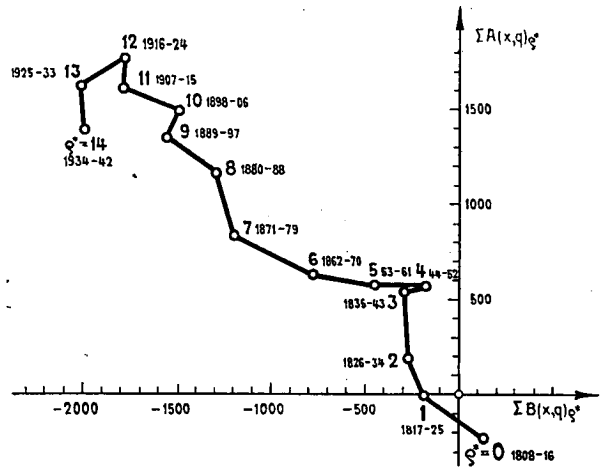


Abb. 53. Summationsvektorenzug für Welle p_9, definitive Berechnung, Analysenintervall = Versuchsperiode $p' = 9$ Jahre

Progressive Analyse mit einem Analysenintervall $n = 3 \cdot p' = 27$ Jahren und einer Intervallverschiebung um je 1 Jahr, womit sich die Komponenten $\bar{a}(x, q)$ und $\bar{b}(x, q)$ sowie $\bar{\psi}(x, q)$ und $\bar{h}(x, q)$ ergeben.

Auftragen der Komponenten $\psi(x, q)$ und $\bar{h}(x, q)$ als Phasen- und Amplitudendiagramm (Abb. 54).

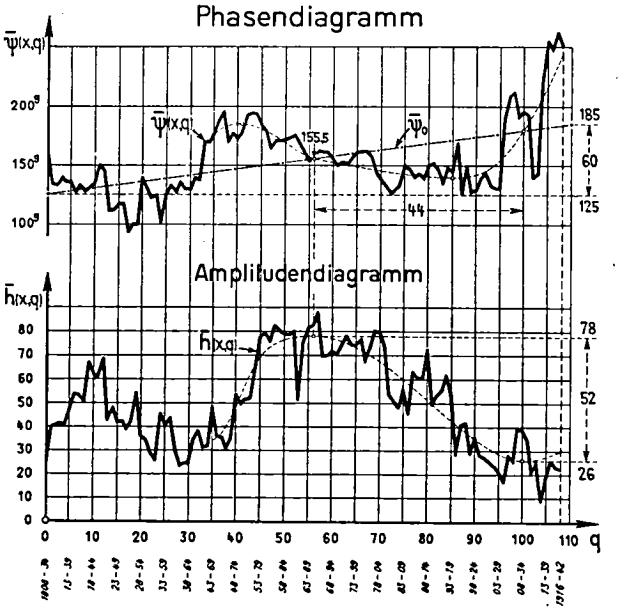


Abb. 54. Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_9, definitive Berechnung, Analysenintervall $n = 27$ Jahre, Versuchswelle $p' = 9$ Jahre

Der *Summationsvektorenzug* schreitet mit schwacher Krümmung und sekundären Schwankungen in einer Hauptrichtung weiter. Er zeigt so das Vorhandensein einer persistenten Periodizität an, deren Frequenz von der Versuchsfrequenz nur wenig verschieden ist. Beim Phasen- und Amplitudendiagramm setzt ab $q = 35$, entsprechend dem Jahre 1843, eine sinusförmige Schwingung ein, welche durch die Nebenperiode p_{10} verursacht wird.

Berechnung der Welle p_9

Das Phasendiagramm wird über seine ganze Länge durch eine Gerade ausgeglichen. Nach Abb. 54 ist mit $x = 40^0$ und $n = 27$:

$$\frac{d\bar{\psi}_0}{dq} = \frac{60}{110} = 0{,}545^g = 0{,}49^0 = \alpha - x$$

Frequenz $\alpha = 40{,}49^0 \approx 40{,}5^0$

Periode $p = 8{,}89$ *Jahre*

Amplitude:

Abschnitt $q = 0 \div 35$*:*

$\bar{h}(x) = \sqrt{\bar{a}^2(x,q)_m + \bar{b}^2(x,q)_m} \approx 46$ [vgl. Gleichung 41]

Glättungsfaktor $\approx 1{,}00$, $c = 46$ m³/sec

Abschnitt $q = 35 \div 109$*:*

Nach dem Amplitudendiagramm ist der Radius des Deferenten

$$\Phi_1 = \frac{78 + 26}{2} = 52; \quad P(x) = 0{,}998; \quad c \approx 52 \text{ m}^3/\text{sec}$$

Wir rechnen für den ganzen Zeitabschnitt 1808 bis 1942 mit einer konstanten Amplitude und setzen für

$$c = \frac{52 + 46}{2} \approx 50 \text{ m}^3/\text{sec}$$

Dies ist auf Grund dessen, was wir über die Genauigkeit der Resultate wissen, zulässig.

Anfangsphase $\beta = 125^g - 13{,}5 \cdot 0{,}545^g = 117{,}65^g \approx 106{,}0^0$

(77)

$$y = 50 \sin[40{,}5^0 t + 106{,}0^0] = 50 \sin\left[\frac{2\pi}{8{,}89} t + 106{,}0^0\right] \text{ in m}^3/\text{sec}$$

wobei für das Jahr 1808: $t = 0$ ist.

Die sich nach dieser Gleichung für jede Jahresmitte von 1808 bis 1950 ergebenden Ausschläge der Welle p_9 sind in Tabelle 17 enthalten. Die Welle p_9 ist auf Tafel XIX graphisch dargestellt.

Kontrollberechnung der Nebenperiode p_{10}

Aus Abb. 54 ist ersichtlich, daß die Wellenlänge der Schwankung des Amplituden- und Phasendiagramms $p_s = 88$ Jahre ist. Nach Gleichung 48 ist somit mit $x = 40^0$ und $n = 27$:

$$|\alpha_9 - \alpha_{10}| = \frac{2\pi}{p_s} = 4{,}09^0 = 4{,}54^g$$

Frequenz $\alpha = \alpha_{10} = 40{,}49^0 - 4{,}09^0 = 36{,}40^0$;

Periode $p = 9{,}90$ *Jahre*

Radius des Epizykels $\Phi_2 = \frac{52}{2} = 26 \quad P(x) = 0{,}884$

Amplitude $c = \frac{26}{0{,}884} \approx 30 \text{ m}^3/\text{sec}$

Anfangsphase:

aus $\bar{\psi}(x, q)$ bei $q = 56$ [$\bar{h}(x, q)_{max.}$] bestimmt.

$\beta = 155{,}5^g + [56 + 13{,}5] \cdot 4{,}54^g = 71{,}5^g \approx 65^0$

Nach *Gleichung 69* haben wir erhalten:

$$\alpha = 36{,}1^0; \quad c = 38\ m^3/sec; \quad \beta = 66^0$$

Gleichung 69 ist also in befriedigender Weise bestätigt worden, und eine Kontrollrechnung für die Nebenperiode p_{15} kann sich erübrigen.

2. *Definitive Berechnung der Periodizität* p_{30}

Im zweiten Berechnungsgang haben wir die Hauptperiode direkt berechnet, dagegen die Nebenperiode mit einer Wellenlänge von rund 20 Jahren nur als benachbarte Welle der Hauptperiode. Es soll nun auch die Nebenperiode noch direkt berechnet werden, indem wir für die Versuchsfrequenz einen bequemen Wert wählen, der möglichst genau gleich der angenähert bekannten Frequenz der Nebenperiode ist. Zudem müssen wir auch die Hauptperiode eliminieren. Die vorliegende Rechnung wurde des Zeitgewinnes halber parallel durchgeführt zur definitiven Berechnung der Welle p_9, so daß deren Ergebnisse noch nicht benützt werden konnten. Dies ist aber, wie leicht einzusehen ist, auch gar nicht nötig. Wir gehen also von den gleichen Werten, wie bei der zweiten Berechnung der Welle p_{30} aus, von welchen wir aber noch von 1808 bis 1854 die Werte $y^{(30)}$ und von 1855 bis 1943 die Werte $z^{(30)}$ der Tafel XV abziehen. Wir haben also gebildet:

1808 bis 1854:

$$d = MQ - Q' - [y^{(5)} + y^{(6)} + y^{(7)} + y^{(9)} + y^{(12)} + y^{(30)}]$$

1855 bis 1943:

$$d = MQ - Q' - [y^{(5)} + y^{(6)} + y^{(7)} + y^{(9)} + y^{(12)} + z^{(30)}]$$

Q′ wurde der Tafel VIII, die Werte in den Klammern wurden der Tafel XV entnommen.

Da die Nebenperiode eine Wellenlänge von rund 20 Jahren hat, wählen wir zu deren Berechnung:

Versuchswelle $p' = 20$ *Jahre*

Versuchsfrequenz $x = \frac{360^0}{20} = 18^0$

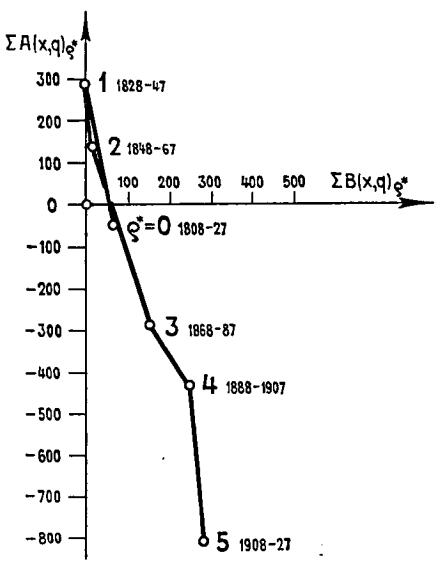


Abb. 55. Summationsvektorenzug für Welle p_{20}, definitive Berechnung der Nebenperiode, Analysenintervall = Versuchsperiode p′ = 20 Jahre

Die Berechnung wurde wie folgt durchgeführt:

Berechnung der *Periodogrammkomponenten* gemäß Tafel XVII für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten q = 0, 20, · · ·, 100 und der Länge p′ = 20 Jahre.

Bildung des *Summationsvektorenzuges* (Abb. 55) ($\frac{p'}{2}$-fache Werte).

Progressive Analyse mit einem Analysenintervall $n = \varrho \cdot p' = 3 \cdot 20 = 60$ Jahren und einer Intervallverschiebung um 1 Jahr. Auftragen des *Phasen-* und *Amplitudendiagramms* (Abb. 56).

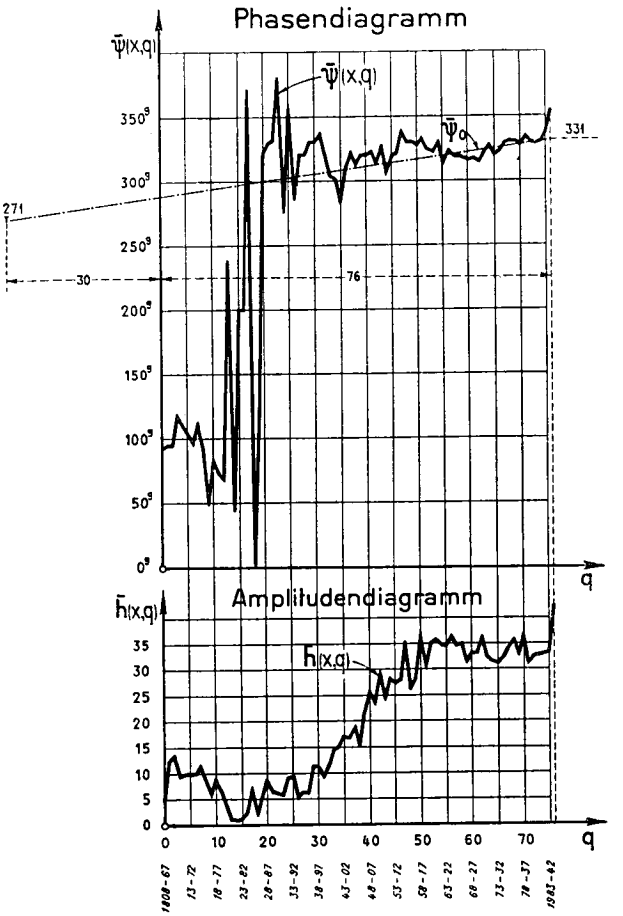


Abb. 56. Phasen- und Amplitudendiagramm für die Nebenperiode p_{20}, definitive Berechnung, Analysenintervall n = 60 Jahre, Versuchswelle p′ = 20 Jahre

Aus dem Summationsvektorenzug (Abb. 55) sowie dem Amplitudendiagramm (Abb. 56) ist ersichtlich, daß die Nebenperiode p_{20} schon im Jahre 1847 einsetzen dürfte. Vor 1847 ist keine Amplitude von Bedeutung vorhanden. Diese Erkenntnis steht nicht im Widerspruch zu Abb. 52, bei deren Betrachtung man schwanken kann, ob man den Beginn von p_{20} nicht auf 1847 oder 1848 anstatt auf 1854 festsetzen sollte. Nach Abb. 56 ist mit $x = 18^0$ und n = 30:

$$\frac{d\bar{\psi}_0}{dq} = \frac{331^g - 271^g}{106} = 0{,}565^g \approx 0{,}51^0 = \alpha - x$$

Frequenz $\alpha_2 = 18{,}51^0$;

Periode $p = 19{,}4$ *Jahre*

Amplitude: $\bar{h}(x) = \sqrt{\bar{a}^2(x,q)_m + \bar{b}^2(x,q)_m} = 31{,}6$

Glättungsfaktor = 0,995

$$P(x) = 0{,}988; \quad c_2 = \frac{31{,}6}{0{,}995 \cdot 0{,}988} \approx 32\ m^3/sec$$

Anfangsphase $\beta = 271^g = 244^0$

Es gilt also von *1847 bis 1943, für die Nebenperiode:*

(78)

$$z_2 = 32 \sin\left[18{,}51^0\, t + 244^0\right] = 32 \sin\left[\frac{2\pi}{19{,}4} t + 244^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

und für die gesamte *Periodizität* p_{30}:

1808 bis 1846: (79)

$$y_a = 62 \sin\left[11{,}5^0\, t + 4{,}5^0\right] = 62 \sin\left[\frac{2\pi}{31{,}2} t + 4{,}5^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

1847 bis 1943: (80)

$$y_b = 46 \sin\left[11{,}5^0\, t + 4{,}5^0\right] + 32 \sin\left[18{,}51^0\, t + 244^0\right]$$

$$= 46 \sin\left[\frac{2\pi}{31{,}2} t + 4{,}5^0\right] + 32 \sin\left[\frac{2\pi}{19{,}4} t + 244^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Die sich nach Gl. 79 und 80 für jede Jahresmitte von 1808 bis 1950 ergebenden Ausschläge der Periodizität p_{30} sind in Tabelle 17 enthalten. Die Periodizität p_{30} ist auf Tafel XIX graphisch dargestellt.

3. *Definitive Berechnung der Welle* p_5

Bei Durchführung des zweiten Berechnungsganges konnten wir die Konstanten der Periodizität p_5 bis zum Jahre 1887 genau genug und definitiv bestimmen. Für die Jahre seit 1887 ist noch ein dritter Berechnungsgang nötig. Wir haben folgende angenäherte Werte für die Wellenlängen gefunden: 1888 bis 1917: 4,58 Jahre; 1918 bis 1942: 4,38 Jahre. Aus den auf Seite 60, im Abschnitt A, 3, a des III. Teiles, angeführten Gründen können uns hier die Jahresmittel der Abflußmengen nicht genügen, und wir müssen Vierteljahresmittel benützen. Diese Vierteljahresmittel haben wir vom Einfluß aller andern Periodizitäten, die wir ermittelt haben, und der einjährigen Periode befreit, wie auf Seite 63 im Abschnitt B, I, 4 des III. Teiles angegeben ist. Es ergeben sich die auf Tafel IV zusammengestellten Ausgangswerte d_5. Es wurde dabei bei allen Periodizitäten von den definitiven Werten der Tabelle 16 ausgegangen. Da im zu untersuchenden Zeitabschnitt die Wellenlänge der gesuchten Periodizität gleich rund 4½ Jahre oder 18 Vierteljahre ist, so wählen wir:

Versuchswelle $p' = 18$ *Vierteljahre*

Versuchsfrequenz $x = \frac{360^0}{18} = 20^0$

Die Berechnung wurde wie folgt durchgeführt:

Berechnung der *Periodogrammkomponenten* gemäß Tafel XVIII für die Analysenintervalle mit den Anfangszeiten q = 0, 18, 36, ···, 198 und der Länge $p' = 18$ Vierteljahre. Bildung des *Summationsvektorenzuges* (Abbildung 57) ($\frac{p'}{2}$-fache Werte).

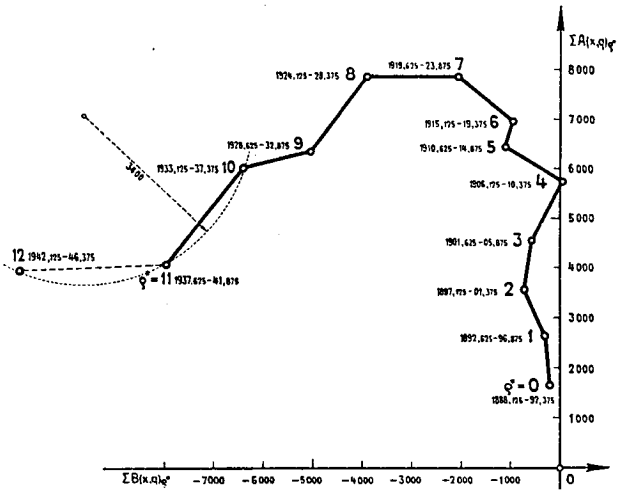


Abb. 57. Summationsvektorenzug für Welle p_5, definitive Berechnung, Analysenintervall $p' = 18$ Vierteljahre. (Punkt 12 nachträglich nach Abschluß der Arbeit berechnet, als dann noch das Jahr 1945 und teilweise auch das Jahr 1946 zur Verfügung standen. Vgl. diesbezüglich die Fußnote auf Seite 95)

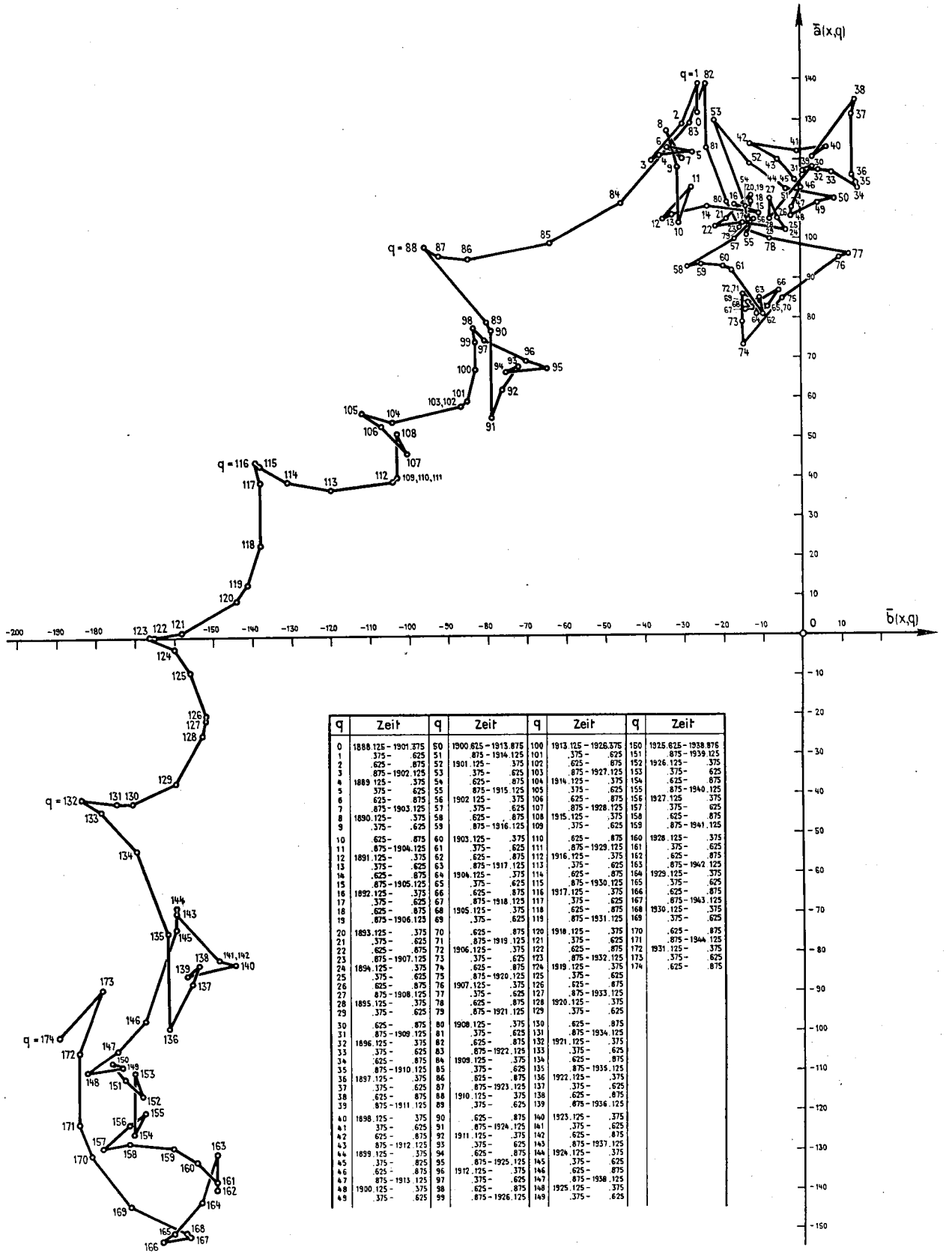
Progressive Analyse mit einem Analysenintervall $n = \varrho \cdot p' = 3 \cdot 18 = 54$ Vierteljahren und einer Intervallverschiebung um 1 Vierteljahr.

Auftragen des *Weges des Endpunktes des Periodogrammvektors* (Abb. 58).

Auftragen des *Phasen- und Amplitudendiagramms* (Abb. 59).

Aus dem Summationsvektorenzug (Punkte 0 bis 11), sowie dem Phasen- und Amplitudendiagramm (q = 0 bis 170) ist ersichtlich, daß zwei Zeitabschnitte mit verschiedenem Verhalten der Periodizität p_5 zu unterscheiden sind.*) Auf Grund des Phasendiagramms (q = 0 bis 170) und des Summationsvektorenzuges ($\varrho^* = 0$ bis 11) konnte festgestellt werden, daß der erste Zeitabschnitt von 1888 bis 1910, 375 (q = 0 bis q = 36) und der zweite von 1910, 625 bis 1944 (q = 90 bis q = 174) reicht. Beim Phasen- und Amplitudendiagramm, sowie beim Weg des Endpunktes des Periodogrammvektors liegt zwischen q = 36 und q = 90 ein Übergangsstück. Ferner ist aus dem sinusförmigen Verlauf des Amplitudendiagramms erkennbar, daß im zweiten Zeitabschnitt noch eine Nebenperiode vorhanden ist. Im Phasendiagramm muß eine Schwankung von gleicher Wellenlänge ersichtlich sein, wobei dem Minimum (q = 90) und dem Maximum (q = 165) des Amplitudendiagramms im Phasendiagramm Nullstellen entsprechen. Dementsprechend haben wir die Ausgleichsgerade des Phasendiagramms zwischen q = 90 und q = 174 gezogen, wobei wir die Richtung der Geraden mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt haben. (Wegen Störungen im Verlauf des Phasendiagramms liegt der erste Nullpunkt nicht genau bei q = 90.)

*) Im Phasendiagramm ist noch eine dritte Ausgleichsgerade gezeichnet, und im Summationsvektorenzug sind noch der Punkt $\varrho^* = 12$ und ein Kreis mit dem Radius = 3400 eingetragen. Es handelt sich dabei um Berechnungen, welche nach Abschluß der Arbeit auf Grund der Jahre 1945 und 1946 durchgeführt worden sind (vgl. Seite 95, unten, und Seite 111, links).



q	Zeit	q	Zeit	q	Zeit	q	Zeit
0	1888.125 - 1901.375	50	1900.625 - 1913.875	100	1913.125 - 1926.375	150	1925.625 - 1938.876
1	.375 - .625	51	.875 - 1914.125	101	.375 - .625	151	.875 - 1939.125
2	.625 - .875	52	1901.125 - .375	102	.625 - .875	152	1926.125 - .375
3	.875 - 1902.125	53	.375 - .625	103	.875 - 1927.125	153	.375 - .625
4	1889.125 - .375	54	.625 - .875	104	1914.125 - .375	154	.625 - .875
5	.375 - .625	55	.875 - 1915.125	105	.375 - .625	155	.875 - 1940.125
6	.625 - .875	56	1902.125 - .375	106	.625 - .875	156	1927.125 - .375
7	.875 - 1903.125	57	.375 - .625	107	.875 - 1928.125	157	.375 - .625
8	1890.125 - .375	58	.625 - .875	108	1915.125 - .375	158	.625 - .875
9	.375 - .625	59	.875 - 1916.125	109	.375 - .625	159	.875 - 1941.125
10	.625 - .875	60	1903.125 - .375	110	.625 - .875	160	1928.125 - .375
11	.875 - 1904.125	61	.375 - .625	111	.875 - 1929.125	161	.375 - .625
12	1891.125 - .375	62	.625 - .875	112	1916.125 - .375	162	.625 - .875
13	.375 - .625	63	.875 - 1917.125	113	.375 - .625	163	.875 - 1942.125
14	.625 - .875	64	1904.125 - .375	114	.625 - .875	164	1929.125 - .375
15	.875 - 1905.125	65	.375 - .625	115	.875 - 1930.125	165	.375 - .625
16	1892.125 - .375	66	.625 - .875	116	1917.125 - .375	166	.625 - .875
17	.375 - .625	67	.875 - 1918.125	117	.375 - .625	167	.875 - 1943.125
18	.625 - .875	68	1905.125 - .375	118	.625 - .875	168	1930.125 - .375
19	.875 - 1906.125	69	.375 - .625	119	.875 - 1931.125	169	.375 - .625
20	1893.125 - .375	70	.625 - .875	120	1918.125 - .375	170	.625 - .875
21	.375 - .625	71	.875 - 1919.125	121	.375 - .625	171	.875 - 1944.125
22	.625 - .875	72	1906.125 - .375	122	.625 - .875	172	1931.125 - .375
23	.875 - 1907.125	73	.375 - .625	123	.875 - 1932.125	173	.375 - .625
24	1894.125 - .375	74	.625 - .875	124	1919.125 - .375	174	.625 - .875
25	.375 - .625	75	.875 - 1920.125	125	.375 - .625		
26	.625 - .875	76	1907.125 - .375	126	.625 - .875		
27	.875 - 1908.125	77	.375 - .625	127	.875 - 1933.125		
28	1895.125 - .375	78	.625 - .875	128	1920.125 - .375		
29	.375 - .625	79	.875 - 1921.125	129	.375 - .625		
30	.625 - .875	80	1908.125 - .375	130	.625 - .875		
31	.875 - 1909.125	81	.375 - .625	131	.875 - 1934.125		
32	1896.125 - .375	82	.625 - .875	132	1921.125 - .375		
33	.375 - .625	83	.875 - 1922.125	133	.375 - .625		
34	.625 - .875	84	1909.125 - .375	134	.625 - .875		
35	.875 - 1910.125	85	.375 - .625	135	.875 - 1935.125		
36	1897.125 - .375	86	.625 - .875	136	1922.125 - .375		
37	.375 - .625	87	.875 - 1923.125	137	.375 - .625		
38	.625 - .875	88	1910.125 - .375	138	.625 - .875		
39	.875 - 1911.125	89	.375 - .625	139	.875 - 1936.125		
40	1898.125 - .375	90	.625 - .875	140	1923.125 - .375		
41	.375 - .625	91	.875 - 1924.125	141	.375 - .625		
42	.625 - .875	92	1911.125 - .375	142	.625 - .875		
43	.875 - 1912.125	93	.375 - .625	143	.875 - 1937.125		
44	1899.125 - .375	94	.625 - .875	144	1924.125 - .375		
45	.375 - .625	95	.875 - 1925.125	145	.375 - .625		
46	.625 - .875	96	1912.125 - .375	146	.625 - .875		
47	.875 - 1913.125	97	.375 - .625	147	.875 - 1938.125		
48	1900.125 - .375	98	.625 - .875	148	1925.125 - .375		
49	.375 - .625	99	.875 - 1926.125	149	.375 - .625		

Abb. 58. Welle p_5, definitive Berechnung, Weg des Endpunktes des Periodogrammvektors, Analysenintervall n = 54 Vierteljahre

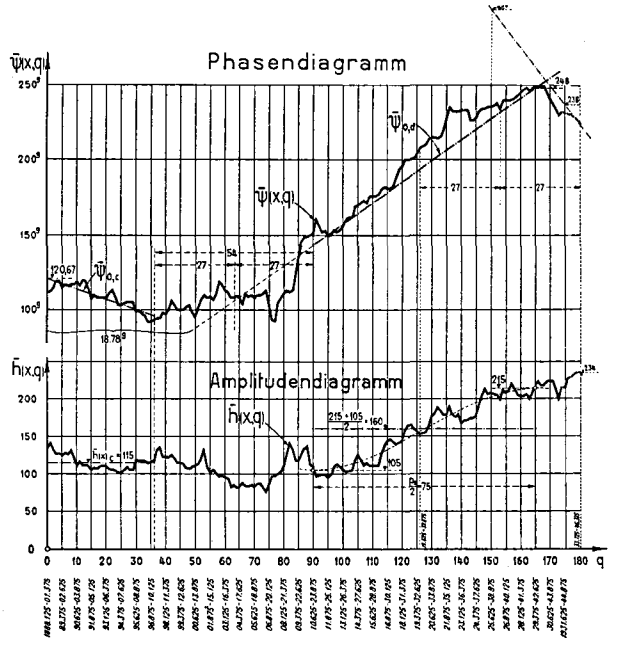


Abb. 59. Phasen- und Amplitudendiagramm für Welle p_5, definitive Berechnung, Versuchsperiode n = 54 Vierteljahre. (Punkte ab q = 174 bis q = 180 nachträglich nach Abschluß der Arbeit berechnet, als dann noch das Jahr 1945 und teilweise auch das Jahr 1946 zur Verfügung standen. Vgl. diesbezüglich die Fußnote.)

Zeitabschnitt 1888 bis 1910,375

Die Ausgleichsgerade im Phasendiagramm wurde nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Es ergab sich mit $x = 20^0$ (Zeiteinheit = 1 Vierteljahr) und n = 54:

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,c}}{dq} = -0{,}665^g = -0{,}6^0 = \alpha_c - x \quad \text{(Zeiteinheit = 1 Vierteljahr)}$$

Frequenz $\alpha_c = 19{,}4^0 \cdot 4 = 77{,}6^0$ auf Zeiteinheit = 1 Jahr bezogen

Periode p = *4,64 Jahre*

$\bar{h}(x)_c = 115$ $\quad P(x)_c = 0{,}987$

Amplitude $c_c = 117\ m^3/sec$

Anfangsphase:

Für unsere vorliegende Berechnung ist $t^* = 0$ bei 1888, 125 (Mitte des ersten verwendeten Vierteljahres). Für diesen Ausgangspunkt erhalten wir nach dem Phasendiagramm

$$\beta_c^* = 120{,}67^g + \frac{0{,}665^g \cdot 54}{2} = 138{,}63^g \approx 124{,}8^0$$

Der Einheitlichkeit halber wollen wir aber die Gleichung der Welle auch auf die *Mitte des Jahres 1808* mit 1 Jahr als Zeiteinheit beziehen. Auf dieser Zeitskala entspricht das erste verwendete Vierteljahr dem Zeitpunkt 1887,625.

Bezogen auf die Mitte des Jahres 1808 ergibt sich somit

$$\beta_c = 124{,}8^0 - 79{,}625 \cdot 77{,}6^0 = 65{,}9^0$$

Zeitabschnitt 1910,625–1944

Hauptperiode:

$$\frac{d\bar{\psi}_{0,d}}{dq} = 1{,}389^g = 1{,}25^0 = \alpha_d - x \quad \text{(Zeiteinheit = 1 Vierteljahr)}$$

Frequenz $\alpha_d = 21{,}25^0 \cdot 4 = 85{,}0^0$ auf Zeiteinheit = 1 Jahr bezogen

Periode p = *4,23 Jahre*

$\bar{h}(x)_d = 160$ $\quad P(x)_d = 0{,}944$

Amplitude $c_d = 170\ m^3/sec$

Anfangsphase:

$$\beta_d^* = 18{,}78^g - \frac{54}{2} \cdot 1{,}389^g = -18{,}72^g \approx -16{,}8^0$$

$\beta_d = -16{,}8^0 - 79{,}625 \cdot 85{,}0^0 = 55{,}3^0$, t = 0: entsprechend der Mitte des Jahres 1808

Nebenperiode:

Die Wellenlänge der Schwankung des Amplituden- und Phasendiagramms ist gleich $p_s = 2 \cdot 75 = 150$.

Nach Gleichung 48 ist

$$p_s = \frac{2\pi}{|\alpha_c - \alpha|}, \quad \alpha_c \text{ auf Zeiteinheit = 1 Vierteljahr bezogen}$$

$$\text{somit } |\alpha_c - \alpha| = \frac{2\pi}{p_s} = \frac{360}{150} = 2{,}4^0$$

Frequenz $\alpha = [21{,}25^0 - 2{,}4^0] \cdot 4 = 75{,}4^0$

Periode p = *4,77 Jahre*

$\alpha - x = -1{,}15^0 = -1{,}28^g$, auf Zeiteinheit = 1 Vierteljahr bezogen

$\bar{h}(x) = 55$ $\quad P(x) = 0{,}95$

Amplitude c = *58 m³/sec*

Anfangsphase:

Beim Maximum, entsprechend q + 165, ist sowohl für die Haupt- als auch die Nebenperiode

$$\bar{\psi}(x, q) = 248^g$$

$$\beta^* = 248^g + \left[165 + \frac{54}{2}\right] \cdot 1{,}28^g = 93{,}6^g = 84{,}24^0$$

$$\beta = 84{,}24^0 - 79{,}625 \cdot 75{,}4^0 = 200{,}5^0$$

Wir können somit setzen:

Jahr 1888 bis Mitte 1910 [t = *80 bis* t = *102*]: (81)

$$y_c = 117 \sin[77{,}6^0 t + 65{,}9^0] = 117 \sin\left[\frac{2\pi}{4{,}64} t + 65{,}9^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

Mitte 1910 bis 1944 [t = *102 bis* t = *136*]: (82)

$$y_d = 170 \sin[85{,}0^0 t + 55{,}3^0] + 58 \sin[75{,}4^0 t + 200{,}5^0]$$

$$= 170 \sin\left[\frac{2\pi}{4{,}23} t + 55{,}3^0\right] + 58 \sin\left[\frac{2\pi}{4{,}77} t + 200{,}5^0\right] \text{ in } m^3/sec$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Die sich nach Gleichungen 64, 81 und 82 für jede Jahresmitte von 1808–1950 ergebenden Ausschläge der Periodizität p_5 sind in Tabelle 17 enthalten. Die Periodizität p_5 ist auf Tafeln XIX und XX graphisch dargestellt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß in Abb. 59 von q = 168 an eine starke rückläufige Bewegung einsetzt und ab q = 168 die Werte $\bar{\psi}(x, q)$ stark abnehmen. Man muß sich also fragen, ob ab q + 168 erneut eine Änderung im Verhalten der Periodizität p_5 eintritt.*)

*) Dies konnte aber zur Zeit der Durchführung der zu Beginn des Jahres 1945 abgeschlossenen Berechnungen nicht abgeklärt werden, weil die Beobachtungen der Jahre 1945 und 1946 noch nicht vorlagen. Nach Abschluß der Arbeit standen dann das Jahr 1945 und teilweise auch das Jahr 1946 zur Verfügung, und es konnte damit nachträglich noch der Punkt ϱ^* = 12 des Summationsvektorenzuges, sowie die Punkte ab q = 170 bis q = 180 des Phasendiagramms berechnet werden. Mit Hilfe dieser Punkte ließ sich erkennen, daß etwa vom Jahre 1933 an die Periodizität p_5 tatsächlich erneut eine Änderung in ihrem Verhalten erfahren hat, wie im Abschnitt «Zusammenfassung und Erörterung der Ergebnisse» auf Seite 111 noch näher angeführt wird.

IV. Zusammenstellung der definitiven Ergebnisse

In Tabelle 16 sind die *Gleichungen* der *Periodizitäten* zusammengestellt, welche wir gefunden haben.

Die *Ausschläge*, welche sich für die einzelnen gefundenen Periodizitäten und der Summe aller Periodizitäten zur Zeit der Jahresmitte ergeben, sind in Tabelle 17 zusammengestellt, wobei die Werte bis zum Jahre 1950 extrapoliert worden sind.

Auf Tafel XIX sind die einzelnen gefundenen Periodizitäten und ihre Summe graphisch in Funktion der Zeit dargestellt. Die sich als Summe aller gefundenen Periodizitäten ergebende Ganglinie ist dabei so aufgetragen worden, daß sie mit dem Stufenzug, welcher die Jahresmittel der Abflußmengen darstellt, direkt verglichen werden kann.

Auf Tafel XX ist für die Jahre 1888–1944 die Summe aller gefundenen Periodizitäten mit einem größern Zeitmaßstab aufgetragen und den Vierteljahresmitteln mq* der Abflußmengen gegenübergestellt, welche sich ergeben, wenn die große einjährige Periode (Jahresgang) ausgeschaltet wird.

Periodizität	Gleichungen		
	Nr.	y in m^3/sec t = 0 entspricht der Mitte des Jahres 1908	festgestellt für die Jahre
p_5	64[a]	$y = 185 \sin [82{,}4^0\, t + 134{,}3^0] = 185 \sin \left[\frac{2\pi}{4{,}36} t + 134{,}3^0\right]$	1808-1822
	64[b]	$y = 63 \sin [68{,}5^0\, t + 49{,}2^0] = 63 \sin \left[\frac{2\pi}{5{,}25} t + 49{,}2^0\right]$	1823–1887
	81	$y = 117 \sin [77{,}6^0\, t + 65{,}9^0] = 117 \sin \left[\frac{2\pi}{4{,}64} t + 65{,}9^0\right]$	1888 bis Mitte 1910
	82	$y = 170 \sin [85{,}0^0\, t + 55{,}3^0] + 58 \sin [75{,}4^0\, t + 200{,}5^0]$	
		$= 170 \sin \left[\frac{2\pi}{4{,}23} t + 55{,}3^0\right] + 58 \sin \left[\frac{2\pi}{4{,}77} t + 200{,}5^0\right]$	Mitte 1910–1944*)
p_6	61	$y = 31 \sin [60{,}5^0\, t + 151{,}4^0] = 31 \sin \left[\frac{2\pi}{5{,}95} t + 151{,}4^0\right]$	1808-1939*)
p_7	63[a]	$y = 86 \sin [48{,}7^0\, t + 73{,}2^0] = 86 \sin \left[\frac{2\pi}{7{,}39} t + 73{,}2^0\right]$	1808–1894
	63[b]	$y = 77 \sin [55{,}0^0\, t + 228{,}1^0] = 77 \sin \left[\frac{2\pi}{6{,}54} t + 228{,}1^0\right]$	1895–1943
p_9	77	$y = 50 \sin [40{,}5^0\, t + 106{,}0^0] = 50 \sin \left[\frac{2\pi}{8{,}89} t + 106{,}0^0\right]$	1808–1942
p_{12}	67	$y = 64 \sin [28{,}8^0\, t + 234{,}0^0] = 64 \sin \left[\frac{2\pi}{12{,}5} t + 234{,}0^0\right]$	1808-1842
	72	$y = 54 \sin [29{,}51^0\, t + 208{,}8^0] + 76 \sin [6{,}1^0\, t + 47{,}5^0] \cdot \sin [30{,}0^0\, t + 108{,}5^0]$	
		$= 54 \sin \left[\frac{2\pi}{12{,}2} t + 208{,}8^0\right] + 76 \sin \left[\frac{2\pi}{59{,}0} t + 47{,}5^0\right] \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{12{,}0} t + 108{,}5^0\right]$	1843–1943
p_{30}	79	$y = 62 \sin [11{,}5^0\, t + 4{,}5^0] = 62 \sin \left[\frac{2\pi}{31{,}2} t + 4{,}5^0\right]$	1808-1846
	80	$y = 46 \sin [11{,}5^0\, t + 4{,}5^0] + 32 \sin [18{,}51^0\, t + 244^0]$	
		$= 46 \sin \left[\frac{2\pi}{31{,}2} t + 4{,}5^0\right] + 32 \sin \left[\frac{2\pi}{19{,}4} t + 244^0\right]$	1847–1943
p_{120}	Entspricht dem säkularen Gang. Ist deshalb nicht in Formel gefaßt worden. Die Werte Q', welche der Mitte der einzelnen Jahre entsprechen, sind in Tabelle 17 zusammengestellt.		

Tabelle 16. Zusammenstellung der Gleichungen der gefundenen Periodizitäten

*) Vgl. Fußnoten auf Seite 77 und 95, sowie Gleichung 83 (Seite 111) und Gleichung 84 (Seite 111).

Periodizität		p_5	p_6	p_7	p_9	p_{12}	p_{30}	p_{120}	
t	Jahre	$y^{(5)}$ nach Gl. 64 81 82	$y^{(6)}$ nach Gl. 61	$y^{(7)}$ nach Gl. 63	$y^{(9)}$ nach Gl. 77	$y^{(12)}$ nach Gl. 67 72	$y^{(30)}$ nach Gl. 79 80	Q′ nach Tafel XIX	Q′ + $\Sigma y^{(5\div30)}$
		m^3/sec	m^3/sec	m^3/sec	m^3/sec	m^3/sec	m^3/sec	m^3/sec	m^3/sec
0	1808	+132	+15	+82	+48	− 52	+ 5	1048	1278
1	09	−111	−16	+73	+28	− 64	+17	1047	974
2	1810	−162	−31	+14	− 6	− 60	+29	1046	830
3	11	+ 68	−14	−55	−37	− 41	+39	1046	1006
4	12	+180	+17	−86	−50	− 12	+48	1045	1142
5	13	− 20	+31	−59	−39	+ 20	+55	1044	1032
6	14	−185	+13	+ 8	−10	+ 47	+60	1043	976
7	15	− 29	−18	+70	+25	+ 62	+62	1042	1214
8	16	+177	−31	+84	+47	+ 62	+62	1041	1442
9	17	+ 76	−13	+41	+47	+ 46	+59	1040	1296
10	18	−158	+18	−30	+24	+ 19	+54	1039	966
11	19	−117	+31	−80	−10	− 12	+47	1038	897
12	1820	+126	+12	−76	−39	− 41	+38	1038	1058
13	21	+151	−19	−21	−50	− 60	+27	1037	1065
14	22	− 87	−31	+49	−37	− 63	+15	1036	882
15	23	− 4	−11	+85	− 6	− 51	+ 3	1035	1051
16	24	+ 57	+20	+64	+28	− 27	− 9	1034	1167
17	25	+ 46	+31	− 2	+48	+ 5	−22	1033	1139
18	26	− 24	+10	−66	+45	+ 35	−33	1032	999
19	27	− 63	−20	−85	+21	+ 56	−42	1031	898
20	28	− 22	−30	−47	−14	+ 64	−51	1030	930
21	29	+ 47	−10	+23	−42	+ 56	−57	1029	1046
22	1830	+ 57	+21	+78	−50	+ 34	−61	1028	1107
23	31	− 5	+30	+79	−34	+ 3	−62	1027	1038
24	32	− 60	+ 9	+27	− 2	− 28	−61	1026	911
25	33	− 39	−22	−44	+31	− 52	−57	1026	843
26	34	+ 32	−30	−85	+49	− 64	−51	1025	876
27	35	+ 62	− 8	−68	+44	− 59	−44	1024	951
28	36	+ 14	+22	− 5	+17	− 40	−34	1023	997
29	37	− 52	+30	+61	−17	− 11	−23	1022	1010
30	38	− 52	+ 7	+86	−44	+ 21	−11	1021	1028
31	39	+ 14	−23	+52	−49	+ 47	+ 1	1020	1062
32	1840	+ 62	−30	−17	−31	+ 62	+14	1019	1079
33	41	+ 32	− 7	−75	+ 2	+ 62	+26	1018	1058
34	42	− 39	+23	−82	+34	+ 46	+36	1017	1035
35	43	− 60	+29	−33	+50	− 56	+46	1016	992
36	44	− 5	+ 6	+38	+42	− 82	+53	1016	1068
37	45	+ 56	−24	+83	+14	− 85	+58	1015	1117
38	46	+ 47	−29	+72	−21	− 66	+61	1014	1078
39	47	− 22	− 5	+12	−45	− 30	+17	1013	940
40	48	− 63	+24	−56	−48	+ 11	+12	1012	892
41	49	− 24	+29	−86	−28	+ 46	+10	1011	958
42	1850	+ 45	+ 4	−57	+ 6	+ 68	+ 9	1010	1085
43	51	+ 57	−25	+10	+37	+ 71	+ 9	1009	1168
44	52	− 4	−28	+71	+50	+ 61	+10	1008	1168
45	53	− 60	− 3	+83	+39	+ 39	+12	1007	1117
46	54	− 40	+25	+39	+10	+ 14	+14	1006	1068
47	55	+ 30	+28	−32	−24	− 10	+14	1006	1012
48	56	+ 63	+ 3	−81	−47	− 29	+12	1005	926
49	57	+ 16	−26	−75	−47	− 43	+ 8	1004	837
50	58	− 51	−28	−18	−25	− 51	+ 2	1003	832
51	59	− 53	− 2	+51	+10	− 53	− 6	1002	949
52	1860	+ 12	+26	+86	+39	− 49	−15	1001	1100
53	61	+ 62	+27	+62	+50	− 39	−26	1000	1136
54	62	+ 33	+ 1	− 4	+37	− 19	−37	1000	1011
55	63	− 38	−27	−67	+ 6	+ 8	−47	999	834
56	64	− 61	−27	−85	−28	+ 40	−54	998	783
57	65	− 7	0	−45	−48	+ 68	−60	997	905
58	66	+ 56	+27	+26	−46	+ 85	−61	997	1084
59	67	+ 41	+27	+79	−21	+ 82	−58	996	1146
60	68	− 21	− 1	+78	+13	+ 59	−51	996	1073
61	69	− 63	−27	+25	+41	+ 18	−40	996	950
62	1870	− 25	−26	−46	+50	− 32	−25	996	892
63	71	+ 44	+ 2	−85	+34	− 77	− 8	996	906
64	72	+ 58	+28	−66	+ 2	−104	+11	995	924
65	73	− 2	+26	− 3	−31	−104	+29	995	910
66	74	− 59	− 2	+63	−49	− 75	+46	995	919
67	75	− 42	−28	+86	−44	− 26	+60	996	1002
68	76	+ 29	−25	+50	−18	+ 29	+70	996	1131
69	77	+ 63	+ 3	−19	+17	+ 77	+77	996	1214
70	78	+ 17	+28	−76	+44	+101	+78	996	1188
71	79	− 50	+25	−81	+49	+ 96	+73	996	1108
72	1880	− 54	− 4	−31	+31	+ 63	+64	997	1066
73	81	+ 11	−29	+40	− 2	+ 16	+51	997	1084
74	82	+ 62	−24	+84	−34	− 33	+36	998	1089
75	83	+ 35	+ 5	+70	−50	− 67	+17	998	1008
76	84	− 36	+29	+ 9	−42	− 78	0	999	881
77	85	− 61	+24	−58	−14	− 63	−17	999	810
78	86	− 9	− 6	−86	+21	− 29	−32	1000	859
79	87	+ 55	−29	−56	+45	+ 8	−43	1000	980
80	88	+ 52	−23	+13	+48	+ 40	−51	1001	1080
81	89	− 91	+ 6	+72	+28	+ 52	−54	1001	1014
82	1890	− 91	+30	+83	− 5	+ 46	−54	1002	1011
83	91	+ 52	+23	+37	−36	+ 19	−51	1002	1046
84	92	+114	− 7	−34	−50	− 13	−44	1003	969
85	93	− 4	−30	−82	−40	− 38	−36	1003	773
86	94	−115	−22	−74	−10	− 47	−27	1004	709
87	95	− 45	+ 8	−31	+24	− 37	−18	1004	905
88	96	+ 95	+30	+40	+47	− 12	−10	1005	1195
89	97	+ 86	+22	+77	+47	+ 20	− 4	1005	1253
90	98	− 60	− 9	+48	+25	+ 46	+ 1	1006	1057
91	99	−111	−30	−22	− 9	+ 57	+ 3	1006	894
92	1900	+ 10	−21	−73	−39	+ 51	+ 4	1007	939
93	01	+116	+10	−62	−50	+ 29	+ 4	1008	1055
94	02	+ 40	+30	+ 3	−37	− 3	+ 3	1009	1045
95	03	−100	+20	+65	− 6	− 35	+ 2	1011	957
96	04	− 80	−10	+71	+27	− 55	+ 2	1013	968
97	05	+ 63	−31	+17	+48	− 60	+ 2	1014	1053
98	06	+110	−20	−52	+46	− 49	+ 6	1016	1057
99	07	− 18	+11	−76	+22	− 29	+ 9	1019	938
100	08	−116	+31	−36	−13	− 2	+15	1023	902
101	09	− 34	+19	+35	−41	+ 20	+23	1027	1049
102	1910	+141	−12	+76	−50	+ 35	+31	1031	1252
103	11	+ 74	−31	+52	−34	+ 43	+38	1036	1178
104	12	−117	−19	−16	− 3	+ 43	+44	1042	974
105	13	− 80	+13	−71	+30	+ 38	+49	1048	1027
106	14	+ 96	+31	−65	+49	+ 29	+50	1054	1244
107	15	+ 73	+18	− 3	+44	+ 19	+48	1059	1258
108	16	− 88	−13	+61	+18	+ 5	+42	1063	1088
109	17	− 69	−31	+74	−17	− 11	+32	1066	1044
110	18	+ 87	−17	+23	−43	− 32	+19	1069	1106
111	19	+ 75	+14	−47	−49	− 51	+ 4	1071	1017
112	1920	− 93	+31	−77	−32	− 64	−13	1072	824
113	21	− 89	+17	−41	+ 1	− 67	−31	1073	863
114	22	+ 95	−15	+30	+33	− 53	−46	1074	1118
115	23	+117	−31	+75	+50	− 23	−60	1075	1203
116	24	− 94	−16	+57	+42	+ 20	−70	1075	1014
117	25	−144	+15	−10	+14	+ 63	−76	1075	937
118	26	+ 75	+31	−69	−20	+ 95	−77	1075	1110
119	27	+176	+15	−68	−45	+107	−73	1075	1187
120	28	− 38	−16	−10	−48	+ 89	−63	1074	988
121	29	−202	−31	+57	−28	+ 47	−50	1074	867
122	1930	− 8	−14	+75	+ 5	− 11	−34	1073	1086
123	31	+212	+17	+29	+36	− 69	−16	1072	1281
124	32	+ 59	+31	−42	+50	−110	+ 4	1071	1063
125	33	−206	+14	−77	+40	−123	+22	1070	740
126	34	−117	−18	−46	+11	−101	+39	1068	836
127	35	+180	−31	+24	−24	− 52	+51	1067	1215
128	36	+161	−13	+74	−47	+ 9	+60	1065	1309
129	37	−138	+18	+60	−47	+ 66	+65	1064	1088
130	38	−194	+31	− 4	−25	+103	+64	1062	1037
131	39	+ 83	+12	−66	+ 9	+109	+61	1060	1268
132	1940	+212	−19	−71	+39	+ 85	+53	1058	1357
133	41	− 32	−31	−15	+50	+ 39	+43	1056	1110
134	42	−204	−11	+53	+37	− 13	+31	1054	947
135	43	− 19	+20	+76	+ 7	− 55	+18	1052	1099
136	44	+185	+31	+34	−27	− 75	+ 7	1050	1205
137	45	+ 52	+11	−37	−48	− 71	− 3	1048	952
138	46	−155	−20	−77	−46	− 49	−11	1046	688
139	47	− 79	−30	−50	−22	− 13	−17	1044	833
140	48	+126	−10	+23	+13	+ 19	−19	1042	1194
141	49	+ 86	+21	+72	+41	+ 38	−19	1040	1279
142	1950	−102	+30	+64	+50	+ 40	−19	1038	1101
		extrapoliert ab Jahr							
		1945	1940	1944	1943	1944	1944	1935*	
		* Jahre 1935–1943 durch Glättung verloren							

Tabelle 17. Ausschläge der einzelnen Periodizitäten und ihrer Summe zur Zeit der Jahresmitte

E. *Prüfung der Frage, wie weit die gefundenen Periodizitäten als reell betrachtet werden dürfen*

1. Säkulare Welle p_{120}

Die säkulare Welle p_{120} mit den Werten Q′ ist bereits aus einer graphischen Darstellung der mittleren jährlichen Abflußmengen, wie sie z. B. Tafel XIX enthält, erkennbar. Die Form der Welle ist durch mehrfache Glättungen mittels übergreifender Intervalle herausgearbeitet worden. Es ergibt sich keine regelmäßige Sinuslinie.

Man wird aus dem festgestellten Verlauf der Welle in früheren Jahren, etwa in den drei ersten Vierteln des 19. Jahrhunderts, nicht zu weitgehende Schlüsse ziehen dürfen; denn, wie auf Seite 59 dargelegt worden ist, könnte diese Form dadurch beeinflußt worden sein, daß man bei der Berechnung der Abflußmengen des Rheins bei Basel mit Hilfe der Pegelstation Säckingen einen systematischen Fehler begangen hätte. Ein positiver Anhaltspunkt für einen solchen Fehler liegt allerdings nicht vor, immerhin mußte eine, wenn wahrscheinlich auch sehr weitgehend zutreffende Annahme über die säkulare Unveränderlichkeit des Pegelprofils Säckingen getroffen werden.

Das im Jahre 1873 auftretende *Minimum* der Welle p_{120}, welchem nach Tabelle 17 eine Abflußmenge von $Q' = 995$ m³/sec entspricht, darf aber in bezug auf die Zeit des Auftretens und die Größe der Abflußmenge als schon recht genau ermittelt betrachtet werden. Aus dem Verlauf der Welle kann angenähert gefolgert werden, daß ein *erstes Maximum* etwa im Jahre 1805 aufgetreten sein dürfte. Ein *zweites Maximum*, welches sehr gut durch Messungen belegt ist, mit einer Abflußmenge von $Q' = 1075$ m³/sec, entspricht zeitlich dem Jahre 1925.

Die zuletzt aufgetretene Amplitude beträgt somit 80 m³/sec; um 80 m³/sec lagen also die mittleren Abflußmengen des Rheins in den siebziger Jahren des vorigen Jahrhunderts im Durchschnitt unter den mittleren Abflußmengen, welche in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts festgestellt worden sind. Heute befinden wir uns wieder in einem Zeitabschnitt der säkularen Abnahme der Abflußmenge.

Will man also einen guten *Normalwert für die Abflußmengen des Rheins bei Basel* gewinnen, oder die *normale Dauerkurve* aufstellen, so wird man dazu am besten den Zeitabschnitt 1869–1929 verwenden, dessen Anfang um gleich viele Jahre vor dem Minimum der Welle p_{120} im Jahre 1873 liegt wie sein Ende nach dem Maximum von 1925. Bei Benützung dieses rund 60 Jahre umfassenden Zeitabschnittes wird auch die Welle p_{30} weitgehend vernichtet: Die in der Literatur (z. B. Lit. 17) etwa vertretene Ansicht, daß zur Bildung eines «*Normalwertes*» 25 Jahre zu verwenden seien, trifft somit bei den Abflußmengen des Rheins bei Basel auf jeden Fall nicht zu.*) Bei *andern größern Flüssen Europas* verhält es sich wahrscheinlich ebenso; denn nach Lit. 28 sind beim *Inn*, sowie auch bei *norddeutschen Flüssen* die gleichen säkularen Schwankungen aufgetreten wie beim Rhein bei Basel, obwohl diese norddeutschen Flüsse einen ganz andern Jahresgang als der alpine Rhein bei Basel zeigen. Es dürfe sogar angenommen werden, daß die Amplitude bei den norddeutschen Flüssen größer gewesen sei als beim Rhein und beim Inn, was begründet wäre, weil bei letzteren eine Milderung durch den *Einfluß der Gletscher* erfolgt sein dürfte.

Sehr interessant erscheinen in diesem Zusammenhange Angaben in Lit. 42 und 44 über das *Verhalten der Gletscher*, aus welchen man insbesondere entnehmen kann, daß der Vorstoß der Gletscher im Zeitabschnitt 1912–1919 mit dem Abschnitt des stärksten Anstieges der säkularen Ganglinie der Abflußmengen des Rheins bei Basel zusammenfällt. Ohne diese Rücklage von Wasser in Form von Eis wäre die Amplitude der Welle p_{120} größer geworden. Die säkulare Zunahme der Abflußmengen des Rheins, verbunden mit einer Zunahme der Gletscher, dürfte wohl damit im Zusammenhang stehen, daß nach Lit. 34 in der zweiten Hälfte der neunziger Jahre des vorigen Jahrhunderts ein Zeitabschnitt in Erscheinung getreten ist, welcher ein stark ausgeprägtes maritimes Klima mit meist milden Regenwintern aufwies und nach einer Dauer von viereinhalb Jahrzehnten mit einer Wendung zur Kontinentalität seinen Abschluß gefunden hat. Dieser Zeitabschnitt maritimen Klimas fällt ungefähr mit dem Abschnitt des deutlich sichtbaren Anstieges der säkularen Ganglinie des Rheins zusammen.

Aus der Lage des Minimums und des zuletzt aufgetretenen Maximums der Welle p_{120} ergibt sich eine *Wellenlänge* von $2 \cdot 52 = 104$ Jahren, während man aus der Lage der beiden Maximums eine Wellenlänge von ungefähr 120 Jahren erhält. Eine gleich große Wellenlänge hatte auch das Spektrum angezeigt. Wir hatten deshalb für die säkulare Ganglinie die *Nominalbezeichnung Welle* p_{120} eingeführt und in der Folge der Einfachheit halber beibehalten. Weitere Erörterungen über die Wellenlänge können vorläufig unterbleiben, bis auf Grund zukünftiger Abflußmengenbestimmungen ein neues Minimum genau festgestellt und damit eine weitere sichere Unterlage erhalten werden kann.

Bei der Welle p_{120} *handelt es sich nicht um eine verborgene, durch die Periodogrammrechnung erst noch zu erschließende Periodizität, sondern um eine einwandfrei erkennbare Realität*, so daß wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen mit Hilfe des Expektanzkriteriums keinen Sinn haben.

2. Wellen p_5, p_7, p_{12} und p_{30}

a) Allgemeines

Es handelt sich um quasiperiodische, verborgene Wellen, welche durch die Periodogrammrechnung er-

*) Ob jedoch die Benützung eines Durchschnittswertes aus 60 oder 120 Jahren als Vergleichsmaßstab für wasserwirtschaftliche Untersuchungen innerhalb des Zeitabschnittes, welcher eine Generation etwa interessieren dürfte, stets gegeben ist, erscheint fraglich. Mindestens sollte aber ein Durchschnittswert aus 30—36 Jahren verwendet werden, damit die Wellen p_{12} und p_{30} möglichst gut ausgeglichen werden.

schlossen worden sind. Sie müssen mit Hilfe des Expektanzkriteriums auf ihre Realität überprüft werden.

Obwohl die Wellen p_5, p_7, p_{12} und p_{30} sich als *quasiperiodisch* erwiesen haben, indem sich während der zur Verfügung stehenden Beobachtungsdauer von Zeit zu Zeit ihre Konstanten etwas änderten, so handelt es sich trotz diesen Änderungen jeweilen doch um die eindeutige Fortsetzung ein und derselben Periodizität. Es erscheint deshalb als zulässig, den Expektanzbetrachtungen den Durchschnittswert der Amplitude für den ganzen Bereich seit 1808 zugrunde zu legen:

Wir wissen, daß das *Beobachtungsmaterial*, gebildet durch die Jahresmittel der Abflußmengen, das Bild einer Folge von voneinander unabhängigen zufälligen Werten zeigt. Die mittlere quadratische Abweichung ist nach Tabelle 10 für die n = 136 Jahre von 1808–1943 $\sigma = \pm 164$ m³/sec. Die *Expektanz auf Grund der unveränderten Jahresmittel* ergibt sich somit nach Gleichung 52 zu

$$E_1 = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2 \cdot 164}{\sqrt{136}} = 28{,}1$$

Wir wissen aber auf Grund von Tabelle 12 und den zugehörigen Erläuterungen auch, daß die mittlere quadratische Abweichung um so kleiner wird, je mehr gefundene Periodizitäten ausgeschaltet werden. Nach der Ausschaltung von Periodizitäten ergeben sich neue Reihen von Werten von der Art zufälliger Fehler, welche aber eine kleinere Streuung aufweisen als die unveränderten Jahresmittel. Wir dürfen jedoch solche Reihen Expektanzbetrachtungen über eine bestimmte Welle nur dann zugrunde legen, wenn von den andern Wellen lediglich diejenigen ausgeschaltet werden, deren Realität mit genügend großer Wahrscheinlichkeit bereits nachgewiesen ist.

b) Erste Überprüfung der Welle p_5

Aus den Gleichungen 64, 81 und 82 ergibt sich als *Durchschnittswert der Amplitude* für die Jahre 1808–1943 c = 112 m³/sec, und zwar sowohl für den Fall ohne Berücksichtigung der von 1910–1940 aufgetretenen Nebenperiode als auch für den Fall mit deren Berücksichtigung. Die Formel für die Nebenperiode wird einfach als eine Zusatzgleichung betrachtet, welche die zeitliche Veränderung der Größe der Amplitude zum Ausdruck bringt.

Die im Durchschnitt auftretende Amplitude der Periodizität p_5 ist somit viermal größer als die Expektanz E_1. Die Realität der Periodizität p_5 darf daher nach den Ausführungen auf Seite 55, rechts, mit genügend großer Wahrscheinlichkeit als erwiesen betrachtet werden. Infolgedessen darf in der Folge die Periodizität p_5 bei den Expektanzbetrachtungen über die andern Wellen ausgeschaltet werden.

Die Welle p_{120} ist als eine reale Tatsache zu betrachten. Wir wären berechtigt gewesen, sie bei der Berechnung von E_1 bereits auszuschalten. Da aber auf Grund der Ausführungen auf Seite 63, der Tabelle 11 und der Abb. 20, leicht zu erkennen ist, daß durch die Ausschaltung der Welle p_{120} die mittlere quadratische Abweichung σ nur wenig verändert wird, so durfte deren genaue Berechnung nach Ausschaltung von p_{120} unterbleiben.

c) Erste Überprüfung der Welle p_7

Aus Gleichung 63a und 63b ergibt sich als *Durchschnittswert der Amplitude* für die Jahre 1808–1943 c = *83 m³/sec.*

Die mittlere quadratische Abweichung, welche die Jahresmittel der Abflußmengen nach Ausschaltung der bereits als reell erkannten Wellen p_{120} und p_5 aufweisen, kann nach Tabelle 12 genau genug und vorsichtig zu $\sigma \approx \pm 150$ m³/sec eingeschätzt werden. Damit ergibt sich eine Expektanz von E = 25,6, welche rund 3,2mal kleiner ist als der Durchschnittswert der Amplitude. Nach den Ausführungen auf Seite 55 rechts darf somit auch die Welle p_7 mit genügend großer Wahrscheinlichkeit als reell angesehen und infolgedessen bei den weitern Expektanzuntersuchungen ausgeschaltet werden. Übrigens dürfte die Welle p_7 schon mit genügend großer Wahrscheinlichkeit als reell auf Grund eines Vergleiches mit der Expektanz E_1, welche rund dreimal kleiner als die Amplitude ist, betrachtet werden, also ohne Ausschaltung der Wellen p_5 und p_{120}.

d) Überprüfung der Welle p_{12}

Aus der graphischen Darstellung der Tafel XIX ergibt sich *als Durchschnittswert der Amplitude* für die Zeit von 1808–1943 c = *74 m³/sec.* Die Formeln für die in der Zeit von 1843–1943 auftretenden nahezu symmetrisch zur Frequenz der Hauptperiode liegenden Nebenperioden betrachten wir dabei als formbestimmende Zusatzgleichungen, worüber im IV. Teil in den Abschnitten A, 2 und C, 1 noch Näheres ausgeführt wird.

Nach Tabelle 12 darf die mittlere quadratische Abweichung nach Ausschaltung der bereits als reell erkannten Wellen p_{120}, p_5 und p_7 für die Jahre 1808–1943 zu $\sigma \approx \pm 140$ m³/sec angenommen werden, woraus sich eine Expektanz von E = 24 ergibt. Der Durchschnittswert der Amplitude ist rund 3,1mal größer als die Expektanz; nach den Ausführungen auf Seite 55 rechts darf somit auch die Welle p_{12} als reell angesehen und infolgedessen bei den weitern Expektanzbetrachtungen ausgeschaltet werden. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß p_{12} zufälliger Natur sei, ist nur rund 0,00007 oder 1:15000.

Eine spätere zweite Überprüfung der Welle p_{12} nach Ausschaltung nicht nur der Wellen p_{120}, p_5 und p_7, sondern auch der Welle p_{30} kann sich erübrigen, weil durch die Ausschaltung der Welle p_{30} die mittlere quadratische Abweichung nicht mehr stark verändert wird.

Im übrigen sei auch auf die weitern Erörterungen, insbesondere über mögliche Zusammenhänge mit der «elfjährigen» *Sonnenfleckenperiode* im Abschnitt C des IV. Teiles unserer Arbeit verwiesen.

e) Überprüfung der Welle p_{30}

Aus der graphischen Darstellung der Tafel XIX ergibt sich als *Durchschnittswert der Amplitude* für die Zeit von 1808–1943 c = 64 m³/sec.

Nach Tabelle 12 darf die mittlere quadratische Abweichung nach Ausschaltung der bereits als reell erkannten Wellen p_{120}, p_5, p_7 und p_{12} für die Jahre 1808–1943 genau genug und vorsichtig zu $\sigma \approx \pm 135$ bis 140 m³/sec eingeschätzt werden. Damit ergibt sich eine Expektanz E = 23 bis 24, welche also 2,66- bis 2,8mal kleiner ist als der Durchschnittswert der Amplitude. Nach den

Ausführungen auf Seite 55 rechts dürfte auf Grund des Expektanzkriteriums die Welle p_{30} nicht als reell angesehen werden, wenn der Maßstab angelegt wird, daß die Amplitude die Expektanz um mindestens das Drei- bis Vierfache übertreffen sollte.

Immerhin ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Welle p_{30} ein Zufallsprodukt sei, schon recht klein; nämlich rund 1:1200 bis 1:2500. Zudem ist von *Brückner* (Lit. 21) eine «35-jährige» Periode außer des Niederschlages und der Temperatur, auch des *Abflusses* für Gebiete in verschiedenen geographischen Gebieten gefunden worden. Die von Brückner gefundenen Wellenlängen der Schwankung der Temperatur, des Niederschlages und des Wasserstandes (Abfluß) besitzen einen großen Variationsbereich und liegen zwischen den Grenzen von 20 bis 50 Jahren. Er berechnete aus diesen Wellenlängen der Schwankung der Temperatur, des Niederschlages und des Wasserstandes, sowie aus Angaben in Chroniken über die Eisverhältnisse der Flüsse, über das Datum der Weinernte und die Häufigkeit strenger Winter eine durchschnittliche Wellenlänge von rund 35 Jahren. Die Angaben Brückners stützen sich für die uns hier interessierende Zeit seit 1808 auf Messungen der Temperatur, des Niederschlages und der Wasserstandsschwankungen, sie dürfen also zum Vergleich mit unserer Periodizität p_{30} herangezogen werden. Die Angaben von Brückner sind nicht sehr präzis, da er ja nur eine rohe Glättungsmethode und zum Teil unhomogenes Material verwendet hat; doch kann ihnen entnommen werden, daß seine Periodizität folgende Ausschläge zeigt:

im Sinne einer Abflußvermehrung (naß und kühl)*) in den Jahren 1816–1820, 1841–1855 und 1876–1885;

im Sinne einer Abflußverminderung (trocken und warm)*) in den Jahren 1826–1835 und 1861–1870.

Brückner spricht ferner in bezug auf den Verlauf seiner Periodizität von *Trockenzeiten* um 1830 und 1860, sowie von *nassen Zeitabschnitten* um 1815, 1850 und 1880.

Vergleicht man diese Angaben von Brückner mit unserer Periodizität p_{30} (Tafel XIX), so sieht man, daß eine gar nicht schlechte Übereinstimmung besteht. Man sieht daraus übrigens, daß für das 19. Jahrhundert die Bezeichnung der Brückner-Periode als «35-jährige» Periode irreführend ist, wenn man diese Bezeichnung als eine mathematische Angabe auffaßt. Die Wellenlänge ist variabel, und für das 19. Jahrhundert ist die Nominalbezeichnung «30-jährig» zutreffender. Brückner sagt in seinem Werke, daß meteorologische Perioden keine mathematischen seien, und wollte damit zum Ausdruck bringen, daß seine Periode nicht persistent, sondern quasiperiodisch sei und nicht einen reinen sinus-Verlauf zeige. Wir haben ja auch für unsere Welle p_{30} das gleiche gefunden, nämlich eine Änderung im periodischen Verhalten und eine aus zwei Sinuslinien gebildete Form seit dem Jahre 1847.

Wie aus vorstehenden Ausführungen hervorgeht, dürfen wir deshalb annehmen, *daß die von uns im Abflußvorgang des Rheins bei Basel aufgedeckte Periodizität* p_{30} *identisch ist mit der Brückner-Periode.*

Wenn eine bestimmte Periodizität bei verschiedenen Untersuchungen immer wieder gefunden wird, so darf darauf, wie bereits auf Seite 12 ausgeführt, als ein Zeugnis für die Realität dieser Periodizität hingewiesen werden, selbst wenn in bezug auf die Konstanten der Periodizität nicht genaue Übereinstimmung besteht. Nun hat auch noch *von Keßlitz* (Lit. 16) für die *Mur* bei Bruck in Österreich eine Periodizität gefunden, welche er glaubte als die Brückner-Periode ansprechen zu dürfen und welche einen ähnlichern Verlauf zeigt wie unsere Welle p_{30}. In Anbetracht dessen, daß die Wahrscheinlichkeit für die Realität unserer Welle p_{30} schon eine recht große ist und daß eine ähnlich verlaufende Welle im Abflußvorgang bereits an andern Orten und mit andern Methoden von Brückner und von Keßlitz gefunden worden ist, glauben wir, *auch die Welle* p_{30} *als reell ansehen zu dürfen.*

Die Brückner-Periode ist etwa dadurch zu widerlegen oder in ihrem Geltungsbereich einzuschränken versucht worden, daß man sie über den Beobachtungsbereich hinaus, welcher Brückner zur Verfügung stand, in den seither verflossenen Zeitabschnitt extrapolierte und ganz allgemein mit dem Charakter dieses Zeitabschnittes verglich (Lit. 37). Ein solches Vorgehen ist unzulässig, weil dabei vernachlässigt wird, daß die Brückner-Periode nur *eine* unter verschiedenen andern, zum Teil bedeutend schärfer ausgeprägten Periodizitäten ist (p_5, p_7, p_{12}, p_{120}).

Brückner warnt übrigens selbst vor einer derart weitgehenden Extrapolation.

Auf Seite 11 hatten wir angedeutet, daß den *hydrographischen Unterlagen Brückners* zum Teil Mängel anhaften, welche es nicht verwunderlich erscheinen lassen, wenn Brückner die Konstanten seiner Periode nicht zuverlässiger bestimmen konnte. Es betrifft dies die von ihm benützten Reihen der Wasserstände des Zürichsees und des Bodensees. Er hat beide Reihen als homogene Reihen verwendet, was nicht der Fall ist; denn während des Beobachtungsbereiches, welchen er benützt, sind durch bauliche Eingriffe bei beiden Seen erhebliche Änderungen des Abflußvermögens verursacht und dadurch die Seestände beeinflußt worden. In den verwendeten Werten für den Zürichsee muß zudem ein Fehler, vielleicht ein Kommafehler, enthalten sein; denn die von Brückner angegebene säkulare Schwankung der Zürichseestände stimmt der Größenordnung nach nicht.

f) Zweite Überprüfung der Wellen p_5 *und* p_7

Nach Tabelle 12 kann die mittlere quadratische Abweichung der Jahresmittel der Abflußmengen, wenn aus diesen die Wellen p_{120}, p_{30} und p_{12}, sowie eine der beiden Wellen p_5 oder p_7 ausgeschaltet werden, für die Zeit von 1808–1943 genügend genau und vorsichtig eingeschätzt werden zu $\sigma \approx \pm 140$ m³/sec, entsprechend einer Expektanz von $E_2 = 24$. Diese Wellen dürfen ausgeschaltet werden, weil es gestattet ist, sie auf Grund obiger Überprüfungen als reell anzusehen. Somit ist der Durchschnittswert der Amplitude der *Welle* p_5 um das 4,66- und derjenige der *Welle* p_7 um das 3,46-fache größer als die Expektanz E_2. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden Wellen Zufallsprodukte seien, ist also für die Welle p_5 nur rund 1:3 000 000 000 und für die Welle p_7 nur 1:150 000.

Eine rund siebenjährige Periodizität ist durch *von Keßlitz* (Lit. 16) für die Mur bei Bruck in Österreich und von *Streiff* (Lit. 29) für den Penobscot River im Osten

*) Der Umstand, daß die Niederschlags- und Temperaturwellen gegensinnig verlaufen, dürfte zur Folge haben, daß die Abflußwelle etwas weniger ausgeprägt sein wird als die Niederschlagswelle (Gletscherrückhalt).

der USA. gefunden worden, wobei nur die Jahre 1873 bis 1937, bzw. 1909–1922 nach dem Streiff'schen Glättungsverfahren untersucht worden sind. Das von Streiff gefundene Wellenstück stimmt in bezug auf Frequenz und Phase nicht schlecht mit unserer Welle p_7 überein; die von Keßlitz berechnete Welle stimmt nur zeitweise einigermaßen überein und verläuft in andern Zeiten gegensinnig. (Weder Streiff noch von Keßlitz haben die von ihnen gefundenen Wellen auf deren Realität hin überprüft.)

Wir sind bei unsern Überprüfungen von den mittleren quadratischen Abweichungen σ der Tabelle 12 ausgegangen, welche sich ergeben, wenn zum Teil erst angenähert berechnete Periodizitäten ausgeschaltet werden. Aus der Tabelle ist jedoch ersichtlich, daß die mittleren quadratischen σ noch etwas kleiner sein würden, wenn man durchwegs die definitiven Werte der Wellen ausgeschaltet hätte. Die verwendeten Werte für die Expektanz nach Ausschaltung von Wellen sind deshalb etwas zu groß erhalten worden, und wir haben diesbezüglich eher noch etwas zu ungünstig gerechnet. Eine sehr zeitraubende nochmalige Berechnung der Werte σ nach Ausschaltung der definitiven Werte hätte sich aber nicht gelohnt.

3. Wellen p_6 und p_9

Diese Wellen sind nach unserer Periodogrammanalyse während des ganzen untersuchten Beobachtungsbereiches seit 1808 persistent vorhanden.*) Ihre Amplituden sind aber zu klein, als daß man sie auf Grund des Expektanzkriteriums als reell ansehen dürfte. Die Welle 9 hat mit $c = 50$ m³/sec von beiden Wellen die größere Amplitude, welche rund 2,1mal größer ist als die Expektanz $E_2 = 24$. Dies genügt nach Seite 55 rechts noch nicht, um das Walten eines Zufalles mit genügend großer Wahrscheinlichkeit auszuschließen. *Die Realität der Wellen* p_6 *und* p_9 *ist daher durch das Expektanzkriterium nicht gesichert.*

4. Zusammensetzung aller Wellen und Vergleich mit den beobachteten Jahresmitteln der Abflußmengen

Auf Tafel XIX ist oben die Ganglinie dargestellt, welche sich aus der Zusammensetzung aller gefundenen Wellen ergibt. Die Werte dieser Ganglinie zur Zeit der Jahresmitte sind in der Tabelle 17 zusammengestellt. Die Ganglinie zeigt eine erstaunlich gute Übereinstimmung mit dem Verlauf der tatsächlichen Jahresmittel; systematische Abweichungen können nicht festgestellt werden. Dies ist der Beweis dafür, daß wir unsere Wellen genügend genau berechnet haben. Die Abweichungen der tatsächlichen Jahresmittel von der Ganglinie halten sich innerhalb der Grenze, welche von vorneherein zu erwarten waren. Es besteht *eine ausgeprägte Neigung dazu, daß Abweichungen bei einem bestimmten Jahr im vorangehenden oder nachfolgenden Jahr ausgeglichen werden.* Im IV. Teil werden wir prüfen, ob die Abweichungen in einem zeitlichen Zusammenhang mit der Häufigkeit der Sonnenflecken stehen, und wir werden Beziehungen sehr interessanter und wichtiger Art feststellen können.

Auch der Vergleich der kombinierten Ganglinie mit den *Vierteljahrsmitteln* der Abflußmengen, welche von der Jahresperiode befreit sind, ist nach Tafel XX sehr interessant. Auch hier gibt die kombinierte Ganglinie den allgemeinen Verlauf recht gut wieder. Die Abweichungen einzelner Vierteljahre sind allerdings, wie zu erwarten ist, bedeutend größer als die Abweichungen der Jahresmittel; doch besteht auch hier die Neigung, daß Abweichungen in einem bestimmten Zeitabschnitt durch entgegengesetzte Abweichungen in einem direkt vorangehenden oder nachfolgenden Abschnitt ausgeglichen werden.

Es sei noch auf folgendes hingewiesen:

Aus Tafel XIX ersieht man, daß die kombinierte Ganglinie und der Verlauf der Jahresmittel der Abflußmengen seit etwa 1910 viel unruhiger sind als in den vorangehenden Jahrzehnten. Es kommt dies nach Tabelle 10 und 11 auch in den Werten für die mittlere quadratische Abweichung (Streuung) σ vom Verlaufe der säkularen Ganglinie und von der durchschnittlichen jährlichen Abflußmenge der betreffenden Zeitabschnitte zum Ausdruck; so ist z. B. die Streuung um die säkulare Ganglinie für die 34 Jahre von 1876–1909 $\sigma = \pm 140$ m³/sec, dagegen für die 34 Jahre von 1910–1943 $\sigma = \pm 196$ m³/sec.

*) Betreffend p_6 vgl. nachträgliche Feststellung gemäß Ausführungen auf Seite 112.

IV. TEIL

Zeitliche Zusammenhänge zwischen der Häufigkeit der Sonnenflecken und den Abflußmengen des Rheins bei Basel

A. *Die Häufigkeit der Sonnenflecken*

Kurzer Überblick über die uns hier interessierenden Erscheinungen auf Grund von Lit. VI 38, 41, 46 bis 48.

1. Statistische Erfassung der Häufigkeit der Sonnenflecken

Zahl und Größe der Sonnenflecken ändern unausgesetzt. Es erwies sich daher als erwünscht, die Veränderung der Häufigkeit der Sonnenflecken in Funktion der Zeit, welche Erscheinung im folgenden als *Fleckentätigkeit* bezeichnet wird, zahlenmäßig erfassen zu können. Als einfaches, wie es sich in der Folge zeigte, sehr glücklich gewähltes Maß ist von R. Wolf (ETH., Zürich) im Jahre 1849 die sogenannte tägliche *Relativzahl*

$$R = 10\,g + f$$

eingeführt worden.

g ist die Zahl der an einem Tag vorhandenen Fleckengruppen und
f die Zahl der gleichzeitig vorhandenen Einzelflecken.

Wolf hätte gerne ein Maß eingeführt, welches aus der von den Flecken eingenommenen Fläche abgeleitet gewesen wäre. Eine Ausmessung des Fleckenareals wurde aber erst möglich, als brauchbare Sonnenphotographien aufgenommen werden konnten. Die Sternwarte Greenwich führt seit 1874 eine solche Statistik der Fleckenareale. Vergleiche haben ergeben, daß Wolf das ihm vorschwebende Ziel doch erreicht hat, indem die Wolf'schen Relativzahlen den Fleckenarealen proportional sind.

Mit Hilfe der Relativzahlen konnten auch die Beobachtungen vor 1850, welche nur qualitativ durchgeführt worden waren, nutzbar gemacht werden, um die Veränderungen der Sonnenfleckentätigkeit bis ins Entdeckungsjahr (1610) der Flecken statistisch zu erfassen. In den Jahren 1610–1748 sind allerdings die Fleckenbeobachtungen zu wenig zahlreich, als daß man Relativzahlen bestimmen könnte, hingegen reichen sie aus, um näherungsweise die Epochen der Maxima und Minima der Sonnenfleckenhäufigkeit zu bestimmen.

Aus den täglichen Relativzahlen werden Monatsmittel der Relativzahlen gebildet. Man unterscheidet zwischen *beobachteten* und *geglätteten* (ausgeglichenen) Monatsmitteln der Relativzahlen. Die geglätteten Monatsmittel werden bestimmt, indem je zwölf aufeinanderfolgende Monatsmittel der beobachteten Relativzahlen zum Mittelwert zusammengefaßt werden und aus je zwei solchen aufeinanderfolgenden Mittelwerten noch einmal das Mittel gebildet wird. Dieses Mittel ist die ausgeglichene Relativzahl, welche zeitlich der Mitte des mittleren der so vereinigten dreizehn Monate zugeschrieben wird. Diese Art der Glättung bezweckt, kurzperiodische sekundäre Schwankungen zum Verschwinden zu bringen.

Nach Brunner (Lit. VI 38) werden die Monatsmittel der *beobachteten* Relativzahlen insbesondere für Untersuchungen über Beziehungen zwischen Sonnentätigkeit und irdischen Erscheinungen verwendet. Die *geglätteten* Monatsmittel werden für die Bestimmung der Epochen der Minima und Maxima, sowie für Untersuchungen über langfristige Schwankungen der Sonnenfleckenhäufigkeit gebraucht. Bei der Verwendung der geglätteten Monatsmittel wird die Unsicherheit etwas behoben, welche in der Sonnenfleckenstatistik dadurch entsteht, daß jeden Tag nur diejenigen Flecken gezählt werden können, die auf der der Erde zugekehrten Sonnenfläche liegen.

2. Die «elfjährige» Periode der Häufigkeit der Sonnenflecken

Wie wir bereits im Abschnitt V der Einführung auf Seite 14 erwähnt haben, handelt es sich in bezug auf Wellenlänge und Amplitude nicht um eine reine Periodizität.

Um die Form der Kurve zu erfassen, welche bei der graphischen Darstellung der Relativzahlen der Sonnenflecken in Funktion der Zeit entsteht, wurden Arbeitshypothesen aufgestellt. Jahrzehntelang wurde versucht, die Sonnenfleckenkurve durch Superposition von Sinuslinien darzustellen, jedoch, wie *Waldmeier* ausführt, ohne Erfolg. Mit Hilfe der Superpositionshypothese sei wohl eine befriedigende Interpolation der Kurve möglich, jedoch keine Extrapolation und somit auch keine Voraussage über den Zeitpunkt, in dem ein Minimum oder Maximum eintrifft. *Waldmeier* (Lit. VI 46) führt auch gewichtige Tatsachen an, welche gegen die Superpositionshypothese sprechen, und ersetzte dieselbe 1935 durch die «Eruptionstheorie». Diese Bezeichnung soll dabei aber keine Andeutung über den Mechanismus der Sonnentätigkeit enthalten, sondern lediglich die Analogie zum Ausdruck bringen zwischen dem Verlauf einer explosionsartigen Erscheinung und dem sich im Sonneninnern abspielenden fleckenerzeugenden Vorgang, dessen graphischer Ausdruck die Sonnenfleckenkurve ist. Die geglättete Sonnenfleckenkurve besteht aus einzelnen Buckeln, «Eruptionen». Ein Buckel beginnt mit einem deutlich erkennbaren Einsatz; darauf folgt der Anstieg bis zum Maximum, worauf die Kurve wieder

abklingt und sich asymptotisch, aber rasch dem Werte Null nähert. Die beobachteten Minima der Sonnenfleckenkurve kommen zustande durch Überlagerung des abklingenden Astes des vorangehenden Buckels mit dem aufsteigenden Ast des nachfolgenden Buckels. *Den Minima der Sonnenfleckenkurve kommt also, im Gegensatz zu den Maxima, keine physikalische Bedeutung zu.* Es ist möglich, die beobachteten Sonnenflecken zur Zeit des Minimums zu trennen in solche, welche dem vorangehenden, und solche, welche dem nachfolgenden Buckel angehören. Die den beobachteten Minima entsprechenden Relativzahlen liegen zwischen 0 und 11, die Abweichung vom Mittelwert beträgt also höchstens fünf Einheiten. Die Relativzahlen, welche den Maxima entsprechen, schwanken dagegen zwischen 49 und 158, also bis zu rund 50 Einheiten um den Mittelwert. Dieses Verhalten ist vom Standpunkt der Eruptionstheorie aus leicht begreiflich, denn jede «Eruption» beginnt mit Null und sinkt wieder auf Null ab; das bewirkt, daß die den beobachteten Minima entsprechenden Relativzahlen nur innerhalb eines engen Bereiches schwanken. Die starken Schwankungen der Höhe der Maxima bedeuten verschiedene *Intensitäten* der «Eruptionen».

Stumpff (Lit. I 3), welcher die Sonnenfleckenkurve mit Hilfe von Sinuslinien darzustellen versucht, was, wie oben erwähnt, nach *Waldmeier* nicht dem wahren Charakter der Sonnenfleckenkurve entsprechen dürfte, führt in bezug auf die Form dieser Kurve aus, daß sich bei der Untersuchung der in den letzten hundert Jahren festgestellten Relativzahlen außer einer großen Periode von rund 11,4 Jahren zwei symmetrische Nebenperioden von gleicher Amplitude ergeben haben. Er führt dies auf die oben erwähnte Ungleichmäßigkeit der Beobachtungskurven zurück, welche sich darin äußert, daß die Maxima und Minima der Kurven statistisch ein verschiedenes Verhalten zeigen. Die natürliche Erklärung für dieses Verhalten der Sonnenfleckenkurve erblickt *Stumpff* darin, daß zur Zeit des Sonnenfleckenminimums die Amplitude der periodisch wirksamen fleckenbildenden Kräfte Null sei. Die Relativzahlen selbst geben nicht die Ausschläge der fleckenerzeugenden Kräfte an, die ja von dem Ruhewert Null sowohl ins Positive wie ins Negative gehen müßten, sondern ihr Quadrat, welches positiv ist; sie stellen also «Intensitäten» dar. Wenn also der einem Minimum vorangehende Buckel von positiv gerichteten Kräften erzeugt worden wäre, so würde der nachfolgende Buckel von negativ gerichteten Kräften erzeugt. In diesem Zusammenhang erscheint die Tatsache in sehr interessantem Lichte, daß sich die *magnetische Polarität* der Sonnenflecken nach Ablauf eines jeden Buckels, also zur Zeit des Minimums, ändert. Diese Tatsache zeigt, daß ein ganzer Zyklus der Sonnentätigkeit zwei aufeinanderfolgende Buckel umfaßt.

Waldmeier hat die Buckel auf ihre Form hin untersucht, interessante Gesetzmäßigkeiten aufgedeckt und gezeigt, daß die «Eruptionen» eine einparametrige Kurvenschar bilden; als Parameter wird zweckmäßig die Intensität (Relativzahl) des Maximums gewählt. Die von ihm erfaßten gesetzmäßigen Eigenschaften der Sonnenfleckenbuckel erlaubten *Waldmeier* als erstem eine erfolgreiche Voraussage der Sonnenfleckentätigkeit zu machen; lange vor dem Maximum hat er aus der Steilheit, mit welcher die Fleckentätigkeit von 1933 bis September 1935 anstieg, Zeit und Intensität des Maximums berechnet.

	Prognose	beobachtet
Epoche (Zeitpunkt) des Maximums	1937,7	1937,4
Intensität des Maximum	124	119

Man kann also den ganzen Verlauf eines Buckels angeben, wenn ein Stück seines anfänglichen Verlaufes, etwa einer Beobachtungsdauer von 2—2½ Jahren entsprechend, bereits bekannt ist. Die Prognose kann sich also nur über die laufende Periode erstrecken. Prognosen auf längere Frist könnten nur dann mit Erfolg gemacht werden, wenn eine Gesetzmäßigkeit bekannt wäre, nach welcher starke und schwache Maxima aufeinanderfolgen.

Wenn im nachfolgenden Abschnitt von Zusammenhängen zwischen der Sonnenfleckenhäufigkeit einerseits, sowie dem Wetter und dem Abflußvorgang anderseits die Rede sein wird, so sei darauf hingewiesen, daß die Sonnenflecken *als solche* selbst keinen Einfluß auf die genannten irdischen Vorgänge haben dürften. Die Sonnenflecken sind nur eine leicht feststellbare Wirkung von periodischen Vorgängen auf der Sonne, welche gleichzeitig auch irdische Vorgänge beeinflussen und dieselben ebenfalls einer «elfjährigen» Periodizität unterwerfen. In zahlreichen Erscheinungen und Vorgängen der höchsten Atmosphärenschichten spiegelt sich die «elfjährige» Sonnenfleckenperiode deutlich wider, indem diese Schichten von einer ultravioletten Strahlung und einer Korpuskularstrahlung beeinflußt werden, welche beide von der Sonne ausgehen und einer «elfjährigen» Periode unterworfen sind. In die Wettersphäre gelangen aber diese Strahlungen nicht; dorthin gelangt allein die Wärme- und Lichtstrahlung. Es scheint noch kein einwandfreier Nachweis dafür vorzuliegen, daß die Schwankung der Wärme- und Lichtstrahlung einen zur Sonnenfleckentätigkeit parallelen oder sonstwie in regelmäßigem Zusammenhang stehenden Gang aufweist; die Meinungen gehen diesbezüglich noch stark auseinander. *Waldmeier* macht aber darauf aufmerksam, daß man doch die Möglichkeit nicht von der Hand weisen könne, der Wetterablauf werde durch die höheren, von der elfjährigen Periode beeinflußten atmosphärischen Schichten beeinflußt, und es bestehe also eine indirekte Einwirkung der solaren Vorgänge auf das Wetter.

B. *Die Häufigkeit der Sonnenflecken und das Wetter*

1. Temperatur

a) *Die «elfjährige» Periode*

Es konnte nachgewiesen werden, daß die Temperatur auf der Erde einer elfjährigen Periodizität unterworfen ist. Die Angaben verschiedener Forscher und Autoren stimmen allerdings nicht durchwegs überein, was die Größe der Amplitude in Funktion der geographischen Breite und die zeitliche Koppelung mit der Sonnenfleckenperiode anbetrifft. Einerseits wird mitgeteilt, daß

die Periodizität des Temperaturverlaufes in den Tropen mit ihrem regelmäßigen Wetterregime, in bezug auf Amplitude und enger zeitlicher Koppelung mit der Periodizität der Flecken am ausgeprägtesten sei. Es wurden Amplituden der Periodizität in der Größe von $0{,}6^0-0{,}7^0$ mit Maximalwerten bis 1^0 gefunden, wobei den Fleckenmaxima Minima der Temperatur und den Fleckenminima Maxima der Temperatur entsprechen. In den gemäßigten Zonen und in noch höhern Breiten trete die elfjährige Periodizität der Temperatur nur schwach oder gar nicht auf. Anderseits fand *Dilger* (Lit. IV 22) mit Hilfe verbesserter, wenn auch noch nicht modernster Methoden auf Grund einer Untersuchung der Jahre von etwa 1870–1920, daß die Amplituden in niedern Breiten kleiner sind und gegen höhere Breiten hin zunehmen. Für das nördliche Nordamerika hat er Amplituden bis zu 1^0 und übersichtlichere Verhältnisse als für die europäischen Staaten gefunden. Er fand, daß die Temperaturschwankung als eine Welle mit elfjähriger Schwingungsdauer in denjenigen Gebieten erregt werde, welche mit größerer äquatorialer Lage die größte Kontinentalität verbinden. Ausgehend von diesen Gebieten pflanze sich die Welle unter Ausnützung der verschiedenen thermischen Möglichkeiten, welche die Erdoberfläche bietet, nach den Polen zu fort.

Nach den Untersuchungen *Dilgers* besteht keine unveränderliche zeitliche Koppelung zwischen dem Rhythmus der Fleckenhäufigkeit und der Temperaturwelle. Die auftretenden Phasenverschiebungen, welche zwischen den beiden Rhythmen auftreten, können für verschiedene Gebiete der Erde auch verschiedene sein.

b) Extreme der Sonnenfleckenkurve und Temperatur

Verschiedene Autoren glauben, daß, abgesehen von der elfjährigen Temperaturwelle, noch folgender Zusammenhang zwischen Temperatur und Fleckenperiodizität bestehe:

Die kalten und namentlich die strengen Winter sollen sich mit großer Regelmäßigkeit ungefähr in den Jahren einfinden, in denen auch die Maxima und Minima der Sonnenfleckentätigkeit sich einstellen. *Baur* (Lit. VI 37) führt insbesondere aus, daß von den 15 kältesten Wintern in den letzten 200 Jahren zeitlich 12 in die Nähe eines Sonnenfleckenextrems fielen, d. h. ihr Abstand von der Epoche des nächstgelegenen Sonnenfleckenmaximums oder -minimums betrug weniger als 1½ Jahre. Es besteht also eine ausgeprägte Neigung, daß sich mehr oder weniger strenge Winter in der Nähe der Zeiten der Sonnenfleckenextreme einstellen.

2. Niederschlag

a) Die «elfjährige» Periode

Auch für den *Niederschlag* wurde für einige Gebiete eine *Periode* gefunden, deren Wellenlänge ungefähr derjenigen des «elfjährigen» Sonnenfleckenrhythmus entspricht. Aber wie bei der «elfjährigen» Temperaturwelle besteht auch hier keine durchgehende Übereinstimmung in der Phase zwischen dem Rhythmus der Niederschläge und demjenigen der Periodizität der Sonnenflecken. Die Phasenverschiebung kann auch hier 180^0 erreichen. Für das Murgebiet in Österreich hat *von Keßlitz* für die Niederschläge eine durchschnittliche Wellenlänge von 12,6 Jahren und ferner Amplituden gefunden, deren Größe veränderlich ist und 2,2% bis 9% des normalen Jahresmittels des Niederschlages beträgt.

Für andere Gebiete wurde nur eine undeutlich ausgeprägte oder gar keine «elfjährige» Periode gefunden. *Waldmeier* teilt in Lit. VI 48 mit, daß bei keiner schweizerischen Regenmeßstation eine «elfjährige» Periode sich zeigt und daß auch beim schweizerischen Landesmittelwert diese Periode nicht ersichtlich ist. Doch weist *Waldmeier* in gedanklicher Übereinstimmung mit unseren auf Seite 10 und 11 gemachten Bemerkungen darauf hin, daß dies wegen den Inhomogenitäten, welche Niederschlagsmessungen anhaften, noch kein Beweis für das Nichtbestehen eines «elfjährigen» Niederschlagsrhythmus in der Schweiz sei.

In den Tropen spiegelt der Viktoriasee in Zentralafrika in seinen Wasserstandsschwankungen sehr deutlich die elfjährige Sonnenfleckenperiode wider, was bei seinem riesigen Einzugsgebiet und seiner großen Oberfläche (68 800 km²), im Sinne unserer Ausführungen auf Seite 11 im Abschnitt III, 3, c des ersten Teils, nicht verwunderlich ist. Die Wasserstandskurve des Viktoriasees verläuft mit einer Amplitude von 1 m zwischen Maximal- und Minimalstand nahezu parallel der Kurve der Relativzahlen der Sonnenflecken, während die Niederschlagsmessungen der Station Uganda in der Nähe des Sees einen solchen Rhythmus nicht zeigen. Die «elfjährigen» Perioden von Temperatur und Niederschlag dürften in jener äquatorialen Gegend zeitlich ziemlich stramm in dem Sinne gekoppelt sein, daß einem Maximum des Niederschlages ein Minimum der Temperatur entspricht und umgekehrt. Infolgedessen wird die Temperaturwelle den genannten Rhythmus der Seestandsschwankungen noch verstärken, indem bei höherer Temperatur, zur Zeit des geringeren Niederschlages, ein größerer Wasserverlust durch Verdunstung entsteht als bei der niedrigeren Temperatur zur Zeit des größeren Niederschlages. Es ist aber zu beachten, daß die Auftragung der Seestandsschwankungen des Viktoriasees sehr annähernd die Integralkurve der Niederschläge darstellt (vgl. Seite 18), trotzdem der Viktoriasee kein abflußloser See ist. Um den Rhythmus zu erhalten, in dem die Niederschläge in richtiger Phase schwanken, müßte also gegebenenfalls die Kurve der Seestandsschwankungen um maximal ¼ der Periodenlänge, also im Maximum um rund 2¾ Jahre, zeitlich vorverschoben werden (vgl. Seite 18).

b) Sonnenfleckenminimum und Niederschlag

Außer dem «elfjährigen» Rhythmus des Niederschlages weist noch folgende Regel auf einen Zusammenhang zwischen dem Niederschlag und den gleichen Kräften hin, welche die Sonnenfleckenperiode bewirken (Lit. V und Lit. VI 37):

Zwei bis drei Jahre vor dem Sonnenfleckenminimum pflegt in der Regel eine Zeit auffälliger Trockenheit einzusetzen, die gewöhnlich mit heißen Sommern einhergeht. *Baur* sagt insbesondere, daß mit einer einzigen Ausnahme seit 1800 westlich der Weichsel in Deutschland immer entweder der erste oder der zweite Hochsommer vor einem Fleckenminimum trocken war. Meistens war es der zwei Jahre vor dem Minimum gelegene Hochsommer.

C. *Sonnenfleckenhäufigkeit und Abflußmengen des Rheins bei Basel*

1. Die «elfjährige Periode»

Wir haben durch unsere Periodogrammanalysen gefunden:

Für die Zeit von 1808–1842:

Eine Periode mit einer Wellenlänge von 12,5 Jahren und einer Amplitude von c = 64 m³/sec entsprechend der Gleichung

$$y_{12} = 64 \sin \left[\frac{2\pi}{12{,}5} t + 234{,}0^0 \right] = 64 \sin \left[28{,}83^0 t + 234{,}0^0 \right]$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Für die Zeit von 1843–1943:

Eine *Hauptperiode* mit einer Wellenlänge von 12,2 Jahren und einer Amplitude von 54 m³/sec.

Mit dieser Hauptperiode wurden zwei Perioden von gleicher Amplitude c = 38 m³/sec, sowie den Perioden 9,97 und 15,06 Jahren gefunden. Deren Frequenzen liegen somit nahezu symmetrisch zur Frequenz der Hauptperiode. Wir haben eine analoge Erscheinung festgestellt, wie sie von Stumpff für die Sonnenfleckenperiodizität der letzten hundert Jahre gefunden wurde, worauf bereits auf Seite 103 hingewiesen worden ist. Die Analogie im Auftreten von zwei symmetrischen Nebenperioden von gleicher Amplitude bei der «elfjährigen» Sonnenfleckenperiode und von zwei symmetrisch zur «zwölfjährigen» Abflußperiode liegenden, ebenfalls gleich große Amplituden aufweisende Perioden ist so auffällig, daß wir es als gegeben erachten, letztere ebenfalls als Nebenperioden zu betrachten und mit der Hauptperiode zu einer einzigen Periodizität zu vereinigen, für deren Gleichung wir gefunden haben:

$$y_{12} = 54 \sin \left[\frac{2\pi}{12{,}2} t + 208{,}8^0 \right] + 38 \sin \left[\frac{2\pi}{9{,}97} t + 66^0 \right] + 38 \sin \left[\frac{2\pi}{15{,}06} t + 151^0 \right]$$

$$= 54 \sin \left[29{,}51^0 t + 208{,}8^0 \right] + 38 \sin \left[36{,}1^0 t + 66^0 \right] + 38 \sin \left[23{,}9^0 t + 151^0 \right]$$

wobei für das Jahr 1808: t = 0 ist.

Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Periodizität zufälliger Natur sei, haben wir zu 0,00007 oder 1:15 000 gefunden; umgekehrt ist also die Wahrscheinlichkeit, daß die Periodizität reell sei, sehr groß.

Auf Tafel XIX ist die gefundene Periodizität zusammen mit der Sonnenfleckenkurve dargestellt. Man sieht, daß gleich wie bei Temperatur und Niederschlag die beiden Kurven nicht durchwegs in Phase verlaufen. Dies läßt Zweifel darüber entstehen, ob die gleichen Ursachen, welche in der Sonnenfleckenperiodizität einen Ausdruck finden, letzten Endes auch der zwölfjährigen Abflußperiodizität zugrunde liegen. Anderseits ist zu bedenken, daß diese Ursachen sich nicht unmittelbar auf den Abflußvorgang auswirken, sondern auf Umwegen. Ein solcher Umweg besteht vermutlich insbesondere auch darin, daß zunächst die atmosphärische Zirkulation beeinflußt wird. Die allgemeine Zirkulation oder andere übertragende Medien, wie Meeresströmungen, dürften ihrerseits Änderungen und Schwankungen unterworfen sein, und die diesen Medien infolge ihrer Eigengesetzlichkeit oder ihrer Masse innewohnende *Trägheit* wird infolgedessen zeitliche Änderungen im Ablauf des Geschehens erleiden. Dies wird sich aber auf den Zeitbedarf auswirken, welcher benötigt wird, bis die Ursache sich auf eine Veränderung des Abflusses übertragen kann. Zeitlich wechselnde Phasenverschiebungen erscheinen deshalb von vorneherein wahrscheinlich. Um diese bei der Temperaturperiodizität abzuklären, hat Dilger angeregt, Studien der allgemeinen Zirkulation zur Zeit der Störungen im Phasenverhältnis zwischen der Sonnenfleckenperiodizität und der Temperaturwelle durchzuführen.

Wenn man die graphische Darstellung der Tafel XIX betrachtet, kann man sich des Eindruckes nicht erwehren, daß großen Ausschlägen der Sonnenfleckenkurve große Ausschläge der «zwölfjährigen» Abflußmengenperiodizität entsprechen, wobei aber eine Dämpfung eintritt, wenn eine starke, bis 180° gehende Phasenverschiebung vorhanden ist. Man wird an Schwingungsvorgänge mit Interferenz und Resonanzerscheinungen erinnert. Bemerkenswert ist, daß in den Zeitabschnitten, in denen die «zwölfjährige» Abflußperiodizität und der Sonnenfleckenrhythmus in Phase verlaufen, die «fünfjährige» Abflußperiode besonders große Amplituden aufweist und daß sich in diesen Zeitabschnitten die Maxima der säkularen, ca. 120-jährigen Abflußperiode einstellen.

2. Weitere Zusammenhänge

a) Allgemeines

Im Hinblick auf die im Abschnitt B, 1 b und 2 b genannten zeitlichen Zusammenhänge, die zwischen Temperatur und Niederschlag einerseits und der Sonnenfleckenhäufigkeit anderseits entstehen, ist es gegeben, auch den Abflußvorgang auf ähnliche Zusammenhänge mit der Sonnentätigkeit hin zu untersuchen. Wenn wirklich Zusammenhänge zwischen der Sonnenfleckentätigkeit und dem jährlichen Niederschlag bestehen, so müssen sie auch in bezug auf die jährlichen Abflußmengen festgestellt werden können. Dagegen ist es wohl möglich, daß Zusammenhänge zwischen Sonnenfleckentätigkeit und Temperatur beim Abflußvorgang nicht nachgewiesen werden können, da der Einfluß der Temperatur auf den Abflußvorgang des Rheins, im Vergleich zu jenem des Niederschlages, viel kleiner ist. Da immerhin in kalten Wintern die Niederschläge in fester Form erfolgen und nicht zum Abfluß gelangen, so sollte für das Eintreten von ausgesprochenen winterlichen Niederwasserperioden eine ähnliche Regel gefunden werden wie für das Auftreten kalter und strenger Winter. Wenigstens sollte dies der Fall sein für ein in bezug auf den vorangehenden Jahresabfluß relativ starkes Zurückgehen der Abflußmengen im Winter.

r = Relativzahl (geglättetes Monatsmittel) zur Zeit des Minimums
R_m = mittlere Relativzahl des Trockenjahres

Minima			Charakter der Jahre vor Minimum				R_m «Trok-kenjahr»	$R_m - r$	Bemerkungen (vgl. Tafel XXI)
Epoche	r	Abfluß-charakter	4.	3.	2.	1.			
1810,6	0,0	> normal	—	—	1808 zu trocken	1809 < normal	7,6	7,6	
1823,3	0,1	> normal	—	1820 zu trocken	1821 > normal	1822 < normal	16,6	16,5	langes, flaches Minimum
1833,9	7,3	zu naß	—	—	1831 zu naß	1832 zu trocken	26,3	19,0	kurzes, scharf ausgeprägtes Minimum
1843,5	10,5	zu naß	—	—	1841 normal	1842 zu trocken	23,0	12,5	scharf ausgeprägtes Minimum
1856,0	3,2	> normal	—	1853 normal	1854 zu trocken	1855 zu naß	21,0	17,8	
1867,2	5,2	zu naß	—	—	1865 zu trocken	1866 < normal	31,4	26,2	
1878,9	2,2	normal	1874 zu trocken	1875 normal	1876 > normal	1877 < normal	43,1	31,4 $r R_{74}-R_{76}$	langes, flaches Minimum 1876 (R = 11,7) und 1877 Verlauf bereits horizontal
1889,6	5,0	normal	—	—	1887 zu trocken	1888 zu naß	12,6	7,6	
1901,7	2,6	normal	—	1898 zu trocken	1899 normal	1900 normal	24,6	22,0	langes, flaches Minimum
1913,6	1,5	normal	—	1910 zu naß	1911 zu trocken	1912 > normal	6,5	5,0	
1923,6	5,6	< normal	—	1920 zu naß	1921 zu trocken	1922 zu naß	27,0	21,4	
1933,8	3,4	zu naß	—	—	1931 normal	1932 zu trocken	12,1	8,7	
1944,2	7,7	< normal	—	1941 normal	1942 < normal	1943 zu trocken	15,3	7,5	

Durch Unterstreichung ist der Grad der Abweichung vom normalen Verlauf kenntlich gemacht

Tabelle 18

Charakter der Jahre des Sonnenfleckenminimums und der unmittelbar dem Minimum vorangehenden Jahre
(Charakter bezogen auf den «normalen» Verlauf, wie er sich aus dem Zusammenwirken der verschiedenen Periodizitäten ergibt)

b) Zusammenhänge für die Jahre, welche einem Sonnenfleckenminimum unmittelbar vorangehen, sowie für die Jahre des Sonnenfleckenminimums selbst

Wir wissen nun, daß der Abflußvorgang des Rheins bei Basel verschiedenen Periodizitäten unterworfen ist. Der Wechsel von trockenen, normalen und nassen Jahren entsteht aus dem Zusammenwirken dieser Perioden. Es hätte also keinen Sinn, zu untersuchen, ob in bezug auf das Auftreten von trockenen und nassen Jahren zeitlich ein Zusammenhang mit der Sonnenfleckenhäufigkeit besteht. Allerdings weist eine der Abflußperiodizitäten eine ähnlich große Wellenlänge auf wie die Sonnenfleckenperiode; die Abflußperiode verläuft aber mit letzterer, wie wir gesehen haben, nicht durchwegs in Phase.

Dagegen hat es einen Sinn, folgendes zu untersuchen: *Aus der Kombination aller Periodizitäten ergibt sich der «normale» Verlauf der jährlichen Abflußmengen.* Stehen Abweichungen vom «normalen» Verlauf allfällig zeitlich in einem Zusammenhang mit der Sonnentätigkeit?

Dabei muß allerdings vorbehalten werden, daß *solche Abweichungen die Folge von allfälligen kürzeren Perioden*

sein könnten, auf welche wir ja unsere Untersuchung nicht ausdehnten. Wenn also in den folgenden Ausführungen dieses Abschnittes und in Tabelle 18 die Rede ist von «*zu trocken*» oder «*zu naß*», so beziehen sich diese Wertungen auf den eben definierten «normalen» Verlauf.

Aus Tabelle 18 ist nun ersichtlich:

Dem Sonnenfleckenminimum geht seit Beginn der Abflußbeobachtungen in Basel, also seit dem Jahre 1808, durchwegs ein zu trockenes Jahr (zu kleine jährliche Abflußmenge) voraus. Meistens ist es das erste oder zweite Jahr, welches dem Fleckenminimum vorangeht. Bei einem langen flachen Sonnenfleckenminimum kann es sogar das dritte oder, wie beim Minimum von 1878,9, sogar das vierte Jahr des Abflusses sein, das dem Fleckenminimum vorangeht.

Beim Minimum von 1878,9 ist die Sonnenfleckenkurve bereits 1876 und 1877 horizontal verlaufen und biegt dann, ganz unvermuteterweise, nochmals nach unten ab.

In Tabelle 18 sind auch noch die Relativzahl r (geglättetes Monatsmittel) zur Zeit des Minimums und die mittlere Relativzahl R_m des Trockenjahrs, sowie die Differenzen $R_m - r$ angegeben. Einheitlichere Werte $R_m - r$ dürften sich vielleicht ergeben, wenn man von der theoretischen Buckelform nach Waldmeier ausgehen würde.

Die in der Tabelle als «zu trocken» bezeichneten Jahre sind auch absolut betrachtet, d. h. auf den langjährigen Durchschnitt bezogen, zu trocken. Somit zeigt sich mit Bezug auf den Abfluß tatsächlich ein analoges Verhalten wie in bezug auf den Niederschlag, indem dem Sonnenfleckenminimum eine Neigung zur Trockenheit vorangeht.

Es besteht eine Neigung dazu, daß als Ausgleich dem zu trockenen Jahr ein zu nasses Jahr entweder unmittelbar vorangeht oder nachfolgt, oder auch vorangeht und nachfolgt (1831, 1832, 1833; 1920, 1921, 1922; 1842, 1843; 1854, 1855; 1887, 1888; 1910, 1911; 1932, 1933).

Von den sechs Phasenwechseln, welche die gefundenen Abflußperiodizitäten erleiden, fallen vier in das Jahr des Fleckenminimums oder auf Jahre, welche unmittelbar vorangehen. Die Jahre unmittelbar vor dem Fleckenminimum scheinen also mit einer Neigung zu Störungen behaftet zu sein.

In bezug auf das Jahr des Fleckenminimums selbst läßt sich keine Regel erkennen für die Abweichungen der gemessenen Abflußmengen vom «normalen Verlauf».

In den übrigen Jahren zwischen den Sonnenfleckenextremen und den Jahren der Sonnenfleckenmaxima selbst treten hie und da Störungen, d. h. Abweichungen des *Jahresmittels*, vom «normalen» Verlauf ein, aber eine Regel läßt sich in bezug auf diese Störungen nicht erkennen. Insbesondere in bezug auf das Jahr des Sonnenfleckenmaximums selbst läßt sich erkennen, daß die durchschnittlichen Abflußmengen dieser Jahre in der Regel angenähert dem «normalen» Verlauf entsprechen. Nur drei von den zwölf Maxima seit 1808 entsprechen Jahren mit größeren Abweichungen vom «normalen» Verlauf.

c) *Winterabfluß in den Jahren, welche in der Nähe eines Maximums oder Minimums der Sonnenfleckenhäufigkeit liegen*

Zur Beurteilung des Winterabflusses vergleichen wir das *sechsmonatige Wintermittel* (Oktober–März) und das *dreimonatige Wintermittel* (Dezember, Januar, Februar) mit den entsprechenden durchschnittlichen Werten des Zeitabschnittes 1808/09 bis 1943/44. Auf diese Weise können wir beurteilen, ob ein Winter *absolut* betrachtet als trocken (unterdurchschnittlich) anzusprechen sei oder nicht. Wir sind dabei nicht schematisch vorgegangen, indem bei nur kleinen Abweichungen nach unten der Winter *nicht* als absolut trocken klassiert worden ist. Als nicht absolut trocken wurden z. B. die Winter 1850/51 oder 1902/03 betrachtet, wo nur das eine Wintermittel etwas unterdurchschnittlich ist. Berücksichtigt wurde bei der Beurteilung, ob ein Winter trocken sei, jeweilen auch die Größe der minimalen Abflußmenge des betreffenden Winters.

Ferner interessiert uns aber noch, ob ein Winter auch *relativ* betrachtet, d. h. im Verhältnis zum durchschnittlichen Abfluß des vorangehenden Jahres, als trocken zu gelten hat, ohne daß er absolut besehen trocken ist. Diese Art der Beurteilung ist interessant für Zeitabschnitte, in welchen die verschiedenen Periodizitäten sich in der Weise auswirken, daß überdurchschnittlich große Jahresabflüsse erzeugt werden. Innerhalb eines solchen Abschnittes betrachtet, ist ein relativ trockener Winter wegen des großen Unterschiedes gegenüber dem mittleren Abfluß des vorangehenden Jahres doch eine wasserwirtschaftlich bedeutsame, in der Regel wohl unangenehme Erscheinung. Wir bilden:

D_6 = Differenz zwischen durchschnittlicher Abflußmenge eines Jahres und nachfolgendem *sechs*monatigen Wintermittel.

D_3 = Differenz zwischen durchschnittlicher Abflußmenge eines Jahres und nachfolgendem *drei*monatigen Wintermittel.

Dann vergleichen wir diese Differenzen mit ihrem langjährigen Durchschnitt, welcher für den Zeitabschnitt 1808/09 bis 1943/44 beträgt: für $D_{6m} = 267$ m³/sec und für $D_{3m} = 340$ m³/sec. Sind die Werte D_6 und D_3 eines Einzeljahres größer als diese Durchschnittswerte, so bezeichnen wir dieses Einzeljahr als relativ trocken.

Für den Zeitabschnitt von 136 Jahren, für welchen überhaupt Abflußmengen des Rheins bei Basel vorliegen, ergibt sich aus Tabelle 19, sowie Tafel XXI für diese Abflußmengen folgendes:

Die Sonnenfleckenmaxima und -minima sind stets von einem oder öfters auch zwei Wintern begleitet worden, welche absolut oder doch relativ betrachtet trocken waren. Der Abstand der trockenen Winter von der Epoche des betreffenden Sonnenfleckenmaximums oder -minimums war gleich rund $1^1/_2$ Jahre oder kleiner. Als Abstand bezeichnen wir hier die Zeitspanne zwischen dem 1. Januar («Mitte des Winters») und der Epoche des Sonnenfleckenextrems. Wenn zwei Winter trocken waren, so lag mit nur einer einzigen Ausnahme die Epoche des Sonnenfleckenextrems zwischen diesen Wintern. Das Maximum von 1894,1 war sogar von drei trockenen Wintern begleitet. Diejenigen Winter, deren Trockenheit sich in einen Zusammenhang bringen läßt mit trockenen Jahren, welche einem Sonnenfleckenminimum vorangehen, sind nicht berücksichtigt worden (Tafel XIX und vorstehender Abschnitt b).

Sonnenflecken-Minimum-Maximum Epoche	Abfluß-Charakter	Winter	D_6 m³/sec (D_{6_m} = 267)	D_3 m³/sec (D_{3_m} = 340)	Minimum m³/sec (Durchschnitt = 406)	Abstand des Winters (1.I.) vom Sonnenflecken-Minimum bzw. Maximum Jahre
1810,6	absolut und relativ trockener Winter	1809/10	318	485		0,6
1816,4	relativ trockener Winter	1815/16	390	438		0,4
1823,3	absolut trockener Winter	1822/23	179	221	282 [16. I. 23]	0,3
	relativ trockener Winter	1823/24	373	431		0,7
1829,9	absolut und relativ trockener Winter	1828/29	416	500		0,9
	absolut und relativ trockener Winter	1829/30	222	509	223 [4. II. 30]	0,1
1833,9	absolut und relativ trockener Winter	1834/35	286	359		1,1
1837,2	absolut und relativ trockener Winter	1835/36	195	435		1,2
	relativ trockener Winter	1837/38	355	411		0,8
1843,5	relativ trockener Winter	1843/44	411	614		0,5
	absolut und relativ trockener Winter	1844/45	413	670	299 [13.–15. II. 45]	1,5
1848,1	absolut und relativ trockener Winter	1847/48	516	655	252 [27. I. 48]	0,1
	absolut ziemlich trockener Winter	1848/49	239	244		0,9
1856,0	absolut und relativ trockener Winter	1856/57	334	385		1,0
1860,1	absolut ziemlich trockener Winter	1858/59	141	235		1,1
1867,2	relativ trockener Winter	1867/68	543	690		0,8
1870,6	absolut und relativ trockener Winter	1871/72	415	534	285 [31. XII. 71]	1,4
1878,9	relativ trockener Winter	1877/78	474	481		0,9
	absolut ziemlich trockener und relativ trockener W.	1879/80	440	585		1,1
1883,9	absolut trockener Winter	1884/85	278	332	295 [29. I.–1. II. 85]	1,1
1889,6	absolut und relativ trockener Winter	1888/89	456	751	292 [28./29. I. 89]	0,6
	absolut ziemlich trockener und relativ trockener W.	1890/91	355	560		1,4
1894,1	absolut und relativ trockener Winter	1892/93	327	524		1,1
	abs. u. rel. trock. W. (in bezug auf Perioden nicht)	1893/94	230	377	292 [5. I. 94]	0,1
	absolut und relativ trockener Winter	1894/95	219	425	285 [9.–11. III. 95]	0,9
1901,7	absolut und relativ trockener Winter	1900/01	389	419		0,7
1907,0	absolut und relativ trockener Winter	1906/07	419	470		0,0
	absolut und relativ trockener Winter	1907/08	420	413		1,0
1913,6	relativ trockener Winter	1914/15	524	571		1,4
1917,6	relativ trockener Winter	1917/18	327	460		0,4
1923,6	absolut und relativ trockener Winter	1924/25	598	725		1,4
1928,4	absolut und relativ trockener Winter	1926/27	435	539		1,4
	absolut trockener Winter	1929/30	229	198		1,6
1933,8	abs. u. rel. trock. W. (in bezug auf Perioden nicht)	1933/34	291	399		0,2
1937,4	absolut und relativ trockener Winter	1938/39	309	387	406 [27. XII. 38]	1,6
1944,2	absolut und relativ trockener Winter	1941/42	332	552		2,2

Tabelle 19

Winterabfluß in Jahren, welche in der Nähe eines Maximums oder Minimums der Sonnenfleckenhäufigkeit liegen

Ferner ergibt sich in bezug auf die Abflußmengen des Rheins bei Basel folgendes: Von den 49 seit 1809/10 bis 1939 als *absolut* trocken zu bezeichnenden Wintern liegen deren 27 in einem Abstand vom nächstgelegenen Sonnenfleckenextrem, der rund 1½ Jahre beträgt oder kleiner ist. Von den 49 Wintern stehen 14 im Zusammen-

hang mit trockenen Jahren, welche einem Sonnenfleckenminimum vorangehen, und nur 8 Winter sind ohne zeitlichen Zusammenhang mit den Sonnenfleckenextremen (vgl. nachstehende Tabelle 20). Das Minimum vom Jahre 1944 kann dabei, weil die Ergebnisse des Winters 1945/46 noch nicht vorliegen, noch nicht berücksichtigt werden.

Absolut trockene Winter, Abstand vom nächsten Sonnenfleckenextrem = rund 1,5 Jahr

1809/10, 1822/23, 1828/29, 1829/30, 1834/35, 1835/36, 1844/45, 1847/48, 1848/49, 1856/57, 1858/59, 1871/72, 1879/80, 1884/85, 1888/89, 1890/91, 1892/93, 1893/94, 1894/95, 1900/01, 1906/07, 1907/08, 1924/25, 1926/27, 1929/30, 1933/34, 1938/39: total 27 Winter

---

Absolut trockene Winter als Folge des einem Sonnenfleckenminimum vorangehenden Trockenjahres

1820/21, 1832/33, 1853/54, 1864/65, 1865/66, 1873/74, 1874/75, 1886/87, 1887/88, 1897/98, 1920/21, 1921/22, 1931/32, 1932/33: total 14 Winter

---

Absolut trockene Winter ohne zeitlichen Zusammenhang mit Sonnenfleckenextremen

1817/18, 1818/19, 1857/58, 1881/82, 1895/96, 1901/02, 1904/05, 1908/09: total 8 Winter

---

Tabelle 20

Wir haben also in bezug auf die *trockenen* Winter, wie vermutet, einen ähnlichen zeitlichen Zusammenhang mit den Extremwerten der Sonnenfleckenhäufigkeit gefunden, wie er in bezug auf die kalten Winter bestehen soll. Es sei betont, daß es sich hier um eine erste rohe Untersuchung handelt. Bevor eine genauere Untersuchung durchgeführt werden kann, müßte zuerst die Frage abgeklärt werden, ob noch kurzwelligere Abflußperiodizitäten bestehen als diejenigen, welche Gegenstand unserer vorliegenden Arbeit bilden. Auch der offenbar beträchtliche Einfluß, den die Höhe der Seestände zu Beginn des Winters ausübt, müßte gleichzeitig berücksichtigt werden.

Tabelle 19 kann entnommen werden, daß die absolut oder in bezug auf vorangehenden Jahresabfluß relativ trockenen Winter nicht durchwegs zu trocken sind in bezug auf die Ganglinie, welche sich aus der Zusammensetzung aller hier gefundenen Periodizitäten ergibt.

Außer der zwölfjährigen Abflußperiode scheinen auch noch andere, hier in den Abschnitten b und c gemachte Feststellungen auf gemeinsame Ursachen hinzudeuten, welche einerseits die Größe der Abflußmengen des Rheins bei Basel beeinflussen und anderseits die Periodizität der Häufigkeit der Sonnenflecken erzeugen. Wir haben bereits auf Seite 105 auf die Frage hingewiesen, über welche Medien sich diese Ursachen auf den Abflußvorgang auswirken. Die Ursachen, welche in den Jahren nahe der Extreme der Sonnenfleckentätigkeit die festgestellten Abflußerscheinungen hervorrufen, dürften anderer Art sein als jene Ursachen, welche auch dem Abflußvorgang eine «elfjährige» Periode aufzwingen; die Ursachen, welche zurzeit der Extreme der Sonnenfleckentätigkeit wirken, dürften über andere oder über weniger zahlreiche Medien rascher und unmittelbarer auf den Abfluß wirken als die Ursachen, welche die «elfjährige» Abflußperiodizität bedingen, in bezug auf welche wir gesehen haben, daß oft Phasenverschiebungen bis 180^0 zwischen Sonnenfleckenkurve und zwölfjähriger Abflußperiodizität vorhanden sind.

Indem zwischen Abfluß und Sonnenfleckenextremen ein zeitlicher Zusammenhang besteht, ist die von Waldmeier entdeckte Methode zur Voraussage dieser Extreme auch für die Voraussage der Abflußmengen von Bedeutung.

Zusammenfassung und Erörterung der Ergebnisse

I. Periodische Schwankungen der Abflußmengen

1. Statistische Beurteilung der Jahresmittel des Rheins bei Basel

Bei unserer Untersuchung der Frage, ob mehrjährige periodische Schwankungen (Wellenlänge größer als vier Jahre) der Abflußmengen des Rheins bei Basel vorhanden seien, haben wir als Unterlage die Jahresmittel der Abflußmengen verwendet; nur ausnahmsweise haben wir einmal auch von Vierteljahresmitteln Gebrauch gemacht. Für eine solche Untersuchung mit Hilfe der Periodogrammrechnung ist es von Bedeutung, zu wissen, welche statistischen Eigenschaften das Ausgangsmaterial hat; dies insbesondere zur Beurteilung der Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß gefundene Periodizitäten als reell betrachtet werden dürfen. Die Untersuchung der Jahresmittel auf ihre statistischen Eigenschaften hin hat folgendes ergeben:

a) Die mittleren jährlichen Abflußmengen des Rheins bei Basel bieten als Kollektiv betrachtet *vorerst* das gleiche Bild wie eine Reihe zufälliger, voneinander statistisch unabhängiger Werte mit angenähert normaler Gauß'scher Verteilung (Abb. 19, Seite 62). Die Gesamtheit der Werte der Jahresmittel wird somit zunächst nur durch die *Streuung* (mittlere quadratische Abweichung der einzelnen Jahresmittel von ihrem arithmetischen Mittel) als einzige statistische Konstante charakterisiert. Diese Streuung ist für die Jahre 1808 bis 1943 gleich $\sigma = \pm 164$ m³/sec.

b) Eine *Erhaltungstendenz*, d. h. ein statistischer Zusammenhang zwischen zeitlich aufeinanderfolgenden Jahresmitteln ließ sich vorerst nicht erkennen. Bei Vorhandensein einer Erhaltungstendenz wäre es z. B. wahrscheinlicher, daß auf ein großes Jahresmittel ebenfalls ein großes Jahresmittel folgt, als daß ein kleines Jahresmittel sich anschließt, d. h. bei Vorhandensein einer Erhaltungstendenz würde sich ein mehr oder weniger glatter Kurvenzug ergeben, wenn man die Jahresmittel in Funktion der Zeit als Punkte graphisch auftragen und durch eine Linie verbinden würde. Bei den Jahresmitteln der Abflußmengen des Rheins bei Basel ist dies aber nicht der Fall (Tafel XXI).*)

c) Periodizitäten lassen sich aus einer graphischen Darstellung der Jahresmittel in Funktion der Zeit von vorneherein nicht feststellen; nur eine säkulare Schwankung, als Welle p_{120} bezeichnet, mit einer Periode von rund 120 Jahren ist von Auge zu erkennen, aber eigentlich auch erst, wenn man von ihrem Vorhandensein auf Grund weiterer Untersuchungen (Glättung durch übergreifende Mittelwerte) schon etwas weiß.

2. Verborgene mehrjährige Periodizitäten

Erst mit Hilfe der *Periodogrammrechnung* konnte festgestellt werden, daß in der Reihe der mittleren jährlichen Abflußmengen des Rheins bei Basel außer der säkularen Welle *sechs Periodizitäten* mit Wellenlängen von mehreren Jahren *verborgen* sind. Da die Wellenlängen dieser Periodizitäten kein rationales Verhältnis zueinander haben (inkommensurable Perioden), ist der *Vorgang*, welcher sich aus der additiven Zusammensetzung aller gefundenen Periodizitäten ergibt, selbst *nicht periodisch*. Der Gesamtvorgang setzt sich aber nicht nur aus den gefundenen Periodizitäten zusammen, sondern es treten auch noch aperiodische Bestandteile (Störungen) hinzu. Ob allfällig auch noch Periodizitäten mit kürzeren Wellenlängen (kürzer als vier Jahre) vorhanden sind und mitwirken, kann nicht gesagt werden, da unsere Arbeit aus oben angegebenen Gründen nicht auf die Untersuchung solcher kürzerer Wellen ausgedehnt worden ist.

Es sind also mittels der Periodogrammrechnung verborgene Periodizitäten aus Beobachtungswerten erschlossen worden, die als Kollektiv betrachtet den Charakter von zufälligen, voneinander unabhängigen Werten von der Art «zufälliger Fehler» haben. Solche Periodizitäten können mit Hilfe der *Schuster'schen Expektanzformeln* (Gleichungen 52 und 53) auf ihre Realität überprüft werden, d. h. es kann die theoretische Wahrscheinlichkeit (*Wahrscheinlichkeit a priori*) berechnet werden, mit welcher angenommen werden darf, daß die gefundenen Periodizitäten reell und nicht vom Zufall bedingt sind. Diese Berechnung ist auf Seiten 98 bis 101 durchgeführt worden.

---

*) Wir mußten uns, wie am Schlusse des I. Teiles, Seite 15, dargelegt worden ist, darauf beschränken, eine Untersuchung über mehrjährige Periodizitäten durchzuführen, weil wir dabei von den Jahresmitteln der Abflußmengen ausgehen konnten. Bei einer Untersuchung von Periodizitäten mit einer kleineren Wellenlänge als vier Jahre hätten wir Mittelwerte der Abflußmengen für kürzere Zeitabschnitte als ein Jahr, z. B. für einen Monat oder ein Vierteljahr, benützen müssen, da allermindestens vier Werte pro Wellenlänge vorhanden sein müssen, um eine Periodizität erfassen zu können. Dann wäre, nebst andern Fragen, insbesondere auch die Frage der Erhaltungstendenz, welche den Monats- und Vierteljahresmitteln anhaftet, eingehend zu behandeln gewesen; denn eine solche Erhaltungstendenz muß bei den wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen betreffend die Realität der gefundenen Periodizitäten berücksichtigt werden. Die Untersuchungen hätten dann aber weit über den Rahmen hinausgeführt, welcher einer Arbeit der vorliegenden Art zukommt.

3. *Beschreibung der gefundenen Periodizitäten*

Die nebst der säkularen Welle p_{120} gefundenen sechs Periodizitäten sind einfache Sinuslinien oder eine Kombination von 2–3 solcher Linien. Die Gleichungen dieser Periodizitäten sind in Tabelle 16 zusammengestellt und ihr zeitlicher Verlauf ist auf Tafel XIX aufgetragen. In Tabelle 16 ist auch angegeben, welche Jahre für die Ermittlung der Gleichungen verwendet worden sind, d. h. bis zu welchem Jahre sie ohne Extrapolation gültig sind. Als die Berechnung der Periodizitäten zu Beginn des Jahres 1945 beendigt werden konnte, standen die Abflußmengen der Jahre 1945 und 1946 noch nicht zur Verfügung. Es folgte dann die ebenfalls zeitraubende Arbeit der Darstellung der Ergebnisse und der Redaktion der Arbeit, welche hierauf der Eidg. Technischen Hochschule eingereicht wurde. Inzwischen sind auch noch die Abflußmengen des Jahres 1945 und teilweise auch des Jahres 1946 verfügbar geworden, und es konnte nachträglich noch überprüft werden, ob und welche Änderungen sich ergeben, wenn die Jahre 1945 und 1946 auch noch verwendet werden. Es ergab sich, daß nur die Periodizitäten p_5 und p_6 zum Teil anders berechnet worden wären, wenn die Jahre 1945 und 1946 bei Abschluß der Berechnungen schon zur Verfügung gestanden hätten, worüber nachfolgend noch eingehender berichtet wird.

Es wurden folgende Periodizitäten gefunden:

Welle p_5, eine quasiperiodische Welle, deren Periode von Zeit zu Zeit wechselt und zwischen 4,36 und 5,25 Jahren liegt. Sie ist seit 1910 besonders ausgeprägt vorhanden, mit zeitlich veränderlicher Größe der Amplitude. Gemäß den Ausführungen auf Seite 95 rechts stellte sich bereits beim Abschluß der Berechnungen anfangs 1945 die Frage, ob nicht erneut im Verhalten der Periodizität p_5 eine Änderung eingetreten sei. Dies konnte aber damals nicht abgeklärt werden, weil die Beobachtungen der Jahre 1945 und 1946 noch nicht vorlagen. Wie oben erwähnt, sind nun aber auch die Abflußmengen des Jahres 1945 und teilweise auch des Jahres 1946 nachträglich noch verwendet worden, und es konnte festgestellt werden, daß etwa vom Jahre 1933 an die Periodizität p_5 tatsächlich erneut eine Änderung in ihrem Verhalten erfahren hat. Aus Abb. 59, Seite 95, ist allerdings ersichtlich, daß im Phasendiagramm immer noch zu wenig Punkte vorliegen, um die Ausgleichsgerade, aus welcher die Frequenz berechnet wird, sicher ziehen zu können. Es konnte lediglich im Summationsvektorenzug (Abb. 57, Seite 93) durch die drei Punkte $\varrho^* = 10$ bis 12 ein Kreis gezogen und dessen Radius gemessen werden. Aus der Länge des Radius, welche gleich $\frac{p'}{2} \cdot R$ ist, wurde nach Gleichung 51 die Frequenz α und aus dieser die Wellenlänge berechnet. Durch die Frequenz α ist dann auch die Richtung der im Phasendiagramm (Abb. 59) eingetragenen Ausgleichsgeraden bestimmt, und durch die Ausgleichsgerade wird weiter die Anfangsphase β festgelegt. Aus dem Amplitudendiagramm (Abb. 59) kann der Wert $\mathfrak{h}(x)$ entnommen und daraus in bekannter Weise die Amplitude c berechnet werden. Da aber, wie erwähnt, noch zu wenig Punkte vorliegen, ist die Berechnung der numerischen Werte für die Konstanten der Periodizität nur eine angenäherte. *Angenähert* ergibt sich für die Zeit seit 1933, 125:

$$y = 272 \sin\left[70{,}8^0\, t + 80^0\right] = 272 \sin\left[\frac{2\pi}{5{,}09} t + 80^0\right] \text{ in } m^3/sec \qquad (83)$$

wobei für das Jahr 1808: $t = 0$ ist.

Der Verlauf dieser Welle ist auf Tafel XIX als fein ausgezogene Linie dargestellt, wobei der extrapolierte Verlauf gestrichelt ist.

Die Amplitude der Periodizität p_5 kann also Werte bis rund 270 m³/sec annehmen. Diese Periodizität darf auf Grund einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchung (a priori) als *reell* angesehen werden.

Welle p_6. Auf Grund der Abflußmengen der Jahre, welche bis zur Beendigung der Berechnungen anfangs 1945 zur Verfügung standen, wurde eine persistente Periodizität mit einer Wellenlänge von 5,95 Jahren und einer Amplitude von 31 m³/sec erhalten. Wie bereits in der Fußnote auf Seite 77 angegeben wurde, war jedoch im Phasendiagramm (Abb. 33, Seite 77) ab $q = 78$ eine Neigung zu einer leichten Richtungsänderung erkennbar; auch beim Summationsvektorenzug (Abb. 31, Seite 76) mußte man sich fragen, ob von Punkt $\varrho^* = 13$ an nicht eine Richtungsänderung eingesetzt hat. Wie oben erwähnt, konnte dann nachträglich auch noch das Jahr 1945 verwendet werden, und es wurde noch je ein weiterer Punkt des Phasendiagramms und des Summationsvektorenzuges (Punkte $\varrho^* = 22$ und Punkt bei $q = 114$) berechnet. Es ließ sich mit Hilfe dieser neuen Punkte nachträglich erkennen, daß vom Jahre 1886 an die Periodizität p_6 eine leichte Änderung erfahren hat, indem die Ausgleichung des gesamten Phasendiagramms durch *eine* Gerade nicht mehr gegeben erscheint. Besser erscheint der Ausgleich durch zwei Geraden. Die zweite Gerade ist in Abb. 33, Seite 77, ebenfalls eingetragen worden. Sie ist allerdings noch durch relativ wenig Punkte belegt, und die Konstante der Welle p_6 kann aus ihr für die Zeit nach 1886 nur angenähert berechnet werden. Aus der zweiten Geraden ergibt sich mit einer Versuchswellenlänge $p' = 6$ Jahre und einer Versuchsfrequenz $x = 60^0$ auf bekannte Weise eine Frequenz α = rund 58^0, eine Wellenlänge $p = 6{,}21$ Jahre und eine Phasenkonstante $\beta = 50^0$. Die Amplitude wird angenähert gleich derjenigen vor 1886 zu $c = 31$ m³/sec angenommen; zu einer genauern Bestimmung liegen zu wenig Punkte im Amplitudendiagramm vor. Aus diesen Werten wurde der Radius des Summationsvektorenzuges der Abb. 31 berechnet. Es ergab sich $\frac{p'}{2} \cdot R = 436$. Zieht man im Summationsvektorenzug einen Kreis mit diesem Radius, so sieht man, daß sich die Punkte $\varrho^* = 13$ bis $\varrho^* = 22$ mit ziemlich großer Streuung um die Kreislinie anordnen. Man erhält angenähert für die Zeit seit 1886:

$$y = 31 \sin\left[58^0\, t + 50^0\right] = 31 \sin\left[\frac{2\pi}{6{,}21} t + 50^0\right] \text{ in } m^3/sec \qquad (84)$$

wobei für das Jahr 1808: $t = 0$ ist.

Der Verlauf dieser Welle ist auf Tafel XIX als fein ausgezogene Linie dargestellt, wobei der extrapolierte Verlauf gestrichelt ist. Bei der Welle p_6 handelt es sich also nicht um eine persistente Welle, wie auf Grund der Abflußmengen der Jahre, welche bei Abschluß der

Berechnungen anfangs 1945 zur Verfügung standen, berechnet wurde; die Welle p_6 erleidet vielmehr im Jahre 1886 eine Änderung in ihrem Verhalten. Ab 1886 ist also nicht mehr die Gleichung 61, sondern angenähert die Gleichung 84 gültig. Wir hatten für die Berechnung verschiedener Periodizitäten Abflußmengenwerte verwendet, aus welchen wir nebst andern Wellen ebenfalls die Welle p_6 nach Gleichung 61 ausgeschaltet hatten, und zwar auch für die Jahre seit 1886 (vgl. Tafeln IV und XVIII, XI bis XIV, sowie XVI und XVII). In Anbetracht einerseits der außerordentlich großen Arbeit für die Berechnungen und anderseits des sehr kleinen Einflusses der Welle p_6 (vgl. auch Verlauf der neuberechneten Welle im Vergleich zu der zuerst berechneten auf Tafel XIX) konnte es aber nicht verantwortet werden, nachträglich noch einmal alle Berechnungen für die Zeit seit 1886 zu wiederholen; man würde für die Konstanten der andern Wellen keine nennenswert andern Werte erhalten.

Die Welle p_6 darf auf Grund der wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen (a priori) nicht als reell angesehen werden; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie kein Zufallsprodukt sei, ist zu klein befunden worden.

Welle p_7, eine quasiperiodische Welle, deren Periode im Jahre 1894/95 von 7,39 Jahren auf 6,54 Jahre gewechselt hat. Die Welle ist bei den Untersuchungen sehr deutlich und kräftig in Erscheinung getreten, mit einer Amplitude, welche bis 1894 86 m³/sec und seit 1895 77 m³/sec betragen hat. Die Welle darf auf Grund der wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen (a priori) als reell angesehen werden. *Streiff* (Lit. 29) und *von Keßlitz* (Lit. 16) haben bereits Spuren einer rund siebenjährigen Periodizität im Abflußvorgang aufgedeckt.

Welle p_9, eine persistente Periodizität mit einer Wellenlänge von 8,89 Jahren. Die Amplitude beträgt 50 m³/sec, ist aber zu wenig groß, als daß die Welle mit genügend großer Wahrscheinlichkeit als reell betrachtet werden darf.

Welle p_{12}, eine quasiperiodische Welle, deren Periode im Jahre 1842/43 eine Änderung von 12,5 auf 12,2 Jahre erfahren hat. Die Amplitude ist seit 1843 zeitlich veränderlich und erreicht Werte bis rund 120 m³/sec. Es darf angenommen werden, daß die Welle *reell* und letzten Endes auf die gleichen Ursachen zurückzuführen sei, welche die bekannten «elfjährigen» Temperatur- und Niederschlagswellen erzeugen und welche auch in der «elfjährigen» *Sonnenfleckenperiode* zum Ausdruck kommen. Zwischen letzterer und unserer Abflußperiodizität besteht aber keine feste zeitliche Koppelung in dem Sinne, daß beide Periodizitäten in Phase verlaufen. Eine zwölfjährige Periodizität im Abflußvorgang ist bereits durch *von Keßlitz* (Lit. 16) für die Mur in Österreich gefunden worden; einen Nachweis für deren Realität auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat er jedoch nicht erbracht.

Welle p_{30}, eine quasiperiodische Welle mit einer Periode von 31,2 Jahren, deren Amplitude sich seit 1847 als zeitlich variabel erwiesen hat und Werte bis zu rund 80 m³/sec annehmen kann. Die Periodizität darf auf Grund der wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen (a priori) als *reell* und identisch mit der bekannten *Brücknerperiode* angesehen werden.

Die säkulare Welle p_{120} ist ohne Untersuchungen mit Hilfe der Periodogrammrechnung als reale Tatsache erkennbar. Sie ist auf Tafel XIX und XX graphisch dargestellt. Sie konnte durch Glättung mittels übergreifenden Intervallen genügend genau herausgearbeitet werden. Eine Erfassung dieser Welle durch eine Formel hätte keinen Sinn gehabt. Von einem Maximum etwa im Jahre 1805 strebte sie über ein Minimum im Jahre 1873 wiederum einem Maximum im Jahre 1925 zu; seit 1925 befindet sie sich erneut in absteigender Linie. Der Unterschied zwischen dem Minimalwert im Jahre 1873 und dem Maximalwert im Jahre 1925 beträgt 80 m³/sec.

4. Zusammensetzung der gefundenen Periodizitäten

Alle sechs Periodizitäten, welche auf Grund der Abflußmengen der Jahre berechnet worden sind, die bis zum Abschluß der Berechnungen anfangs 1945 zur Verfügung standen, und die säkulare Welle sind zu *einer Ganglinie* zusammengesetzt worden, die in der Folge als «*normaler Verlauf*» der *jährlichen Abflußmengen* bezeichnet wird. Vergleicht man diesen «normalen Verlauf» mit dem Verlauf der tatsächlich festgestellten Jahresmittel MQ (vgl. Tafel XIX), so ergibt sich folgendes:

a) Die Stufenlinie der gemessenen jährlichen Abflußmengen wird durch den «normalen Verlauf» gut *ausgeglichen.* Dies kommt darin zum Ausdruck, daß die «*Wasserbilanz*» gut stimmt und ferner die *Abweichungen* (entsprechend den Fehlern bei der Ausgleichungsrechnung) zwischen dem «normalen Verlauf» und den gemessenen Jahresmitteln in bezug auf die *Verteilung* nach ihrer *Größe* das Bild einer zufälligen Fehlerreihe bieten.

Wasserbilanz für die Jahre 1808–1943: Der Unterschied zwischen der Gesamtabflußmenge, berechnet aus den gemessenen Abflußmengen und der Gesamtabflußmenge, ermittelt aus dem « normalen Verlauf», also aus der Summe der Periodizitäten, beträgt nur $1{,}6\,^0/_{00}$ dieser Gesamtabflußmenge, das sind auf ein Jahr umgerechnet nur 1,7 m³/sec.

Abweichung zwischen dem «normalen Verlauf» und den gemessenen Jahresmitteln MQ: Aus dem «normalen Verlauf» wurden die Jahresmittel MQ_b berechnet, das sind also die Jahresmittel der Abflußmenge, welche sich aus der Summe aller gefundenen Periodizitäten ergeben. Ferner wurden die Abweichungen («Fehler») $\lambda = (MQ - MQ_b)$ berechnet und in bezug auf ihre Verteilung, sowie auf die Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens untersucht (vgl. Seite 22).

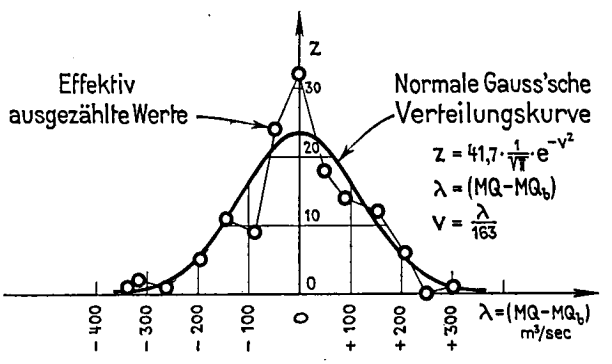


Abb. 60. Verteilung der Abweichungen der gemessenen mittleren jährlichen Abflußmengen MQ der Jahre 1808–1943 von den berechneten Werten MQ_b, welche sich aus der Summe aller gefundenen Periodizitäten ergeben

Abb. 60 zeigt, daß sich die Abweichungen λ angenähert nach einer normalen Gauß'schen Fehlerkurve verteilen.

Die Summenkurve (entsprechend dem Gauß'schen Fehlerintegral), welche sich aus der Verteilungskurve ergibt, ist als Abb. 61 dargestellt worden. Eine kleine Tabelle gibt für einige runde Werte der Abweichung $\lambda = (MQ - MQ_b)$ an, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß diese Werte überschritten werden; z. B. ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Abweichung von 150 m³/sec überschritten wird, gleich 19%, d. h. es ist zu erwarten, daß sie unter fünf Fällen einmal überschritten wird. Diese Summenkurve ergibt aber ein zu günstiges Bild im Hinblick auf eine Prognose mit Hilfe einer Extrapolation des normalen Verlaufs in die Zukunft. Sie trägt dem Umstand nicht Rechnung, daß die gefundenen Periodizitäten, mit Ausnahme der Welle p_9, *nicht* persistent sind, d. h. von Zeit zu Zeit ihr Verhalten ändern. Um eine solche Veränderung einwandfrei feststellen zu können, braucht es eine längere Reihe von Jahren, z. B. bei der kürzesten Welle p_5 mindestens etwa rund 15 Jahre. Ändert sich also eine Welle zufällig gerade zu nahe gegen das Ende der gesamten zur Verfügung stehenden Beobachtungszeit, so kann die Veränderung der Periodizität nicht mehr erfaßt werden. Dieser Fall ist bei unseren zu Beginn des Jahres 1945 abgeschlossenen Berechnungen, wie oben dargelegt worden ist, bei den Wellen p_5 und p_6 eingetreten. Bei der Extrapolation zwecks Aufstellung einer Prognose benützen wir in seinem solchen Falle noch die unveränderte Periodizität, deren Veränderung wir ja noch gar nicht erkennen konnten, während wir in Wirklichkeit die veränderte Periodizität verwenden sollten; der in einem solchen Fall auf Grund der Berechnungen extrapolierte «normale Verlauf» wird deshalb vom wirklichen zukünftigen «normalen Verlauf» entsprechend abweichen und die Prognose ist entsprechend unsicher. Wir werden auf diesen Punkt noch zurückkommen und ihn im Hinblick auf die Zuverlässigkeit von Prognosen noch weiter erörtern: Zu diesem Zwecke ist auf Tafel XIX als fein ausgezogene Linie auch der «normale Verlauf» dargestellt, welcher sich ergibt, wenn für die Wellen p_5 und p_6 nicht der Verlauf nach den Gleichungen verwendet wird, die auf Grund der Abflußmengen ermittelt wurden, welche beim Abschluß der Berechnungen zu Beginn des Jahres 1945 zur Verfügung standen, sondern nach den nachträglich, kurz vor der Drucklegung noch ermittelten Gleichungen 83 und 84.

b) In bezug auf die zeitliche Reihenfolge der Abweichungen λ nach ihrer Größe besteht die *Neigung*, daß eine größere Abweichung bei einem bestimmten Jahr durch eine größere, entgegengesetzte Abweichung im vorangehenden oder nachfolgenden Jahr *ausgeglichen* wird. Der *Ausgleich* kann sich auch über mehr als ein Jahr erstrecken (vgl. z. B. Jahre 1824–1827; 1831, 1832 und 1833; 1842 und 1843; 1860, 1861 und 1862; 1910 und 1911; 1920, 1921 und 1922; 1937 und 1938). Es besteht übrigens auch eine *Neigung zum Ausgleich innerhalb eines einzelnen Jahres* (vgl. Tafel XX).

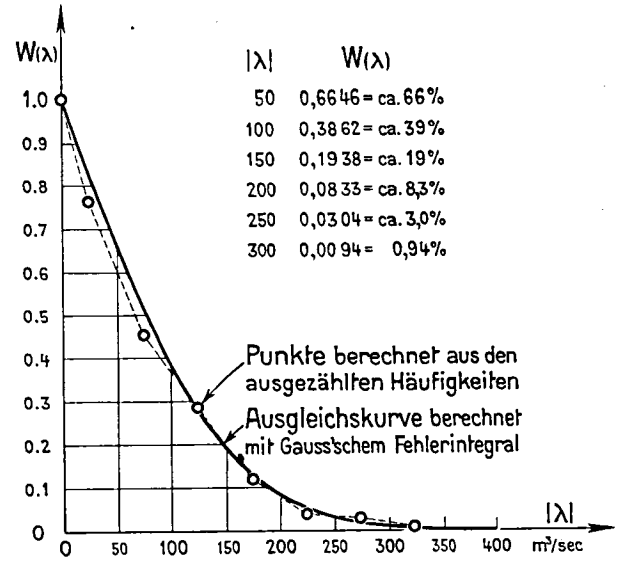


Abb. 61. Wahrscheinlichkeit W (λ) dafür, daß die Abweichungen der gemessenen Jahresmittel MQ von den berechneten Jahresmitteln MQ_b, welche sich aus der Summe aller gefundenen Periodizitäten ergeben, den Betrag $|\lambda|$ überschreiten

II. Häufigkeit der Sonnenflecken und Abflußmengen des Rheins bei Basel

Aus unsern Untersuchungen über *zeitliche Zusammenhänge* zwischen der *Häufigkeit der Sonnenflecken* und den *Abflußmengen des Rheins* ließen sich die im folgenden angegebenen Regeln erkennen, welche in nützlicher Weise bei der Voraussage der Abflußmengen des Rheins bei Basel verwendet werden können. Damit erwächst der von *Waldmeier* gefundenen Methode zur Voraussage der Sonnenfleckentätigkeit auch für die Voraussage der Abflußmengen des Rheins bei Basel eine große Bedeutung.

1. Sonnenfleckenminimum und trockene Jahre
(vgl. Tabelle 18 und Tafel XIX)

Dem Sonnenfleckenminimum geht seit Beginn der Abflußbeobachtungen in Basel, also seit dem Jahre 1808, durchwegs ein in bezug auf den «*normalen Verlauf*» *zu trockenes* Jahr voraus. Meistens ist es das erste oder zweite Jahr, welches dem Fleckenminimum vorangeht. Bei einem langen flachen Sonnenfleckenminimum kann es sogar das dritte oder, wie beim Minimum von 1878,9, sogar das vierte Jahr des Abflusses sein, das dem Fleckenminimum vorangeht.

Da, wie aus obigen Darlegungen folgt, in bezug auf den «normalen Verlauf» in den Jahren 1942 und 1943 noch eine gewisse Unsicherheit herrscht, welche durch die gegenseitige Lage der beiden auf Tafel XIX dargestellten Verlaufslinien, nämlich der stark ausgezogenen und der fein ausgezogenen, zum Ausdruck kommt, so ergibt sich ebenfalls eine Unsicherheit in bezug auf die Beurteilung der effektiven Abflußmengen der Jahre 1942 und 1943 im Vergleich zum «normalen Verlauf». Den Angaben der Tabelle 18 liegt noch die stark ausgezogene

Verlaufslinie der Tafel XIX zugrunde, also derjenigen, welche sich aus den zu Beginn des Jahres 1945 abgeschlossenen Berechnungen ergeben hat. Geht man von der nachträglich ermittelten fein ausgezogenen Verlaufslinie aus, so wird man das Jahr 1942 als das dem Sonnenfleckenminimum vorangehende Trockenjahr bezeichnen.

Die oben unter Ziffer 4 b erwähnte Neigung zum Ausgleich unter aufeinanderfolgenden Jahren besteht auch für diese Abweichung, welche im Zusammenhang mit dem Sonnenfleckenminimum auftritt (vgl. Jahre 1831, 1832, 1833; 1920, 1921, 1922; 1842, 1843; 1854, 1855; 1887, 1888; 1910, 1911; 1932, 1933.

2. Extreme der Sonnenfleckenhäufigkeit und trockene Winter

(vgl. Tabelle 19 und Tafel XXI)

a) Die Sonnenfleckenmaxima und -minima sind stets von einem oder öfters auch zwei Wintern begleitet worden, welche absolut in bezug auf die durchschnittlichen drei- und sechsmonatigen Wintermittel der Jahre 1808/09 bis 1943/44 oder doch relativ in bezug auf den Abfluß des vorangehenden Jahres betrachtet, trocken waren. Der Abstand der trockenen Winter von der Epoche des betreffenden Sonnenfleckenmaximums oder -minimums war gleich rund 1½ Jahre oder kleiner. Als Abstand wird hier die Zeitspanne zwischen dem 1. Januar («Mitte des Winters») und der Epoche des Sonnenfleckenextrems bezeichnet.

Auch hier besteht in bezug auf die Jahre 1941–1943 aus den im obigen Abschnitt erwähnten Gründen eine Unsicherheit. Der Tabelle 19 liegt die stark ausgezogene Linie zugrunde, infolgedessen ist der Winter 1941/42 als der relativ und absolut trockene Winter bezeichnet worden, der aber 2,2 Jahre vom Sonnenfleckenminimum des Jahres 1944 entfernt liegt. Auch der Winter 1943/44 war ein absolut und relativ trockener Winter; geht man jedoch von der stark ausgezogenen normalen Verlaufslinie aus, so darf dieser Winter nicht gemäß Tabelle 19 in Beziehung zum Sonnenfleckenminimum gebracht werden, da er nach Tabelle 18 zu einem Trockenjahr vor dem Sonnenfleckenminimum gehört und in diesem Zusammenhang betrachtet werden müßte. Geht man dagegen von der zuverlässigeren fein ausgezogenen Verlaufslinie aus, so wäre der Winter 1943/44 in Tabelle 19 aufzunehmen. Der Abstand vom Sonnenfleckenminimum würde dann 0,2 Jahre betragen. Die fein ausgezogene Verlaufslinie gibt also in bezug auf den Zusammenhang mit der Sonnenfleckenhäufigkeit die Verhältnisse besser wieder.

b) In bezug auf die vorstehenden Ausführungen unter Ziffer II 1 und II 2a sei zur Verdeutlichung noch erwähnt:

Von den 49 seit 1809/10 bis 1938/39 als *absolut* trocken, d. h. nennenswert unterdurchschnittlich zu bezeichnenden Wintern liegen deren 27 in einem Abstand vom nächstgelegenen Sonnenfleckenextrem, der rund 1½ Jahre beträgt oder kleiner ist. Von den 49 Wintern stehen ferner 14 im Zusammenhang mit trockenen Jahren, welche einem Sonnenfleckenminimum vorangehen, und nur 8 dieser 49 Winter sind ohne zeitlichen Zusammenhang mit den Sonnenfleckenextremen (vgl. Tafel XXI).

3. Sonnenfleckenminimum und Wechsel im Verhalten der Periodizitäten

Bei den Periodizitäten, welche auf Grund der Abflußmengen der bis zum Abschluß der Berechnungen zur Verfügung stehenden Jahre gefunden wurden, sind insgesamt sechs Wechsel im Verhalten bestimmter Periodizitäten festgestellt worden (vgl. Tafel XIX). Davon fallen vier Wechsel in Jahre des Sonnenfleckenminimums oder auf Jahre, die einem solchen Minimum kurz vorangehen. Berücksichtigen wir auch die beiden Wechsel, welche nachträglich kurz vor der Drucklegung unter Verwendung der Jahre 1945 und 1946 noch festgestellt worden sind, so entfallen von insgesamt acht Wechseln deren fünf auf Jahre des Sonnenfleckenminimums oder auf Jahre, die einem solchen Minimum kurz vorangehen. Diese Jahre scheinen also mit einer Neigung zu Störungen behaftet zu sein.

III. Möglichkeiten der Voraussage der Abflußmengen des Rheins bei Basel

1. Mittlere jährliche Abflußmengen

Jede einzelne Periodizität, sowie die säkulare Welle wurden je für sich in die Zukunft extrapoliert, was leicht möglich und auf Tafel XIX dargestellt ist. Die einzelnen extrapolierten Wellenstücke wurden zusammengesetzt, woraus sich ein extrapoliertes Stück des «normalen Verlaufes» der Jahresmittel der künftigen Abflußmengen und damit ein Anhaltspunkt zu deren Beurteilung ergibt. Aus der festgestellten Regel, nach welcher einem Sonnenfleckenminimum ein in bezug auf den «normalen Verlauf» zu trockenes Jahr voranzugehen pflegt, ergibt sich ein weiterer Anhaltspunkt für eine Voraussage in Zeiten vor einem Sonnenfleckenminimum.

Würden einzelne Periodizitäten nicht von Zeit zu Zeit eine Änderung in ihrem Verhalten erleiden, so könnte man der Summenkurve W (λ) der Abb. 61 die Wahrscheinlichkeit dafür entnehmen, daß die Abweichung der zukünftigen Jahresmittel von den Jahresmitteln, welche sich aus dem extrapolierten «normalen Verlauf» (Prognose) ergeben, einen bestimmten Betrag überschreitet. Wie aber auf Seite 113 bereits ausgeführt worden ist, ergibt sich aus der Verwendung der Abb. 61 allein ein zu günstiges Bild. Es ist bei der Voraussage noch zu berücksichtigen, daß die berechneten Periodizitäten (mit Ausnahme von Welle p_9) von Zeit zu Zeit eine Änderung in ihrem Verhalten erleiden. Auf Grund der Abflußmengen der Jahre, welche bei Abschluß der Berechnungen zu Beginn des Jahres 1945 zur Verfügung standen, konnte, wie dargelegt, noch nicht festgestellt werden, daß die Welle p_5 im Jahre 1933 und die Welle p_6 im Jahre 1886 eine Veränderung erlitten haben. Der

«normale Verlauf» wurde daher ohne Kenntnis dieser Änderungen auf Tafel XIX extrapoliert. Nachträglich, als noch die Jahre 1945 und 1946 (teilweise) zur Verfügung standen, konnten dann kurz vor der Drucklegung diese Änderungen festgestellt und die zuletzt gültigen Formeln für die Wellen p_5 und p_6 angenähert ermittelt werden. Wie bereits erwähnt, ist auf Tafel XIX als fein ausgezogene Linie auch der «normale Verlauf» aufgetragen und extrapoliert worden, wie er sich unter Berücksichtigung der nachträglich festgestellten Änderung der Wellen p_5 und p_6 ergibt. Aus dem Vergleich (siehe Tafel XIX) des zuerst ermittelten «normalen Verlaufes» (starke Linie) mit dem nachträglich ermittelten (feine Linie) kann man nun den Grad der Unsicherheit erkennen, welcher einer Voraussage anhaften kann. Der allgemeine Verlauf der starken Linie und jener der feinen Linie sind einander ähnlich. Beide zeigen z. B. das Herannahen einer Trockenheit an, in bezug auf den Zeitpunkt des Auftretens dieser Trockenheit besteht aber ein Unterschied von 1 bis 1½ Jahren.

Die größte Unsicherheit in bezug auf die Prognose ergibt sich aus der Periodizität p_5, welche seit 1888 im Durchschnitt rund alle 22 Jahre ihr Verhalten geändert hat; bessere Prognosen wären möglich, wenn p_5 wieder einmal ein ruhigeres Verhalten zeigen würde wie in den Jahren 1823–1887.

Immerhin können aus dem extrapolierten «normalen Verlauf» doch nützliche Anhaltspunkte für den kommenden Abflußcharakter erhalten werden. In Zukunft, wenn eine viel größere Erfahrung in der Anwendung der Periodogrammrechnung auf die Abflußmengen des Rheins vorliegt, dürften vielleicht Veränderungen im Verhalten der Periodizitäten noch besser erkannt werden, was noch bessere Prognosen ermöglichen würde.

2. *Verteilung der Abflußmengen innerhalb des Verlaufes eines bestimmten Jahres*

Darüber kann wenig ausgesagt werden, weil unsere Untersuchung aus oben angegebenen Gründen auf das Vorhandensein von kurzwelligen Periodizitäten nicht ausgedehnt wurde. Immerhin haben wir nach Tafel XX eine Neigung zum Ausgleich innerhalb eines Jahres festgestellt. Wenn somit für ein Jahr eine Voraussage des Jahresmittels der Abflußmenge vorliegt und der Verlauf der Abflußmengen während eines längern Teiles dieses Jahres (Vierteljahr bis halbes Jahr und länger) bereits bekannt ist, so ergibt sich ein Anhaltspunkt für den Abflußcharakter des restlichen Teiles des Jahres.

Ein weiterer Anhaltspunkt ergibt sich in der Nähe von Sonnenfleckenextremen aus der festgestellten Regel, daß die Sonnenfleckenmaxima und -minima von einem oder öfters auch zwei Wintern begleitet werden, welche absolut oder relativ betrachtet trocken sind.

3. *Vergleich der effektiv eingetretenen Wasserführung der Jahre 1944, 1945 und 1946 mit derjenigen, welche auf Grund der Periodizitäten zu erwarten war*

Zur Ermittlung der verschiedenen Periodizitäten hatten wir die Jahre vor 1944 benützt, aber ohne 1944 (mit Ausnahme für die Welle p_5). Seit Abschluß der Berechnungen zu Beginn des Jahres 1945 wurden bis zum Zeitpunkt der Drucklegung auch noch die mittleren jährlichen Abflußmengen der Jahre 1944 und 1945, sowie die mittleren Abflußmengen der Monate Januar bis Oktober des Jahres 1946 ermittelt und erlaubten bereits einen Vergleich mit einer Voraussage auf Grund unserer Ergebnisse, d. h. auf Grund einer Extrapolation des stark ausgezogenen «normalen Verlaufes» der Tafel XIX, sowie mit dem nachträglich ermittelten, fein ausgezogenen «normalen Verlauf» der Tafel XIX.

a) Jahr 1944

Die stark ausgezogene Verlaufslinie ist für das Jahr 1944 bereits als extrapoliert zu betrachten. Die fein ausgezogene, normale Verlaufslinie wurde dagegen unter Verwendung des Jahres 1944 berechnet, jedoch war, wie oben ausgeführt wurde, die Berechnung nur angenähert möglich. Diese angenähert berechnete Verlaufslinie ist somit für das Jahr 1944 *nicht* extrapoliert.

Der Verlauf der extrapolierten *stark ausgezogenen Linie* ließ für das Jahr 1944 einen kräftigen Anstieg aus der vorangehenden Trockenperiode der Jahre 1942 und 1943 erwarten. Dieser Anstieg ist eingetroffen, ist aber nicht ganz bis zu dem zu erwartenden Wert erfolgt. Zu erwarten war ein Jahresmittel von 1205 m³/sec; eingetreten sind 1092 m³/sec; das effektiv eingetretene Jahresmittel blieb also um 113 m³/sec unter der Erwartung. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Abweichung von $\lambda = 113$ m³/sec erreicht oder überschritten wird, ist nach Abb. 61 $W(\lambda) = 33\%$, kann also z. B. unter drei Jahren einmal erwartet werden. Die aufgetretene Abweichung von 113 m³/sec zwischen Erwartung und effektiv aufgetretenem Wert war also an und für sich nicht außergewöhnlich groß; wir wissen aber, daß die stark ausgezogene Verlaufslinie nur noch angenähert gültig ist, weil die Periodizitäten p_5 und p_6 ihr Verhalten geändert haben und die Abweichung von 113 m³/sec daher rühren könnte.

Wir ziehen auch einen Vergleich mit der *fein ausgezogenen Linie*. Der Vergleich mit der effektiv aufgetretenen Abflußmenge hat keine Bedeutung im Sinne einer Überprüfung einer Voraussage für das Jahr 1944 auf Grund dieser Linie, er ist aber wertvoll zur Beurteilung der fein ausgezogenen Linie selbst, d. h. der Frage, mit welcher Genauigkeit aus dem extrapolierten Verlauf dieser Linie (von Ende 1946 an) auf die zu erwartenden Abflüsse geschlossen werden darf. Die fein ausgezogene Linie ergibt nur eine Abflußmenge von 965 m³/sec, das effektiv eingetretene Jahresmittel von 1092 m³/sec erreichte also einen um 127 m³/sec höhern Wert.

Der effektiv eingetretene Wert von 1092 m³/sec für die mittlere Abflußmenge des Jahres 1944 liegt also zwischen den Werten, welche aus der stark ausgezogenen Linie (1205 m³/sec) und der fein ausgezogenen Linie (965 m³/sec) sich ergeben und entspricht ziemlich genau dem arithmetischen Mittel (1085 m³/sec) aus den Werten der beiden Linien.

b) Jahr 1945

Auch bei diesem Jahr müssen wir unterscheiden zwischen dem extrapolierten Verlauf der stark ausgezogenen Linie und dem nicht extrapolierten Verlauf der fein ausgezogenen Linie.

Auf Grund der *stark ausgezogenen* Linie war für das Jahr 1945 eine Abflußmenge von 952 m^3/sec zu erwarten. Eingetroffen ist dann eine mittlere jährliche Abflußmenge von 1074 m^3/sec, welche also die erwartete Abflußmenge um 122 m^3/sec übertroffen hat.

Aus der *fein ausgezogenen* normalen Verlaufslinie ergibt sich ein mittlerer Jahresabfluß für 1945 von 1135 m^3/sec, welcher 61 m^3/sec größer ist als die effektiv eingetroffene Abflußmenge.

Der effektiv eingetroffene Wert für die mittlere Abflußmenge des Jahres 1945 liegt also ebenfalls, wie jener des Jahres 1944, zwischen den Werten, welche aus der stark ausgezogenen Linie und der fein ausgezogenen Linie sich ergeben. Der effektive Wert von 1074 m^3/sec liegt jedoch näher dem Wert der fein gestrichelten Linie (1135 m^3/sec) als jenem der stark ausgezogenen (952 m^3/sec).

c) Jahr 1946

Die Abflußmengen dieses Jahres lagen im Zeitpunkt, wo die Arbeit zum Drucken gegeben wurde, nur bis und mit dem Monat Oktober vor. Unter der Annahme, daß sich bis zum Jahresende nicht noch überraschend große Niederschläge einstellen, konnte, ausgehend von den bereits vorhandenen Abflußmengen der Monate Januar bis und mit Oktober, der mittlere Jahresabfluß für 1946 auf 1020 bis 1060 m^3/sec geschätzt werden. Aus der stark ausgezogenen, extrapolierten Verlaufslinie ergibt sich ein Abfluß von nur rund 700 m^3/sec, aus der fein ausgezogenen, erst vom 4. Vierteljahre des Jahres 1946 an extrapolierten Verlaufslinie dagegen ein solcher von rund 1070 m^3/sec. Der effektive mittlere Jahresabfluß dürfte also auch beim Jahr 1946 zwischen den Werten liegen, welche aus den beiden «normalen Verlaufslinien» ermittelt worden sind, jedoch viel näher beim Wert aus der fein ausgezogenen «normalen Verlaufslinie».

d) Zusammenfassung und Ausblick auf die Jahre 1947, 1948 und 1949

aa) Wir wissen, daß die stark ausgezogene extrapolierte «normale Verlaufslinie» (Tafel XIX) nur angenäherte Werte liefern kann, weil sie die Änderung im Verhalten der Periodizitäten p_5 bzw. p_6 in den Jahren 1933 bzw. 1886 nicht berücksichtigt. Die fein ausgezogene «normale Verlaufslinie» (Tafel XIX) berücksichtigt die genannte Änderung im Verhalten der Periodizitäten p_5 und p_6; sie wurde erst nachträglich nach Abschluß der Berechnungen zur Ermittlung der Periodizitäten und kurz vor der Drucklegung noch ermittelt, da inzwischen auch die Abflußmengen des Jahres 1945 und teilweise auch des Jahres 1946 ermittelt worden sind. Die Benützung der Abflußmengen dieser beiden Jahre genügte jedoch nur, um die fein ausgezogene Linie *angenähert* zu erfassen. Aus dem Vergleich der effektiv eingetretenen Abflußmengen der Jahre 1944, 1945 und 1946 mit denjenigen, welche der stark ausgezogenen «normalen Verlaufslinie» und der fein ausgezogenen «normalen Verlaufslinie» entnommen werden können, läßt sich erkennen, daß die effektiv aufgetretenen Werte zwischen diesen beiden Verlaufslinien liegen, jedoch näher der fein ausgezogenen Verlaufslinie. Obwohl also auch letztere nur angenähert berechnet worden ist, so dürfte sie doch zuverlässigere Werte ergeben als die stark ausgezogene Linie.

bb) Sowohl die stark ausgezogene «normale Verlaufslinie» wie auch die fein ausgezogene zeigen das Herannahen eines trockenen Zeitabschnittes mit einem nachfolgenden nassen Zeitabschnitt an. Nach der fein ausgezogenen Verlaufslinie, welche zuverlässigere Werte liefert, wäre zu erwarten, daß die Jahre 1947 und 1948 mit weit unterdurchschnittlichen Jahresabflußmengen trocken sein werden; erst im Jahr 1949 wäre wiederum ein durchschnittlicher bis überdurchschnittlicher Jahresabfluß zu erwarten, wobei die Wendung von der Trokkenheit zu größeren Abflüssen allfällig schon Ende 1948 eintreten könnte, ähnlich wie dies 1944 der Fall war.

Wenn dann auch die Abflußmengen des Jahres 1947 vorliegen werden, wobei vielleicht schon die Kenntnis für einen Teil des Jahres genügen kann, so wird man die fein ausgezogene Verlaufslinie unter Verwendung dieser Abflußmengen überprüfen und gegebenenfalls durch eine genauer berechnete Linie ersetzen können.

Wie aus dem bisherigen Verhalten der Welle p_5 hervorgeht, könnte sie etwa im Jahre 1955 wiederum eine Veränderung in ihrem periodischen Verhalten erfahren. Wenn bis dahin keine der andern Wellen eine solche Veränderung von wesentlichem Ausmaße erfährt, so sollte es voraussichtlich möglich sein, die «normale Verlaufslinie» für etwa die Jahre 1949–1954 ziemlich genau zu berechnen. Zu bedenken ist dabei aber immer, mit welchen Abweichungen vom «normalen Verlauf», auch wenn dieser genau ermittelt werden könnte, gemäß Abb. 61, Seite 113, zu rechnen ist.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß das nächste Sonnenfleckenmaximum voraussichtlich Ende 1947 zu erwarten ist (gemäß einer freundlichen Angabe des Herrn Prof. Dr. Waldmeier). Auf Grund der festgestellten Regel (vgl. Seite 113) würde also mit einer Trockenheit in einem der beiden Winter 1946/47 und 1947/48 oder eventuell in beiden der genannten Winter zu rechnen sein.

cc) Wir konnten vorerst nur auf Grund von wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen mit Hilfe der Schuster'schen Expektanzformeln die Wahrscheinlichkeit (a priori) angeben, welche dafür besteht, daß unsere Periodizitäten reell seien. Erst eine längere Erfahrung, gewonnen durch Vergleiche extrapolierter Werte mit späteren Beobachtungen, kann endgültig zeigen, mit welcher Zuverlässigkeit (Wahrscheinlichkeit a posteriori) eine Voraussage möglich ist. Da es sich um quasiperiodische Wellen handelt, also immer damit gerechnet werden muß, daß das Verhalten der einen oder andern Periodizität eine Änderung erfährt, so bleibt stets eine Unsicherheit bestehen, und es ist infolgedessen mit größeren Abweichungen zu rechnen, als gemäß Abb. 61 erwartet werden könnte. Wir haben gerade bei unsern Untersuchungen geschen, wie insbesondere eine Änderung im Verhalten der Welle p_5, welche gegen das Ende der verfügbaren Beobachtungsreihe aufgetreten ist, noch nicht erkannt und erfaßt werden konnte, als wir unsere Berechnungen zu Beginn des Jahres 1945 abschlossen. Es ergab sich die stark ausgezogene «normale Verlaufslinie» (Summen aller Periodizitäten) der Tafel XIX. Erst auf Grund nachträglicher, kurz vor der Drucklegung noch erfolgter Berechnungen mit Hilfe der Abflußmengen der Jahre 1945 und 1946 war es möglich, die «normale Verlaufslinie» genauer, wenn auch immer erst noch angenähert zu erfassen. Dadurch ergab sich die fein ausgezogene

«normale Verlaufslinie» der Tafel XIX. Die beiden Verlaufslinien, die stark ausgezogene und die fein ausgezogene, zeigen, wie erwähnt, einen ähnlichen allgemeinen Charakter. Die fein ausgezogene Verlaufslinie ist aber als die zuverlässigere zu betrachten. In den Schlußfolgerungen, welche aus dem Verlauf dieser Linie in bezug auf den Abflußcharakter der Jahre 1947–1949 gezogen worden sind, soll jedoch nur eine Voraussage erblickt werden, die lediglich zu dem Zwecke gemacht worden ist, daß sie durch Vergleich mit den effektiv eintretenden Verhältnissen auf ihre Zuverlässigkeit geprüft werden kann. Sollte sich diese Voraussage, sowie spätere in ähnlicher Weise für weitere Jahre durchzuführende Voraussagen innerhalb der zu erwartenden Unsicherheitsgrenzen als zuverlässig erweisen, so würde sich aus der Berechnung der Periodizitäten des Abflusses des Rheins bei Basel ein großer praktischer Nutzen für Wasserbau und Wasserwirtschaft und ein Beitrag zur Schließung einer großen Lücke ergeben, welche auf dem Gebiete der wasserwirtschaftlichen Planung schon lange sehr unangenehm empfunden worden ist. Aus obigem geht aber auch hervor, daß dabei die *Untersuchung der Periodizitäten eine ständige Aufgabe* bleiben würde, da jeweilen sofort, wenn neue Werte der Abflußmengen für einen genügend langen Zeitabschnitt (mindestens ein Jahr) verfügbar werden, die frühern Berechnungen wiederum zu überprüfen und gegebenenfalls die frühern Ergebnisse zu verbessern sind.

Bern, November 1946.

Leer - Vide - Empty

Literaturangaben

I. Periodenforschung

1. *Bartels, J.:* Zur Morphologie geophysikalischer Zeitfunkfunktionen. Sitz. Ber. preuß. Akad. Wiss. (Physik. Kl.), Berlin 1935.
2. *Bartels, J.:* Verborgene periodische Erscheinungen, in «Wahrscheinlichkeiten und Schwankungen», herausgegeben von F. Lubberger, Berlin 1937.
3. *Stumpff, K.:* Grundlagen und Methoden der Periodenforschung. Berlin 1937.
4. *Stumpff, K.:* Tafeln und Aufgaben zur Harmonischen Analyse und Periodogrammrechnung. Berlin 1939.

II. Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Wasserführung der Gewässer (Verteilungskurven)

5. *Gibrat, R.:* Aménagement hydroélectrique des cours d'eau: Statistique mathématique et calcul des probabilités. Revue Générale de l'Electricité, 15. und 22. Oktober 1932.
6. *Graßberger, H.:* Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Wasserführung der Gewässer. «Die Wasserwirtschaft», 1932, Nr. 1, 3 und 5.
7. *Graßberger, H.:* Untersuchungen über die Hochwasser des Jangtsekiang. «Die Wasserwirtschaft», 1933, Nr. 6.
8. *Graßberger, H.:* Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Hochwasserfragen. «Deutsche Wasserwirtschaft», 1936, Nr. 9.
9. *Kummer, W.:* Die Auswertung unsymmetrischer Verteilungsreihen der Großzahlforschung. Schweiz. Bauzeitung, 1933, Nr. 11. Vgl. dazugehörige Korrespondenz zwischen H. Graßberger und W. Kummer in Schweiz. Bauzeitung, 1933, Nr. 16.
10. *Reindl, C.:* Zur Voraussage größter Hochwässer. «Wasserkraft und Wasserwirtschaft», 1938, Nr. 13 und 14.
11. *Reinhold, F.:* Einfache zeichnerische Darstellung von Dauerkurven. «Die Wasserwirtschaft», 1933, Nr. 13.
12. *Sokolowski, D. L.:* Anwendung der Verteilungskurven auf dem Gebiete der Hydrologie. «Wasserwirtschaft und Technik», 1936, Nr. 10–14 und 18/19.

III. Verschiedene Arten der Abflußprognose

13. *Felber, V.:* Die Wasserstandsvorhersage für Wien. «Wasserkraft und Wasserwirtschaft», 1938, Nr. 15/16.
14. *Friedrich, W.:* Hochwasservorhersage auf Grund meteorologischer Beobachtungen. «Die Deutschen Berichte» zur Tagung der intern. Ver. f. wissenschl. Hydrologie, Berlin 1939.
15. *W. von Keßlitz:* Über verschiedene Arten zur Vorausberechnung von Monatsmittelwerten der Wasserführung österr. Alpenflüsse. «Wasserwirtschaft», Wien 1928, Nr. 7/8.
16. *W. von Keßlitz:* Versuch zur Vorausberechnung von Monatsmittelwerten der Wasserführung eines österreichischen Alpenflusses. «Wasserkraft und Wasserwirtschaft», 1938, Nr. 17/18.
17. *Schaffernak, F.:* Hydrographie. 1935.
18. *Wallén, A.:* Les prévisions des niveaux d'eau et des débits en Suède. Särtryck ur Geografiska Annaler, h. 3–4, 1919.
19. *Wallner, J.:* Stand der Hochwasservoraussage und Vorschläge für die weitere Entwicklung. «Wasserkraft und Wasserwirtschaft», 1938, Nr. 17/18.
20. *Wanner, E.:* Versuch einer Vorhersage rascher Pegelstandsänderungen des Rheinstromes bei Basel auf Grund der Niederschlagsbeträge im Einzugsgebiet. «Schweiz. Wasser- und Energiewirtschaft», 1932, Nr. 7 und 8.

IV. Über Periodizität meteorologischer und hydrographischer Erscheinungen

21. *Brückner, E.:* Klimaschwankungen seit 1700 nebst Bemerkungen über die Klimaschwankungen der Diluvialzeit. Wien 1890.
22. *Dilger, E.:* Die elfjährige thermische Welle auf der Erdoberfläche. Gerlands Beiträge zur Geophysik, Bd. 30, 1931.
23. *Jacobi, R.:* Über Wiederholungserscheinungen im Haushalt fließender Gewässer. «Wasserkraft und Wasserwirtschaft», 1941, Nr. 4.
24. *Keßlitz, W. von:* Untersuchungen über mehrjährige Niederschlagsperioden einiger Stationen in den österreichischen Alpen, bzw. im Alpenvorlande. «Wasserwirtschaft und Technik», 1934, Nr. 1/2 und Nr. 7.
    Keßlitz, W. von: Versuch zur Vorausberechnung von Monatsmittelwerten der Wasserführung eines österreichischen Alpenflusses. «Wasserkraft und Wasserwirtschaft», 1938, Nr. 17/18.
25. *Loh:* Untersuchungen über Klimaschwankungen und über die Abhängigkeit der Wetterlagen aufeinanderfolgender Jahreszeiten, durchgeführt an Hand der 100-jährigen Beobachtungsreihe der meteorologischen Station Darmstadt. Diss. Gießen 1936. Rezension in Ann. der Hydrographie, Berlin Januar 1938.
26. *Novotny, J.:* Über die langfristige Periodizität der Abflußmenge in den Flüssen. Ein Beitrag zur Gewässerkunde der Elbe. «Wasserkraft und Wasserwirtschaft», 1939, Nr. 15/16.
27. *Seidel, G.:* Ein Beitrag zur 16-jährigen Klimaschwankung. Diss. Leipzig 1934. Rezension in «Meteorologische Zeitschrift», Januar 1935.
28. *Sperling, W.:* Langjährige Wasserstands- und Abflußschwankungen in den deutschen Flüssen. «Deutsche Wasserwirtschaft» 1934, Nr. 8.
29. *Streiff, A.:* On the investigation of cycles and the relation of the Brückner and solar cycle. Monthly Weather Review, July 1926, U. S. Department of Agriculture, Weather Bureau, Washington, Government Printing Office.
    Wallén, A.: Les prévisions des niveaux d'eau et des débits en Suède. Särtryk ur Geografiska Annaler, h. 3–4, 1919.

V. Versuche zur langfristigen, prognostischen Beurteilung des trockenen Zeitabschnittes der Jahre 1941–1944

30. *Nasse und trockene Jahre.* «Neue Zürcher Zeitung», Nr. 1870, 23. November 1941.
31. *Sonnenflecken und Niederschlagsverhältnisse.* «Der Bund», Nr. 495, 22. Oktober 1941.
32. *Zwei Jahre Trockenheit.* «Der Bund», Nr. 425, 12. September 1943.
33. *Wie wird der kommende Winter?* «Der Bund», Nr. 521, 7. November 1943.

34. *Schwankungen und Änderungen des Klimas.* «Der Bund», Nr. 13, 9. Januar 1944.

35. *Warum ist dieser Winter so mild?* «Der Bund», Nr. 46, 26. Januar 1944.

36. *Es kommen wieder regenreichere Jahre.* Periodische Schwankungen zwischen Trockenheit und Niederschlagsreichtum. «Der Bund», Nr. 370, 9. August 1944.

VI. Verschiedenes und Allgemeines

37. *Baur, F.:* Einführung in die Großwetterforschung. Leipzig und Berlin 1937.

38. *Brunner, W.:* Tables on Sunspot-Frequency for 1749 to 1938, in Terrestrial Magnestism and Atmospheric Electricity, September 1939. (Als Separatabzug von Prof. Brunner, eidg. Sternwarte, Zürich, freundlich zur Verfügung gestellt worden.)

39. *Eidg. Amt für Wasserwirtschaft:* Die Abflußverhältnisse des Rheins in Basel, von Ing. C. Ghezzi, Mitt. Nr. 19, Bern 1926.

40. *Eidg. Amt für Wasserwirtschaft:* Hydrographisches über den Rhein bei Basel. «Die Rheinquellen», Oberrheinische Zeitschrift für Binnenschiffahrt und Verkehr, 1939, Nr. 4/5.

41. *Eidg. Sternwarte Zürich:* «Astronomische Mitteilungen», gegründet von R. Wolf, herausgegeben von W. Brunner.

42. *Koechlin, R.:* Les glaciers et leur mécanisme.' Lausanne 1944.

43. *Maurer, J.:* Das Jahr 1934 im Lichte der Klimaschwankung. Die sieben größten Hochwasser der Schweiz seit 1864. In «Wasser- und Energiewirtschaft», 1934, Nr. 7/8.

44. *Maurer, J.:* Neuer Rückzug der Schweizer Gletscher. «Meteorologische Zeitschrift», 1935.

45. *Saxer, W.:* Über die Beziehungen der Mathematik zur Statistik. Kultur- und Staatswissenschaftl. Schriften der ETH., 1942, Nr. 25.

46. *Waldmeier, M.:* Neue Eigenschaften der Sonnenfleckenkurve. ETH. Diss. 1936, Verlag Schultheß & Co.

47. *Waldmeier, M.:* Ergebnisse und Probleme der Sonnenforschung. Leipzig 1941.

48. *Waldmeier, M.:* Sonne und Erde. Zürich 1945.

49. *Wanner, E.:* Beiträge zur meteorologischen Statistik. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich, 1940.

50. *Wilhelmy, L.:* Die Sonne ist an allem schuld. «Der Bund», Nr. 285, 22. Juni 1936.

Lebens- und Bildungsgang

Am 20. Januar 1906 wurde ich in Meiringen geboren als Sohn des Bernhard Wilhelm und der Bertha Emma, geb. Gygax. Ich besuchte die Primar- und Sekundarschule des Kantons Bern in Riedtwyl, Unterseen und Interlaken sowie die Kantonsschule (Industrieschule) in Zürich. Nach bestandener Maturitätsprüfung begann ich im Herbst 1924 meine Studien an der Abteilung für Bauingenieure an der Eidgenössischen Technischen Hochschule und erwarb im Dezember 1928 das Diplom als Bauingenieur.

Nach längerem Militärdienst arbeitete ich vom 13. Mai 1929 bis 31. Juli 1930 bei der AG. Zschokke, Werkstätte Döttingen, als Statiker und Konstrukteur in Eisenbau und in gleicher Eigenschaft vom 1. August 1930 bis 29. November 1930 bei den Ateliers de Constructions Mécaniques in Vevey. Vom 3. Dezember 1930 bis 28. Februar 1931 war ich beim Baudepartement des Kantons Obwalden für Straßenbauarbeiten angestellt. Am 1. März 1931 trat ich beim Eidg. Amt für Wasserwirtschaft in Bern als Ingenieur in die Sektion für Hydrographie ein. Seit 1. Dezember 1940 befasse ich mich als Sektionschef II und seit 1. April 1942 als Sektionschef I zur Hauptsache mit Arbeiten auf dem Gebiete der Seeregulierungen und der Flußschiffahrt.

Mittlere jährliche Abflussmengen MQ des Rheins bei Basel in m^3/sec

y	Jahr	m^3/sec	y	Jahr	m^3/sec	y	Jahr	m^3/sec	y	Jahr	m^3/sec	y	Jahr	m^3/sec
			22	1830	968	52	1860	1314	82	1890	1001	112	1920	1041
			23	1	1341	53	1	931	83	1	991	113	1	606
			24	2	695	54	2	873	84	2	1061	114	2	1304
			25	3	1027	55	3	920	85	3	754	115	3	1098
			26	4	865	56	4	884	86	4	816	116	4	1178
			27	35	895	57	65	768	87	95	814	117	25	816
			28	6	990	58	6	1023	88	6	1272	118	6	1163
			29	7	1059	59	7	1292	89	7	1252	119	7	1260
0	1808	954	30	8	1004	60	8	1036	90	8	964	120	8	965
1	9	939	31	9	1039	61	9	977	91	9	933	121	9	842
2	1810	925	32	1840	996	62	1870	839	92	1900	965	122	1930	1212
3	1	955	33	1	1056	63	1	886	93	1	1051	123	1	1250
4	2	1215	34	2	870	64	2	1023	94	2	1052	124	2	995
5	3	1088	35	3	1202	65	3	977	95	3	996	125	3	914
6	4	918	36	4	1126	66	4	774	96	4	968	126	4	809
7	15	1120	37	45	1067	67	75	1006	97	05	1122	127	35	1201
8	6	1404	38	6	1209	68	6	1240	98	6	965	128	6	1289
9	7	1375	39	7	1096	69	7	1142	99	7	990	129	7	1187
10	8	945	40	8	884	70	8	1204	100	8	940	130	8	958
11	9	862	41	9	1000	71	9	1131	101	9	895	131	9	1344
12	1820	923	42	1850	1128	72	1880	1035	102	1910	1439	132	1940	1287
13	1	1122	43	1	1153	73	1	1051	103	1	866	133	1	1078
14	2	828	44	2	1130	74	2	1085	104	2	1129	134	2	908
15	3	1098	45	3	1129	75	3	1091	105	3	1048	135	3	761
16	4	1325	46	4	884	76	4	807	106	4	1276	136	4	1092
17	25	990	47	55	1181	77	85	843	107	15	1147	137	45	
18	6	801	48	6	954	78	6	883	108	6	1254			
19	7	1124	49	7	707	79	7	827	109	7	1123			
20	8	987	50	8	760	80	8	1235	110	8	920			
21	9	980	51	9	897	81	9	1024	111	9	1110			

Zuordnung der 121 mittleren jährlichen Abflussmengen MQ von 1808–1928 zu den Summenspalten des Darwin-Börgen'schen Schemas für Welle $\mu=2$

Summenspalte 0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
y	MQ	y	MQ	y	MQ	y	MQ	y	MQ	y	MQ	y	MQ	y	MQ	y	MQ	y	MQ	y	MQ
0	954	3	955	9	1375	14	828	20	987	25	1027	31	1039	36	1126	42	1128	47	1181	53	931
1	939	4	1215	10	945	15	1098	21	980	26	865	32	996	37	1067	43	1153	48	954	54	873
2	925	5	1088	11	862	16	1325	22	968	27	895	33	1056	38	1209	44	1130	49	707	55	920
58	1023	6	918	12	923	17	990	23	1341	28	990	34	870	39	1096	45	1129	50	760	56	884
59	1292	7	1120	13	1122	18	801	24	695	29	1059	35	1202	40	884	46	884	51	897	57	768
60	1036	8	1404	69	1142	19	1124	80	1235	30	1004	91	933	41	1000	102	1439	52	1314	113	606
61	977	64	1023	70	1204	75	1091	81	1024	86	816	92	965	97	1122	103	866	108	1254	114	1304
62	839	65	977	71	1131	76	807	82	1001	87	814	93	1051	98	965	104	1129	109	1123	115	1098
63	886	66	774	72	1035	77	843	83	991	88	1272	94	1052	99	990	105	1048	110	920	116	1178
119	1260	67	1006	73	1051	78	883	84	1061	89	1252	95	996	100	940	106	1276	111	1110	117	816
120	965	68	1240	74	1085	79	827	85	754	90	964	96	968	101	895	107	1147	112	1041	118	1163
Y_0	11096	Y_1	11720	Y_2	11875	Y_3	10617	Y_4	11037	Y_5	10958	Y_6	11128	Y_7	11294	Y_8	12329	Y_9	11261	Y_{10}	10541

Darwin-Börgen'sches Schema von 11 Spalten zur Berechnung des Spektrums der mittleren jährlichen Abflussmengen des Rheins bei Basel für die Jahre 1808–1928.

Summen-Spalte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Winkel-Argumente	0°	$\frac{2\pi}{11}$ = 32,73°	$2\cdot\frac{2\pi}{11}$ = 65,45°	$3\cdot\frac{2\pi}{11}$ = 98,18°	$4\cdot\frac{2\pi}{11}$ = 130,91°	$5\cdot\frac{2\pi}{11}$ = 163,64°	$6\cdot\frac{2\pi}{11}$ = 196,36°	$7\cdot\frac{2\pi}{11}$ = 229,09°	$8\cdot\frac{2\pi}{11}$ = 261,82°	$9\cdot\frac{2\pi}{11}$ = 294,55	$10\cdot\frac{2\pi}{11}$ = 327,27°
cos	+1.000	+0.841	+0.415	−0.142	−0.655	−0.959	−0.959	−0.655	−0.142	+0.415	+0.841
sin	±0.000	+0.541	+0.910	+0.990	+0.756	+0.282	−0.282	−0.756	−0.990	−0.910	−0.541
Welle μ	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}
1	11 458	11 920	10 673	11 618	11 246	10 698	11 199	10 882	10 873	11 362	11 927
2	11 096	11 720	11 875	10 617	11 037	10 958	11 128	11 294	12 329	11 261	10 541
3	11 053	11 217	11 881	10 545	11 188	10 916	11 343	10 964	11 962	11 233	11 554
4	10 835	10 868	11 244	12 685	11 108	11 864	11 544	10 618	11 374	10 171	11 545
5	10 417	10 368	11 464	10 815	11 841	11 839	10 765	11 297	10 975	11 915	12 160
6	10 912	11 135	11 328	10 738	12 439	11 332	11 323	11 054	11 056	11 069	11 470
7	10 898	11 849	11 567	11 298	10 931	12 082	10 310	11 534	11 239	10 348	11 800
8	11 189	11 189	10 842	11 029	10 913	11 400	12 046	11 220	10 430	11 586	12 012
9	11 039	11 577	11 506	11 436	10 548	11 295	11 781	11 724	10 707	10 986	11 257
10	10 715	10 247	10 711	11 219	11 093	11 176	11 264	11 834	12 016	11 289	12 292
11	10 689	11 277	10 563	11 495	11 854	11 670	11 035	10 800	11 849	12 026	10 598
12	10 627	11 140	10 651	11 919	10 930	11 330	10 903	10 577	12 073	11 788	11 918
13	11 963	10 638	10 372	10 736	11 207	12 173	11 323	11 615	11 743	11 321	10 765
14	11 842	10 467	11 867	11 451	11 144	11 702	11 018	10 635	11 228	11 486	11 016
15	11 310	11 194	10 711	11 219	11 425	11 829	10 728	11 726	10 759	11 329	11 626
16	11 942	11 872	11 052	10 888	10 501	10 584	11 053	11 499	11 695	11 462	11 308
17	11 071	11 301	11 173	12 933	11 823	10 474	11 502	11 233	11 180	10 684	10 482
18	11 352	11 539	11 902	11 232	11 306	11 132	11 104	10 852	11 907	10 582	10 948
19	12 442	11 252	11 221	11 273	10 335	11 583	11 511	12 186	10 142	11 112	10 799
20	10 437	10 528	11 513	10 823	11 415	11 135	11 802	11 261	11 636	12 504	10 802
21	11 731	11 037	10 970	12 020	11 403	11 332	10 781	11 032	11 204	11 958	10 388
22	10 689	11 035	11 277	10 800	10 563	11 849	11 495	12 026	11 854	10 598	11 670
23	11 239	11 113	11 662	10 602	11 945	10 603	10 711	11 322	11 967	10 745	11 947
24	11 526	10 127	11 058	11 146	11 356	11 065	11 984	12 038	11 011	11 103	11 442
25	10 654	11 723	11 329	11 632	10 509	11 537	11 194	11 332	11 472	11 324	11 150
$\sum_{\mu=1}^{25} Y$	279 126	278 333	280 412	282 169	280 060	283 558	280 847	282 555	284 681	281 242	283 417

Totalsumme = 3 096 400, Mittel 1908 – 1928 = 1023,60

Berechnung der Fourier-Amplituden h, welche als Ordinaten des Spektrums dienen.

Welle μ	a_μ^2	b_μ^2	$a_\mu^2+b_\mu^2$	$h_\mu=\sqrt{a_\mu^2+b_\mu^2}$	Welle μ	a_μ^2	b_μ^2	$a_\mu^2+b_\mu^2$	$h_\mu=\sqrt{a_\mu^2+b_\mu^2}$
1	1062.8	16.0	1078.8	32.8	14	29.2	196.0	225.2	15.0
2	33.6	148.8	182.4	13.5	15	19.4	17.6	37.0	6.1
3	151.3	246.5	397.8	19.9	16	1592.0	841.0	2433.0	49.3
4	635.0	1536.6	2171.6	46.6	17	353.4	2116.0	2469.4	49.7
5	201.6	185.0	386.6	19.7	18	60.8	396.0	456.8	21.4
6	269.0	171.6	440.6	21.0	19	27.0	2.0	29.0	5.4
7	65.6	416.2	481.8	22.0	20	784.0	1011.2	1795.2	42.4
8	0.1	242.4	242.5	15.6	21	1.2	132.3	133.5	11.6
9	22.1	32.5	54.6	7.4	22	645.2	858.5	1503.7	38.8
10	292.4	2470.1	2762.5	52.6	23	299.3	75.7	375.0	19.4
11	585.6	31.4	617.0	24.8	24	800.9	529.0	1329.9	36.5
12	72.3	408.0	480.3	21.9	25	2.6	0.8	3.4	1.8
13	795.2	1089.0	1884.2	43.4					

Berechnung der Komponenten $a_\mu = \frac{2}{121}\sum_{i=0}^{10} Y_i \cdot \cos\frac{2\pi}{11} i = \frac{2}{121}\sum_{i=0}^{10} Y_i \cdot \cos i x$ der Fourier-Amplituden, welche als Ordinaten des Spektrums dienen.

Welle μ	Y_0 · cos 0°	Y_1 · cos x	Y_2 · cos 2x	Y_3 · cos 3x	Y_4 · cos 4x	Y_5 · cos 5x	Y_6 · cos 6x	Y_7 · cos 7x	Y_8 · cos 8x	Y_9 · cos 9x	Y_{10} · cos 10x	$\frac{121}{2}\cdot a_\mu$	a_μ
	+	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+		
1	11458	10025	4429	1650	7366	10259	10740	7128	1544	4715	10031	+1971	+32.6
2	11096	9857	4928	1508	7229	10509	10672	7398	1751	4673	8865	+ 353	+ 5.8
3	11053	9433	4931	1497	7328	10468	10878	7181	1699	4662	9717	+ 744	+12.3
4	10835	9140	4666	1801	7276	11378	11071	6955	1615	4221	9709	−1524	− 25.2
5	10417	8720	4758	1536	7756	11354	10323	7399	1559	4945	10227	− 861	− 14.2
6	10912	9364	4701	1525	8148	10867	10859	7240	1570	4594	9646	− 991	− 16.4
7	10898	9965	4800	1604	7160	11587	9887	7555	1596	4294	9924	+ 493	+ 8.1
8	11189	9410	4499	1566	7148	10933	11552	7349	1481	4808	10102	− 20	− 0.3
9	11039	9736	4775	1624	6909	10832	11298	7679	1520	4559	9467	− 286	− 4.7
10	10715	8618	4445	1593	7266	10718	10802	7751	1706	4685	10338	−1036	− 17.1
11	10683	9484	4384	1632	7764	11191	10582	7074	1683	4991	8913	−1467	− 24.2
12	10627	9369	4420	1692	7159	10866	10456	6928	1714	4892	10023	+ 515	+ 8.5
13	11963	8947	4304	1524	7341	11674	10859	7608	1667	4698	9053	−1708	− 28.2
14	11842	8803	4925	1626	7299	11222	10566	6966	1594	4767	9265	+ 327	+ 5.4
15	11310	9414	4445	1593	7483	11344	10288	7680	1528	4701	9777	− 269	− 4.4
16	11942	9984	4587	1546	6878	10150	10600	7532	1661	4757	9510	+2413	+ 39.9
17	11071	9504	4637	1836	7744	10045	11030	7358	1588	4434	8815	−1140	− 18.8
18	11352	9704	4939	1595	7405	10676	10649	7108	1691	4391	9207	+ 471	+ 7.8
19	12442	9463	4657	1601	6769	11108	11039	7982	1440	4611	9082	+ 316	+ 5.2
20	10437	8854	4778	1537	7477	10678	11318	7376	1652	5189	9085	−1696	− 28.0
21	11731	9282	4553	1707	7469	10867	10339	7226	1591	4963	8736	+ 65	+ 1.1
22	10689	9280	4680	1534	6919	11363	11024	7877	1683	4398	9815	−1538	− 25.4
23	11239	9346	4840	1506	7824	10168	10272	7416	1699	4459	10047	+1047	+ 17.3
24	11526	8517	4589	1583	7438	10611	11493	7885	1564	4608	9623	−1711	− 28.3
25	10654	9859	4701	1652	6883	11064	10735	7423	1629	4700	9377	− 94	− 1.6
Σ	279126	234078	116371	40068	183439	271932	269332	185074	40425	116715	238354	−5626	− 92.8

Berechnung der Komponenten $b_\mu = \frac{2}{121}\sum_{i=0}^{10} Y_i \cdot \sin\frac{2\pi}{11} i = \frac{2}{121}\sum_{i=0}^{10} Y_i \cdot \sin i x$ der Fourier-Amplituden, welche als Ordinaten des Spektrums dienen.

Welle μ	Y_0 · sin 0°	Y_1 · sin x	Y_2 · sin 2x	Y_3 · sin 3x	Y_4 · sin 4x	Y_5 · sin 5x	Y_6 · sin 6x	Y_7 · sin 7x	Y_8 · sin 8x	Y_9 · sin 9x	Y_{10} · sin 10x	$\frac{121}{2}\cdot b_\mu$	b_μ
	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−		
1	0	6449	9712	11502	8502	3017	3158	8227	10764	10339	6453	+ 241	+ 4.0
2	0	6341	10806	10511	8344	3090	3138	8538	12206	10248	5703	− 741	−12.2
3	0	6068	10812	10440	8458	3078	3199	8289	11842	10222	6251	− 947	− 15.7
4	0	5880	10232	12558	8398	3346	3255	8027	11260	9256	6246	+2370	+ 39.2
5	0	5609	10432	10707	8952	3339	3036	8541	10865	10843	6579	− 825	− 13.6
6	0	6024	10308	10631	9404	3196	3193	8357	10945	10073	6205	+ 790	+ 13.1
7	0	6410	10526	11185	8264	3407	2907	8720	11127	9417	6384	+ 1237	+ 20.4
8	0	6053	9866	10919	8250	3215	3397	8482	10326	10543	6498	− 943	−15.6
9	0	6263	10470	11322	7974	3185	3322	8863	10600	9997	6090	+ 342	+ 5.7
10	0	5548	9747	11107	8386	3152	3176	8947	11896	10273	6650	−3006	− 49.7
11	0	6101	9612	11380	8962	3291	3112	8165	11731	10944	5734	− 340	− 5.6
12	0	6027	9692	11800	8263	3195	3076	7996	11952	10727	6448	−1221	− 20.2
13	0	5755	9439	10629	8472	3433	3193	8781	11626	10302	5824	−1998	− 33.0
14	0	5663	10799	11336	8425	3300	3107	8040	11116	10452	5960	+ 848	+ 14.0
15	0	6056	9747	11107	8627	3336	3025	8865	10651	10309	6290	− 257	− 4.2
16	0	6423	10057	10779	7939	2985	3117	8693	11578	10430	6118	−1753	− 29.0
17	0	6114	10167	12804	8938	2954	3248	8492	11068	9722	5671	+2780	+ 46.0
18	0	6243	10831	11120	8547	3139	3131	8204	11788	9630	5923	+1204	+ 19.9
19	0	6087	10211	11160	7813	3266	3246	9213	10041	10112	5842	+ 83	+ 1.4
20	0	5696	10477	10715	8630	3140	3328	8513	11520	11379	5844	−1926	− 31.8
21	0	5971	9983	11900	8621	3196	3040	8340	11092	10882	5620	+ 697	+ 11.5
22	0	5970	10262	10692	7986	3341	3242	9092	11735	9644	6313	−1775	− 29.3
23	0	6012	10612	10496	9030	2990	3021	8559	11847	9778	6463	− 528	− 8.7
24	0	5479	10063	11035	8585	3120	3379	9101	10901	10104	6190	−1393	− 23.0
25	0	6342	10309	11516	7945	3253	3157	8567	11357	10305	6032	− 53	− 0.9
Σ	0	150580	255172	279351	211725	79964	79198	213612	281834	255931	153331	−7114	−117.6

Ausschaltung der einjährigen Periode, der säkülaren Welle, sowie der Wellen p_6 bis p_{30} aus den Werten der Vierteljahresmittel.

mQ_r^* = Mittlere Abflussmenge während eines bestimmten Vierteljahres r (Vierteljahresmittel)

mq^* = Vierteljahresmittel nach Ausschaltung der einjährigen Periode.

$Q_r' + \Sigma y_{(6 \div 30)}$ = Summe der mittleren Ausschläge der säkülaren Welle, sowie der Wellen p_6 bis p_{30} während eines bestimmten Vierteljahres.

$d_5 = mq^* - [Q_r' + \Sigma y_{(6 \div 30)}]$ = Vierteljahresmittel nach Ausschaltung der einjährigen Periode der säkülaren Welle, sowie der Wellen p_6 bis p_{30}.

Zeit	mQ_r^*	mq^*	$Q_r' + \Sigma y_{(6-30)}$	d_5	Zeit	mQ_r^*	mq^*	$Q_r' + \Sigma y_{(6-30)}$	d_5	Zeit	mQ_r^*	mq^*	$Q_r' + \Sigma y_{(6-30)}$	d_5	Zeit	mQ_r^*	mq^*	$Q_r' + \Sigma y_{(6-30)}$	d_5
					1900,125	890	1220	947	+273	1915,125	793	1123	1175	− 52	1930,125	595	925	1089	−164
					,375	1202	978	933	+ 45	,375	1546	1322	1183	+139	,375	1414	1190	1092	+ 98
					,625	1137	830	924	− 94	,625	1362	1055	1188	−133	,625	1494	1187	1092	+ 95
					,875	631	832	919	− 87	,875	870	1071	1189	−118	,875	1327	1528	1088	+440
					1901,125	520	850	911	− 61	1916,125	917	1247	1188	+ 59	1931,125	1024	1354	1082	+272
					,375	1515	1291	931	+360	,375	1457	1233	1182	+ 51	,375	1526	1302	1073	+229
					,625	1404	1097	943	+154	,625	1546	1239	1171	+ 68	,625	1710	1403	1061	+342
					,875	757	958	958	0	,875	1091	1292	1158	+134		727	928	1047	−119
					1902,125	713	1043	975	+ 68	1917,125	759	1089	1141	− 52	1932,125	620	950	1031	− 81
					,375	1450	1226	993	+233	,375	1378	1146	1123	+ 23	,375	1166	942	1013	− 71
					,625	1305	998	1012	− 14	,625	1378	1071	1103	− 32	,625	1428	1121	994	+127
					,875	730	931	1029	− 98	,875	969	1170	1078	+ 92	,875	753	954	977	− 23
1888,125	626	956	987	− 31	1903,125	717	1047	1042	+ 5	1918,125	622	952	1054	−102	1933,125	560	890	962	− 72
,375	1506	1282	1014	+268	,375	1051	827	1054	−227	,375	964	740	1029	−289	,375	1155	931	952	− 21
,625	1748	1441	1039	+402	,625	1393	1086	1061	+ 25	,625	1193	886	1005	−119	,625	1236	929	943	− 14
,875	1049	1250	1062	+188	,875	812	1013	1062	− 49	,875	888	1089	982	+107	,875	697	898	939	− 41
1889,125	510	840	1080	−240	1904,125	727	1057	1058	− 1	1919,125	945	1275	963	+312	1934,125	548	988	940	− 62
,375	1396	1172	1097	+ 75	,375	1568	1344	1051	+293	,375	1481	1257	947	+310	,375	760	536	949	−413
,625	1299	992	1110	− 118	,625	967	667	1042	−375	,625	1187	880	934	− 54	,625	1220	913	961	− 48
,875	882	1083	1115	− 32	,875	605	806	1031	−225	,875	822	1023	924	+ 99	,875	698	899	976	− 77
1890,125	556	886	1113	− 227	1905,125	537	867	1016	−149	1920,125	1008	1338	917	+421	1935,125	854	1184	999	+185
,375	914	690	1106	− 416	,375	1427	1203	1000	+203	,375	1320	1056	916	+140	,375	1576	1352	1023	+329
,625	1646	1339	1094	+ 245	,625	1452	1145	983	+162	,625	1296	989	919	+ 70	,625	1202	895	1049	−154
,875	879	1080	1071	+ 9	,875	1069	1270	968	+302	,875	536	737	924	−187	,875	1174	1375	1077	+298
1891,125	413	743	1040	− 297	1906,125	760	1090	956	+134	1921,125	398	724	932	− 208	1936,125	1112	1442	1106	+336
,375	1254	1030	1009	+ 21	,375	1407	1183	948	+235	,375	729	505	943	− 438	,375	1281	1057	1131	− 74
,625	1485	1178	977	+ 201	,625	1226	919	943	− 24	,625	785	478	957	− 479	,625	1766	1459	1158	+301
,875	794	995	942	+ 53	,875	468	669	940	−271	,875	514	715	976	− 261	,875	991	1192	1184	+ 8
1892,125	873	1203	907	+296	1907,125	625	955	943	+ 12	1922,125	847	1177	995	+182	1937,125	998	1328	1204	+124
,375	1247	1043	872	+171	,375	1535	1311	950	+361	,375	1465	1441	1015	+426	,375	1630	1412	1219	+193
,625	1252	945	848	+105	,625	1242	935	960	− 25	,625	1586	1279	1034	+245	,625	1346	1039	1229	−190
,875	847	1048	813	+235	,875	557	758	974	−216	,875	1109	1310	1053	+257	,875	770	971	1235	−264
1893,125	620	950	794	+156	1908,125	583	913	989	− 76	1923,125	939	1269	1068	+201	1938,125	744	1074	1236	−162
,375	838	614	782	−168	,375	1405	1181	1008	+173	,375	1306	1082	1081	+ 1	,375	1038	814	1234	−420
,625	919	612	777	−165	,625	1253	946	1027	− 81	,625	1067	760	1091	−331	,625	1438	1131	1227	− 96
,875	638	839	780	+ 59	,875	520	721	1045	−324	,875	1078	1279	1099	+180	,875	607	808	1218	−410
1894,125	410	740	793	− 53	1909,125	412	742	1062	−320	1924,125	723	1053	1104	− 51	1939,125	690	1020	1207	−187
,375	945	721	812	− 91	,375	984	760	1077	−317	,375	1729	1505	1106	+399	,375	1505	1281	1194	+ 87
,625	1203	896	835	+ 61	,625	1360	1053	1091	− 38	,625	1535	1228	1105	+123	,625	1569	1262	1181	+ 81
,875	698	899	867	+ 32	,875	825	1026	1102	− 76	,875	717	918	1101	−183	,875	1594	1795	1169	+626
1895,125	496	826	892	− 66	1910,125	1125	1455	1109	+346	1925,125	442	772	1094	−322	1940,125	887	1217	1158	+ 59
,375	1276	1052	931	+121	,375	1572	1348	1112	+236	,375	969	745	1085	−340	,375	1363	1139	1150	− 11
,625	918	611	969	−358	,625	1959	1652	1113	+539	,625	1058	751	1075	−324	,625	1743	1436	1144	+292
,875	556	757	1009	−252	,875	1100	1301	1112	+189	,875	788	989	1063	− 74	,875	1152	1353	1140	+213
1896,125	785	1115	1049	+ 66	1911,125	702	1032	1109	− 77	1926,125	941	1271	1051	+220	1941,125	916	1246	1139	+107
,375	1466	1242	1081	+161	,375	1182	958	1106	−148	,375	1457	1233	1040	+193	,375	1277	1053	1140	− 87
,625	1715	1408	1113	+295	,625	914	607	1103	−496	,625	1536	1229	1038	+199	,625	1331	1024	1143	−119
,875	1111	1312	1137	+175	,875	667	868	1099	−231	,875	712	913	1023	−110	,875	785	986	1145	−159
1897,125	947	1277	1156	+121	1912,125	786	1116	1095	+ 21	1927,125	743	1078	1017	+ 56	1942,125	708	1038	1147	−109
,375	1495	1271	1166	+105	,375	1306	1082	1092	− 10	,375	1639	1415	1014	+401	,375	1165	941	1149	−208
,625	1866	1559	1167	+392	,625	1520	1213	1090	+123	,625	1741	1435	1013	+422	,625	1025	718	1148	−430
,875	715	916	1161	−245	,875	906	1107	1092	+ 15	,875	902	1103	1014	+ 89	,875	724	925	1144	−219
1898,125	507	837	1148	−311	1913,125	742	1072	1096	− 24	1928,125	763	1093	1018	+ 75	1943,125	613	943	1137	−194
,375	1452	1228	1130	+ 98	,375	1161	937	1102	−165	,375	1132	908	1023	−115	375	1065	841	1125	−284
,625	1217	910	1105	−195	,625	1464	1157	1110	+ 47	,625	980	673	1031	−358	625	841	534	1107	−573
,875	671	872	1076	−204	,875	826	1027	1120	− 93	,875	989	1190	1039	+151	875	627	728	1086	−358
1899,125	812	1142	1049	+ 93	1914,125	1017	1347	1130	+217	1929,125	569	899	1050	−151	1944,125	598	928	1062	−134
,375	1239	1015	1020	− 5	,375	1603	1379	1142	+237	,375	1159	935	1062	−127	,375	1213	989	1034	− 45
,625	1102	795	992	−197	,625	1774	1467	1153	+314	,625	1080	693	1073	−380	,625	1138	831	1006	−175
,875	573	774	967	−193	,875	711	912	1165	−253	,875	630	831	1082	−251	,875	1424	1625	974	+651

Welle p_7, angenäherte Berechnung

Periodogrammkomponenten $a(x,q)$ und $b(x,q)$ für $q = 0, 7, 14, \ldots 126$ und Versuchswelle $p' = 7$ Jahre.

			$MQ_i \cdot \cos x_i$							$A(x,q) = \sum_{i=q}^{q+6} MQ_i \cos x_i$	$\sum A(x,q)_{\varrho^*}$	$a(x,q) = \frac{2}{7} A(x,q)$
i =			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6			
x_i =			0°	51,43°	102,86°	154,29°	205,71°	257,14°	308,57°			
$\cos x_i$ =			1,000	0,623	−0,223	−0,901	−0,901	−0,223	0,623			
ϱ^*	q	Jahre										
0	0	1808–14	954	585	− 206	− 860	− 1095	− 243	572	− 293	− 293	− 84
1	7	15–21	1120	875	− 307	− 851	− 777	− 206	699	+ 553	+ 260	+ 158
2	14	22–28	828	684	− 295	− 892	− 722	− 251	615	− 33	+ 227	− 9
3	21	29–35	980	603	− 299	− 626	− 925	− 193	558	+ 98	+ 325	+ 28
4	28	36–42	990	660	− 224	− 936	− 897	− 235	542	− 100	+ 225	− 29
5	35	43–49	1202	701	− 238	− 1089	− 987	− 197	623	+ 15	+ 240	+ 4
6	42	50–56	1128	718	− 252	− 1017	− 796	− 263	594	+ 112	+ 352	+ 32
7	49	57–63	707	473	− 200	− 1184	− 839	− 195	573	− 665	− 313	− 190
8	56	64–70	884	478	− 228	− 1164	− 933	− 218	523	− 658	− 971	− 188
9	63	71–77	886	637	− 218	− 697	− 906	− 277	711	+ 136	− 835	+ 39
10	70	78–84	1204	705	− 231	− 947	− 978	− 243	503	+ 13	− 822	+ 4
11	77	85–91	843	550	− 184	− 1113	− 923	− 223	617	− 433	− 1255	− 124
12	84	92–98	1061	470	− 182	− 733	− 1146	− 279	601	− 208	− 1463	− 59
13	91	99–05	933	601	− 234	− 948	− 897	− 216	699	− 62	− 1525	− 18
14	98	1906–12	965	617	− 210	− 806	− 1297	− 193	703	− 221	− 1746	− 63
15	105	13–19	1048	795	− 256	− 1130	− 1012	− 205	692	− 68	− 1814	− 19
16	112	20–26	1041	378	− 291	− 989	− 1061	− 182	725	− 379	− 2193	− 108
17	119	27–33	1260	601	− 188	− 1092	− 1126	− 222	569	− 198	− 2391	− 57
18	126	34–40	809	748	− 287	− 1069	− 863	− 300	802	− 160	− 2551	− 46
		41–43	1078	566	− 170							
Kontroll $\sum_{\varrho^*=0}^{18}$			18843	11879	−4530	−18143	−18180	−4341	11921	−2551		− 729 $= \frac{-2551}{3,5}$

			$MQ_i \cdot \sin x_i$							$B(x,q) = \sum_{i=q}^{q+6} MQ_i \cdot \sin x_i$	$\sum B(x,q)_{\varrho^*}$	$b(x,q) = \frac{2}{7} \cdot B(x,q)$
i =			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6			
x_i =			0°	51,43°	102,86°	154,29°	205,71°	257,14°	308,57°			
$\sin x_i$ =			0	0,782	0,975	0,434	− 0,434	− 0,975	− 0,782			
ϱ^*	q	Jahre										
0	0	1808–14	0	734	902	414	− 527	− 1061	− 718	− 256	− 256	− 73
1	7	15–21	0	1098	1341	410	− 374	− 900	− 877	+ 698	+ 442	+ 199
2	14	22–28	0	859	1292	430	− 348	− 1096	− 772	+ 365	+ 807	+ 104
3	21	29–35	0	757	1307	302	− 446	− 843	− 700	+ 377	+ 1184	+ 108
4	28	36–42	0	828	979	451	− 432	− 1030	− 680	+ 116	+ 1300	+ 33
5	35	43–49	0	881	1040	525	− 476	− 862	− 782	+ 326	+ 1626	+ 93
6	42	50–56	0	902	1102	490	− 384	− 1151	− 746	+ 213	+ 1839	+ 61
7	49	57–63	0	594	875	570	− 404	− 851	− 719	+ 65	+ 1904	+ 19
8	56	64–70	0	601	997	561	− 450	− 953	− 656	+ 100	+ 2004	+ 29
9	63	71–77	0	800	953	336	− 437	− 1209	− 893	− 450	+ 1554	− 129
10	70	78–84	0	884	1009	456	− 471	− 1064	− 631	+ 183	+ 1737	+ 52
11	77	85–91	0	691	806	536	− 444	− 976	− 775	− 162	+ 1575	− 46
12	84	92–98	0	590	796	353	− 552	− 1221	− 754	− 788	+ 787	− 225
13	91	99–05	0	755	1025	457	− 432	− 944	− 677	− 16	+ 771	− 5
14	98	1906–12	0	774	917	388	− 625	− 844	− 883	− 273	+ 498	− 78
15	105	13–19	0	998	1118	544	− 487	− 897	− 868	+ 408	+ 906	+ 117
16	112	20–26	0	474	1271	477	− 511	− 796	− 909	+ 6	+ 912	+ 2
17	119	27–33	0	755	821	526	− 543	− 970	− 715	− 126	+ 786	− 36
18	126	34–40	0	939	1257	515	− 416	− 1310	− 1006	− 21	+ 765	− 6
		41–43	0	710	742							
Kontroll $\sum_{\varrho^*=0}^{18}$			0	14914	19808	8741	− 8759	− 18978	− 14961	+ 765		+ 219 $= \frac{+765}{3,5}$

Welle p_5, erste angenäherte Berechnung

Periodogrammkomponenten $a(x,q)$ und $b(x,q)$ für $q = 0, 5, 10, \ldots 130$ und Versuchswelle $p' = 5$ Jahre.

			$MQ_i \cdot \cos x_i$					$A(x,q) = \sum_{i=q}^{q+4} MQ_i \cdot \cos x_i$	$\Sigma A(x,q)_{\varrho^*}$	$a(x,q) = \frac{2}{5} \cdot A(x,q)$
i =			$q+0$	$q+1$	$q+2$	$q+3$	$q+4$			
x_i =			$0°$	$72°$	$144°$	$216°$	$288°$			
$\cos x_i$ =			1,000	0.309	−0.809	−0.809	0.309			
ϱ^*	q	Jahre								
0	0	1808-1812	954	290	− 748	− 773	375	+ 98	+ 98	+ 39
1	5	13- 17	1088	284	− 906	− 1136	425	− 245	− 147	− 98
2	10	18- 22	945	266	− 747	− 908	256	− 188	− 335	− 75
3	15	23- 27	1098	409	− 801	− 648	347	+ 405	+ 70	+ 162
4	20	28- 32	987	303	− 783	− 1085	215	− 363	− 293	− 145
5	25	33- 37	1027	267	− 724	− 801	327	+ 96	− 197	+ 38
6	30	38- 42	1004	321	− 806	− 854	269	− 66	− 263	− 26
7	35	43- 47	1202	348	− 863	− 978	339	+ 48	− 215	+ 19
8	40	48- 52	884	309	− 913	− 933	349	− 304	− 519	− 122
9	45	53- 57	1129	273	− 955	− 772	218	− 107	− 626	− 43
10	50	58- 62	760	277	− 1063	− 753	270	− 509	− 1135	− 204
11	55	63- 67	920	273	− 621	− 828	399	+ 143	− 992	+ 57
12	60	68- 72	1036	302	− 679	− 717	316	+ 258	− 734	+ 103
13	65	73- 77	977	239	− 814	− 1003	353	− 248	− 982	− 99
14	70	78- 82	1204	349	− 837	− 850	335	+ 201	− 781	+ 80
15	75	83- 87	1091	249	− 682	− 714	256	+ 200	− 581	+ 80
16	80	88- 92	1235	316	− 810	− 802	328	+ 267	− 314	+ 107
17	85	93- 97	754	252	− 659	− 1029	387	− 295	− 609	− 118
18	90	98- 02	964	288	− 781	− 850	325	− 54	− 663	− 22
19	95	1903- 07	996	299	− 908	− 781	306	− 88	− 751	− 35
20	100	08- 12	940	277	− 1164	− 701	348	− 299	− 1050	− 120
21	105	13- 17	1048	394	− 928	− 1014	347	− 153	− 1203	− 61
22	110	18- 22	920	343	− 842	− 490	403	+ 334	− 869	+ 134
23	115	23- 27	1098	364	− 660	− 941	389	+ 250	− 619	+ 100
24	120	28- 32	965	260	− 981	− 1011	307	− 460	− 1079	− 184
25	125	33- 37	914	250	− 972	− 1043	367	− 484	− 1563	− 193
26	130	38- 42	958	415	− 1041	− 872	281	− 259	− 1822	− 103
Kontroll $\sum_{\varrho^*=0}^{26}$			27098	8217	−22688	−23287	8838	−1822		$-729 = \frac{-1822}{2,5}$

			$MQ_i \cdot \sin x_i$					$B(x,q) = \sum_{i=q}^{q+4} MQ_i \cdot \sin x_i$	$\Sigma B(x,q)_{\varrho^*}$	$b(x,q) = \frac{2}{5} \cdot B(x,q)$
i =			$q+0$	$q+1$	$q+2$	$q+3$	$q+4$			
x_i =			$0°$	$72°$	$144°$	$216°$	$288°$			
$\sin x_i$ =			0	0.951	0.588	−0.588	−0.951			
ϱ^*	q	Jahre								
0	0	1808-1812	0	893	544	− 562	− 1155	− 280	− 280	− 112
1	5	13- 17	0	873	659	− 826	− 1308	− 602	− 882	− 241
2	10	18- 22	0	820	543	− 660	− 787	− 84	− 966	− 34
3	15	23- 27	0	1260	582	− 471	− 1069	+ 302	− 664	+ 121
4	20	28- 32	0	932	569	− 789	− 661	+ 51	− 613	+ 20
5	25	33- 37	0	823	526	− 582	− 1007	− 240	− 853	− 96
6	30	38- 42	0	988	586	− 621	− 827	+ 126	− 727	+ 50
7	35	43- 47	0	1071	627	− 711	− 1042	− 55	− 782	− 22
8	40	48- 52	0	951	663	− 678	− 1075	− 139	− 921	− 56
9	45	53- 57	0	841	694	− 561	− 672	+ 302	− 619	+ 121
10	50	58- 62	0	853	773	− 547	− 830	+ 249	− 370	+ 100
11	55	63- 67	0	841	452	− 602	− 1229	− 538	− 908	− 215
12	60	68- 72	0	929	493	− 521	− 973	− 72	− 980	− 29
13	65	73- 77	0	736	592	− 729	− 1086	− 487	− 1467	− 195
14	70	78- 82	0	1076	609	− 618	− 1032	+ 35	− 1432	+ 14
15	75	83- 87	0	767	496	− 519	− 786	− 42	− 1474	− 17
16	80	88- 92	0	974	589	− 583	− 1009	− 29	− 1503	− 12
17	85	93- 97	0	776	479	− 748	− 1191	− 684	− 2187	− 273
18	90	98- 02	0	887	567	− 618	− 1000	− 164	− 2351	− 66
19	95	1903- 07	0	921	660	− 567	− 941	+ 73	− 2278	+ 29
20	100	08- 12	0	851	846	− 509	− 1074	+ 114	− 2164	+ 46
21	105	13- 17	0	1213	674	− 737	− 1068	+ 82	− 2082	+ 33
22	110	18- 22	0	1056	642	− 356	− 1240	+ 72	− 2010	+ 29
23	115	23- 27	0	1120	480	− 684	− 1198	− 282	− 2292	− 113
24	120	28- 32	0	800	742	− 735	− 946	− 169	− 2461	− 68
25	125	33- 37	0	769	706	− 757	− 1129	− 411	− 2872	− 164
26	130	38- 42	0	1278	756	− 632	− 864	+ 539	− 2333	+ 215
Kontroll $\sum_{\varrho^*=0}^{26}$			0	25300	16489	−16923	−27199	−2333		$-933 = \frac{-2333}{2,5}$

Welle p_{12}, angenäherte Berechnung

Periodogrammkomponenten a(x,q) und b(x,q) für q = 0, 12, 24, ... 120 und Versuchswelle p' = 12 Jahre

			MQi · cos xi											A(x,q) = $\sum_{i=q}^{q+11} MQ_i \cos x_i$	$\sum A(x,q)_{\varrho^*}$	a(x,q) = $\frac{2}{12} A(x,q)$
i =			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8	q+9	q+10	q+11			
xi =			0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°			
cos xi =			1,000	0,866	0,500	0,000	-0,500	-0,866	-1,000	-0,866	-0,500	0,000	+0,500	+0,866			
ϱ^*	q	Jahre															
0	0	1808-19	954	813	462	0	-608	-942	-918	-970	-702	0	472	746	-693	-693	-116
1	12	20-31	923	972	414	0	-662	-857	-801	-973	-494	0	484	1161	+167	-526	+ 28
2	24	32-43	695	889	432	0	-495	-917	-1004	-900	-498	0	435	1041	-322	-848	- 54
3	36	44-55	1126	924	604	0	-442	-866	-1128	-998	-565	0	442	1023	+120	-728	+ 20
4	48	56-67	954	612	380	0	-657	-806	-873	-797	-442	0	512	1119	+ 2	-726	+ 0
5	60	68-79	1036	846	420	0	-512	-846	-774	-871	-620	0	602	979	+260	-466	+ 43
6	72	80-91	1035	910	542	0	-404	-730	-883	-716	-618	0	500	858	+494	+ 28	+ 83
7	84	92-03	1061	653	408	0	-636	-1084	-964	-808	-482	0	526	863	-463	-435	- 77
8	96	1904-15	968	972	482	0	-470	-775	-1439	-750	-564	0	638	993	+ 55	-380	+ 9
9	108	16-27	1254	973	460	0	-520	-525	-1304	-951	-589	0	582	1091	+471	+ 91	+ 79
10	120	28-39	965	729	606	0	-497	-792	-809	-1040	-645	0	479	1167	+163	+254	+ 27
		40-43	1287	933	454	0											
Kontroll $\sum_{\varrho^*=0}^{10}$			10971	9293	5210	0	-5903	-9140	-10897	-9774	-6219	0	5672	11041	+254		+ 42 = $\frac{+254}{6}$

			MQi · sin xi											B(x,q) = $\sum_{i=q}^{q+11} MQ_i \sin x_i$	$\sum B(x,q)_{\varrho^*}$	b(x,q) = $\frac{2}{12} B(x,q)$
i =			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8	q+9	q+10	q+11			
xi =			0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°			
sin xi =			0,000	-0,500	0,866	1,000	+0,866	0,500	0,000	-0,500	-0,866	-1,000	-0,866	-0,500			
ϱ^*	q	Jahre															
0	0	1808-19	0	470	801	955	1052	544	0	-560	-1216	-1375	-818	-431	- 578	- 578	- 96
1	12	20-31	0	561	717	1098	1147	495	0	- 562	- 855	- 980	- 838	- 670	+ 113	- 465	+ 19
2	24	32-43	0	514	749	895	857	530	0	- 520	- 863	-1056	- 753	- 601	- 248	- 713	- 41
3	36	44-55	0	534	1047	1096	766	500	0	- 576	- 979	-1129	- 766	- 590	- 97	- 810	- 16
4	48	56-67	0	354	658	897	1138	466	0	- 460	- 766	- 768	- 886	- 646	- 13	- 823	- 2
5	60	68-79	0	488	727	886	886	488	0	- 503	-1074	-1142	-1043	- 566	- 853	-1676	- 142
6	72	80-91	0	526	940	1091	699	422	0	- 414	-1070	-1024	- 867	- 496	- 193	-1869	- 32
7	84	92-03	0	377	707	814	1102	626	0	- 466	- 836	-1051	- 911	- 498	- 136	-2005	- 23
8	96	1904-15	0	561	836	990	814	448	0	- 433	- 978	-1048	-1105	- 574	- 489	-2494	- 82
9	108	16-27	0	562	797	1110	902	303	0	- 549	-1020	- 816	-1007	- 630	- 348	-2842	- 58
10	120	28-39	0	421	1049	1250	862	457	0	- 608	-1116	-1187	- 830	- 672	- 366	-3208	- 61
		40-43	0	539	786	761											
Kontroll $\sum_{\varrho^*=0}^{10}$			0	5368	9028	11082	10225	5279	0	-5643	-10773	11576	-9824	-6374	-3208		- 534 = $\frac{-3208}{6}$

Ergebnis des ersten Berechnungsganges

Ausschläge $y^{(5)}$, $y^{(7)}$, $y^{(12)}$ und $y^{(30)}$ der Periodizitäten p_5, p_7, p_{12} und p_{30}, sowie Werte Q' der säkularen Ganglinie p_{120} für jede Jahresmitte der Jahre 1808–1943

Periodizität			p_5	p_7	p_{12}	p_{30}	p_{120}	Periodizität			p_5	p_7	p_{12}	p_{30}	p_{120}
t	Jahre	MQ beob. m^3/sec	$y^{(5)}$ nach Gl. 58 m^3/sec	$y^{(7)}$ nach Gl. 57 m^3/sec	$y^{(12)}$ nach Gl. 59 m^3/sec	$y^{(30)}$ nach Gl. 60 m^3/sec	Q' nach Tafel XIX m^3/sec	t	Jahre	MQ beob. m^3/sec	$y^{(5)}$ nach Gl. 58 m^3/sec	$y^{(7)}$ nach Gl. 57 m^3/sec	$y^{(12)}$ nach Gl. 59 m^3/sec	$y^{(30)}$ nach Gl. 60 m^3/sec	Q' nach Tafel XIX m^3/sec
1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1808	954	+ 85	+ 84	− 80	− 13	1048	**70**	78	1204	+ 13	− 79	+ 66	+ 53	996
1	9	939	− 107	+ 69	− 68	− 6	1047	71	9	1131	− 47	− 80	+ 23	+ 47	996
2	**1810**	925	− 131	+ 5	− 39	+ 2	1046	72	**1880**	1035	− 48	− 27	− 14	+ 39	997
3	1	955	+ 51	− 61	− 0	+ 10	1046	73	1	1051	+ 12	+ 44	− 47	+ 29	997
4	2	1215	+ 153	− 87	+ 39	+ 17	1045	74	2	1085	+ 57	+ 86	− 67	+ 19	998
5	3	1088	+ 15	− 53	+ 68	+ 24	1044	75	3	1091	+ 29	+ 69	− 69	+ 7	998
6	4	918	− 147	+ 16	+ 83	+ 30	1043	76	4	807	− 35	+ 5	− 54	− 4	999
7	15	1120	− 77	+ 75	+ 78	+ 35	1042	77	85	843	− 55	− 61	− 26	− 14	999
8	6	1404	+ 114	+ 82	+ 54	+ 38	1041	78	6	883	− 5	− 87	+ 6	− 23	1000
9	7	1375	+ 125	+ 34	+ 20	+ 40	1040	79	7	827	+ 52	− 53	+ 35	− 30	1000
10	8	945	− 60	− 37	− 19	+ 40	1039	**80**	8	1235	+ 42	+ 16	+ 54	− 37	1001
11	9	862	− 151	− 84	− 51	+ 38	1038	81	9	1024	− 21	+ 75	+ 59	− 41	1001
12	**1820**	923	− 4	− 73	− 68	+ 35	1038	82	**1890**	1001	− 57	+ 70	+ 48	− 43	1002
13	1	1122	+ 150	− 13	− 71	+ 29	1037	83	1	991	− 22	+ 24	+ 27	− 43	1002
14	2	828	+ 68	+ 56	− 57	+ 23	1036	84	2	1061	+ 42	− 17	0	− 42	1003
15	3	1098	− 6	+ 87	− 31	+ 14	1035	85	3	754	+ 11	− 73	− 25	− 38	1003
16	4	1325	+ 51	+ 59	− 0	+ 5	1034	86	4	816	− 58	− 46	− 44	− 34	1004
17	25	990	+ 43	− 9	+ 26	− 5	1033	87	95	814	− 41	+ 18	− 50	− 27	1004
18	6	801	− 20	− 71	+ 42	− 15	1032	88	6	1272	+ 36	+ 67	− 44	− 20	1005
19	7	1124	− 57	− 85	+ 48	− 25	1031	89	7	1252	+ 60	+ 63	− 27	− 12	1005
20	8	987	− 22	− 41	+ 42	− 34	1030	**90**	8	964	− 5	+ 7	− 5	− 4	1006
21	9	980	+ 41	+ 31	+ 28	− 42	1029	91	9	933	− 62	− 54	+ 18	+ 5	1006
22	**1830**	968	+ 52	+ 82	+ 10	− 48	1028	92	**1900**	965	− 28	− 72	+ 35	+ 12	1007
23	1	1341	− 3	+ 77	− 9	− 53	1027	93	1	1051	+ 48	− 31	+ 44	+ 19	1008
24	2	695	− 55	+ 20	− 24	− 55	1026	94	2	1052	+ 53	+ 34	+ 41	+ 25	1009
25	3	1027	− 37	− 50	− 32	− 55	1026	95	3	996	− 20	+ 72	+ 28	+ 30	1011
26	4	865	+ 28	− 86	− 34	− 52	1025	96	4	968	− 63	+ 52	+ 8	+ 33	1013
27	35	895	+ 57	− 64	− 28	− 46	1024	97	05	1122	− 14	− 10	− 13	+ 35	1014
28	6	990	+ 14	+ 2	− 16	− 38	1023	98	6	965	+ 56	− 64	− 31	+ 36	1016
29	7	1059	− 47	+ 66	− 1	− 28	1022	99	7	990	+ 43	− 66	− 41	+ 35	1019
30	8	1004	− 48	+ 86	+ 14	− 17	1021	**100**	8	940	− 34	− 15	− 41	+ 32	1023
31	9	1039	+ 12	+ 47	+ 25	− 4	1020	101	9	895	− 61	+ 48	− 31	+ 28	1027
32	**1840**	996	+ 57	− 24	+ 30	+ 9	1019	102	**1910**	1439	+ 2	+ 73	− 13	+ 23	1031
33	1	1056	+ 30	− 79	+ 29	+ 23	1018	103	1	866	+ 62	+ 38	+ 10	+ 17	1036
34	2	870	− 35	− 80	+ 21	+ 35	1017	104	2	1129	+ 30	− 27	+ 31	+ 31	1042
35	3	1202	− 55	− 27	+ 8	+ 46	1016	105	3	1048	− 46	− 70	+ 45	+ 36	1048
36	4	1126	− 5	+ 44	− 7	+ 56	1016	106	4	1276	− 54	− 57	+ 48	+ 38	1054
37	45	1067	+ 52	+ 85	− 20	+ 63	1015	107	15	1147	+ 17	+ 2	+ 40	+ 37	1059
38	6	1209	+ 43	+ 69	− 28	+ 68	1014	108	6	1254	+ 63	+ 60	+ 20	+ 34	1063
39	7	1096	− 20	+ 5	− 30	+ 69	1013	109	7	1123	+ 16	+ 69	− 6	+ 27	1066
40	8	884	− 57	− 61	− 26	+ 67	1012	**110**	8	920	− 55	+ 23	− 34	+ 19	1069
41	9	1000	− 22	− 87	− 15	+ 62	1011	111	9	1110	− 45	− 42	− 56	+ 8	1071
42	**1850**	1128	+ 42	− 53	− 1	+ 54	1010	112	**1920**	1041	+ 31	− 73	− 66	− 4	1072
43	1	1153	+ 52	+ 16	+ 15	+ 43	1009	113	1	606	+ 61	− 45	− 59	− 16	1073
44	2	1130	− 3	+ 75	+ 27	+ 30	1008	114	2	1304	+ 1	+ 19	− 36	− 27	1074
45	3	1129	− 55	+ 82	+ 35	+ 17	1007	115	3	1088	− 61	+ 68	+ 1	− 36	1075
46	4	884	− 36	+ 34	+ 34	+ 2	1006	116	4	1178	− 33	+ 62	+ 43	− 43	1075
47	55	1181	+ 28	− 37	+ 25	− 13	1006	117	25	846	+ 44	+ 6	+ 78	− 47	1075
48	6	954	+ 57	− 84	+ 10	− 28	1005	118	6	1163	+ 56	− 55	+ 95	− 47	1075
49	7	707	+ 14	− 73	− 9	− 42	1004	119	7	1260	− 15	− 71	+ 86	− 44	1075
50	8	760	− 47	− 13	− 28	− 53	1003	**120**	8	965	− 63	− 30	+ 65	− 36	1074
51	9	897	− 48	+ 56	− 43	− 62	1002	121	9	842	− 19	+ 35	+ 8	− 25	1074
52	**1860**	1314	+ 12	+ 87	− 50	− 67	1001	122	**1930**	1212	+ 54	+ 72	− 43	− 13	1073
53	1	931	+ 57	+ 59	− 46	− 70	1000	123	1	1250	+ 47	+ 51	− 85	+ 2	1072
54	2	873	+ 29	− 9	− 30	− 70	1000	124	2	995	− 29	− 11	−105	+ 17	1071
55	3	920	− 35	− 71	− 2	− 67	999	125	3	914	− 62	− 65	−100	+ 32	1070
56	4	884	− 55	− 85	+ 31	− 60	998	126	4	809	− 3	− 66	− 68	+ 44	1068
57	65	768	− 5	− 40	+ 58	− 51	997	127	35	1201	+ 60	− 14	− 19	+ 54	1067
58	6	1023	+ 52	+ 31	+ 74	− 39	997	128	6	1289	+ 35	+ 49	+ 35	+ 59	1065
59	7	1292	+ 43	+ 82	+ 73	− 27	996	129	7	1187	− 42	+ 73	+ 78	+ 59	1064
60	8	1036	− 20	+ 77	+ 55	− 13	996	**130**	8	958	− 57	+ 37	+102	+ 56	1062
61	9	977	− 57	+ 20	+ 22	+ 2	996	131	9	1344	+ 12	− 28	+100	+ 47	1060
62	**1870**	839	− 22	− 50	− 17	+ 16	996	132	**1940**	1287	+ 63	− 71	+ 72	+ 35	1058
63	1	886	+ 42	− 86	− 53	+ 28	996	133	1	1078	+ 21	− 56	+ 27	+ 19	1056
64	2	1023	+ 52	− 64	− 76	+ 39	995	134	2	908	− 52	+ 4	− 23	+ 1	1054
65	3	977	− 4	+ 2	− 84	+ 48	995	135	3	761	− 48	+ 61	− 65	− 18	1052
66	4	774	− 55	+ 66	− 71	+ 55	995	136	4	1092					
67	75	1006	− 36	+ 86	− 42	+ 58	996	137	45						
68	6	1240	+ 28	+ 47	− 3	+ 59	996	138	6						
69	7	1142	+ 57	− 24	+ 36	+ 58	996	139	7						

Welle p_6, definitive Berechnung

Periodogrammkomponenten $a(x,q)$ und $b(x,q)$ für $q = 0, 6, \ldots 126$ und Versuchswelle $p' = 6$ Jahre

			$d_i \cdot \cos x_i$						$A(x,q) = \sum_{i=q}^{q+5} d_i \cos x_i$	$\sum A(x,q)_{\varsigma^*}$	$a(x,q) = \frac{2}{6} A(x,q)$
i =			$q+0$	$q+1$	$q+2$	$q+3$	$q+4$	$q+5$			
x_i =			$0°$	$60°$	$120°$	$180°$	$240°$	$300°$			
$\cos x_i$ =			$+1{,}000$	$+0{,}500$	$-0{,}500$	$-1{,}000$	$-0{,}500$	$+0{,}500$			
ς^*	q	Jahre									
0	0	1808–1813	− 263	− 35	− 3	+ 81	− 52	+ 41	− 231	− 231	− 77
1	6	14 – 19	+ 6	+ 40	− 84	− 176	− 2	+ 30	− 186	− 416	− 62
2	12	20 – 25	− 38	− 26	+ 166	+ 18	− 91	− 39	− 9	− 425	− 3
3	18	26 – 31	− 140	+ 118	− 10	+ 121	+ 97	+ 120	+ 306	− 120	+ 102
4	24	32 – 37	− 296	+ 44	+ 51	+ 122	+ 25	+ 9	− 46	− 165	− 15
5	30	38 – 43	− 55	− 20	+ 28	− 87	+ 16	+ 134	+ 16	− 149	+ 5
6	36	44 – 49	+ 71	− 143	− 42	− 98	+ 5	+ 49	− 57	− 206	− 19
7	42	50 – 55	+ 129	+ 38	− 25	− 95	+ 60	+ 92	+ 199	− 7	+ 66
8	48	56 – 61	− 24	− 119	+ 92	+ 113	− 107	− 93	− 138	− 145	− 46
9	54	62 – 67	− 147	+ 14	− 13	+ 184	+ 29	+ 86	+ 152	+ 7	+ 51
10	60	68 – 73	− 17	+ 9	+ 43	+ 66	− 20	− 8	+ 73	+ 79	+ 24
11	66	74 – 79	− 232	− 20	− 85	− 113	− 137	+ 131	− 456	− 377	− 152
12	72	80 – 85	+ 113	− 1	+ 28	+ 5	+ 81	− 20	+ 206	− 171	+ 69
13	78	86 – 91	− 25	− 86	− 88	+ 31	+ 7	− 7	− 168	− 338	− 56
14	84	92 – 97	+ 33	− 94	+ 42	+ 167	− 82	+ 62	+ 129	− 210	+ 43
15	90	98 – 03	− 44	+ 22	− 29	− 26	+ 22	− 34	− 89	− 299	− 30
16	96	1904 – 09	− 34	+ 66	+ 22	+ 6	+ 17	− 60	+ 17	− 282	+ 6
17	102	10 – 15	+ 333	− 135	− 42	− 116	− 167	+ 35	− 92	− 374	− 31
18	108	16 – 21	+ 68	− 14	+ 59	− 126	− 6	− 242	− 261	− 634	− 87
19	114	22 – 27	+ 210	+ 8	− 37	+ 309	− 44	+ 136	+ 582	− 52	+ 194
20	120	28 – 33	− 16	− 124	− 7	− 80	+ 18	− 15	− 223	− 275	− 74
21	126	34 – 39	− 190	+ 44	− 70	− 92	+ 42	+ 150	− 116	− 391	− 39

Kontroll Σ $-130 = \frac{-391}{3}$

			$d_i \cdot \sin x_i$						$B(x,q) = \sum_{i=q}^{q+5} d_i \sin x_i$	$\sum B(x,q)_{\varsigma^*}$	$b(x,q) = \frac{2}{6} B(x,q)$
i =			$q+0$	$q+1$	$q+2$	$q+3$	$q+4$	$q+5$			
x_i =			$0°$	$60°$	$120°$	$180°$	$240°$	$300°$			
$\sin x_i$ =			$0{,}000$	$+0{,}866$	$+0{,}866$	$0{,}000$	$-0{,}866$	$-0{,}866$			
ς^*	q	Jahre									
0	0	1808–1813	0	− 61	+ 4	0	− 90	− 71	− 218	− 218	− 73
1	6	14 – 19	0	+ 69	+ 145	0	− 3	− 51	+ 160	− 58	+ 53
2	12	20 – 25	0	− 45	− 288	0	− 157	+ 67	− 423	− 481	− 141
3	18	26 – 31	0	+ 204	+ 17	0	+ 168	− 208	+ 181	− 300	+ 60
4	24	32 – 37	0	+ 76	− 88	0	+ 42	− 16	+ 14	− 286	+ 5
5	30	38 – 43	0	− 35	− 49	0	+ 28	− 232	− 288	− 574	− 96
6	36	44 – 49	0	− 74	+ 72	0	+ 9	− 85	− 78	− 652	− 26
7	42	50 – 55	0	+ 66	+ 43	0	+ 104	− 159	+ 54	− 598	+ 18
8	48	56 – 61	0	− 206	− 159	0	− 185	+ 160	− 390	− 988	− 130
9	54	62 – 67	0	+ 23	+ 23	0	+ 49	− 148	− 53	− 1041	− 18
10	60	68 – 73	0	+ 16	− 74	0	− 35	+ 14	− 79	− 1120	− 26
11	66	74 – 79	0	− 35	+ 146	0	− 237	− 227	− 353	− 1473	− 118
12	72	80 – 85	0	− 2	− 49	0	+ 140	+ 35	+ 124	− 1349	+ 41
13	78	86 – 91	0	− 149	+ 152	0	+ 12	+ 11	+ 26	− 1323	+ 9
14	84	92 – 97	0	− 162	− 73	0	− 142	− 107	− 484	− 1807	− 161
15	90	98 – 03	0	+ 37	+ 50	0	+ 38	+ 58	+ 183	− 1624	+ 61
16	96	1904 – 09	0	+ 114	− 37	0	+ 29	+ 103	+ 209	− 1415	+ 70
17	102	10 – 15	0	− 234	+ 73	0	− 288	− 60	− 509	− 1924	− 170
18	108	16 – 21	0	− 24	− 101	0	− 10	+ 418	+ 283	− 1641	+ 94
19	114	22 – 27	0	+ 14	+ 64	0	− 75	− 235	− 232	− 1873	− 77
20	120	28 – 33	0	− 215	+ 11	0	+ 31	+ 25	− 148	− 2021	− 49
21	126	34 – 39	0	+ 76	+ 121	0	+ 73	− 260	+ 10	− 2011	+ 3

Kontroll Σ $-671 = \frac{-2011}{3}$

Bemerkung: $d_i = MQ_i - (Q_i' + y_i^{(5)} + y_i^{(7)})$ nach Tafel VIII

Welle pg, angenäherte Berechnung

Periodogrammkomponenten a(x,q) und b(x,q) für q = 0,9,... 126 und Versuchswelle p' = 9 Jahre

			$d_i \cdot \cos x_i$									$A(x,q)=\sum_{i=q}^{q+8} d_i \cos x_i$	$\Sigma A(x,q)_{\varphi^*}$	$a(x,q)=\frac{2}{9}\cdot A(x,q)$
i =			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8			
x i =			0°	40°	80°	120°	160°	200°	240°	280°	320°			
cos x i =			+1,000	+0,766	+0,174	-0,500	-0,940	-0,940	-0,500	+0,174	+0,766			
φ^*	q	Jahre												
0	0	1808-16	- 98	- 84	- 15	+ 15	-205	- 27	+112	- 13	+174	- 141	- 141	- 31
1	9	17-25	+281	- 29	- 7	- 13	-159	+195	- 4	+ 40	- 46	+ 258	+ 117	+ 57
2	18	26-34	-202	+ 99	- 8	+ 54	+143	-231	+164	+ 14	- 31	+ 2	+ 119	- 0
3	27	35-43	- 37	- 15	- 5	+ 58	+ 50	+ 27	- 44	- 15	+157	+ 176	+ 295	+ 39
4	36	44-52	+ 73	- 10	+ 27	- 54	+ 39	- 86	- 86	+ 20	+ 15	- 62	+ 233	- 14
5	45	53-61	+ 5	-145	+ 33	- 11	+202	+190	+ 59	+ 48	- 63	+ 318	+ 551	+ 71
6	54	62-70	- 88	- 5	- 10	+124	+ 74	-133	+ 46	- 11	- 69	- 72	+ 479	- 16
7	63	71-79	+ 29	+129	+ 11	+108	+ 32	-188	- 67	+ 38	+147	+ 239	+ 718	+ 53
8	72	80-88	+ 79	+ 44	+ 12	- 47	+134	+ 65	+ 18	- 27	+126	+ 404	+1122	+ 90
9	81	89-97	-111	- 91	- 11	- 38	+142	+ 92	+ 79	+ 42	+162	+ 266	+1388	+ 59
10	90	98-06	- 44	- 28	- 1	- 15	+ 30	+108	+ 52	+ 23	+ 34	+ 159	+1547	+ 35
11	99	1907-15	+ 78	- 21	- 26	-174	+205	- 78	- 12	+ 40	+ 35	+ 47	+1594	+ 10
12	108	16-24	+111	- 5	- 24	- 68	-102	+341	-124	- 8	- 2	+ 119	+1713	+ 26
13	117	25-33	-343	+ 37	+ 30	+ 67	+259	-103	-106	+ 7	+ 7	- 145	+1568	- 32
14	126	34-42	-125	+128	+ 24	+ 14	+228	-199	-114	+ 9	- 97	- 132	+1436	- 29
													Kontroll Σ	+318
														$=\frac{+1436}{4,5}$

			$d_i \cdot \sin x_i$									$B(x,q)=\sum_{i=q}^{q+8} d_i \sin x_i$	$\Sigma B(x,q)_{\varphi^*}$	$b(x,q)=\frac{2}{9}\cdot B(x,q)$
i =			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8			
x i =			0°	40°	80°	120°	160°	200°	240°	280°	320°			
sin x i =			0,000	+0,643	+0,985	+0,866	+0,342	-0,342	-0,866	-0,985	-0,643			
φ^*	q	Jahre												
0	0	1808-16	0	- 70	- 86	- 26	+ 75	- 10	+194	+ 74	-146	+ 5	+ 5	+ 1
1	9	17-25	0	- 24	- 40	+ 23	+ 58	+ 71	- 6	-229	+ 39	- 108	- 103	- 24
2	18	26-34	0	+ 84	- 43	- 94	- 52	- 84	+283	- 82	+ 26	+ 38	- 65	+ 8
3	27	35-43	0	- 12	- 28	-101	- 18	+ 10	- 76	+ 87	-132	- 270	- 335	- 60
4	36	44-52	0	- 8	+152	+ 94	- 14	- 31	-149	-111	- 13	- 80	- 415	- 18
5	45	53-61	0	-122	+184	+ 20	- 74	+ 69	+102	-272	+ 53	- 40	- 455	- 9
6	54	62-70	0	- 4	- 59	-214	- 27	- 48	+ 80	+ 60	+ 58	- 154	- 609	- 34
7	63	71-79	0	+108	+ 63	-187	- 12	- 68	-116	-218	-123	- 553	-1162	-123
8	72	80-88	0	+ 37	+ 67	+ 80	- 49	+ 24	+ 31	+153	-105	+ 238	- 924	+ 53
9	81	89-97	0	- 77	- 61	+ 65	- 52	+ 34	+137	-240	-136	- 330	-1254	- 73
10	90	98-06	0	- 24	- 5	+ 26	- 11	+ 39	+ 91	-129	- 28	- 41	-1295	- 9
11	99	1907-15	0	- 17	-147	+301	- 75	- 28	- 22	-228	- 30	- 246	-1541	- 55
12	108	16-24	0	- 4	-136	+119	+ 37	+124	-214	+ 45	+ 1	- 28	-1569	- 6
13	117	25-33	0	+ 31	+168	-116	- 94	- 38	-184	- 39	- 6	- 278	-1847	- 62
14	126	34-42	0	+107	+138	- 24	- 83	- 73	-137	- 50	+ 82	- 100	-1947	- 22
													Kontroll Σ	-433
														$=\frac{-1947}{4,5}$

Bemerkung: $d_i = MQ_i - (Q_i' + y_i^{(7)} + y_i^{(12)})$

nach Tafel VIII

Welle p7, definitive Berechnung

Periodogrammkomponenten a(x,q) und b(x,q) für q = 0, 7, 14 .... 126 und Versuchswelle p' = 7 Jahre

			$d_i \cdot \cos x_i$							$A(x,q) = \sum_{i=q}^{q+6} d_i \cos x_i$	$\Sigma A(x,q)\varsigma^*$	$a(x,q) = \frac{2}{7} A(x,q)$
	i =		q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6			
	xi =		0°	51.43°	102.86°	154.29°	205.71°	257.14°	308.57°			
	cos xi =		+1.000	+0.623	−0.223	−0.901	−0.901	−0.223	+0.623			
ς^*	q	Jahre										
0	0	1808 – 14	− 131	+ 50	− 21	+ 95	+ 19	+ 17	− 67	− 38	− 38	− 11
1	7	15 – 21	+ 34	+ 95	− 30	+ 73	+ 23	+ 13	+ 19	+ 227	+ 189	+ 65
2	14	22 – 28	− 192	+ 57	− 42	+ 157	+ 249	− 31	+ 12	+ 210	+ 399	+ 60
3	21	29 – 35	− 32	− 38	− 82	+ 192	− 107	+ 24	− 82	− 125	+ 274	− 36
4	28	36 – 42	− 20	+ 64	− 14	− 38	+ 65	+ 10	− 137	− 70	+ 204	− 20
5	35	43 – 49	+ 122	+ 21	+ 5	− 145	− 94	+ 23	− 31	− 99	+ 105	− 28
6	42	50 – 56	+ 10	+ 18	− 13	− 93	+ 135	− 29	− 36	− 8	+ 97	− 2
7	49	57 – 63	− 202	− 45	− 9	− 326	+ 66	+ 18	+ 32	− 466	− 369	− 133
8	56	64 – 70	+ 19	− 122	+ 12	− 174	− 6	− 2	− 90	− 363	− 732	− 104
9	63	71 – 77	− 152	− 9	− 4	+ 101	− 80	− 44	− 13	− 201	− 933	− 57
10	70	78 – 84	+ 16	+ 32	− 10	− 81	− 113	− 35	− 61	− 252	− 1185	− 72
11	77	85 – 91	− 74	− 64	+ 52	− 147	+ 1	− 5	+ 18	− 219	− 1404	− 63
12	84	92 – 98	+ 101	− 85	+ 5	+ 86	− 209	− 38	− 24	− 164	− 1568	− 47
13	91	99 – 05	0	− 9	+ 9	+ 69	+ 59	+ 6	+ 61	+ 195	− 1373	+ 56
14	98	1906 – 12	− 126	− 60	+ 15	+ 54	− 400	+ 45	+ 13	− 459	− 1832	− 131
15	105	13 – 19	− 66	+ 78	+ 13	− 62	− 51	+ 8	+ 96	+ 16	− 1816	+ 5
16	112	20 – 26	+ 4	− 289	− 64	− 104	− 107	+ 82	− 24	− 502	− 2318	− 143
17	119	27 – 33	+ 172	− 8	+ 31	− 143	− 159	+ 6	− 45	− 146	− 2464	− 42
18	126	34 – 40	− 230	+ 49	− 31	− 41	+ 189	− 26	+ 36	− 54	− 2518	− 15
		1941 – 43	− 49	− 58	+ 43							

Kontroll $\Sigma = -718 = \frac{-2518}{3,5}$

			$d_i \cdot \sin x_i$							$B(x,q) = \sum_{i=q}^{q+6} d_i \sin x_i$	$\Sigma B(x,q)\varsigma^*$	$b(x,q) = \frac{2}{7} B(x,q)$
	i =		q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6			
	xi =		0°	51,43°	102,85°	154,29°	205,71°	257,14°	308,57°			
	sin xi =		0	+0,782	+0,975	+0,434	−0,434	−0,975	−0,782			
ς^*	q	Jahre										
0	0	1808 – 14	0	+ 63	+ 92	− 46	+ 9	+ 72	+ 84	+ 274	+ 274	+ 78
1	7	15 – 21	0	+ 119	+ 131	− 35	+ 11	+ 56	− 23	+ 259	+ 533	+ 74
2	14	22 – 28	0	+ 72	+ 183	− 76	+ 120	− 137	− 15	+ 147	+ 680	+ 42
3	21	29 – 35	0	− 48	+ 358	− 93	− 52	+ 105	+ 102	+ 372	+ 1052	+ 106
4	28	36 – 42	0	+ 80	+ 60	+ 18	+ 31	+ 44	+ 172	+ 405	+ 1457	+ 116
5	35	43 – 49	0	+ 27	− 22	+ 70	− 45	+ 100	+ 38	+ 168	+ 1625	+ 48
6	42	50 – 56	0	+ 23	+ 59	+ 45	+ 65	− 125	+ 45	+ 112	+ 1737	+ 32
7	49	57 – 63	0	− 57	+ 39	+ 157	+ 32	+ 79	− 40	+ 210	+ 1947	+ 60
8	56	64 – 70	0	− 153	− 55	+ 84	− 3	− 10	+ 113	− 24	+ 1923	− 7
9	63	71 – 77	0	− 12	+ 19	− 49	− 39	− 192	+ 16	− 257	+ 1666	− 73
10	70	78 – 84	0	+ 41	+ 42	+ 39	− 55	− 153	+ 77	− 9	+ 1657	− 3
11	77	85 – 91	0	− 81	− 227	+ 71	0	− 23	− 23	− 283	+ 1374	− 81
12	84	92 – 98	0	− 107	− 20	− 41	− 101	− 165	+ 30	− 404	+ 970	− 116
13	91	99 – 05	0	− 11	− 41	− 33	+ 28	+ 28	− 77	− 106	+ 864	− 30
14	98	1906 – 12	0	− 75	− 64	− 26	− 193	+ 195	− 16	− 179	+ 685	− 51
15	105	13 – 19	0	+ 98	− 57	+ 30	− 25	+ 33	− 120	− 41	+ 644	− 12
16	112	20 – 26	0	− 363	+ 281	+ 50	− 52	+ 357	+ 30	+ 303	+ 947	+ 87
17	119	27 – 33	0	− 10	− 136	+ 69	− 77	+ 24	+ 57	− 73	+ 874	− 21
18	126	34 – 40	0	+ 62	+ 134	+ 20	+ 91	− 113	− 45	+ 149	+ 1023	+ 43
		1941 – 43	0	− 73	− 190							

Kontroll $\Sigma = +292 = \frac{+1023}{3,5}$

Bemerkung: $d_i = MQ_i - (\underbrace{Q_i' + y_i^{(5)} + y_i^{(12)} + y_i^{(30)}}_{\text{nach Tafel VIII}}) - \underbrace{(y_i^{(6)} + y_i^{(9)})}_{\text{XV}}$

Welle p5, zweite angenäherte Berechnung

für Zeitabschnitt 1808 – 1887 Ergebnis definitiv

Periodogrammkomponenten a(x,q) und b(x,q) für q = 0, 5, 10, ... 130 und Versuchswelle p' = 5 Jahre

			$d_i \cdot \cos x_i$					$A(x,q) = \sum_{i=q}^{q+4} d_i \cos x_i$	$\sum A(x,q)_{\varsigma^*}$	$a(x,q) = \frac{2}{5} A(x,q)$
i =			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4			
xi =			0°	72°	144°	216°	288°			
cos xi =			1,000	0,309	-0.809	-0.809	0.309			
ς^*	q	Jahre								
0	0	1808-12	- 128	- 31	+ 41	- 1	+ 67	- 52	- 52	- 21
1	5	13-17	- 0	- 81	+ 91	- 147	+ 67	- 70	- 122	- 28
2	10	18-22	- 111	- 30	- 12	- 163	- 53	- 369	- 491	- 148
3	15	23-27	+ 1	+ 54	+ 104	+ 186	+ 52	+ 397	- 94	+ 159
4	20	28-32	+ 44	- 4	+ 70	- 231	- 91	- 212	- 306	- 85
5	25	33-37	+ 126	+ 2	+ 5	+ 1	- 2	+ 132	- 174	+ 53
6	30	38-42	- 73	+ 1	- 2	- 49	- 53	- 176	- 350	- 70
7	35	43-47	+ 100	- 3	+ 44	- 107	+ 22	+ 56	- 294	+ 22
8	40	48-52	- 104	+ 5	- 88	- 57	- 4	- 248	- 542	- 99
9	45	53-57	- 35	- 69	- 152	- 65	- 35	- 356	- 898	- 142
10	50	58-62	- 102	- 18	- 233	+ 63	- 15	- 305	- 1203	- 122
11	55	63-67	+ 83	+ 15	+ 126	+ 24	+ 49	+ 297	- 906	+ 119
12	60	68-72	- 91	- 22	+ 97	+ 20	+ 32	+ 36	- 870	+ 14
13	65	73-77	+ 18	- 71	+ 27	- 142	+ 17	- 151	- 1021	- 60
14	70	78-82	+ 105	+ 27	- 21	- 50	+ 31	+ 92	- 929	+ 37
15	75	83-87	+ 116	- 44	+ 57	+ 18	- 39	+ 108	- 821	+ 43
16	80	88-92	+ 192	- 29	+ 94	+ 24	+ 55	+ 336	- 485	+ 134
17	85	93-97	- 44	- 2	+ 85	- 185	+ 47	- 99	- 584	- 40
18	90	98-02	- 92	- 12	- 25	- 55	- 8	- 192	- 776	- 77
19	95	03-07	- 150	- 50	- 54	+ 15	+ 7	- 232	- 1008	- 93
20	100	08-12	- 64	- 48	- 299	+ 154	+ 21	- 236	- 1244	- 94
21	105	13-17	- 41	+ 42	+ 31	- 57	0	- 25	- 1269	- 10
22	110	18-22	- 112	+ 48	- 91	+ 293	+ 80	+ 218	- 1051	+ 87
23	115	23-27	- 20	+ 9	+ 252	- 70	+ 70	+ 241	- 810	+ 96
24	120	28-32	- 66	- 66	- 112	- 158	- 4	- 406	- 1216	- 162
25	125	33-37	- 58	- 58	- 93	- 79	- 17	- 305	- 1521	- 122
26	130	1938-42	- 263	+ 60	- 155	+ 11	- 61	- 408	- 1929	- 163

Kontroll Σ $-772 = \frac{-1929}{2,5}$

			$d_i \cdot \sin x_i$					$B(x,q) = \sum_{i=q}^{q+4} d_i \cdot \sin x_i$	$\sum B(x,q)_{\varsigma^*}$	$b(x,q) = \frac{2}{5} B(x,q)$
i =			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4			
xi =			0°	72°	144°	216°	288°			
sin xi =			0,000	0.951	0,588	-0.588	-0.951			
ς^*	q	Jahre								
0	0	1808-12	0	- 95	- 30	- 1	- 207	- 333	- 333	- 133
1	5	13-17	0	- 250	- 67	- 107	- 207	- 631	- 964	- 252
2	10	18-22	0	- 92	+ 9	- 118	+ 165	- 36	- 1000	- 14
3	15	23-27	0	+ 166	- 76	+ 135	- 160	+ 65	- 935	+ 26
4	20	28-32	0	- 13	- 51	- 168	+ 280	+ 48	- 887	+ 19
5	25	33-37	0	+ 5	- 4	+ 1	+ 6	+ 8	- 879	+ 3
6	30	38-42	0	+ 2	+ 1	- 35	+ 165	+ 133	- 746	+ 53
7	35	43-47	0	- 9	- 32	- 78	- 68	- 187	- 933	- 75
8	40	48-52	0	+ 14	+ 64	- 42	+ 13	+ 49	- 884	+ 20
9	45	53-57	0	- 214	+ 111	- 47	+ 107	- 43	- 927	- 17
10	50	58-62	0	- 56	+ 169	+ 46	+ 46	+ 205	- 722	+ 82
11	55	63-67	0	+ 47	- 92	+ 18	- 149	- 176	- 898	- 70
12	60	68-72	0	- 68	- 71	+ 15	- 98	- 222	- 1120	- 89
13	65	73-77	0	- 218	- 19	- 103	- 52	- 392	- 1512	- 157
14	70	78-82	0	+ 82	+ 15	- 36	- 94	- 33	- 1545	- 13
15	75	83-87	0	- 135	- 42	+ 13	+ 119	- 45	- 1590	- 18
16	80	88-92	0	- 89	- 68	+ 18	- 168	- 307	- 1897	- 123
17	85	93-97	0	- 5	- 62	- 134	- 144	- 345	- 2242	- 138
18	90	98-02	0	- 38	+ 18	- 40	+ 26	- 34	- 2276	- 14
19	95	03-07	0	- 155	+ 39	+ 11	- 22	- 127	- 2403	- 51
20	100	08-12	0	- 148	+ 218	+ 112	- 64	+ 118	- 2285	+ 47
21	105	13-17	0	+ 129	- 22	- 42	+ 1	+ 66	- 2219	+ 26
22	110	18-22	0	+ 148	- 66	+ 213	- 246	+ 181	- 2038	+ 72
23	115	23-27	0	+ 28	- 183	- 51	- 214	- 420	- 2458	- 168
24	120	28-32	0	- 204	+ 81	- 115	+ 11	- 227	- 2685	- 91
25	125	33-37	0	- 178	+ 68	- 58	+ 53	- 115	- 2800	- 46
26	130	1938-42	0	+ 184	+ 112	+ 8	+ 188	+ 492	- 2308	+ 197

Kontroll Σ $-924 = \frac{-2308}{2,5}$

Bemerkung: $d_i = MQ_i - \underbrace{(Q'_i + y_i^{(12)} + y_i^{(30)})}_{\text{nach Tafel VIII}} - \underbrace{(y_i^{(6)} + y_i^{(7)} + y_i^{(9)})}_{\text{XV}}$

Welle p12, definitive Berechnung

Periodogrammkomponenten a(x,q) und b(x,q) für q = 0, 12, 24 .... 120 und Versuchswelle p' = 12 Jahre

			$d_i \cdot \cos x_i$											$A(x,q) = \sum_{i=q}^{q+11} d_i \cos x_i$	$\Sigma A(x,q)_\varsigma$	$a(x,q) = \frac{2}{12} A(x,q)$
i =			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8	q+9	q+10	q+11			
x i =			0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°			
cos x i =			+1,000	+0,866	+0,500	0,000	-0,500	-0,866	-1,000	-0,866	-0,500	0,000	+0,500	+0,866			
ς^*	q	Jahre															
0	0	1808-19	-340	- 49	+ 36	0	- 38	- 76	- 5	+ 5	-30	0	+14	- 27	-510	-510	- 85
1	12	20-31	-179	- 18	- 72	0	- 59	+129	+164	-242	-54	0	-67	+243	-155	-665	- 26
2	24	32-43	-259	+115	- 30	0	+ 16	- 39	+ 7	- 11	+15	0	-56	+145	- 97	-762	- 16
3	36	44-55	- 11	-113	+ 28	0	+ 34	- 21	- 63	- 25	- 8	0	-76	+158	- 97	-859	- 16
4	48	56-67	+ 27	-119	- 40	0	-113	+161	+111	-103	-70	0	- 6	+164	+ 12	-847	+ 2
5	60	68-79	- 15	+ 11	- 56	0	+ 16	+ 55	+242	+ 29	-72	0	+77	+138	+425	-422	+71
6	72	80-91	+ 66	+ 3	- 15	0	+ 80	+ 31	+ 7	+125	-88	0	+12	- 16	+205	-217	+ 34
7	84	92-03	+ 79	- 80	+ 20	0	- 59	- 35	+ 64	- 65	-35	0	-15	- 38	-164	-381	- 27
8	96	04-15	- 81	+ 4	- 71	0	+ 3	+138	-270	+209	-80	0	+78	- 83	-153	-534	- 26
9	108	16-27	+ 81	+ 75	-149	0	- 97	+320	- 89	+ 93	-91	0	+52	+148	+343	-191	+57
10	120	28-39	+ 29	- 48	+ 48	0	+ 79	+ 16	+175	+ 19	-10	0	-13	+211	+506	+315	+84
		1940-43	+114	+ 21	- 34	0										Kontroll Σ	+ 52
																	$= \frac{+315}{6}$

			$d_i \cdot \sin x_i$											$B(x,q) = \sum_{i=q}^{q+11} d_i \sin x_i$	$\Sigma B(x,q)_\varsigma$	$b(x,q) = \frac{2}{12} B(x,q)$
i =			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8	q+9	q+10	q+11			
x i =			0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°			
sin x i =			0,000	+0,500	+0,866	+1,000	+0,866	+0,500	0,000	-0,500	-0,866	-1,000	-0,866	-0,500			
ς^*	q	Jahre															
0	0	1808-19	0	- 28	+ 62	- 57	+ 67	+ 44	0	+ 3	- 51	-162	- 24	+ 16	-140	- 140	- 23
1	12	20-31	0	- 11	-124	- 26	+102	- 74	0	-140	- 93	+ 33	+116	-140	-357	- 497	- 60
2	24	32-43	0	+ 66	- 53	- 96	- 27	+ 22	0	- 6	+ 26	- 57	+ 98	- 84	-111	- 608	- 18
3	36	44-55	0	- 65	+ 49	+ 64	- 58	+ 12	0	- 14	- 15	- 60	+131	- 92	- 48	- 656	- 8
4	48	56-67	0	- 69	- 68	- 49	+196	- 93	0	- 60	-122	+ 91	+ 10	- 95	-259	- 915	- 43
5	60	68-79	0	+ 7	- 97	-122	- 27	- 32	0	+ 17	-124	- 28	-133	- 80	-619	-1534	-103
6	72	80-91	0	+ 2	- 26	+ 12	-139	- 18	0	+ 73	-152	- 17	- 21	+ 10	-276	-1810	- 46
7	84	92-03	0	- 46	+ 35	- 97	+102	+ 20	0	- 38	- 61	- 17	+ 25	+ 22	- 55	-1865	- 9
8	96	04-15	0	+ 3	-123	- 6	- 16	- 80	0	+120	-139	- 90	-134	+ 48	-407	-2272	- 68
9	108	16-27	0	+ 44	-258	+ 88	+168	-184	0	+ 54	-158	+115	- 89	- 85	-305	-2577	- 51
10	120	28-39	0	- 28	+ 83	- 40	-138	- 10	0	+ 11	- 18	-109	+ 23	-122	-348	-2925	- 58
		1940-43	0	+ 12	- 60	-353										Kontroll Σ	-487
																	$= \frac{-2925}{6}$

Bemerkung: $d_i = MQ_i - (\underbrace{Q'_i + y_i^{(30)}}_{\text{nach Tafel VIII}}) - (\underbrace{y_i^{(5)} + y_i^{(6)} + y_i^{(7)} + y_i^{(9)}}_{\text{XV}})$

Welle p_{30}, zweite angenäherte Berechnung

Periodogrammkomponenten a(x,q) und b(x,q) für q = 0, 30, 60 u. 90 und Versuchswelle p' = 30 Jahre

$d_i \cdot \cos x_i$

		i =	q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8	q+9	q+10	q+11	q+12	q+13	q+14	q+15	q+16	q+17	q+18	q+19	q+20	q+21	q+22	q+23	q+24	q+25	q+26	q+27	q+28	q+29	$A(x,q)=\sum_{i=q}^{q+29} d_i \cos x_i$	$\Sigma A(x,q)_{\xi^*}$	$a(x,q)=\frac{2}{30} A(x,q)$
		x_i =	0°	12°	24°	36°	48°	60°	72°	84°	96°	108°	120°	132°	144°	156°	168°	180°	192°	204°	216°	228°	240°	252°	264°	276°	288°	300°	312°	324°	336°	348°			
		$\cos x_i$ =	+1,000	+0,978	+0,914	+0,809	+0,669	+0,500	+0,309	+0,105	-0,105	-0,309	-0,500	-0,669	-0,809	-0,914	-0,978	-1,000	-0,978	-0,914	-0,809	-0,669	-0,500	-0,309	-0,105	+0,105	+0,309	+0,500	+0,669	+0,809	+0,914	+0,978			
ξ^*	q	Jahre																																	
0	0	1808-37	-301	+ 1	+122	- 13	+ 71	+ 46	- 4	- 3	- 4	- 48	- 25	- 13	+ 83	- 62	+ 56	- 39	-147	+145	+173	-132	- 5	+ 40	+ 23	+ 24	- 88	+ 65	- 33	- 67	- 27	+ 27	- 135	- 135	- 9
1	30	38-67	- 45	- 37	- 76	+ 15	- 83	+135	+ 39	+ 2	- 20	- 50	+ 6	- 27	- 40	- 1	+ 14	- 38	+159	-165	- 23	+ 92	+ 40	+ 18	- 22	- 23	- 50	+ 22	+ 27	-170	-124	+ 78	- 347	- 482	- 23
2	60	68-97	- 87	- 3	- 58	- 14	+ 75	+ 44	- 35	+ 5	- 18	- 3	- 53	- 74	- 34	- 16	- 21	- 86	+ 84	- 12	+ 1	+122	- 49	+ 23	+ 7	- 8	+ 15	- 46	+ 35	- 70	+101	+ 9	- 166	- 648	- 11
3	90	98-27	-114	+ 22	+ 29	+ 6	- 1	+ 10	+ 2	+ 10	+ 6	- 18	- 13	+102	-208	+244	-146	- 88	-160	+ 71	- 89	- 84	+124	- 45	- 27	- 33	+ 36	- 60	+ 80	-182	- 36	+ 20	- 542	-1190	- 36
		1928-43	- 96	-125	+ 86	+ 25	- 21	+ 68	- 9	+ 88	- 75	- 32	+ 36	-125	- 52	- 4	+ 54	+316															Kontroll Σ		- 79
																																			$=\frac{-1190}{15}$

$d_i \cdot \sin x_i$

		i =	q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8	q+9	q+10	q+11	q+12	q+13	q+14	q+15	q+16	q+17	q+18	q+19	q+20	q+21	q+22	q+23	q+24	q+25	q+26	q+27	q+28	q+29	$B(x,q)=\sum_{i=q}^{q+29} d_i \sin x_i$	$\Sigma B(x,q)_{\xi^*}$	$b(x,q)=\frac{2}{30} B(x,q)$
		x_i =	0°	12°	24°	36°	48°	60°	72°	84°	96°	108°	120°	132°	144°	156°	168°	180°	192°	204°	216°	228°	240°	252°	264°	276°	288°	300°	312°	324°	336°	348°			
		$\sin x_i$ =	0,000	+0,208	+0,407	+0,588	+0,743	+0,866	+0,951	+0,995	+0,995	+0,951	+0,866	+0,743	+0,588	+0,407	+0,208	0,000	-0,208	-0,407	-0,588	-0,743	-0,866	-0,951	-0,995	-0,995	-0,951	-0,866	-0,743	-0,588	-0,407	-0,208			
ξ^*	q	Jahre																																	
0	0	1808-37	0	0	+54	- 9	+ 79	+ 80	- 11	- 33	+ 35	+148	+ 42	+ 14	- 61	+ 28	- 12	0	- 31	+ 65	+126	-147	- 9	+125	+215	-224	+272	-113	+ 36	+ 49	+ 12	- 6	+ 724	+ 724	+ 48
1	30	38-67	0	- 8	- 34	+ 11	- 92	+234	+121	+ 18	+190	+155	- 10	+ 30	+ 29	0	- 3	0	+ 34	- 13	- 16	+102	+ 70	+ 55	-207	+216	+154	- 38	- 30	+123	+ 55	- 17	+1069	+1793	+ 71
2	60	68-97	0	- 1	- 26	- 10	+ 83	+ 76	-107	+ 51	+172	+ 9	+ 92	+ 82	+ 25	+ 7	+ 5	0	+ 18	- 5	+ 1	+136	- 85	+ 72	+ 64	+ 80	- 48	+ 80	- 39	+ 51	- 45	- 2	+ 736	+2529	+ 49
3	90	98-27	0	+ 5	+ 13	+ 4	- 1	+ 18	+ 7	+100	- 57	+ 55	+ 23	-113	+152	-109	+ 31	0	- 34	+ 32	- 65	- 93	+214	-140	-252	+316	-109	+105	- 88	+132	+ 16	- 4	+ 158	+2687	+ 11
		1928-43	0	- 27	+ 38	+ 18	+ 24	+118	- 28	+ 83	+ 71	+ 97	- 63	+135	+ 38	+ 2	- 11	0															Kontroll Σ		+ 179
																																			$=\frac{+2687}{15}$

Bemerkung: $d_i = MQ_i - Q_i' - (y_i^{(5)} + y_i^{(6)} + y_i^{(7)} + y_i^{(9)} + y_i^{(12)})$

Q_i': nach Tafel VIII; $(y_i^{(5)} + \dots + y_i^{(12)})$: XV

Ergebnis des zweiten Berechnungsganges

Ausschläge $y^{(5)}, y^{(6)}, y^{(7)}, y^{(9)}, y^{(12)}, z^{(12)}, z^{(10)}, z^{(15)}, y^{(30)}, z^{(20)}$ und $z^{(30)}$ der Periodizitäten $p_5, p_6, p_7, p_9, p_{12}$ (1808–1842); p_{12} (Hauptperiode mit Nebenperiode p_{10} u. p_{15} für Jahre 1843–1943); p_{30} (1808–1854) und p_{30} (Hauptperiode und Nebenperiode für Jahre 1855–1943)

Periodizität		p_5	p_6	p_7	p_9	p_{12}				p_{30}		
t	Jahre	$y^{(5)}$ nach Gl.64 und Gl.65	$y^{(6)}$ nach Gl.61	$y^{(7)}$ nach Gl.63	$y^{(9)}$ nach Gl.62	$z^{(12)}$ Hauptperiode nach Gl.68	Nebenperioden $z^{(10)}$ nach Gl.69	$z^{(15)}$ nach Gl.70	$y^{(12)}$ 1808–42 nach Gl.67, 1843–1943 nach Gl.72	$z^{(30)}$ Hauptperiode nach Gl.74	$z^{(20)}$ Nebenperiode nach Gl.75	$y^{(30)}$ 1808–54 nach Gl.73, 1855–1943 nach Gl.76
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1808	+ 132	+ 15	+ 82	+ 30				− 52			+ 5
1	09	− 111	− 16	+ 73	+ 9				− 64			+ 17
2	1810	− 162	− 31	+ 14	− 16				− 60			+ 29
3	11	+ 68	− 14	− 55	− 33				− 41			+ 39
4	12	+ 180	+ 17	− 86	− 35				− 12			+ 48
5	13	− 20	+ 31	− 59	− 20				+ 20			+ 55
6	14	− 185	+ 13	+ 8	+ 4				+ 47			+ 60
7	15	− 29	− 18	+ 70	+ 26				+ 62			+ 62
8	16	+ 177	− 31	+ 84	+ 36				+ 62			+ 62
9	17	+ 76	− 13	+ 41	+ 29				+ 46			+ 59
10	18	− 158	+ 18	− 30	+ 8				+ 19			+ 54
1	19	− 117	+ 31	− 80	− 17				− 12			+ 47
2	1820	+ 126	+ 12	− 76	− 33				− 41			+ 38
3	21	+ 151	− 19	− 21	− 34				− 60			+ 27
4	22	− 87	− 31	+ 49	− 19				− 63			+ 15
5	23	− 4	− 11	+ 85	+ 5				− 51			+ 3
6	24	+ 57	+ 20	+ 64	+ 27				− 27			− 9
7	25	+ 46	+ 31	− 2	+ 36				+ 5			− 22
8	26	− 24	+ 10	− 66	+ 28				+ 35			− 33
9	27	− 63	− 20	− 85	+ 7				+ 56			− 42
20	28	− 22	− 30	− 47	− 18				+ 64			− 51
1	29	+ 47	− 10	+ 23	− 34				+ 56			− 57
2	1830	+ 57	+ 21	+ 78	− 34				+ 34			− 61
3	31	− 5	+ 30	+ 79	− 18				+ 3			− 62
4	32	− 60	+ 9	+ 27	+ 7				− 28			− 61
5	33	− 39	− 22	− 44	+ 28				− 52			− 57
6	34	+ 32	− 30	− 85	+ 36				− 64			− 51
7	35	+ 62	− 8	− 68	− 27				− 59			− 44
8	36	+ 14	+ 22	− 5	+ 5				− 40			− 34
9	37	− 52	+ 30	+ 61	− 19				− 11			− 23
30	38	− 52	+ 7	+ 86	− 34				+ 21			− 11
1	39	+ 14	− 23	+ 52	− 33				+ 47			+ 1
2	1840	+ 62	− 30	− 17	− 17				+ 62			+ 14
3	41	+ 32	− 7	− 75	− 8				+ 62			+ 26
4	42	− 39	+ 23	− 82	− 29				+ 46			+ 36
5	43	− 60	+ 29	− 33	+ 36	+ 17	− 36	− 37	− 56			+ 46
6	44	− 5	+ 6	+ 38	+ 26	− 10	− 37	− 35	− 82			+ 53
7	45	+ 56	− 24	+ 83	+ 4	− 35	− 24	− 26	− 85			+ 58
8	46	+ 47	− 29	+ 72	− 20	− 51	− 1	− 14	− 66			+ 61
9	47	− 22	− 5	+ 12	− 35	− 53	+ 21	+ 2	− 30			+ 62
40	48	− 63	+ 24	− 56	− 33	− 42	+ 36	+ 17	+ 11			+ 60
1	49	− 24	+ 29	− 86	− 16	− 20	+ 36	+ 30	+ 46			+ 56
2	1850	+ 45	+ 4	− 57	+ 9	+ 8	+ 23	+ 37	+ 68			+ 49
3	51	+ 57	− 25	+ 10	+ 30	+ 33	+ 1	+ 37	+ 71			+ 40
4	52	− 4	− 28	+ 71	+ 36	+ 50	− 21	+ 32	+ 61			+ 30
5	53	− 60	− 3	+ 83	+ 25	+ 54	− 36	+ 21	+ 39			+ 19
6	54	− 40	+ 25	+ 39	+ 3	+ 44	− 36	+ 6	+ 14			+ 6
7	55	+ 30	+ 28	− 32	− 21	+ 22	− 23	− 9	− 10	− 4	+ 32	+ 28
8	56	+ 63	+ 3	− 81	− 35	− 5	− 1	− 23	− 29	− 13	+ 28	+ 15
9	57	+ 16	− 26	− 75	− 32	− 31	+ 22	− 34	− 43	− 22	+ 22	0
50	58	− 51	− 28	− 18	− 14	− 49	+ 36	− 38	− 51	− 30	+ 14	− 16
1	59	− 53	− 2	+ 51	+ 10	− 54	+ 36	− 35	− 53	− 36	+ 5	− 31
2	1860	+ 12	+ 26	+ 86	+ 30	− 45	+ 23	− 27	− 49	− 41	− 5	− 46
3	61	+ 62	+ 27	+ 62	+ 36	− 25	0	− 14	− 39	− 44	− 14	− 58
4	62	+ 33	+ 1	− 4	+ 24	+ 2	− 22	+ 1	− 19	− 46	− 22	− 68
5	63	− 38	− 27	− 67	+ 1	+ 28	− 36	+ 16	+ 8	− 46	− 29	− 75
6	64	− 61	− 27	− 85	− 22	+ 47	− 36	+ 29	+ 40	− 43	− 32	− 75
7	65	− 7	0	− 45	− 35	+ 54	− 22	+ 36	+ 68	− 40	− 33	− 73
8	66	+ 56	+ 27	+ 26	− 82	+ 47	0	+ 38	+ 85	− 34	− 31	− 65
9	67	+ 41	+ 27	+ 79	− 13	+ 27	+ 22	+ 33	+ 82	− 27	− 26	− 53
60	68	− 21	− 1	+ 78	+ 12	+ 1	+ 36	+ 22	+ 59	− 19	− 19	− 38
1	69	− 63	− 27	+ 25	+ 31	− 26	+ 36	+ 8	+ 18	− 11	− 10	− 21
2	1870	− 25	− 26	− 46	+ 36	− 46	+ 22	− 8	− 32	− 1	0	− 1

Periodizität		p_5	p_6	p_7	p_9	p_{12}				p_{30}		
						$z^{(12)}$	Nebenperioden		$y^{(12)}$	$z^{(30)}$	$z^{(20)}$	$y^{(30)}$
t	Jahre	$y^{(5)}$ nach Gl.64 und Gl.65	$y^{(6)}$ nach Gl.61	$y^{(7)}$ nach Gl.63	$y^{(9)}$ nach Gl.62	Hauptperiode nach Gl.68	$z^{(10)}$ nach Gl.69	$z^{(15)}$ nach Gl.70	1808-42 nach Gl.67 1843-1943 nach Gl.72	Hauptperiode nach Gl.74	Neben-periode nach Gl.75	1808-54 nach Gl.73 1855-1943 nach Gl.76
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
63	1871	+ 44	+ 2	− 85	+ 23	− 54	0	− 23	− 77	+ 8	+ 9	+ 17
4	72	+ 58	+ 28	− 66	0	− 48	− 22	− 34	−104	+ 17	+ 18	+ 35
5	73	− 2	+ 26	− 3	− 23	− 30	− 36	− 38	−104	+ 25	+ 25	+ 50
6	74	− 59	− 2	+ 63	− 36	− 3	− 36	− 36	− 75	+ 32	+ 30	+ 62
7	75	− 42	− 28	+ 86	− 31	+ 24	− 22	− 28	− 26	+ 38	+ 33	+ 71
8	76	+ 29	− 25	+ 50	− 12	+ 44	+ 1	− 16	+ 29	+ 42	+ 32	+ 74
9	77	+ 63	+ 3	− 19	+ 13	+ 54	+ 23	0	+ 77	+ 45	+ 29	+ 74
70	78	+ 17	+ 28	− 76	+ 32	+ 49	+ 36	+ 16	+ 101	+ 46	+ 24	+ 70
1	79	− 50	+ 25	− 81	+ 35	+ 32	+ 36	+ 28	+ 96	+ 45	+ 16	+ 61
2	1880	− 54	− 4	− 31	+ 22	+ 6	+ 22	+ 35	+ 63	+ 42	+ 7	+ 49
3	81	+ 11	− 29	+ 40	− 1	− 21	− 1	+ 38	+ 16	+ 38	− 3	+ 35
4	82	+ 62	− 24	+ 84	− 24	− 43	− 23	+ 33	− 33	+ 32	− 12	+ 20
5	83	+ 35	+ 5	+ 70	− 36	− 53	− 36	+ 22	− 67	+ 24	− 21	+ 3
6	84	− 36	+ 29	+ 9	− 30	− 50	− 36	+ 8	− 78	+ 16	− 27	− 11
7	85	− 61	+ 24	− 58	− 11	− 34	− 21	− 8	− 63	+ 7	− 32	− 25
8	86	− 9	− 6	− 86	+ 14	− 9	+ 1	− 21	− 29	− 2	− 33	− 35
9	87	+ 55	− 29	− 56	+ 32	+ 18	+ 23	− 33	+ 8	− 11	− 31	− 42
80	88	+ 71	− 23	+ 13	+ 35	+ 41	+ 37	− 38	+ 40	− 20	− 27	− 47
1	89	− 52	+ 6	+ 72	+ 21	+ 53	+ 36	− 37	+ 52	− 27	− 21	− 48
2	1890	− 92	+ 30	+ 83	− 3	+ 51	+ 21	− 26	+ 46	− 34	− 13	− 47
3	91	+ 16	+ 23	+ 37	− 25	+ 36	− 1	− 16	+ 19	− 40	− 3	− 43
4	92	+ 98	− 7	− 34	− 36	+ 12	− 24	− 1	− 13	− 43	+ 6	− 37
5	93	+ 23	− 30	− 82	− 30	− 16	− 37	+ 15	− 38	− 46	+ 16	− 30
6	94	− 89	− 22	− 74	− 9	− 39	− 35	+ 27	− 47	− 46	+ 24	− 22
7	95	− 58	+ 8	− 31	+ 15	− 52	− 21	+ 36	− 37	− 44	+ 29	− 15
8	96	+ 66	+ 30	+ 40	+ 33	− 52	+ 2	+ 38	− 12	− 41	+ 32	− 9
9	97	+ 84	+ 22	+ 77	+ 35	− 38	+ 24	+ 34	+ 20	− 36	+ 33	− 3
90	98	− 33	− 9	+ 48	+ 20	− 14	+ 37	+ 23	+ 46	− 29	+ 30	+ 1
1	99	− 97	− 30	− 22	− 4	+ 13	+ 35	+ 9	+ 57	− 22	+ 25	+ 3
2	1900	− 5	− 21	− 73	− 26	+ 37	+ 21	− 7	+ 51	− 13	+ 18	+ 5
3	01	+ 95	+ 10	− 62	− 36	+ 52	− 2	− 21	+ 29	− 4	+ 9	+ 5
4	02	+ 43	+ 30	+ 3	− 29	+ 53	− 24	− 32	− 3	+ 5	− 2	+ 3
5	03	− 78	+ 20	+ 65	− 8	+ 40	− 37	− 38	− 35	+ 14	− 10	+ 4
6	04	− 74	− 10	+ 71	+ 16	+ 17	− 35	− 37	− 55	+ 23	− 19	+ 4
7	05	+ 49	− 31	+ 17	+ 33	− 10	− 20	− 30	− 60	+ 30	− 26	+ 4
8	06	+ 93	− 20	− 52	+ 34	− 35	+ 3	− 17	− 49	+ 37	− 31	+ 6
9	07	− 12	+ 11	− 76	+ 19	− 51	+ 24	− 2	− 29	+ 41	− 33	+ 8
100	08	− 98	+ 31	− 36	− 5	− 53	+ 37	+ 14	− 2	+ 44	− 32	+ 12
1	09	− 27	+ 19	+ 35	− 27	− 42	+ 35	+ 27	+ 20	+ 46	− 29	+ 17
2	1910	+ 87	− 12	+ 76	− 36	− 20	+ 20	+ 35	+ 35	+ 46	− 23	+ 23
3	11	+ 61	− 31	+ 52	− 28	+ 8	− 3	+ 38	+ 43	+ 43	− 15	+ 28
4	12	− 63	− 19	− 16	− 7	+ 33	− 25	+ 35	+ 43	+ 39	− 6	+ 33
5	13	− 86	+ 13	− 71	+ 18	+ 50	− 37	+ 25	+ 38	+ 34	+ 5	+ 39
6	14	+ 29	+ 31	− 65	+ 34	+ 54	− 35	+ 10	+ 29	+ 27	+ 14	+ 41
7	15	+ 98	+ 18	− 3	+ 34	+ 44	− 20	− 5	+ 19	+ 19	+ 22	+ 41
8	16	+ 10	− 13	+ 61	+ 18	+ 22	+ 3	− 20	+ 5	+ 10	+ 28	+ 38
9	17	− 94	− 31	+ 74	− 6	− 5	+ 25	− 31	− 11	+ 1	+ 32	+ 33
110	18	+ 152	− 17	+ 23	− 28	− 31	+ 37	− 38	− 32	− 9	+ 33	+ 24
1	19	+ 12	+ 14	− 47	− 36	− 49	+ 35	− 37	− 51	− 17	+ 31	+ 14
2	1920	− 148	+ 31	− 77	− 27	− 54	+ 19	− 29	− 64	− 25	+ 27	+ 2
3	21	− 52	+ 17	− 41	− 6	− 45	− 3	− 19	− 67	− 33	+ 20	− 13
4	22	+ 134	− 15	+ 30	+ 19	− 25	− 25	− 3	− 53	− 38	+ 11	− 27
5	23	+ 89	− 31	+ 75	+ 34	+ 2	− 37	+ 12	− 23	− 43	+ 2	− 41
6	24	− 110	− 16	+ 57	+ 33	+ 28	− 35	+ 27	+ 20	− 45	− 8	− 53
7	25	− 119	+ 15	− 10	+ 17	+ 47	− 19	+ 35	+ 63	− 46	− 17	− 63
8	26	+ 78	+ 31	− 69	− 8	+ 54	+ 4	+ 37	+ 95	− 45	− 25	− 70
9	27	+ 140	+ 15	− 68	− 29	+ 47	+ 25	+ 35	+ 107	− 42	− 30	− 72
120	28	− 40	− 16	− 10	− 36	+ 27	+ 37	+ 25	+ 89	− 37	− 33	− 70
1	29	− 151	− 31	+ 57	− 26	+ 1	+ 35	+ 11	+ 47	− 31	− 33	− 64
2	1930	− 1	− 14	+ 75	− 4	− 26	+ 19	− 4	− 11	− 24	− 30	− 54
3	31	+ 150	+ 17	+ 29	+ 20	− 46	− 4	− 19	− 69	− 16	− 24	− 40
4	32	+ 42	+ 31	− 42	+ 35	− 54	− 26	− 30	− 110	− 7	− 17	− 24
5	33	− 139	+ 14	− 77	+ 33	− 48	− 37	− 38	− 123	+ 2	− 7	− 5
6	34	− 80	− 18	− 46	+ 16	− 30	− 35	− 36	− 101	+ 12	+ 2	+ 14
7	35	+ 118	− 31	+ 24	− 9	− 3	− 19	− 30	− 52	+ 20	+ 12	+ 32
8	36	+ 112	− 13	+ 74	− 29	+ 24	+ 4	− 19	+ 9	+ 28	+ 20	+ 48
9	37	− 87	+ 18	+ 60	− 36	+ 44	+ 26	− 4	+ 66	+ 35	+ 27	+ 62
130	38	− 135	+ 31	− 4	− 26	+ 54	+ 37	+ 12	+ 103	+ 40	+ 31	+ 71
1	39	+ 50	+ 12	− 66	− 3	+ 49	+ 34	+ 26	+ 109	+ 44	+ 33	+ 77
2	1940	+ 149	− 19	− 71	+ 21	+ 32	+ 18	+ 35	+ 85	+ 46	+ 32	+ 78
3	41	− 10	− 31	− 15	+ 35	+ 6	− 5	+ 38	+ 39	+ 46	+ 28	+ 74
4	42	− 152	− 11	+ 53	+ 32	− 21	− 26	+ 34	− 13	+ 44	+ 21	+ 65
5	43	− 31	+ 20	+ 76	+ 15	− 43	− 37	+ 25	− 55	+ 40	+ 13	+ 53

Welle p9, definitive Berechnung

Periodogrammkomponenten a(x,q) und b(x,q) für q = 0, 9, 18, ... 126 und Versuchswelle p' = 9 Jahre

			$d_i \cdot \cos x_i$									$A(x,q) = \sum_{i=q}^{q+8} d_i \cos x_i$	$\sum A(x,q)_{\varrho^*}$	$a(x,q) = \frac{2}{9} A(x,q)$
i =			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8			
x i =			0°	40°	80°	120°	160°	200°	240°	280°	320°			
cos x i =			1,000	0,766	0,174	−0.500	−0.940	−0.940	−0.500	0.174	0.766			
ϱ^*	q	Jahre												
0	0	1808-16	− 277	− 5	+ 16	+ 44	− 21	− 16	+ 34	− 12	+ 7	− 230	− 230	− 51
1	9	17-25	+ 126	+ 2	− 8	+ 87	− 7	+ 91	− 20	+ 32	− 77	+ 226	− 4	+ 50
2	18	26-34	− 153	+ 189	+ 7	+ 54	+ 178	− 253	+ 109	+ 37	+ 29	+ 197	+ 193	+ 44
3	27	35-43	− 12	+ 8	+ 6	+ 34	+ 68	+ 107	+ 1	− 23	+ 172	+ 361	+ 554	+ 80
4	36	44-52	+ 63	− 46	+ 19	− 43	+ 64	− 4	− 16	− 2	− 22	+ 13	+ 567	+ 3
5	45	53-61	+ 8	− 155	+ 20	+ 9	+ 138	+ 45	− 5	+ 50	− 110	0	+ 567	0
6	54	62-70	− 117	+ 42	+ 6	+ 109	+ 113	− 127	− 2	+ 18	+ 19	+ 61	+ 628	+ 14
7	63	71-79	+ 33	+ 85	+ 8	+ 87	− 3	− 154	− 22	+ 30	+ 138	+ 202	+ 830	+ 45
8	72	80-88	+ 86	+ 14	− 3	− 13	+ 129	− 1	− 20	− 17	+ 156	+ 331	+ 1161	+ 74
9	81	89-97	+ 18	− 5	− 12	− 15	+ 115	− 39	+ 33	+ 29	+ 61	+ 185	+ 1346	+ 41
10	90	98-06	− 55	+ 35	+ 1	+ 30	+ 89	+ 70	+ 36	+ 8	− 72	+ 142	+ 1488	+ 32
11	99	1907-15	+ 22	− 18	− 39	− 80	+ 352	− 43	− 2	+ 19	− 83	+ 128	+ 1616	+ 28
12	108	16-24	+ 99	+ 94	− 43	− 75	− 245	+ 282	− 73	− 14	+ 128	+ 153	+ 1769	+ 34
13	117	25-33	− 172	+ 11	+ 13	+ 18	+ 59	− 152	− 47	+ 3	+ 129	− 138	+ 1631	− 31
14	126	1934-42	− 22	+ 59	+ 11	− 50	+ 54	− 200	− 50	+ 5	− 41	− 234	+ 1397	− 52
												Kontroll Σ		+ 311 = + 1397 / 4,5

			$d_i \cdot \sin x_i$									$B(x,q) = \sum_{i=q}^{q+8} d_i \sin x_i$	$\sum B(x,q)_{\varrho^*}$	$b(x,q) = \frac{2}{9} B(x,q)$
i			q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8			
x i			0°	40°	80°	120°	160°	200°	240°	280°	320°			
sin x i			0,000	0,643	0,985	0.866	0.343	−0.343	−0.866	−0.985	−0.643			
ϱ^*	q	Jahre												
0	0	1808-16	0	− 4	+ 89	− 76	+ 8	− 6	+ 59	+ 68	− 6	+ 132	+ 132	+ 29
1	9	17-25	0	+ 2	− 44	− 151	+ 2	+ 33	− 36	− 183	+ 64	− 313	− 181	− 70
2	18	26-34	0	+ 159	+ 42	− 94	− 65	− 92	+ 189	− 211	− 24	− 96	− 277	− 21
3	27	35-43	0	+ 6	+ 32	− 59	− 25	+ 39	+ 1	+ 129	− 144	− 21	− 298	− 5
4	36	44-52	0	− 39	+ 107	+ 75	− 23	− 1	− 28	+ 8	+ 19	+ 118	− 180	+ 26
5	45	53-61	0	− 130	+ 111	− 16	− 50	+ 16	− 8	− 286	+ 93	− 270	− 450	− 60
6	54	62-70	0	+ 35	+ 31	− 189	− 41	− 46	− 3	− 100	− 16	− 329	− 779	− 73
7	63	71-79	0	+ 71	+ 43	− 151	+ 1	− 56	− 39	− 170	− 116	− 417	− 1196	− 93
8	72	80-88	0	+ 12	− 19	+ 22	− 47	0	− 34	+ 97	− 131	− 100	− 1296	− 22
9	81	89-97	0	− 4	− 67	+ 25	− 42	− 14	+ 57	− 163	− 51	− 259	− 1555	− 58
10	90	98-06	0	+ 29	+ 8	− 52	− 33	+ 26	+ 62	− 43	+ 60	+ 57	− 1498	+ 13
11	99	1907-15	0	− 15	− 222	+ 139	− 128	− 16	− 4	− 107	+ 69	− 284	− 1782	− 63
12	108	16-24	0	+ 79	− 242	+ 130	+ 90	+ 103	− 126	+ 79	− 107	+ 6	− 1776	+ 1
13	117	25-33	0	+ 10	+ 74	− 32	− 22	− 56	− 82	− 19	− 108	− 235	− 2011	− 52
14	126	1934-42	0	+ 49	+ 60	+ 87	− 20	− 73	− 87	− 29	+ 35	+ 22	− 1989	+ 5
												Kontroll Σ		− 443 = − 1989 / 4,5

Bemerkung: 1808 − 1842 $d_i = MQ_i - Q'_i - (y_i^{(5)} + y_i^{(6)} + y_i^{(7)} + y_i^{(12)}) - y_i^{(30)}$

(Q'_i: nach Tafel VIII; $y_i^{(5)} + y_i^{(6)} + y_i^{(7)} + y_i^{(12)}$: XV; $y_i^{(30)}$: nicht wiedergegebene Zwischenrechnung)

1843 − 1943 $d_i = MQ_i - Q'_i - (y_i^{(5)} + y_i^{(6)} + y_i^{(7)} + z_i^{(12)} + z_i^{(15)}) - y_i^{(30)}$

Nebenperiode p_{20}, definitive Berechnung

Periodogrammkomponenten $a(x,q)$ und $b(x,q)$ für $q = 0, 20, \ldots 100$ und Versuchswelle $p' = 20$ Jahre

$d_i \cdot \cos x_i$

			$i =$	q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8	q+9	q+10	q+11	q+12	q+13	q+14	q+15	q+16	q+17	q+18	q+19	$A(x,q) = \sum_{i=q}^{q+19} d_i \cos x_i$	$\Sigma A(x,q)_{\xi^*}$	$a(x,q) = \frac{2}{20} A(x,q)$
			$x_i =$	0°	18°	36°	54°	72°	90°	108°	126°	144°	162°	180°	198°	216°	234°	252°	270°	288°	306°	324°	342°			
			$\cos x_i =$	+1,000	+0,951	+0.809	+0.588	+0.309	0	−0.309	−0.588	−0.809	−0.951	−1.000	−0.951	−0.809	−0.588	−0.309	0	+0.309	+0.588	+0.809	+0.951			
ξ^*	p	Jahre																								
0	0	1808-27		−306	− 15	+ 85	− 32	+ 18	0	+ 22	+ 56	+ 22	− 92	+ 5	+ 27	+114	− 24	+ 22	0	+ 49	− 81	−146	+228	− 48	− 48	− 4,8
1	20	28-47		+ 61	− 70	−125	+169	− 70	0	− 1	+ 23	− 4	− 49	+ 34	+ 37	+ 78	+ 5	+ 49	0	+ 23	− 24	+105	+ 96	+ 337	+ 289	+ 33,7
2	40	48-67		− 71	− 15	0	− 23	− 14	0	+ 52	− 108	− 33	+109	+ 51	+ 21	−201	+102	+ 36	0	+ 26	− 100	− 82	+102	− 148	+ 141	− 14,8
3	60	68-87		− 68	+ 8	− 51	− 15	+ 29	0	+ 45	− 8	− 106	+ 34	− 60	− 62	0	+ 12	+ 3	0	− 32	+ 4	+ 1	− 164	− 430	− 289	− 43,0
4	80	88-07		+118	− 47	− 25	− 24	+ 29	0	− 31	+ 25	− 122	− 43	+ 85	− 43	− 36	− 6	+ 2	0	− 5	+ 41	− 76	+ 16	− 142	− 431	− 14,2
5	100	1908-27		− 17	− 188	+171	− 182	+ 34	0	− 42	+ 57	− 81	− 118	+238	− 156	− 226	+168	− 47	0	+ 51	− 105	+ 5	+ 59	− 379	− 810	− 37,9
		1928-43		− 59	− 92	+ 95	+ 28	− 8	0	+ 13	− 38	− 35	− 64	+ 113	− 131	− 15	+ 25	+ 31	0							

Kontroll Σ $-81{,}0 = \frac{-810}{10}$

$d_i \cdot \sin x_i$

			$i =$	q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8	q+9	q+10	q+11	q+12	q+13	q+14	q+15	q+16	q+17	q+18	q+19	$B(x,q) = \sum_{i=q}^{q+19} d_i \sin x_i$	$\Sigma B(x,q)_{\xi^*}$	$b(x,q) = \frac{2}{20} B(x,q)$
			$x_i =$	0°	18°	36°	54°	72°	90°	108°	126°	144°	162°	180°	198°	216°	234°	252°	270°	288°	306°	324°	342°			
			$\sin x_i =$	0	+0,309	+0,588	+0,809	+0,951	+1,000	+0,951	+0,809	+0,588	+0,309	0	−0,309	−0,588	−0,809	−0,951	−1,000	−0,951	−0,809	−0,588	−0,309			
ξ^*	p	Jahre																								
0	0	1808-27		0	− 5	+ 62	− 44	+ 55	+ 37	− 68	− 77	− 16	+ 30	0	+ 9	+ 83	− 33	+ 68	− 36	−151	+111	+107	− 74	+ 58	+ 58	+ 5,8
1	20	28-47		0	− 23	− 91	+232	−214	+187	+ 2	− 32	+ 3	+ 16	0	+ 12	+ 57	+ 6	+152	−224	− 70	+ 32	− 76	− 31	− 62	− 4	− 6,2
2	40	48-67		0	− 5	0	− 32	− 42	+ 19	−161	+149	+ 24	− 36	0	+ 7	−146	+140	+110	− 90	− 80	+138	+ 60	− 33	+ 22	+ 18	+ 2,2
3	60	68-87		0	+ 2	− 37	− 20	+ 90	+ 63	−137	+ 11	+ 77	− 11	0	− 20	0	+ 17	+ 10	− 62	+ 97	− 5	− 1	+ 53	+ 127	+ 145	+ 12,7
4	80	88-07		0	− 15	− 18	− 33	+ 88	− 46	+ 94	− 35	+ 89	+ 14	0	− 14	− 26	− 9	+ 6	− 7	+ 15	− 57	+ 55	− 5	+ 96	+ 241	+ 9,6
5	100	1908-27		0	− 61	+125	−251	+105	+ 54	+130	− 78	+ 59	+ 38	0	− 51	−164	+231	−145	+ 78	−156	+175	− 4	− 19	+ 36	+ 277	+ 3,6
		1928-43		0	− 30	+ 69	+ 38	− 24	+134	− 40	+ 52	+ 25	+ 21	0	− 43	− 11	+ 34	+ 94	+356							

Kontroll Σ $+27{,}7 = \frac{+277}{10}$

Bemerkung:

1808 – 1854 : $d_i = MQ_i - Q_i' - (y_i^{(5)} + y_i^{(6)} + y_i^{(7)} + y_i^{(9)} + y_i^{(12)} + y_i^{(30)})$

(Q_i' nach Tafel VIII; $y_i^{(30)}$ = XV)

1855 – 1940 : $d_i = MQ_i - Q_i' - (y_i^{(5)} + y_i^{(6)} + y_i^{(7)} + y_i^{(9)} + y_i^{(12)} + z_i^{(30)})$

Welle p_5, definitive Berechnung für Zeitabschnitt 1888–1944

Periodogrammkomponenten a(x,q) und b(x,q) für q = 0, 18, ... 198 und Versuchswelle p' = 18 Vierteljahre

$d_5 \cdot \cos xi$

	i =	q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8	q+9	q+10	q+11	q+12	q+13	q+14	q+15	q+16	q+17	$A(x,q)=\sum_{i=q}^{q+17} d_5 \cos xi$	$\Sigma A(x,q)_{\xi^*}$	$a(x,q)=\frac{2}{18} A(x,q)$
	xi =	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°	200°	220°	240°	260°	280°	300°	320°	340°			
	cos xi =	+1,000	+0,940	+0,766	+0,500	+0,174	−0,174	−0,500	−0,766	−0,940	−1,000	−0,940	−0,766	−0,500	−0,174	+0,174	+0,500	+0,766	+0,940			
ξ^*	q	Vierteljahre																				
0	0	1888,125–92,375	− 31	+252	+308	+ 94	− 42	− 13	+ 59	+ 24	+213	+416	−230	− 7	+148	− 4	+ 35	+ 26	+227	+161	+ 1636	+ 1636	+ 182
1	18	92,625–96,875	+105	+221	+119	− 84	− 29	− 10	+ 26	+ 70	− 57	− 32	+ 62	− 93	+179	+ 44	+ 11	+ 81	+226	+165	+ 1004	+ 2640	+ 112
2	36	97,125–01,375	+121	+ 99	+300	−122	− 54	− 17	+ 98	+156	− 87	+ 5	+185	+148	−136	− 8	− 16	− 44	− 47	+338	+ 919	+ 3559	+ 102
3	54	01,625–05,875	+154	0	+ 52	+116	− 2	+ 17	− 2	+174	− 24	+ 49	+ 1	−224	+188	+ 39	− 26	+102	+124	+284	+ 1022	+ 4581	+ 113
4	72	06,125–10,375	+134	+221	− 18	−136	+ 2	− 63	+ 12	+165	+ 71	−173	+ 76	+248	+160	+ 55	− 7	− 38	+265	+222	+ 1196	+ 5777	+ 133
5	90	10,625–14,875	+539	+178	− 59	− 74	− 86	+ 40	− 10	+ 8	−116	− 15	+ 23	+126	− 24	+ 16	+ 38	+118	+240	−238	+ 704	+ 6481	+ 78
6	108	15,125–19,375	− 52	+131	−102	− 59	+ 10	− 9	− 34	−103	+ 49	− 23	+ 30	− 70	+ 51	+ 50	− 21	+ 54	+239	+291	+ 432	+ 6913	+ 48
7	126	19,625–23,875	− 54	+ 93	+322	+ 90	+ 12	+ 33	+104	+335	+450	+261	−171	−326	−122	− 45	+ 35	+ 0	−254	+169	+ 932	+ 7845	+ 103
8	144	24,125–28,375	− 51	+375	+ 94	− 91	− 56	+ 59	+162	+ 57	−207	−193	−187	+ 84	− 28	− 70	+ 73	+ 45	+ 57	−108	+ 15	+ 7860	+ 2
9	162	28,625–32,875	−358	+142	−116	− 64	− 66	+ 44	+ 82	− 75	− 89	−440	−256	−175	−171	+ 21	− 14	− 35	+ 97	− 22	− 1495	+ 6365	− 166
0	180	33,125–37,375	− 72	− 20	− 11	− 20	− 11	+ 72	+ 24	+ 59	−174	−329	+145	−228	−168	+ 13	+ 52	+ 4	+ 95	+181	− 388	+ 5977	− 43
1	198	37,625–41,875	−190	−248	−124	−210	− 17	+ 71	+ 94	− 67	− 76	−626	− 55	+ 8	−146	− 37	+ 19	− 44	− 91	−149	− 1888	+ 4089	− 210
		1942,125–44,875	−109	−196	−329	−110	− 34	+ 49	+286	+274	+126	+ 45	+165	−498									

Kontroll Σ + 454 = $\frac{+4089}{9}$

$d_5 \cdot \sin xi$

	i =	q+0	q+1	q+2	q+3	q+4	q+5	q+6	q+7	q+8	q+9	q+10	q+11	q+12	q+13	q+14	q+15	q+16	q+17	$B(x,q)=\sum_{i=q}^{q+17} d_5 \sin xi$	$\Sigma B(x,q)_{\xi^*}$	$b(x,q)=\frac{2}{18} B(x,q)$
	xi =	0°	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°	200°	220°	240°	260°	280°	300°	320°	340°			
	sin xi =	0,000	+0,342	+0,643	+0,866	+0,985	+0,985	+0,866	+0,643	+0,342	0,000	−0,342	−0,643	−0,866	−0,985	−0,985	−0,866	−0,643	−0,342			
ξ^*	q	Vierteljahre																				
0	0	1888,125–92,375	0	+ 92	+259	+163	−236	+ 74	−102	− 21	− 78	0	− 84	− 6	+257	− 21	−198	− 46	−190	− 59	− 196	− 196	− 22
1	18	92,625–96,875	0	+ 80	+100	−145	−163	+ 58	− 46	− 59	+ 21	0	+ 23	− 78	+310	+248	− 65	−139	−190	− 60	− 105	− 301	− 12
2	36	97,125–01,375	0	+ 36	+252	−212	−306	+ 97	−169	−131	+ 32	0	+ 67	+124	−236	− 44	+ 93	+ 75	+ 39	−123	− 406	− 707	− 45
3	54	01,625–05,875	0	0	+ 44	+202	− 14	− 97	+ 4	−146	+ 9	0	+ 0	−189	+325	+222	+147	−176	−104	−103	+ 124	− 583	+ 14
4	72	06,125–10,375	0	+ 80	− 15	−235	+ 12	+356	− 22	−139	− 26	0	+ 28	+209	+277	+312	+ 37	+ 66	−223	− 81	+ 636	+ 53	+ 71
5	90	10,625–14,875	0	+ 65	− 50	−128	−488	−228	+ 18	− 6	+ 42	0	+ 8	+106	− 41	+ 92	−214	−205	−202	+ 87	− 1144	− 1091	− 127
6	108	15,125–19,375	0	+ 48	− 86	−102	+ 58	+ 50	+ 59	+ 86	− 18	0	+ 11	− 59	+ 88	+285	+117	− 93	−201	−106	+ 137	− 954	+ 15
7	126	19,625–23,875	0	+ 34	+271	+156	+ 69	−184	−180	−282	−164	0	− 62	−274	−212	−253	−198	− 1	+213	− 62	− 1129	− 2083	− 125
8	144	24,125–28,375	0	+136	+ 79	−158	−317	−335	−281	− 48	+ 75	0	− 68	+ 71	− 48	−395	−416	− 77	− 48	+ 39	− 1791	− 3874	− 199
9	162	28,625–32,875	0	+ 52	− 97	−110	−374	−247	−142	+ 63	+ 32	0	− 93	−147	−296	+117	+ 80	+ 61	− 82	+ 8	− 1175	− 5049	− 131
0	180	33,125–37,375	0	− 7	− 9	− 36	− 61	−407	− 42	− 50	+ 63	0	+ 53	−192	−291	+ 73	−297	− 7	− 80	− 66	− 1356	− 6405	− 151
1	198	37,625–41,875	0	− 90	−104	−364	− 95	−404	−162	+ 56	+ 28	0	− 20	+ 7	−253	−210	−105	+ 75	+ 77	+ 54	− 1510	− 7915	− 168
		1942,125–44,875	0	− 71	−277	−190	−191	−280	−497	−230	− 46	0	+ 60	−419									

Kontroll Σ − 880 = $\frac{-7915}{9}$

Bemerkung: Werte d_5 nach Tafel IV

:

Vorlage > A3

:

:

:

Vorlage > A3

:

:

Vorlage > A3

Vorlage > A3