

Dynamische Beanspruchungen
in
eisernen einfachen Balkenbrücken
mit konstantem Trägheitsmoment.

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH
ZUR ERLANGUNG
DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON
MARIN ARNOLD STOOP, DIPL. ING.
AUS FLUMS.

Referent: Herr Prof. Dr. E. Meißner.
Korreferent: Herr Prof. A. Rohn.

278



ZÜRICH □ 1923.
Diss.-Druckerei Gebr. Leemann & Co. A.-G.
Stockerstr. 64.

Leer - Vide - Empty

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
A. Allgemeiner Teil.	
§ 1. Einleitung	6
§ 2. Allgemeines über Schwingungen und dynamische Beanspruchungen	9
§ 3. Allgemeine Lösung von Schwingungsproblemen	10
§ 4. Genaue Formulierung des Problems für ruhende und bewegte Lasten	16
§ 5. Näherungslösung für den einfachen Balken	17
B. Schwingungen von Vollwandträgern.	
I. Schwingungen infolge bewegter oder variabler Lasten.	
§ 1. Schwingungen infolge einer Einzellast	26
§ 2. " " gleichmäßig verteilter Belastung	37
§ 3. " " periodisch veränderlicher Kräfte	42
§ 4. Träger mit variablem Trägheitsmoment	58
II. Stoßbeanspruchungen.	
§ 1. Stoß-Schwingungen und Stoßkoeffizienten	61
§ 2. Wiederholte Impulse	77
§ 3. Näherungsformeln	78
§ 4. Günstigste Trägerformen für Stoßbeanspruchung	80
III. Dynamische Wirkungen infolge der Schienenstöße bei Eisenbahnbrücken.	
§ 1. Dynamische Beanspruchung der Schienenenden	81
§ 2. Erzwungene Schwingung eines eingespannten Balkens	84
§ 3. Stoß-Schwingungen eines einseitig eingespannten Balkens	90
§ 4. Stoßkoeffizient für eiserne Brücken	93
C. Schwingungen von Fachwerken.	
§ 1. Allgemeines über Fachwerkschwingungen	98
§ 2. Näherungsverfahren zur Bestimmung der Longitudinalschwingungen von Fachwerkstäben	99
§ 3. Longitudinalschwingungen von Füllungsgliedern	104
§ 4. Stoßwirkungen	110
§ 5. Querschwingungen von Fachwerkstäben	112
D. Zusammenfassung	116
E. Anordnung von Versuchen zur Bestimmung dynamischer Einflüsse	118

Leer - Vide - Empty

Vorwort.

Die sehr willkürliche Berücksichtigung dynamischer Einflüsse bei Ingenieurbauten veranlaßte den Verfasser zur genaueren Untersuchung einiger Spezialfälle. Die vorliegende Arbeit bringt keine neuen Theorien über Schwingungsprobleme; sie beschränkt sich in der Hauptsache auf den Versuch, die bisher aus der Literatur bekannten, meistens sehr theoretischen Resultate auf eine Form zu bringen, die der Praktiker bei der Projektierung von Bauwerken verwenden kann. Diese Umformung gelingt nur durch Annahmen, deren Gültigkeit einzig durch Versuche festgestellt werden kann. Da die bis heute durchgeführten Versuche darüber keinen Aufschluß geben, und der Verfasser selber keine solchen gemacht hat, so bleibt der Charakter der Arbeit mehr theoretischer Natur. Die Arbeit möge ein Bindeglied zwischen Theorie und Praxis sein, indem sie der Praxis für durchzuführende Versuche Richtlinien angibt, und die bisher verwendeten Faustregeln der Berücksichtigung dynamischer Einflüsse durch Dimensionierungsregeln ersetzt, die mehr oder weniger mit theoretischen Überlegungen zusammenhängen.

Den Herren Professoren Meißner und Rohn spreche ich für die mir während der Bearbeitung gegebenen Ratschläge theoretischer und praktischer Natur meinen verbindlichsten Dank aus.

A. Allgemeiner Teil.

1. Einleitung.

Die Baustatik, speziell jene der Eisen- und Eisenbetonkonstruktionen, hat sich in den letzten Jahren sehr vervollkommnet. Die Berechnung der dynamischen Beanspruchung hat mit der Statik nicht Schritt gehalten. Daraus darf nicht abgeleitet werden, daß die dynamische Beanspruchung im Vergleich zur statischen immer sehr klein bleibe. Wohl gibt es Konstruktionen, bei denen sie von sehr untergeordneter Bedeutung ist. Man denke an weitgespannte massive Gewölbe, an große Staumauern u. s. f. Andererseits kann bei leichten Eisenkonstruktionen oder bei einzelnen Teilen derselben die dynamische Beanspruchung die statische weit überschreiten.

Jede Krafteinwirkung auf eine Tragkonstruktion, die nicht unendlich langsam vor sich geht, erzeugt Schwingungen, und damit dynamische Beanspruchungen. Über das Vorkommen dynamischer Zusatzbeanspruchungen war man sich seit jeher klar; ihre Bedeutung konnte theoretisch nicht ermittelt werden. An fertigen, im Betrieb stehenden Konstruktionen auftretende Wirkungen zeigten deutlich die Wichtigkeit derselben. Häufige Defekte in Fahrbahnkonstruktionen eiserner Brücken finden ihre Erklärung in der Überbeanspruchung durch Stoßbelastung, deren Ursache in der Fahrbahn oder in den Fahrzeugen liegt. Starke Schwingungen von Straßenbrücken, speziell von Bogen- und Hängebrücken, sind bekannte Tatsachen. In einzelnen Fällen hatten sie den Einsturz der Brücken zur Folge. Knickungen schwacher Zugdiagonalen in Fachwerken zeigen, daß sich die Schwingungen auch in den einzelnen Teilen von Tragwerken geltend machen. Schäden in gelenkigen Knotenpunkten und Mittelgelenken

von Gerberträgern können auch nur Folgen dynamischer Beanspruchungen sein.¹⁾

Daraus ergab sich die Notwendigkeit, die dynamischen Einflüsse in der Berechnung, so weit möglich, zu berücksichtigen. Da das Wesen und der Zusammenhang der Wirkungen mit den Ursachen nicht bekannt waren, erhöhte die Technik einfach die statischen Belastungen. Diese Art der Berücksichtigung ist bis heute geblieben. Die Bauvorschriften fast aller Länder schreiben sogenannte „Stoßkoeffizienten“, d. h. Vergrößerungskoeffizienten der statischen Belastung vor, deren Verschiedenheit das Fehlen irgend einer theoretischen Begründung erkennen läßt.²⁾ Zum Teil, wie z. B. in Nordamerika, stützen sich die Stoßkoeffizienten auf Versuchsreihen, die an fertigen Bauwerken durchgeführt wurden. Die nordamerikanischen Stoßkoeffizienten sind relativ groß; sie geben z. B. viel größere Werte als die, in der Schweiz verwendete Formel $2(15-l)\%$, wenn l die Stützweite in Metern ist.

Neben diesen Stoßkoeffizienten haben sich im Laufe der Zeit auch Konstruktionsregeln herausgebildet, die aber alle mehr aus Gefühl und Erfahrung heraus darnach trachten, die dynamischen Wirkungen zu vermindern.

Mit der Einführung der Stoßkoeffizienten ist in Wirklichkeit nichts verbessert. Der effektive Sicherheitsgrad bleibt unkontrollierbar. Eine Berechnung der Tragwerke nach rein statischen Gesichtspunkten kann auch bei vergrößerten Lasten nie als zutreffend betrachtet werden, weil sie den Beziehungen zwischen den verschiedenen dynamischen Wirkungen und ihren Ursachen gar keine Rechnung trägt.

Es läßt sich sogar denken, daß die Erhöhung der statischen Belastung eine Verminderung des Sicherheitsgrades zur Folge hat. Daher muß angestrebt werden, die Berücksichtigung der dynamischen Verhältnisse auf bessere Grundlagen zu stellen, die den kausalen Zusammenhang zu erfassen suchen. Es ist vorauszusehen,

¹⁾ Vergl. „Eng. News Record“, 4. März 1920, Vol. 84, No. 10.

²⁾ H. Saller, Stoßwirkungen an Tragwerken und am Oberbau im Eisenbahnbetrieb, Diss. Darmstadt, Wiesbaden 1910.

Melan, Über die dynamische Wirkung bewegter Lasten auf Brücken. Zeitschrift d. Österr. Ing.- und Architekten-Vereines 1893, Heft No. 20.

daß die Trägerabmessungen eine wesentliche Rolle spielen werden, d. h., daß sie für bestimmte Belastungsarten ungünstigste Werte haben können. Es wird Aufgabe der Rechnung sein, diese ungünstigsten Verhältnisse kennen zu lernen, um sie beim Bau von Tragwerken zu vermeiden. Gleichzeitig muß es möglich werden, die Größe der wirklich vorkommenden dynamischen Beanspruchungen genauer abzuschätzen, und sie durch entsprechende Dimensionierung unterhalb bestimmter Grenzen zu halten.

Die theoretische Untersuchung der dynamischen Verhältnisse führt sofort zu komplizierten und langwierigen Rechnungen. Die bestehende Literatur über Schwingungsprobleme ist sehr mannigfaltig. Die genaue Durchführung der Rechnung ohne einschränkende Annahmen ist selbst für die einfachsten Verhältnisse bis anhin nicht gelungen und begegnet auch heute noch unüberwindlichen Schwierigkeiten. Wir sind zu vereinfachenden Annahmen gezwungen. Die Einflüsse, deren Ermittlung dadurch möglich wird, sind oft relativ klein gegenüber unregelmäßigen Einflüssen, deren Berücksichtigung nur ganz annähernd durchgeführt werden kann, oder bei denen nur extreme, vielleicht nie vorkommende Verhältnisse untersucht werden können, wie z. B. Schienenstöße und unrunde Räder bei Eisenbahnbrücken oder andere Unregelmäßigkeiten der Fahrbahn oder Fahrzeuge. Ob, und in welchem Maße die getroffenen Annahmen der Wirklichkeit entsprechen, entzieht sich in den meisten Fällen einer theoretischen Beurteilung, und ist erst durch ausgedehnte Versuche nachzuweisen.

Die vorliegende Arbeit will die mathematischen Lösungen der bestehenden Literatur auf einfache vollwandige Balkenbrücken anwenden. Da die theoretischen Grundlagen dieser Arbeit dem Bauingenieur nicht sehr nahe liegen, wird in einem ersten Abschnitt ein Teil der Lösungen allgemeiner Schwingungsprobleme wiedergegeben, währenddem im übrigen an den zutreffenden Stellen jeweils auf die einschlägige Literatur verwiesen wird.

Von den gefundenen Resultaten darf noch keineswegs die gleiche Genauigkeit verlangt werden wie von den statischen Berechnungen. Durchwegs haben zahlreiche Versuche erst zu zeigen, in welchem Maße die Annahmen zulässig sind, respektive in welcher

Hinsicht dieselben gewisser Abänderungen bedürfen. Theorie und Praxis müssen sich durch andauerndes Zusammenarbeiten unterstützen, um die sehr komplizierte Frage der Dynamik der Tragwerke in dem, für die Technik notwendigen Sinne zu lösen. Wenn diese Lösung gelingen wird, so wird ein rationelles Bauen in Form, Dimensionen und Material möglich werden.

Die Gliederung der Arbeit entspricht neben dem allgemeinen theoretischen Teil der Verschiedenheit der Konstruktions- und Belastungsart, über deren Mannigfaltigkeit schon das Inhaltsverzeichnis Aufschluß gibt. Zur Vermeidung der für die Technik wichtigsten Erscheinung, der Resonanzschwingungen werden Dimensionierungsregeln abgeleitet. Durch geeignete Wahl von Eigengewicht und Trägheitsmoment ist es immer möglich, die Resonanz auszuschalten. Besondere Aufmerksamkeit wird den eigentlichen Stoß-Schwingungen, sowie den Stoßbeanspruchungen bei Schienenstößen von Eisenbahnbrücken gewidmet. Für diese dynamische Wirkung wird ein Stoßkoeffizient abgeleitet. Die Fachwerkträger werden nur insofern getrennt behandelt, als es sich um die Beanspruchung einzelner Teile handelt.

2. Allgemeines über Schwingungen und dynamische Beanspruchungen.

Jede dynamische Einwirkung erzeugt in einem elastischen Körper Schwingungen um eine bezügliche Gleichgewichtslage. Die Größe der Schwingungsamplituden gibt uns ein Maß für die Beanspruchung des Trägers.

Da im Brückenbau hauptsächlich stabförmige Konstruktionen oder Konstruktionsteile vorkommen, werden wir Longitudinal-, Transversal- und Torsionsschwingungen unterscheiden. Wir verstehen unter Longitudinalschwingungen die Schwingungen der einzelnen Stabelemente in Richtung der Stabaxe, unter Transversalschwingungen jene senkrecht zur Stabaxe und unter Torsionsschwingungen die Rotationen um die Stabaxe. Wir werden nur die beiden erstern behandeln.

Die Schwingungen werden in freie und erzwungene eingeteilt. Eine Schwingung ist frei, wenn sie nur durch die anfängliche Erregung bedingt ist und nicht von der Wirkung der äußern Kräfte abhängt. Eine Schwingung ist erzwungen, wenn sie durch

eine zeitlich dauernde Wirkung äußerer Kräfte entsteht und vom Anfangszustand unabhängig ist. Eine ganz allgemeine Schwingung läßt sich wegen der Linearität der bezüglichen Differentialgleichung aus einer freien und einer erzwungenen Schwingung additiv zusammensetzen.

Unter dynamischen Beanspruchungen verstehen wir solche, die erzeugt werden von:

1. Einer ihrer Richtung nach festen, dagegen bezüglich ihrer Intensität zeitlich veränderlichen, an bestimmter Stelle des Trägers wirkenden Kraft. Als solche Kraft muß prinzipiell jede auf den Träger wirkende Kraft angesehen werden, sofern deren Änderung nicht unendlich langsam vor sich geht.

2. Einer „plötzlich“ wirkenden Kraft, welche auch als Grenzfall von 1. betrachtet werden kann. Windstöße auf eine Brücke kommen in ihrer Wirkung einer solchen Kraft sehr ähnlich.

3. Einer Last konstanter oder veränderlicher Größe, deren Angriffspunkt sich auf dem Träger verschiebt.

4. Der Fliehkraft infolge Krümmung der elastischen Linie.

5. Einer auf das Tragwerk fallenden Last.

6. Unregelmäßigen Einflüssen konstruktiver Art, wie Schienenstößen, unrunder Rädern u. s. w.

Die auffälligste dynamische Erscheinung ist die Resonanz, d. h. das Auftreten großer, mit der Zeit wachsender Schwingungsamplituden. Die Resonanz bei periodischen Kräften wurde schon oft behandelt; es wurden dabei auch schon recht früh Schwingungsdiagramme aufgenommen und kritische Geschwindigkeiten hergeleitet.³⁾

3. Allgemeine Lösung von Schwingungsproblemen.

In diesem Abschnitt werden die fundamentalen Gleichungen für Stabschwingungen zusammengestellt,⁴⁾ und zwei allgemeine Verfahren zur Bestimmung freier und erzwungener

³⁾ Steiner, Über Metallkonstruktionen der Zukunft. Zeitschrift d. Österr. I.- u. A.-Ver. 1892, Heft No. 8. — Deslandres, Note sur les épreuves par charge roulante. Annales des Ponts et Chaussées 1894.

⁴⁾ Rayleigh, Theorie des Schalles, deutsch von F. Neesen. Braunschweig 1879.

Schwingungen angegeben.⁵⁾ Die hier zu gebende Darstellung ist so knapp gehalten, daß noch speziell auf die angegebene Literatur verwiesen sei.

Die Methoden von Timoschenko und Kriloff setzen im allgemeinen massenlose Lasten voraus. Wir werden geeignete Annahmen treffen, um die Masse der Last in einfacher Weise berücksichtigen zu können. Die damit abgeleiteten Resultate sind freilich nur mehr Näherungswerte; das Wesentliche der Rechnung bleibt aber gewahrt.

Wir legen unsern Untersuchungen einen einfachen Balken mit konstantem Trägheitsmoment, Querschnitt, Materialdichte und Elastizitätszahl E zu Grunde. Das linke Auflager wird als Nullpunkt eines Koordinatensystems xy gewählt; die $+x$ -Axe gehe nach rechts und falle mit der geraden Stabaxe zusammen, und die $+y$ -Axe gehe nach unten. Wir wählen weiter folgende Bezeichnungen:

x = Abstand eines beliebigen Punktes der Trägeraxe vom linken Auflager.

t = Zeit.

$y = y(x, t)$ = Schwingungsordinate d. bel. Punktes.

Mit dem Symbol \cdot bezeichnen wir Ableitungen nach t

$(y)_{t=0} = f(x)$, eine im Intervall $0 < x < l$ definierte Funktion von x , welche für $t = 0$ die Form der Balkenaxe gibt.

$(\dot{y})_{t=0} = g(x)$, eine im Intervall $0 < x < l$ definierte Funktion von x , welche für $t = 0$ die Geschwindigkeit der einzelnen Trägerpunkte gibt.

u = Normalfunktion des einfachen Balkens, eine Funktion von x allein.

φ = Normalkoordinate, eine Funktion von t allein.

E = Elastizitätsmodul; ρ = Materialdichte; F = Stabquerschnitt; J resp. κ = Trägheitsmoment resp. Trägheitsradius des Querschnittes in Bezug auf die zur Schwingungsebene senkrechte Schweraxe; l = Balkenlänge.

⁵⁾ Timoschenko, Erzwungene Schwingungen prismatischer Stäbe. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1911. — Kriloff, Erzwungene Schwingungen von Stäben. Mathematische Annalen 1905.

Mit $b^2 = \frac{E}{\rho}$ und unter Vernachlässigung der Dämpfungskräfte und der Rotationsträgheit bei Transversalschwingungen, genügen die freien Schwingungen eines Stabes folgenden Differentialgleichungen.

Longitudinalschwingungen*)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad 1)$$

Transversalschwingungen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b^2 \cdot x^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad 2)$$

y ist so zu bestimmen, daß es:

1. Der betreffenden Differentialgleichung genügt.
2. Sich den Anfangsbedingungen anpaßt, d. h. für $t = 0$, $y = f(x)$, $y' = g(x)$.
3. Für jedes beliebige t die Randbedingungen erfüllt.

Die Randbedingungen sind:

Bei Longitudinalschwingungen

- a) Für ein freies Ende $y' = 0$.
- b) Für ein festgehaltenes Ende $y = 0$.

Bei Transversalschwingungen

- a) Für ein freies Ende $y'' = 0$ und $y''' = 0$.
- b) Für gestütztes Ende $y = 0$ und $y'' = 0$.
- c) Für eingespanntes Ende $y = 0$ und $y' = 0$.

Die Lösung der partiellen Differentialgleichungen gelingt durch den Ansatz:

$$y = u \cdot \varphi.$$

Die Normalfunktion u ist von der bezüglichen Differentialgleichung und den Randbedingungen abhängig. Nachstehend geben wir die Bestimmung von u und φ am Beispiel der Transversalschwingung.

Setzen wir $y = u \cdot \varphi$ in Gleichung 2 ein, so ergibt sich

$$u \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + b^2 \cdot x^2 \cdot \varphi \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

*) Hier bedeutet y die Verschiebung parallel zur Stabaxe x .

oder
$$-\frac{1}{b^2 x^2} \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = + \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

Diese Gleichung ist nur möglich, wenn jede Seite konstant ist. Wir nennen die Konstante m^4 . Dann gilt:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - m^4 \cdot u = 0 \tag{2a}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + x^2 \cdot b^2 \cdot m^4 \varphi = 0$$

Daraus folgen u und φ .

$$u = C_1 \cdot \operatorname{ch} mx + C_2 \cdot \operatorname{sh} mx + C_3 \cdot \cos mx + C_4 \cdot \sin mx$$

$$\varphi = D \cdot \cos(m^2 \cdot x \cdot b \cdot t) + E \sin(m^2 \cdot x \cdot b \cdot t)$$

$C_1 \dots C_4$, D und E sind willkürliche Integrationskonstante. Die Randbedingungen für u bestimmen die Verhältnisse $C_1:C_2:C_3:C_4$ und liefern außerdem eine Gleichung, die von m erfüllt sein muß. Diese Gleichung hat stets unendlich viele positive Wurzeln, also gültige Werte m . Wegen der Linearität der Differentialgleichung ergibt sich die allgemeine Lösung durch Superposition der einzelnen Lösungen. Da nur die Verhältnisse $C_1:C_2:C_3:C_4$ bestimmt sind, und also zu u noch ein willkürlicher Proportionalitätsfaktor gesetzt werden kann, so ist mit $C_i \cdot D_i = A_i$ und $C_i \cdot E_i = B_i$

$$y = \sum u_i \cdot \varphi_i = \sum A_i \cdot u_i \cdot \cos(m_i^2 \cdot x \cdot b \cdot t) + \sum B_i \cdot u_i \cdot \sin(m_i^2 \cdot x \cdot b \cdot t)$$

A_i und B_i bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen unter Verwendung der Orthogonalitätsbedingung der Normalfunktionen

$$\int_0^l u_i \cdot u_k \cdot dx = 0 \quad \text{für } i \neq k$$

zu
$$A_i = \frac{\int_0^l f(x) \cdot u_i \cdot dx}{\int_0^l u_i^2 \cdot dx}; \quad B_i = \frac{1}{m^2 \cdot b \cdot z} \cdot \frac{\int_0^l g(x) \cdot u_i \cdot dx}{\int_0^l u_i^2 \cdot dx}$$

Die Nennerwerte $\int_0^l u_i^2 dx$ finden sich bei Rayleigh für die verschiedenen Stützungsarten zusammengestellt.

Mit diesen Angaben können für irgendwelche Anfangsbedingungen die freien Schwingungen bestimmt werden.

Für technische Probleme sind die erzwungenen Schwingungen von weitaus größerer Bedeutung. Bezeichnen wir mit $L(x,t)$ die, in jedem Punkt auf die Längeneinheit bezogene, in Richtung der $+y$ -Axe wirkende Kraft, so heißt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \kappa^2 \cdot b^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{1}{\rho \cdot F} \cdot L(x,t) \quad 3)$$

Zur Lösung dieser Gleichung wird $L(x,t)$ in eine nach den Normalfunktionen fortschreitende Reihe entwickelt.⁶⁾

$$L(x,t) = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 + \dots + N_i \cdot u_i + \dots$$

N_i ist darin die erzeugende Kraft der i ten Normalschwingung und bestimmt sich aus

$$N_i = \frac{\int_0^l L(x,t) \cdot u_i \cdot dx}{\int_0^l u_i^2 \cdot dx} \quad 4)$$

N_i ist daher eine ganz bestimmte Funktion der Zeit.

Im Ausdruck $y = \sum R_i \cdot u_i$ wird R_i bestimmt aus

$$\frac{d^2 R_i}{dt^2} + m_i^4 \cdot b^2 \cdot \kappa^2 \cdot R_i = \frac{1}{\rho \cdot F} \cdot N_i,$$

und unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen wird

$$R_i = \frac{1}{\rho \cdot F} \cdot \frac{1}{m_i^2 \cdot b \cdot \kappa} \cdot \left[\sin(m_i^2 \cdot b \cdot \kappa \cdot t) \int_0^t N_i \cos(m_i^2 \cdot b \cdot \kappa \cdot t) \cdot dt - \cos(m_i^2 \cdot b \cdot \kappa \cdot t) \int_0^t N_i \sin(m_i^2 \cdot b \cdot \kappa \cdot t) \cdot dt \right]$$

Damit können alle beliebigen erzwungenen Schwingungen infolge irgendwelcher Kräfte bestimmt werden.

Eine andere allgemeine Lösungsmethode wird von Timoschenko benutzt.⁷⁾ Sie stützt sich auf die Ausdehnung der zweiten Form der Lagrange'schen Gleichungen auf ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Da wir zur Festlegung der Lage des Systems die Normalkoordinaten wählen, so können, unter der Vor-

⁶⁾ Siehe Fußnote 5, Kriloff.

⁷⁾ Siehe Fußnote 5, Timoschenko.

aussetzung kleiner Schwingungen, kinetische und potentielle Energie durch homogene Funktionen zweiten Grades in φ und $\dot{\varphi}$ dargestellt werden.

$$\text{Kinetische Energie } E_k = \frac{1}{2} (a_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + a_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \dots) = \frac{1}{2} \Sigma a_i \dot{\varphi}_i^2$$

$$\text{Potentielle Energie } V = \frac{1}{2} (c_1 \cdot \varphi_1^2 + c_2 \cdot \varphi_2^2 + \dots) = \frac{1}{2} \Sigma c_i \varphi_i^2$$

A_i und C_i sind vom System abhängige Größen, die für kleine Schwingungen als konstant angenommen werden können.

Die allgemeine Lagrange'sche Gleichung in der Form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = \Phi_i$$

gibt folgende totale Differentialgleichung für φ_i

$$\varphi_i'' + n_i^2 \cdot \varphi_i = \frac{1}{a_i} \cdot \Phi_i \quad 5)$$

Darin ist Φ_i die der Koordinate φ_i entsprechende verallgemeinerte Kraft, und $n_i^2 = \frac{c_i}{a_i}$

Bei gegebenen äußern Kräften bestimmt sich Φ_i aus der Bedingung, daß $\Phi_i \cdot \delta\varphi_i$ gleich der Arbeit der äußern Kräfte ist, wenn sich φ_i um $\delta\varphi_i$ ändert. Für freie Schwingungen wird $\Phi_i = 0$.

Aus Gl. 5 berechnet sich φ_i zu

$$\varphi_i = (\varphi_i)_0 \cdot \cos(n_i \cdot t) + (\dot{\varphi}_i)_0 \cdot \sin(n_i \cdot t) + \frac{1}{a_i \cdot n_i} \int_0^t \Phi_i \cdot \sin n_i(t-t_1) \cdot dt_1$$

C_1 und C_2 bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen. Die beiden ersten Glieder von φ_i stellen die freie Schwingung dar, während durch das letzte Glied die erzwungene Schwingung gegeben wird.

Ein Vergleich der beiden Methoden zeigt die vollständige Analogie derselben. Für die Anwendungen wird die Methode von Timoschenko einfacher. Die Bestimmung der Normalfunktionen aus 2 a und den Grenzbedingungen muß in beiden Verfahren durchgeführt werden.

Nicht unerwähnt bleibe eine von Lebort entwickelte Lösungs-

methode,⁸⁾ die in der Durchführung zwar verschieden ist, aber dieselben Resultate gibt. Auch die Lebert'sche Methode läßt sich auf alle möglichen Belastungsfälle anwenden.

4. Formulierung des Problems für ruhende und bewegte Lasten.

Kommt die Last an Größe dem Trägergewicht gleich, oder übersteigt sie dasselbe, so muß der Trägheit der Last Rechnung getragen werden. Bezeichnen wir die nach § 3 definierte ständige Last mit $L_1(x)$, so muß für Schwingungen in der Vertikalebene in Gleichung 3 $L(x, t)$ ersetzt werden durch

$$L_1(x) \left(1 - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)$$

Die erzwungenen Schwingungen von Brücken werden meistens von bewegten Lasten erzeugt. Infolge Krümmung der elastischen Linie werden die statischen Belastungen vermehrt resp. vermindert um

$$m \cdot \frac{v^2}{g} \approx m \cdot v^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Im allgemeinsten Fall müssen daher bei der Aufstellung der Differentialgleichung für Schwingungen in der Vertikalebene berücksichtigt werden:

1. Eigengewicht und Trägheitskräfte des Trägers.
2. Gewicht und Trägheitskräfte der bewegten Lasten.
3. Zentrifugalkräfte der bewegten Lasten.
4. Je nach Konstruktionsart auch Wind- und Bremskräfte.

Bezeichnen wir mit $L_2(x, t)$ die auf die Längeneinheit bezogene bewegte Last, so heißt die genau Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + x^2 \cdot b^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{1}{\rho F} \left[L_1(x) \left(1 - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + L_2(x, t) \left(1 - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{v^2}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right] \quad 6)$$

Das Problem kompliziert sich in den meisten Fällen noch dadurch, daß die bewegten Lasten nur in bestimmten Punkten,

⁸⁾ Lebert, Etude de mouvements vibratoires. Annales des Ponts et Chaussées, 1899. — E. Bühler, Darstellung und Kritik der in der Literatur vorliegenden Untersuchungen über Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Glasers Annalen 1909.

resp. in gewissen Intervallen von x definiert sind. Gleichung 6 ist in dieser allgemeinen Form praktisch unlösbar. Die Normalfunktionen lassen sich nicht mehr bestimmen, weil sie neben den Randbedingungen wesentlich von der rechten Seite von Gleichung 6 abhängen. Die skizzierten Methoden sind daher nicht mehr ohne weiteres anwendbar. Sie beschränken sich auf ganz wenige und einfache, praktisch kaum vorkommende Spezialfälle, die aus Gl. 6 leicht abgeleitet werden können.

5. Näherungslösung für den einfachen Balken.

Da die direkte Integration von Gl. 6 nicht möglich ist, so sollen die einzelnen Einflüsse, wie Trägheit der Last und Geschwindigkeit der Last, getrennt untersucht werden.

1. Trägheit der Last.

Nach Gl. 6 ändern die Normalfunktionen, sobald die Trägheit der Last berücksichtigt werden soll. Wir wollen allen weiteren Berechnungen folgende wichtige Annahme zu Grunde legen:

Trotz der geänderten Bedingungen werden die unveränderten Normalfunktionen des homogenen Stabes mit allen ihren Eigenschaften beibehalten.

Die Ausdrücke für kinetische und potentielle Energie bleiben daher homogene quadratische Funktionen.

Mit dieser Annahme läßt sich in den Methoden von Kriloff und Timoschenko die Trägheit der Last in einfacher Weise berücksichtigen. Wir zeigen das an der Methode von Timoschenko.

Für eine Einzellast P im Abstand $x = \lambda$ vom linken Auflager und ständige Last p gelten mit den unveränderten Normalfunktionen u_i die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 y &= \sum u_i \cdot \varphi_i \\
 E_k &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{p}{g} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=\lambda}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{g} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (\dot{\varphi}_i)^2 \cdot \int_0^l u_i^2 dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \left[\sum_{i=1}^{\infty} u_{i,\lambda} \cdot \dot{\varphi}_i \right]^2
 \end{aligned}$$

Da u_i Normalfunktion sein soll, so ist E_k nur eine Funktion der $(\dot{\varphi})^2$, und im Quadrat der Summe fallen die Doppelprodukte weg.

Für den einfachen Balken ist

$$u_i = \sin i \pi \frac{x}{l} \quad i = 1, 2, 3 \dots \dots \infty$$

Damit wird

$$E_k = \frac{p \cdot l}{4 \cdot g} \sum_{i=1}^{\infty} (\dot{\varphi}_i)^2 + \frac{P}{2g} \sum_{i=1}^{\infty} u_{i\lambda}^2 \cdot (\dot{\varphi}_i)^2$$

Die potentielle Energie berechnen wir aus

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l (y'')^2 \cdot dx = \frac{EJ}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i)^2 \cdot \int_0^l (u_i'')^2 \cdot dx = \frac{EJ}{4 \cdot l^3} \cdot \pi^4 \sum_{i=1}^{\infty} i^4 \varphi_i^2$$

Mit unserer Annahme, deren Berechtigung noch nachgewiesen wird, heißt die Lagrange'sche Gleichung für φ_i

$$\frac{p \cdot l}{2 \cdot g} \cdot \ddot{\varphi}_i + \frac{P}{g} \cdot u_{i\lambda}^2 \cdot \ddot{\varphi}_i + \frac{EJ}{2} \cdot \frac{i^4 \pi^4}{l^3} \cdot \varphi_i = \Phi_i$$

$$\ddot{\varphi}_i + \frac{EJ \cdot i^4 \cdot \pi^4 \cdot g}{pl^4 \left(1 + \frac{2P}{p \cdot l} \cdot \sin^2 i \pi \frac{\lambda}{l}\right)} \cdot \varphi_i = \frac{2 \cdot g}{p \cdot l \left(1 + \frac{2P}{p \cdot l} \cdot \sin^2 i \pi \frac{\lambda}{l}\right)} \cdot \Phi_i \quad 7)$$

Auf diese Gleichung stützen sich alle weiteren Rechnungen.

Die Begründung unserer Annahme läßt sich durch einen Vergleich mit der exakten Lösung durchführen. Dazu nehmen wir der Einfachheit halber eine Einzellast $P = M \cdot g$ in Balkenmitte an.

Für die freien Schwingungen gilt Gl. 2 in unveränderter Form. Führen wir neben den bisherigen Bezeichnungen noch \mathfrak{M} als Biegemoment und Q als Querkraft ein, so heißen die Randbedingungen:

- a. Für $x = 0 \quad y = 0$
- b. " $x = 0 \quad \mathfrak{M} = -EJ \cdot y'' = 0 \quad y' = 0$
- c. Wegen der Symmetrie für $x = \frac{l}{2} \quad y' = 0$
- d. Für $x = \frac{l}{2} = \lambda \quad \mathfrak{M} \cdot \ddot{y} = -2Q = +2EJ \cdot y'''$

Wir untersuchen im Folgenden nur die zur Mitte symmetrischen Schwingungen. Die asymmetrischen Schwingungen mit Knotenpunkt in Balkenmitte werden durch die Maße M nicht geändert. Die n^{te} symmetrische Normalschwingung des Stabes kann angesetzt werden zu

$$y = U_n \cdot \cos (m_n^2 \cdot x \cdot b \cdot t - \alpha)$$

Darin ist die genaue Normalfunktion U_n im allgemeinsten Falle

$$U_n = A \cdot \sin m_n \cdot x + B \cdot \operatorname{sh} m_n \cdot x + C \cdot \cos m_n \cdot x + D \cdot \operatorname{ch} m_n \cdot x$$

Die Randbedingungen bestimmen drei der Konstanten A bis D , und geben für die Werte m die Frequenzgleichung

$$\mu \cdot (\operatorname{tg} \mu - \operatorname{th} \mu) = 2 \cdot \frac{G}{P}$$

Darin bedeuten:

$$p \cdot l = G, \quad \mu = m \cdot \frac{l}{2}$$

Die genaue Normalfunktion hat die Form

$$U_n = (\sin m_n \cdot x - \frac{\cos m_n \cdot \lambda}{\operatorname{ch} m_n \cdot \lambda} \cdot \operatorname{sh} m_n \cdot x)$$

Mit den nach steigender Größe geordneten Wurzeln $\mu_1, \mu_2 \dots$ der Frequenzgleichung werden die Werte $m_1, m_2 \dots$ gebildet, und damit schreibt sich y .

$$y = \sum_{m_1, m_2, \dots} U_n \cdot \varphi_n \quad \text{gültig für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \text{ und symmetrische Schwingungen.}$$

Ist P sehr klein, so wird $\frac{G}{P}$ sehr groß und nähert sich im Grenzfall dem Wert ∞ . Die n^{te} Wurzel der Frequenzgleichung nähert sich dabei dem Wert

$$\mu_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi \quad \text{und} \quad m_n = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{l}$$

d. h. die Werte m der genauen Normalfunktion U_n werden gleich den Werten m der unveränderten Normalfunktionen $U_n = \sin m_n \cdot x$, oder für Balkenmitte $m_n = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{l}$. Die genaue Normalfunktion geht in die, ohne Berücksichtigung von M geltende Form über $u_m = \sin mx$. Für sehr kleine Lasten P ist unsere Annahme unbedenklich zulässig.

Wird P sehr groß, so nähert sich die rechte Seite der Frequenzgleichung dem Werte Null. Die erste Wurzel nähert sich ebenfalls der Null, währenddem für alle weiteren Wurzeln der Ausdruck gilt

$$\mu = \frac{4n+1}{4} \cdot \pi$$

Die obere Schwingungstypen treten gegenüber der Grundschwingung sehr zurück. Im Grenzfall haben wir ein System mit einem Freiheitsgrad, d. h. die Grundschwingung allein.

Für diesen Grenzfall wird unsere Annahme in der Weise als zulässig bewiesen, daß wir die Grundschwingung einmal durch direkten Ansatz, und zweitens als Grenzfall der Schwingung mit unveränderter Normalfunktion $u = \sin \pi \cdot \frac{x}{l}$ darstellen.

Zur direkten Ermittlung der Schwingung wählen wir y als Positionskoordinate. Damit werden:

$$E_k = \frac{P}{2g} \cdot (\dot{y})^2 \quad V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{48 EJ}{l^3} \cdot y^2$$

Die Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{P}{g} \cdot \ddot{y} + \frac{48 EJ}{l^3} \cdot y = 0$$

Die Schwingungsdauer wird $T = 2\pi \sqrt{\frac{y_{stat.}}{g}}$

Andrerseits lautet die Grundschwingung

$$y = u_1 \cdot \varphi_1.$$

Die unveränderte Normalfunktion $u = \sin mx$ wird für

$$x = \frac{l}{2} \text{ zu } \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Damit sind:

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \cdot \dot{\varphi}_1^2 \quad \text{und} \quad V = \frac{EJ}{4 \cdot l^3} \pi^4 \cdot (\varphi_1)^2$$

Die Lagrange-Gleichung heißt hiemit

$$\frac{P}{g} \cdot \ddot{\varphi}_1 + \frac{\pi^4}{2 l^3} \cdot EJ \cdot \varphi_1 = 0$$

Da $\frac{\pi^4}{2} \sim 48$ und $u_1 \cdot x = \frac{l}{2} = 1$, stimmen die auf die beiden Arten berechneten Schwingungen miteinander überein. Unsere Annahme gilt also auch für sehr große Lasten.

Soll die Masse des Trägers nicht ganz vernachlässigt werden, so kann folgende Überlegung durchgeführt werden. Bei sehr kleinen Werten G läßt sich die linke Seite der Frequenzgleichung ersetzen durch die ersten Glieder der bezüglichen Reihen. Für

eine erste Annäherung, unter Berücksichtigung der ersten zwei Reihenglieder, wird

$$\mu = \sqrt[4]{3 \cdot \frac{Q}{P}}$$

Damit wird die Schwingungsdauer der Grundschiwingung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{P \cdot l^3}{48 EJ} \cdot \frac{1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{y_{stat.}}{g}}$$

d. h. T hat den für masselosen Träger abgeleiteten Wert.

Für eine zweite Annäherung müssen die vier ersten Glieder berücksichtigt werden. Die Frequenzgleichung lautet

$$2\mu \left(\frac{\mu^3}{3} + \frac{17}{3^2} \cdot \frac{\mu^7}{5 \cdot 7} \right) = 2 \cdot \frac{Q}{P}$$

$$\mu^4 = \frac{Q}{P} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{17}{3^2} \cdot \frac{\mu^4}{5 \cdot 7}}$$

Wird darin auf der rechten Seite μ^4 durch die erste Annäherung $3 \frac{Q}{P}$ ersetzt, und der Wert in den Ausdruck für die Schwingungsdauer eingeführt, so heißt dieser

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(P + \frac{17}{35} \cdot Q) \cdot l^3}{48 EJ \cdot g}}$$

Handelt es sich also um Berücksichtigung einer Last in der Balkenmitte und des Eigengewichtes, so kann die Last um das halbe Eigengewicht vermehrt gedacht, und die Schwingung als die eines masselosen Trägers behandelt werden. Das gleiche Resultat erhalten wir durch die getroffene Annahme, wie wir aus Gl. 7 ersehen.

Für einen beliebigen Zwischenwert, z. B. $\frac{G}{P} = \frac{1}{2}$, wollen wir die Koeffizienten der Lagrange-Gleichung, speziell den Wert $n_1^2 = \frac{c_1}{a_1}$ abschätzen. Der Wert n_1^2 bedingt die Größe der Schwingungsdauer, und eignet sich daher sehr gut zum Vergleich der genauen Methode mit der Annahme.

Nach Gl. 7 und nach unserer Annahme ist

$$n_i^2 = \frac{EJ \cdot i^4 \cdot \pi^4 \cdot g}{p \cdot l^4 \left(1 + \frac{2P}{p \cdot l} \cdot \sin^2 i \pi \frac{\lambda}{l}\right)}$$

$$n_1^2 = \frac{EJ \cdot \pi^4 \cdot g}{p \cdot l^4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2P}{p \cdot l}}$$

Der Faktor $\frac{1}{1 + \frac{2P}{p \cdot l}}$ wird für $\frac{G}{P} = \frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{5}$

Für denselben Faktor erhalten wir mit der genauen Methode nach langer Rechnung den Wert $\frac{1}{6,9} \sim \frac{1}{7}$

Die beiden Faktoren verhalten sich also wie $\frac{1}{5} : \frac{1}{7}$

Die damit abgeleiteten Schwingungsdauern verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den reziproken Werten also ungefähr wie 1 : 1,17.

Neben andern Vernachlässigungen darf dieser Unterschied als belanglos betrachtet werden, sodaß unsere Annahme zulässig ist.

Wir haben eine Last in der Balkenmitte angenommen. Viel komplizierter werden die Überlegungen, wenn sich die Last in einem beliebigen Punkt $x = \lambda$ befindet. Doch werden die hier abgeleiteten Resultate auch dann im großen und ganzen gelten.

Bleibt in Gl. 7 λ konstant, d. h. handelt es sich um eine Belastung an bestimmter Trägerstelle, so ist die Integration dieser Gleichung genau durchführbar. Bewegt sich die Last, so ist λ eine Funktion der Zeit, und Gl. 7 kann im allgemeinen nicht mehr integriert werden. Da die Berücksichtigung der Trägheit den Charakter einer Korrektur hat, so darf hier bei der Integration für λ ein konstanter Mittelwert angenommen werden.

In Gl. 7, die Grundlage und Ausgangspunkt der folgenden Rechnungen bildet, setzen wir

$$s_i^4 = \frac{E \cdot J \cdot g}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2P}{p \cdot l} \cdot \sin^2 i \pi \frac{\lambda}{l}}$$

sodaß sie übergeht in

$$\ddot{\varphi}_i + s_i^4 \cdot \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \cdot \varphi_i = \frac{2g}{p \cdot l \left(1 + \frac{2P}{p \cdot l} \cdot \sin^2 i \pi \frac{\lambda}{l} \right)} \cdot \Phi_i \quad \text{Hauptgl. I.}$$

Für eine von $x = \lambda_1$ bis $x = \lambda_2$ sich erstreckende gleichmäßig verteilte Last q pro Längeneinheit erhalten wir mit denselben Annahmen für φ die Gleichung

$$\ddot{\varphi}_i \cdot \frac{p \cdot l}{2g} \left[1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{1}{i \pi} \left(i \pi \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l} - \frac{1}{2} (\sin 2 i \pi \frac{\lambda_2}{l} - \sin 2 i \pi \frac{\lambda_1}{l}) \right) \right] + \frac{EJ i^4 \pi^4}{2 \cdot l^3} \cdot \varphi_i = \Phi_i \quad \text{Hauptgl. I'}$$

2. Geschwindigkeit der Last. Bestimmung eines Vergrößerungskoeffizienten a_i .

Sobald der Träger belastet wird, geht die gerade Stabaxe in die elastische Linie über, deren Form bei dynamisch wirkenden Kräften veränderlich ist. Durch die Krümmung der elastischen Linie wird der statische Druck einer, mit der Geschwindigkeit v sich über den Träger bewegendes Last vermehrt um den Betrag

$$- \frac{P}{g} \cdot v^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=\lambda}$$

Daraus ergibt sich eine Mehrbelastung, die in der Literatur oft behandelt worden ist.⁹⁾ Abgesehen von den verschiedenen Annahmen dieser Untersuchungen, soll hier gezeigt werden, daß die Darstellung der Schwingung durch Normalkoordinaten auch die Berücksichtigung dieses Einflusses ermöglicht.

Rechnen wir y von der Gleichgewichtslage des unbelasteten Balkens positiv nach unten, so ist

$$y = y_p + y_p$$

Mit $y = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \varphi_i^*$ und der unveränderten Normalfunktion

$$u_i = \sin i \pi \frac{x}{l} \quad \text{wird}$$

⁹⁾ H. Zimmermann, Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Berlin 1896, Verl. Wilhelm Ernst & Sohn. — Siehe Fußnote 2, Melan.

$$-\frac{P}{g} \cdot v^2 (y'')_{x=\lambda} = + \frac{P}{g} \cdot v^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \cdot \sin i \pi \frac{x}{l} \cdot \varphi_i^*$$

Da die Trägheit der Last hier nicht mehr berücksichtigt wird, so bleiben die Ausdrücke für kinetische und potentielle Energie unverändert.

$$E_k = \frac{p \cdot l}{4g} \sum_{i=1}^{\infty} (\dot{\varphi}_i^*)^2, \quad V = \frac{EJ \pi^4}{4 \cdot l^3} \sum_{i=1}^{\infty} i^4 \cdot (\varphi_i^*)^2$$

Damit heißt die Lagrange'sche Gleichung

$$\ddot{\varphi}_i^* + \frac{EJ}{p} \cdot \frac{\pi^4 \cdot i^4}{l^4} \cdot g \cdot \varphi_i^* = \frac{2g}{p \cdot l} \cdot \Phi_i \quad 8)$$

Die verallgemeinerte Kraft Φ_i bestimmt sich aus

$$\begin{aligned} \Phi_i \cdot \delta \varphi_i^* = & \left(P + \frac{P}{g} \cdot v^2 \cdot \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \cdot \sin i \pi \cdot \frac{\lambda}{l} \cdot \varphi_i^* \right) \sin i \pi \frac{\lambda}{l} \cdot \delta \varphi_i^* \\ & + \int_0^{\lambda} p \, dx \sin i \pi \frac{\lambda}{l} \cdot \delta \varphi_i^* \end{aligned}$$

Wird Φ_i in Gl. 8 eingesetzt, und werden die Glieder mit φ_i^* zusammengezogen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_i^* + \frac{EJ}{p} \cdot \frac{\pi^4 \cdot i^4}{l^4} \cdot g \cdot \frac{EJ \cdot i^2 \pi^2 \cdot g - 2P \cdot v^2 \cdot l \cdot \sin^2 i \pi \frac{\lambda}{l}}{EJ \cdot i^2 \pi^2 \cdot g} \cdot \varphi_i^* = \\ \frac{2g}{p \cdot l} \cdot \left[P \cdot \sin i \pi \cdot \frac{\lambda}{l} + \frac{p \cdot l}{i \pi} (1 - \cos i \pi) \right] \quad 9) \end{aligned}$$

Wir bezeichnen

$$\frac{EJ \cdot i^2 \pi^2 \cdot g}{EJ \cdot i^2 \pi^2 \cdot g - 2P \cdot v^2 \cdot l \cdot \sin^2 i \pi \frac{\lambda}{l}} = \alpha_i \quad 10)$$

Da auch die Berücksichtigung der Geschwindigkeit den Charakter einer Korrektur hat, so darf man sich wieder erlauben, bei der Integration das veränderliche α_i durch einen konstanten Mittelwert zu ersetzen. Das geschieht im folgenden. Die Integration von Gl. 9 ergibt

$$\varphi_i^* = \alpha_i \cdot \varphi_i$$

und damit

$$y^* = \sum u_i \cdot \varphi_i^* = \sum \alpha_i \cdot u_i \cdot \varphi_i$$

Für eine auf der Strecke $x = \lambda_1$ bis $x = \lambda_2$ gleichmäßig verteilte Belastung q ersetzen wir in der Gleichung für Φ_i P durch $q \cdot dx$ und integrieren zwischen den Grenzen λ_1 und λ_2 . Dann wird

$$\alpha_{iq} = \frac{E \cdot J \cdot i^2 \pi^2 \cdot g}{EJ \cdot i^2 \pi^2 \cdot g - q \cdot v^2 \cdot l^2 \left[\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l} - \frac{1}{2i\pi} \left(\sin 2i\pi \cdot \frac{\lambda_2}{l} - \sin 2i\pi \frac{\lambda_1}{l} \right) \right]} \quad 10a)$$

Die gleichen Vergrößerungskoeffizienten wurden schon von Lebert abgeleitet. Die Formeln zeigen, daß α_i mit wachsender Geschwindigkeit bis zum Wert ∞ wächst. Diese kritische Geschwindigkeit ist für jede Last oder Lastengruppe anders und wird in den Anwendungen diskutiert werden.

Das ∞ -Werden eines Koeffizienten und damit der Schwingungsordinate ist nur möglich, weil wir von Dämpfungskräften abgesehen haben. Diese sind unter Umständen recht bedeutend. Ihre Berücksichtigung würde die Rechnung sehr komplizieren und ist genau noch gar nicht möglich, weil die Abhängigkeit der elastischen Dämpfungskräfte von der Bewegung noch unbekannt ist, und erst durch Versuche festgestellt werden muß. Wir vernachlässigen daher die Dämpfung in allen folgenden Rechnungen.

Die allgemeinen Resultate dieses ersten Teiles werden in den folgenden Abschnitten zur Untersuchung der Schwingungen für die verschiedensten Belastungsfälle angewandt.

B. Schwingungen von Vollwandträgern.

I. Schwingungen infolge bewegter oder variabler Lasten.

1. Schwingungen infolge einer Einzellast.

Eine konzentrierte Last P bewege sich mit der Geschwindigkeit v über einen einfachen Balken mit konstantem Trägheitsmoment, wobei die Last direkt auf den Träger wirkend angenommen wird. Wir untersuchen die dabei auftretenden erzwungenen Schwingungen. Zur Aufstellung einheitlicher Formeln entwickeln wir auch die Ausdrücke für die statischen Deformationen in Reihen, welche nach den Normalfunktionen u_i des homogenen Trägers fortschreiten.¹⁰⁾ Sie lauten:

Für eine Einzelkraft P in $x = \lambda$

$$y_p = \frac{2P \cdot l^3}{EJ} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin i\pi \frac{\lambda}{l}}{i^4 \pi^4} \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} \quad 11)$$

Für gleichmäßig über die ganze Balkenlänge verteilte Last p

$$y_p = \frac{2p \cdot l^4}{EJ} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - \cos i\pi}{i^5 \pi^5} \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} \quad 12)$$

Die erzwungene Schwingung infolge der wandernden Last P bestimmen wir nach der allgemeinen Methode,¹¹⁾ indem wir Φ_i berechnen aus

$$P \cdot \sin \left(\frac{i \cdot \pi \cdot v}{l} \cdot t \right) \cdot \delta \varphi_i = \Phi_i \cdot \delta \varphi_i$$

¹⁰⁾ Siehe Fußnote 8, Lebert.

¹¹⁾ Siehe Fußnote 5, Timoschenko.

Mit unsern Annahmen wird

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left[\frac{2p \cdot l^4 (1 - \cos i\pi)}{EJ \cdot i^5 \pi^5} + \frac{2P \cdot l^3}{EJ} \left(\frac{\sin \cdot \frac{i\pi v}{l} \cdot t}{i^4 \pi^4} \cdot \frac{i^2 \pi^2 \cdot s_i^4}{i^2 \pi^2 s_i^4 - v^2 \cdot l^2} - \frac{i\pi s_i^2 \cdot v \cdot l}{i^2 \pi^2 \cdot s_i^4 - v^2 \cdot l^2} \cdot \frac{\sin \cdot \frac{i^2 \pi^2 s_i^2}{l^2} \cdot t}{i^4 \pi^4} \right) \right] \sin i\pi \frac{x}{l} \quad (13)$$

Hier und im folgenden gelten die Bezeichnungen

$$\alpha_i = \frac{EJ \cdot i^2 \pi^2 \cdot g}{EJ \cdot i^2 \pi^2 \cdot g - 2P \cdot v^2 l \cdot \sin^2 i\pi \frac{\lambda}{l}}, \quad s_i^4 = \frac{EJ \cdot g}{p \left(1 + \frac{2P}{p \cdot l} \cdot \sin^2 \frac{i\pi \lambda}{l} \right)}$$

$$\beta_i = \frac{s_i^4 \cdot i^2 \pi^2}{s_i^4 \pi^2 i^2 - v^2 \cdot l^2}, \quad \gamma_i = \frac{i\pi \cdot s_i^2 \cdot v \cdot l}{i^2 \pi^2 \cdot s_i^4 - v^2 \cdot l^2}$$

Da das erste Glied der Reihe für y den Hauptwert darstellt, so begnügen wir uns im Interesse der Einfachheit mit der Diskussion der Grundschwingung und ihren Koeffizienten.

Diskussion der Koeffizienten der Grundschwingung und Ableitung von Dimensionierungsregeln.

Alle Koeffizienten verlieren ihre numerische Bedeutung, wenn sie groß werden und falls die Elastizitätszahl E nicht mehr konstant bleibt. Trotzdem haben die kritischen Daten, bei denen sie unendlich werden, praktisches Interesse, weil sie als Vergleichswerte verwendet werden können.

Der Vergrößerungskoeffizient α_1 .

Die Untersuchung von α für $i > 1$ hat nur dann Bedeutung, wenn die kritischen Verhältnisse für $i = 1$ praktisch überschritten, und die kritischen Verhältnisse für $i = 2$ u. s. w. eventuell erreicht werden können.

α_1 wird maximal für $\lambda = \frac{l}{2}$ und

$$v_z^2 = \pi^2 \cdot \frac{EJ}{2P \cdot l} \cdot g.$$

Ist h die halbe Trägerhöhe, so wird aus

$$\sigma_{zul} = \frac{M}{J} \cdot \frac{h}{2}$$

$$EJ = \frac{M}{\sigma_{zul}} \cdot \frac{h}{2} \cdot E$$

Einzellasten haben nur für kleine Stützweiten praktische Bedeutung. Dann kann $M = \frac{P \cdot l}{4}$ gesetzt werden.

Mit $h \sim \frac{l}{10}$, $\sigma_{zul} = 1000 \text{ kg/cm}^2$, $\pi^2 \sim 10$, $g \sim 10 \text{ m/sec}^2$, $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ wird $v_x^2 = 1250 \cdot l$

$$v_x = 50 \sqrt{\frac{l}{2}} \text{ m/sec.}$$

Fig. 1 stellt diese Formel dar, und zeigt, daß mit Ausnahme der Stützweiten $l < 1 \text{ m}$, alle kritischen Geschwindigkeiten praktisch unerreichbar hohe Werte haben.

Praktisch zu verwertende Größe von α_1 .

Man wird für die, von der Geschwindigkeit der Last erzeugte Vergrößerung der Durchbiegungen eine obere zulässige Grenze angeben, und dafür die maximal, respektive minimal zulässigen Geschwindigkeiten berechnen.

Nennen wir den maximal zulässigen Wert α_0 , und die dazugehörige Geschwindigkeit v_x^* , so ist

$$v_x^{*2} = \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} \cdot 1250 \cdot l$$

Die Formel für α_i zeigt, daß dieser Wert nach Überschreitung des kritischen Wertes mit wachsender Geschwindigkeit wieder abnimmt. Der Wert α_0 wird somit ein zweites Mal erreicht; die entsprechende Geschwindigkeit heiße v_x^{**} . Wir erhalten für das zu α_0 gehörige v_x^{**}

$$v_x^{**2} = \frac{\alpha_0 + 1}{\alpha_0} \cdot 1250 \cdot l$$

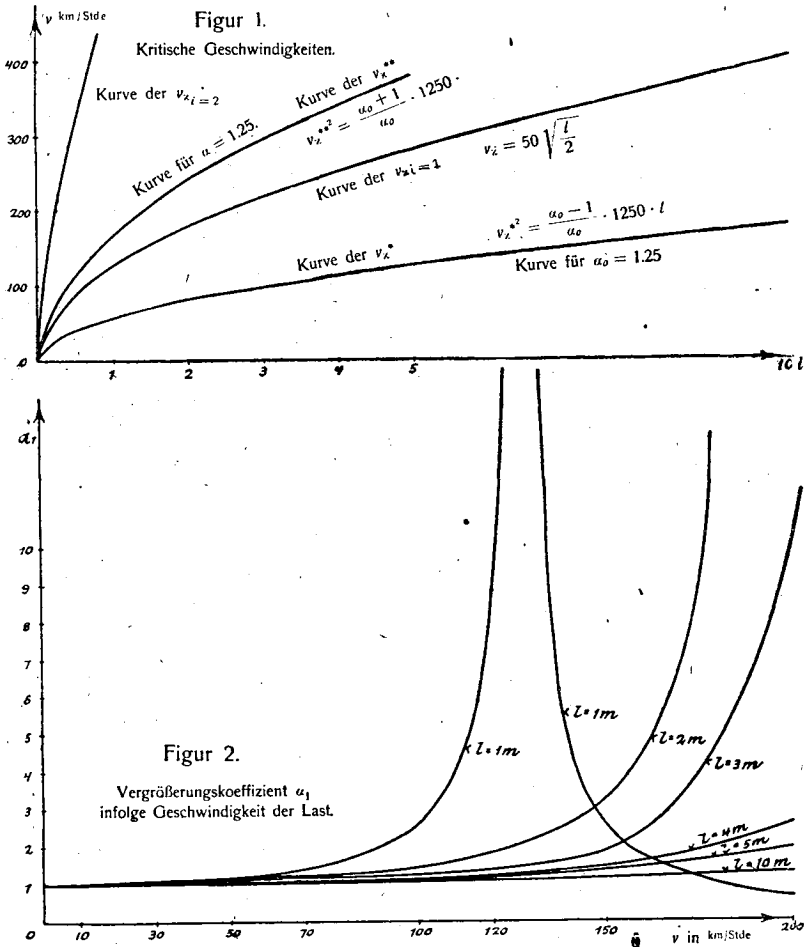
Der Wert α_1 läßt sich noch umformen.

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 - \frac{2 P \cdot v^2 \cdot l}{\pi^2 EJ \cdot g}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1250} \cdot \frac{v^2}{l}} = \frac{1250 \cdot l}{1250 \cdot l - v^2}$$

Für kleine Geschwindigkeiten können wir dafür schreiben

$$\alpha_1 = 1 + \frac{1}{1250} \cdot \frac{v^2}{l}$$

Fig. 2 gibt Werte für α_1 in Funktion der Geschwindigkeit und der Stützpunkte des Trägers.



Es zeigt sich, daß nur bei kleinen Stützweiten die kritischen Geschwindigkeiten im Bereich des Möglichen liegen, und daß eine größere Geschwindigkeit der Last wieder kleinere Deformationen gibt. Zuverlässige Resultate dürfen von den Formeln nur für kleine Geschwindigkeiten erwartet werden.

Dimensionierungsregel aus α_1 .

Gegeben ist der max. zulässige Wert $\alpha_{1 \max.} = \alpha_0$. Gesucht sind die dadurch bedingten Abmessungen des Trägers, hier das Trägheitsmoment J .

$$\alpha_0 \geq \frac{1}{1 - \frac{2P \cdot v^2 \cdot l}{\pi^2 \cdot EJ \cdot g}}$$

Daher muß

$$J \geq \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1} \cdot 2 \cdot \frac{P \cdot v^2 \cdot l}{g \pi^2 \cdot E}$$

$$Jm^4 \geq \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1} \cdot \frac{1}{10^{12}} \cdot P \cdot l \cdot v_{\max}^2 \quad \text{in kg, m, sec.}$$

$$Jcm^4 \geq \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1} \cdot \frac{1}{10^4} \cdot P \cdot l \cdot v_{\max}^2 \quad \text{Dimensionierungsregel I.}$$

Um dieses Trägheitsmoment mit dem statischen zu vergleichen, setzen wir

$$J_{dyn.} = \psi \cdot J_{stat.}$$

Werden hier auf beiden Seiten die Werte eingesetzt, so erhalten wir für den Vergrößerungskoeffizienten des statischen Trägheitsmomentes

$$\psi \geq \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1} \cdot \frac{v_{\max}^2}{1250 \cdot l} \quad \text{Dimensionierungsregel I'}$$

Der Koeffizient $\beta_1 = \frac{s_1^4 \pi^2}{s_1^4 \pi^2 - v^2 \cdot l^2}$

Mit dem entsprechenden Wert für s_1^4 wird β_1 unendlich für

$$v^2 = \frac{EJ}{p + \frac{2P}{l} \cdot \sin^2 \pi \frac{\lambda}{l}} \cdot \frac{\pi^2 \cdot g}{l^2}$$

Mit $M = \frac{P \cdot l}{4}$ ergibt sich

bei $\sin \pi \frac{\lambda}{l} = 0$ $v_{x \max}^2 = 2500 \cdot \frac{P}{p}$ in kg, m, sec.

„ $\sin \pi \frac{\lambda}{l} = 1$ $v_{x \min}^2 = 2500 \cdot \frac{P}{p + \frac{2P}{l}}$

Da für kleine Stützweiten das Eigengewicht gegenüber der Verkehrslast P sehr klein ist, so erübrigt sich eine Diskussion von v_{max} . Unter Vernachlässigung des Eigengewichtes heißt die Formel für v_{min} .

$$\underline{v_{\text{min}}^2 = 1250 \cdot l.}$$

Mit unsern Annahmen ergeben sich aus β_1 dieselben kritischen Geschwindigkeiten wie aus α_1 . Auch die Werte β_1 in Funktion v und l sind gleich den α_1 und daher durch Fig. 2 dargestellt.

Daher ist auch die zu einem Wert β_0 gehörige Dimensionierungsregel durch P gegeben.

$$\text{Der Koeffizient } \gamma_1 = \frac{\pi \cdot s_1^2 \cdot v \cdot l}{\pi^2 \cdot s_1^4 - v^2 \cdot l^2}$$

ermöglicht einen Vergleich der, durch das dritte Summenglied dargestellten Schwingungsordinate mit der statischen.

Wir setzen im folgenden $s_1^4 = \mu^2 \cdot s_f^4$. Darin bedeuten:

$$s_f^4 = \frac{EJ}{p} \cdot g \quad \text{und} \quad \mu^2 = \frac{1}{1 + \frac{2P}{p \cdot l} \cdot \sin^2 \pi \frac{\lambda}{l}}$$

Wir berücksichtigen nur die extremalen Werte:

$$\mu^2_{\text{max}} = 1, \quad \mu^2_{\text{min}} = \frac{1}{1 + \frac{2P}{p \cdot l}}$$

Mit $M = \frac{P \cdot l}{4} + \frac{p \cdot l^2}{8}$ läßt sich γ_1 folgendermaßen schreiben:

$$\mu^2 = 1: \quad \gamma_1 = \frac{50 \cdot v \cdot \sqrt{\left(\frac{P}{p} + \frac{l}{2}\right)}}{2500 \left(\frac{P}{p} + \frac{l}{2}\right) - v^2}$$

$$\mu^2 = \frac{1}{1 + \frac{2P}{p \cdot l}}: \quad \gamma_1 = \frac{50 \cdot v \cdot \sqrt{\frac{l}{2}}}{1250 \cdot l - v^2}$$

Fig. 3 gibt γ_1 in Funktion von v und l . Die kritischen Werte der Geschwindigkeiten bleiben dieselben wie für α_1 und β_1 .

Das zu maximalem γ_0 gehörige ψ berechnet sich aus

$$s_1^4{}_{dyn} = s_1^4{}_{stat} \cdot \psi$$

zu
$$\psi_2 = \frac{\left(1 + \sqrt{1 + 16 \gamma_0^2}\right)^2}{\gamma_0} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^4} \cdot \frac{v^2}{l} \quad \text{Dim.-Reg. II.}$$

Bahnkurve des Lastpunktes.

Die Bahnkurve der Last kann mit Formel 13 berechnet werden, indem dort für $x = v \cdot t$ eingesetzt wird. Die vorkommenden Verhältnisse sollen durch ein Zahlenbeispiel gezeigt werden. Dazu wählen wir:

$$l = 10^m, \quad v = 30 \text{ m/sec} \quad \text{und} \quad \frac{P}{p \cdot l} = 1$$

Die ganze Trägerlänge ist in 10 Intervalle eingeteilt. Das bedingt Zeitintervalle von $\frac{1}{30}$ sec. Zur Berechnung der Bahnkurve der Last werden auch die Oberschwingungen $i = 1$ bis 6 berücksichtigt. In Tabelle I und in Fig. 4 sind die Resultate dieser Untersuchung zusammengestellt. Den Berechnungen liegt ein statisch dimensionierter Träger ($\psi = 1$) zu Grunde.

Die Durchführung dieser Rechnung führt auf folgende Schlüsse:

1. Eine Berücksichtigung der 5 ersten Glieder der Reihe für y genügt immer.

2. Für praktische Zwecke genügt meistens schon die Berücksichtigung des ersten Reihengliedes.

3. Die prozentuale Zunahme der statischen Durchbiegung ist ziemlich bedeutend.

4. Es dürfen nicht einzelne Ordinaten untersucht, und ihre prozentuale Vergrößerung als jene der Trägerdeformationen erklärt werden. Die Balkenmitte erleidet z. B. in unserem Fall eine kleinere Deformation, als andere Punkte.

5. Diese Bahnkurve gibt noch keinen Aufschluß über Ort und Größe der maximalen Deformationszunahme.

6. Die berechnete Bahnkurve kommt in ihrer Form den, von Zimmermann¹²⁾ berechneten sehr nahe.

¹²⁾ Siehe Fußnote 9.

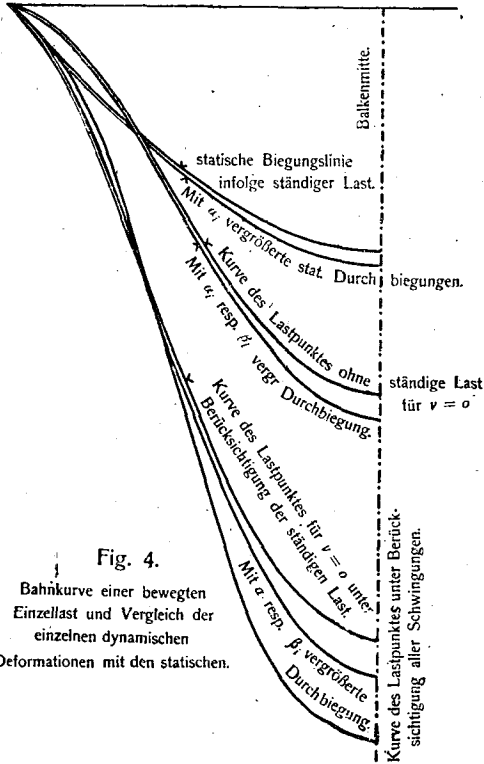
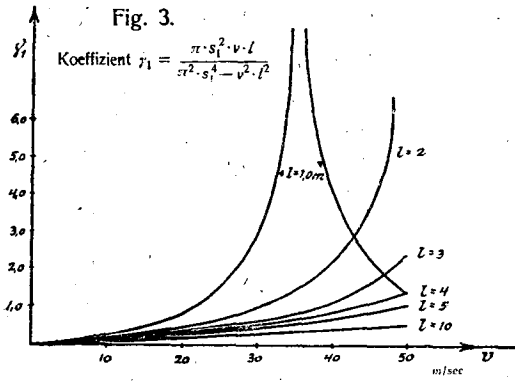


Fig. 4.
Bahnkurve einer bewegten Einzellast und Vergleich der einzelnen dynamischen Deformationen mit den statischen.

Tabelle I.

P in:	Statische Durchbiegungen			Dynamische Durchbiegungen				Differenzen in % der stat. Durchb.		
	$y_{stat} \bar{p}$	$y_{st. P_2}$	$y_{st. total} *$	$y_d \bar{p} = \alpha \cdot y_{st.}$	y^P Last-Schw.	y^{Pv} Geschw.-Schw.	y_d total	$\Delta\% = 100 \cdot \frac{y_d - y_{st.}}{y_{st.}}$	$\Delta\%$ Last-Schw.	$\Delta\%$ Geschw.-Schw.
1	$\frac{\bar{p} \cdot l^4}{EJ} \cdot 0,00409$	$\frac{P \cdot l^3}{EJ} \cdot 0,00279$	$\frac{P \cdot l^3}{EJ} \cdot 0,00679$	$\frac{\bar{p} \cdot l^4}{EJ} \cdot 0,00412$	$\frac{P \cdot l^3}{EJ} \cdot 0,00273$	$\frac{P \cdot l^3}{EJ} \cdot 0,00098$	$\frac{P \cdot l^3}{EJ} \cdot 0,00687$	— 13,4	+ 1,1	— 14,5
2	" 0,00773	" 0,00853	" 0,01576	" 0,00788	" 0,00874	" 0,00016	" 0,01646	+ 3,5	+ 4,5	— 1,04
3	" 0,01059	" 0,01470	" 0,02529	" 0,01097	" 0,01532	" 0,00505	" 0,02934	+ 16,0	+ 4,0	+ 12,0
4	" 0,01240	" 0,01920	" 0,03160	" 0,01302	" 0,02025	" 0,00394	" 0,03721	+ 17,8	+ 5,3	+ 12,5
Mitte 5	" 0,01300	" 0,02085	" 0,03385	" 0,01370	" 0,02205	" 0,00291	" 0,03866	+ 14,2	+ 5,4	+ 8,6

* Weil $\frac{P}{p} = 10$, ferner $l = 10$ kann in diesem Spezialfall für $p \cdot l \cdot P$ gesetzt werden, für $\frac{\bar{p} \cdot l^4}{EJ} \sim \frac{P \cdot l^3}{EJ}$

Momente und Querkräfte.

Die Ausdrücke für Biegemomente und Querkräfte ergeben sich aus dem Ausdruck für y durch nochmalige Ableitung nach x .

$$M = - EJ \cdot y''$$

$$Q = - EJ \cdot y'''$$

Bei der Verwertung der entstehenden Reihen für Zahlenbeispiele müssen mehr Glieder verwendet werden als in der Reihe für y ; denn diese Reihen konvergieren schwächer.

Die Auflagerkräfte erhalten wir aus der Reihe für Q mit $x = 0$ resp. $x = l$.

Berücksichtigung der Federung.

Die bis anhin abgeleiteten Resultate setzen voraus, daß die totale statische Last direkt auf den Träger wirke. In Wirklichkeit ist der größere Teil der Lokomotivlasten mit Federn auf die Räder abgestellt. Daher werden nicht die Trägheitskräfte der ganzen Last zu berücksichtigen sein. Die Federwirkung ist in der Literatur schon oft behandelt.¹³⁾

Es soll hier untersucht werden, inwiefern die gegebenen Formeln abzuändern sind, um der Federwirkung einigermaßen Rechnung zu tragen, ohne die Rechnungsarbeit zu komplizieren.

Infolge der Federung wird eine Beschleunigung, welche auf die, unmittelbar auf dem Träger liegenden Massen wirkt, nur zum kleinsten Teil auf die darüberliegenden abgefederten Massen übertragen.¹⁴⁾

Es sei $P^* = \kappa \cdot P$ die direkt auf den Träger wirkende Last. Für die Berücksichtigung irgendwelcher Trägheitskräfte kommt nur die Masse $\kappa \cdot \frac{P}{g}$ in Frage.

Darum wird

$$\alpha_i = \frac{i^2 \pi^2 \cdot EJ \cdot g}{i^2 \pi^2 EJ \cdot g - 2 \kappa P \cdot v^2 \cdot l \sin^2 i \pi \frac{\lambda}{l}}$$

¹³⁾ Siehe Fußnote 5. Kriloff und Timoschenko berücksichtigen die Trägheitskräfte der Radgewichte mit der Methode der successiven Annäherung.

¹⁴⁾ Siehe Fußnoten 5, Kriloff, und 9, Zimmermann.

Der dadurch bedingte dynamische Einfluß wird also kleiner. Die Werte für die kritischen Geschwindigkeiten werden um das $\sqrt{\kappa}$ -fache vergrößert.

Auch in s_i^4 muß P durch $\kappa \cdot P$ ersetzt werden, d. h.

$$s_i^4 = \frac{EJ \cdot g}{p + 2 \cdot \frac{\kappa P}{l} \cdot \sin^2 i \pi \frac{\lambda}{l}}$$

Auch die Schwingungsdauer des Balkens wird anders, je nachdem P oder κP zu berücksichtigen ist. Um das zu zeigen, machen wir folgende Annahmen. Die Balkenmasse m_2^* denken wir uns auf den Angriffspunkt der Last konzentriert. Dazu kommt daselbst noch der unabgefederte Teil der Last; seine Masse heiße m_2^{**} .

Wir setzen $m_2^* + m_2^{**} = m_2$.

Mit Federn darauf abgestützt, sei die abgefederte Lokomotivmasse m_1 . Die Federkonstante dieser Federung heiße λ_1 , währenddem die Federwirkung des Balkens durch λ_2 charakterisiert sei. Das in Fig. 5 schematisch skizzierte System der Massen m_1 und m_2 läßt sich leicht auf seine Schwingungen untersuchen, sofern wir noch annehmen, daß kein Abheben der Last eintritt. Es gelten die Gleichungen:

$$m_1 \cdot y_1'' = -m_1 \cdot g - \lambda_1 (y_1 - y_2)$$

$$m_2 \cdot y_2'' = -m_2 \cdot g + \lambda_2 (y_1 - y_2)$$

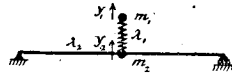


Fig. 5.

Für die, diesen Gleichungen entsprechenden Schwingungen, existieren Schwingungsdauern, welche gegeben sind durch¹⁵⁾

$$T_{1,2} = 2\pi \sqrt{2 \frac{\sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{\lambda}}}{\lambda_2 \sqrt{\lambda_1 (m_1 + m_2) + \lambda_2 \cdot m_1} \pm \sqrt{(\lambda_1 (m_1 + m_2) + \lambda_2 \cdot m_1)^2 - 4 \frac{\lambda_1 \cdot m_1 \cdot m_2}{\lambda_2}}}}$$

Nehmen wir darin λ_1 gegenüber λ_2 sehr klein an, so geht diese Formel über in

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{\lambda_2}}$$

d. h. die Schwingungsdauer des Balkens ist nur von der Masse m_2

¹⁵⁾ Siehe H. Lorenz, Technische Mechanik. München und Berlin, Verlag von R. Oldenbourg.

abhängig. Folgende überschlägliche Berechnung zeigt, daß das

Verhältnis $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ für kleine Träger sehr klein ist.

λ_1 ist nach Kriloff ~ 1400 kg/cm

$\lambda_2 = \frac{EJ}{l^3} \cdot 48$ für Balkenmitte.

Für $l = 3,0$ m und eine Last 10^4 wird

$\lambda_2 = \sim 40000$ kg/cm

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1400}{40000} \sim \frac{1}{28,5}$

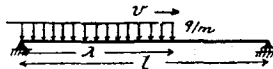
Es entspricht also der Wirklichkeit recht gut, wenn wir die Schwingungsdauer des Balkens nur vom Eigengewicht und von den unabgefederten Lasten abhängig machen. Wie vorweggenommen wurde, ist in s_i^4 nur κP zu berücksichtigen.

Der Wert κ schwankt nach Zimmermann zwischen $\kappa = \frac{1}{4}$ bei vollkommener Abfederung und $\kappa = 1$ bei fehlender Federung.

2. Schwingungen infolge gleichmäßig verteilter Belastung.

Rollt ein einseitig unbegrenztes Band gleichmäßig verteilter Lasten mit der Geschwindigkeit v auf einen einfachen Balken, so lassen sich die Schwingungen untersuchen, indem in den Ausdrücken für Φ_i die Einzellast P durch die Elementarkraft $q \cdot dx$ ersetzt, und über den belasteten Teil integriert wird.

Mit $\lambda = v \cdot t$ ergibt sich



Fr. 6.

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left[\frac{2p \cdot l^4}{EJ} \cdot \frac{1 - \cos i\pi}{i^5 \pi^5} + \frac{2q \cdot l^4}{EJ} \left\{ \frac{i^2 \pi^2 \cdot s_i^4}{i^2 \pi^2 \cdot s_i^4 - v^2 \cdot l^2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{i\pi \lambda}{l}}{i^5 \pi^5} + \frac{v^2 \cdot l^2}{i^2 \pi^2 \cdot s_i^4 - v^2 \cdot l^2} \cdot \frac{\cos \frac{i^2 \pi^2 \cdot s_i^2 \cdot \lambda}{v \cdot l} \cdot \frac{\lambda}{l} \right\} \right] \cdot \sin i\pi \frac{\lambda}{l} \quad (14)$$

Wir bezeichnen wieder wie folgt:

$$\alpha_i = \frac{EJ \cdot i^2 \pi^2 \cdot g}{EJ \cdot i^2 \pi^2 \cdot g - q \cdot v^2 \cdot l^2 \left(\frac{\lambda}{l} - \frac{\sin \left(2\pi i \cdot \frac{\lambda}{l} \right)}{2i\pi} \right)}$$

$$s_i^4 = \frac{EJ \cdot g}{p + q \left(\frac{\lambda}{l} - \frac{\sin \left(2 i \pi \frac{\lambda}{l} \right)}{2 i \pi} \right)}$$

$$\beta_i = \frac{i^2 \pi^2 \cdot s_i^4}{i^2 \pi^2 \cdot s_i^4 - v^2 \cdot l^2}, \quad \gamma_i = \frac{v^2 \cdot l^2}{i^2 \pi^2 \cdot s_i^4 - v^2 \cdot l^2}$$

Der Ausdruck für y gilt, solange $0 < \lambda < l$. Sobald $\lambda > l$, schwingt der Träger unter der Vollbelastung $p + q$, wobei der Geschwindigkeitsfaktor α_i zu berücksichtigen ist.

Diskussion der Koeffizienten der Grundschwingung.

Der Wert α_1 .

Der Koeffizient α_1 schwankt zwischen den Werten

$$1 \geq \alpha_1 \geq \frac{EJ \cdot g \cdot \pi^2}{FJ \cdot g \cdot \pi^2 - v^2 \cdot l^2 \cdot q}$$

Das maximale α_1 wird ∞ für

$$EJ \cdot g \cdot \pi^2 = q \cdot v^2 \cdot l^2$$

Die kritische Geschwindigkeit berechnet sich daher aus

$$v_{\infty}^2 = 1250 \cdot \psi \cdot \frac{p + q}{q} \cdot l$$

Diese Formel setzt ein Trägheitsmoment voraus, welches aus dem maximalen Biegemoment $M = \frac{p + q}{8} \cdot l^2$ bestimmt wurde.

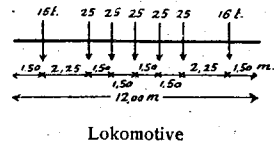
Um der Formel allgemeinen Charakter zu geben, berechnen wir das Maximalmoment aus ständiger Last und einem Belastungsgleichwert, den wir mit p_m bezeichnen wollen.

Unter Verwendung der neuesten Belastungsannahmen der Schweizerischen Bundesbahnen*) kann annähernd gesetzt werden bei $l < 3,0^m$ $p_m = 66 - 16 \cdot l$ t./m Geleise wenn l in m.

$3,0^m < l < 20,0^m$ $p_m = 18 - \frac{7}{17} (l - 3)$ t./m " " "

$l > 20,0^m$ $p_m = 11$ t./m.

*) Lastenzug der Schweizerischen Bundesbahnen
Der Lastenzug besteht aus einer
unbeschränkten Anzahl Lokomotiven.



Berücksichtigen wir die Federung, so ist in den gegebenen Formeln q durch κq zu ersetzen. Die dynamischen Beanspruchungen werden dadurch kleiner.

Die Werte ψ haben sinngemäß nur Bedeutung, wenn sie größer sind als 1.

Der Wert β_1 .

$$\beta_1 \text{ wird } \infty \text{ für } i^2 \cdot \pi^2 s_1^4 = v^2 \cdot l^2.$$

Damit berechnen sich die kritischen Geschwindigkeiten

$$\max. v_{\infty} = \psi \cdot 1250 \cdot \left(1 + \frac{p_m}{p}\right) \cdot l$$

$$\min. v_{\infty} = \psi \cdot 1250 \frac{p_m + p}{q + p} \cdot l$$

Bei gegebenem β_0 sind die rechten Seiten noch zu multiplizieren mit $\frac{\beta_0 - 1}{\beta_0}$.

Aus diesen Beziehungen können, wie für α_1 , Ausdrücke für ψ und p abgeleitet werden. Auch sie haben nur für sehr große Geschwindigkeiten Bedeutung.

Die Abhängigkeit des Wertes β_1 von v und l ist gegeben durch

$$\beta_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{1250} \cdot \frac{q + p}{p_m + p} \cdot \frac{1}{\psi} \cdot \frac{v^2}{l}}$$

Der Wert γ_1 .

γ_1 gibt dieselben v_{∞} wie β_1 .

Hingegen wird

$$v_{\infty}^2 = \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_0} \cdot 1250 \cdot \psi \cdot \frac{p_m + p}{q + p} \cdot l$$

γ_1 kann auf die Form gebracht werden

$$\gamma_1 = \frac{v^2}{1250 \cdot \psi \cdot \frac{p_m + p}{q + p} \cdot l - v^2} = \beta_1 - 1$$

Fig. 7 gibt die Darstellung der Formeln für β_1 und γ_1 .

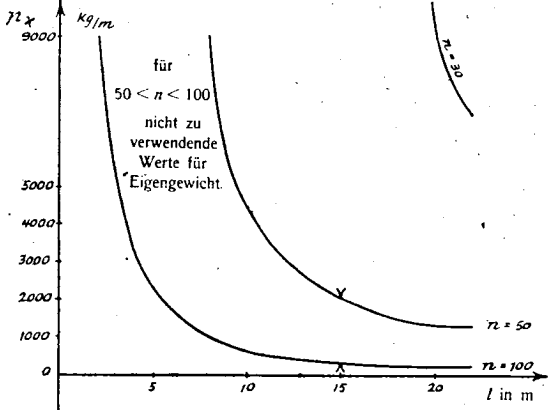
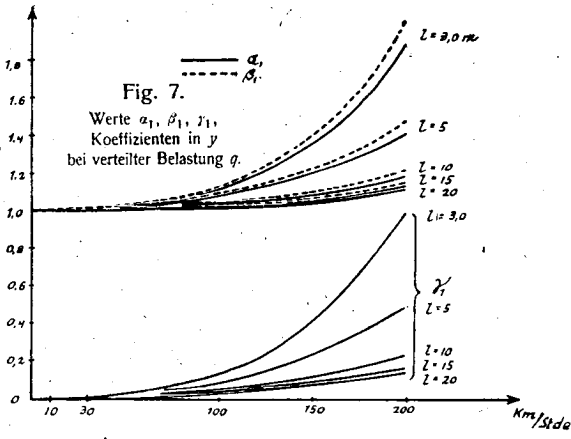
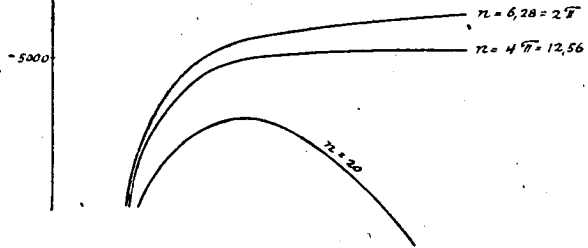


Fig. 8.
 Kritische Eigengewichte für eine
 Straßenbrücke bei period. Einzellast.



Die Schwingungsdauer.

Für Belastung über λ ist

$$T_1 = 2\pi \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{p + \kappa \cdot q \left(\frac{\lambda}{l} - \frac{\sin 2\pi \frac{\lambda}{l}}{2\pi} \right)}{EJ \cdot g}}$$

$$T_{1 \min} = T_{1 \text{ ständige Last}} = 2 \cdot \frac{l^2}{\pi} \sqrt{\frac{p}{EJ \cdot g}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{l}{125 \left(1 + \frac{p_m}{p} \right)}}$$

$$T_{1 \max} = 2 \cdot \frac{l^2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{p + \kappa q}{EJ \cdot g}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{p + \kappa \cdot q}{p + p_m} \frac{l}{125}}$$

Für große Stützweiten, bei denen $p_m = q$, und bei $\kappa = 1$ erhalten wir

$$T_1 = \frac{\sqrt{l}}{17,6}^{16)}$$

Die Berechnung irgendwelcher Größen, wie Moment, Querkraft, Auflagerkraft, Durchbiegung u. s. f., erfolgt nach den in § 1 genannten Prinzipien.

Die entgegengesetzte Fahrtrichtung zweier Lastengruppen bei zweigleisigen Brücken hat dann die ungünstigste Wirkung, wenn die Momente des Auffahrens der beiden Lastengruppen auf den Träger zeitlich um eine ganze Anzahl Schwingungsdauern verschoben sind.

Der Einfluß des plötzlichen Anhaltens der Last, sowie die Schwingung infolge eines Verkehrsbandes beschränkter Länge lassen sich ähnlich bestimmen.

Sobald in unsern Untersuchungen $\lambda > l$, so tritt eine freie Schwingung unter der Last $p + q$ auf, für welche die Anfangsbedingungen aus der erzwungenen Schwingung für $\lambda = l$ bestimmt werden.

Für mittlere und große Stützweiten darf ein Lastenzug durch eine gleichmäßig verteilte Verkehrslast ersetzt werden.

3. Schwingungen infolge periodisch veränderlicher Kräfte.

Von viel größerer Bedeutung als die bisher behandelten dynamischen Einflüsse sind jene, welche von periodisch veränderlichen Kräften herrühren. Wir unterscheiden in der Folge:

¹⁶⁾ Vergl. Handbuch der Ing.-Wissenschaft, zweiter Teil, dritter Band.

1. Periodische Kräfte, deren Angriffspunkt auf dem Träger fest bleibt. Dazu können mit guter Annäherung auch solche Kräfte gezählt werden, die sich mit relativ kleiner Geschwindigkeit über den Träger bewegen (Marschkolonnen, Hufschlag von Pferden u. s. f. bei Straßenbrücken).

2. Periodische Kräfte, deren Angriffspunkte sich mit bedeutender Geschwindigkeit über den Träger bewegen.

1. Periodische Kräfte mit festem Angriffspunkt.

Zuerst wird der Fall einer periodischen Einzelkraft behandelt. Auf den Träger wirke im Punkte $x = c$ eine Last, deren Größe gegeben ist durch

$$P = P_0 \cdot \sin(nt).$$

Solche periodisch wirkende Einzellasten sind praktisch angenähert verwirklicht durch den regelmäßigen Hufschlag der Pferde, durch federnde Lastwirkung an bestimmter Trägerstelle u. s. w. Der Ansatz $P = P_0 \cdot \sin(nt)$ setzt eine Kraft voraus, die auch negativ sein kann, was praktisch außer der Federwirkung nie vorkommt. Die numerischen Werte der Schwingungsordinaten werden daher nicht genau den Formeln entsprechen; die Resonanzverhältnisse werden besser stimmen, weil dabei nur die Frequenzen eine Rolle spielen.

Da solche periodische Einzellasten im Vergleich zu andern vorliegenden Lasten klein sind, darf ihre Trägheit unberücksichtigt gelassen werden.¹⁷⁾

Die Anwendung des allgemeinen Lösungsverfahrens gibt für y

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{2p \cdot l^4}{EJ} \cdot \frac{1 - \cos i\pi}{i^5 \pi^5} + \frac{2P_0 \cdot l^3}{EJ} \cdot \frac{s_i^4}{i^4 \cdot \pi^4 \cdot s_i^4 - n^2 \cdot l^4} \cdot \sin i\pi \frac{c}{l} \cdot \sin(nt) - \frac{2P_0 \cdot l^5}{EJ} \cdot \frac{n}{\pi^2} \cdot \frac{s_i^2}{i^2 (i^4 \cdot \pi^4 \cdot s_i^4 - n^2 \cdot l^4)} \cdot \sin i\pi \frac{c}{l} \sin \frac{i^2 \pi^2 \cdot s_i^2}{l^2} \cdot t \right] \sin i\pi \frac{x}{l} \quad 15)$$

¹⁷⁾ Der mit $\sin(nt)$ variablen Masse, d. h. der Trägheitskraft könnte durch eine Näherungsmethode Rechnung getragen werden. Man teilt die Zeit in eine Anzahl kleine Intervalle, für welche dann die Masse als konstant betrachtet wird. Für jedes Zeitintervall bestimmen wir das Δy und summieren dann alle Δy . Es ist offensichtlich, daß dieses Verfahren ausgedehnte Rechnungsarbeit verlangt. Näheres darüber siehe Timoschenko, Wirkung eines Transversalstoßes auf einen Balken. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1913, Seite 198. H. Saller, Einfluß bewegter Lasten auf Eisenbahnoberbau und Brücken, 1921.

Ohne Berücksichtigung der Trägheit der Last ist

$$s_i^4 = s_l^4 = 125 \left(1 + \frac{p_m}{p} \right) \cdot l^3$$

Die Koeffizienten im zweiten und dritten Summenglied werden ∞ , d. h. es liegt Resonanz vor für

$$i^4 \pi^4 \cdot s_i^4 = n^2 \cdot l^4$$

$$n = \frac{i^2 \pi^2 \cdot s_i^2}{l^2}$$

Da gleichzeitig zweites und drittes Glied ∞ werden, so muß die Unbestimmtheit entwickelt werden. Der wirkliche Wert der beiden Summenglieder des, in Resonanz stehenden Typus, ergibt sich zu

$$\left(-\frac{P_0}{p \cdot n} \cdot \frac{g}{n} \cdot t \cdot \cos(nt) \cdot \sin i \pi \frac{c}{l} + \frac{P_0}{p \cdot l} \cdot \frac{g}{n^2} \cdot \sin(nt) \cdot \sin i \pi \frac{c}{l} \right) \cdot \sin i \pi \frac{x}{l}$$

Dieser Wert wächst mit t unbeschränkt.

Die Resonanzerscheinungen sind praktisch sehr wichtig, und sollen daher genau untersucht werden. Legen wir der Untersuchung einen Träger zu Grunde, der für einen Belastungsgleichwert p_m dimensioniert ist, so heißt die Resonanzbedingung

$$n^2 = 12500 \cdot \psi \cdot i^4 \cdot \frac{p + p_m}{p \cdot l} \quad (16)$$

Diese Formel kann verwendet werden:

- a) Zur Untersuchung ausgeführter Träger auf die Möglichkeit von Resonanzerscheinungen. Dabei sind gegeben: p , p_m und l . Gesucht sind die Schwingungstypen, für welche bei gegebenem n Resonanz möglich ist, d. h. die Anzahl Knotenpunkte, mit denen der Träger schwingt.
- b) Zur Bestimmung von p und ψ bei der Dimensionierung, so daß für bestimmte Werte n keine Resonanz möglich wird.

Eine Durchführung von Anwendung a hat nur für den Spezialfall Interesse. Dabei ist es ratsam, den Wert EJ direkt einzusetzen.

Anwendung b gibt für die Grundschwingung

$$n^2 = 12500 \cdot \frac{p + p_m}{p \cdot l} \cdot \psi \quad (17)$$

Werden diese Gleichungen nach p resp. ψ aufgelöst, so ergeben sich die Dimensionierungsregeln

$$p = \frac{12500 \cdot \psi}{n^2 \cdot l - 12500 \cdot \psi} \cdot p_m \quad \text{Dimens. Regel IV}$$

und

$$\psi = \frac{n^2}{12500} \cdot \frac{p}{p + p_m} \cdot l \quad \text{Dimens. Regel IV'}$$

Wir geben die praktische Anwendung für eine zweispurige Straßenbrücke. Wir wählen folgende Bezeichnungen:

p_{mF} = Bel. Gleichwert für Fahrbahnbelastung

p_{mG} = " " " Gehwegbelastung

B_G = Gehwegbreite.

Als Fahrbahnbreite B_F nehmen wir 5,0 m an. Mit dem 22^t Lastwagen und Menschengedränge von 0,5 t/m² (Eidgenössische Vorschriften vom 7. Juni 1913) können für die Belastungsgleichwerte folgende Näherungsformeln angeschrieben werden:

$$l \leq 12,0 \text{ m} \quad p_m = \frac{24}{l} + 0,5 + 0,5 \cdot B_G \text{ t/m.}$$

$$l \geq 12,0 \text{ m} \quad p_m = 2,5 + 0,5 \cdot B_G \text{ t/m.}$$

Mit einer Gehwegbreite $B_G = 3,0 \text{ m}$ heißen die Formeln

$$l \leq 12,0 \text{ m} \quad p_m = \frac{24}{l} + 2 \text{ t/m}$$

$$l \geq 12,0 \text{ m} \quad p_m = 4,0 \text{ t/m.}$$

Fig. 8 gibt dafür die Werte p_z in Funktion von l für verschiedene n . Die Kurven zeigen, daß bei Stützweiten $0 < l < 20,0 \text{ m}$ nur für sehr schnell pulsierende Lasten Resonanz möglich ist; für $n < 50$ sind die kritischen Eigengewichte sehr groß resp. negativ, d. h. praktisch unmöglich. Mit Hilfe dieser Kurven kann sofort angegeben werden, innerhalb welcher Grenzen die kritischen Eigengewichte liegen, wenn ein gegebenes Intervall von n berücksichtigt wird.

Noch viel weniger tritt Resonanz mit den Oberschwingungen ein; denn an Stelle von n^2 tritt $\frac{n^2}{j^4}$.

Für gleichmäßig verteilte Belastung $q = q_0 \cdot \sin(nt)$ können die Ausdrücke aus 15 abgeleitet werden. Da bei Vollbelastung die ganze Last auf dem Träger liegt und mitschwingt,

und die periodische Kraftwirkung eher durch Stoß ausgeübt wird, so ist es hier richtiger, die Trägheit der gleichmäßig verteilten Last zu berücksichtigen. Die Belastung durch eine Marschkolonne entspricht z. B. recht gut unserer Annahme.

Unter Berücksichtigung der Trägheit der ganzen Last q ist

$$s_1^4 = \frac{EJ \cdot g}{p + q}$$

Damit wird mit Gl. 16

$$n_z^2 = 12500 \cdot \frac{p + p_m}{p + q} \cdot \frac{\psi}{l}$$

Für große Spannweiten (für die gewählten Verhältnisse z. B. für $l > 12,0$ m) kann $p_m = q$ gewählt werden.

Dann ist

$$n_z^2 = 12500 \cdot \frac{\psi}{l} \quad 18)$$

Für diese Verhältnisse, bei denen die effektive Belastung mit der der Berechnung zu Grunde liegenden übereinstimmt, wird n nur von l abhängig (vergl. $v_{z, \min}^2 = 1250 \cdot l$, Seite 31). Die folgende Tabelle II gibt die Werte n_z für einen statisch dimensionierten Träger; im Hinblick auf Fachwerke sind auch große Spannweiten einbezogen worden. Es sind auch die Werte N = Anzahl Impulse pro Sekunde berechnet.

Tabelle II.

l_m	10	12	15	20	30	50	100
n_z	35,20	34,80	28,90	24,95	20,15	15,80	11,20
N	5,6	5,4	4,6	4,0	3,2	2,5	1,8

2. Periodische Kräfte, die sich mit der Geschwindigkeit v über den Träger bewegen.

Als solche Kräfte sind in erster Linie die Zentrifugalkräfte, welche von nicht ausbalancierten Triebrädern erzeugt werden, aufzufassen. Die kritischen Verhältnisse können relativ leicht eintreten, weil bei großen Geschwindigkeiten die Frequenz dieser Kräfte derjenigen der Trägerschwingung gleich werden kann.¹⁸⁾

¹⁸⁾ Siehe Fußnoten 2, 3, 9, Melan, Steiner, Zimmermann.

Es sei Q das unausgeglichene Gegengewicht, q der Abstand seines Schwerpunktes von der Radachse, $\omega_0 =$ Winkelgeschwindigkeit des Rades und R der halbe Raddurchmesser. Dann wird die Fliehkraft

$$F \doteq \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{R^2} \cdot q = \frac{Q}{g} \cdot \omega_0^2 \cdot q^{19)}$$

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß das Gegengewicht beim Auffahren des Rades auf den Träger in der tiefsten Lage sei, so ergibt sich die, den Träger belastende Vertikalkomponente dieser Fliehkraft zu

$$P = F \cdot \cos(\omega_i t)$$

Wir untersuchen die Schwingungen eines Trägers infolge dieser Kraft, wobei wir ihre Trägheit vernachlässigen.

Mit

$$\frac{l \cdot v}{s_i^2 \pi} = \delta_i, \quad \frac{\omega \cdot l^2}{s_i^2 \cdot \pi^2} = \epsilon_i, \quad s_i^4 = \frac{EJ \cdot g}{p},$$

$$\lambda = v \cdot t = R \cdot \omega \cdot t$$

gilt für $0 < \lambda < l$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sin i\pi \frac{x}{l} \left[\frac{2p \cdot l^4}{EJ} \cdot \frac{1 - \cos i\pi}{i^5 \pi^5} + \frac{F \cdot l^3}{EJ} \cdot \frac{1}{\pi^4} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{i\pi}{l} + \frac{\omega}{v}\right) \cdot \lambda}{i^4 - (i\delta + \epsilon)^2} + \frac{\sin\left(\frac{i\pi}{l} - \frac{\omega}{v}\right) \lambda}{i^4 - (i\delta - \epsilon)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{i^2} \cdot \frac{i\delta - \epsilon}{i^4 - (i\delta - \epsilon)^2} \cdot \sin \frac{i^2 \pi^2 \cdot s_i^2}{v \cdot l^2} \cdot \lambda - \frac{1}{i^2} \cdot \frac{i\delta + \epsilon}{i^4 - (i\delta + \epsilon)^2} \cdot \sin \frac{i^2 \pi^2 \cdot s_i^2}{v \cdot l^2} \cdot \lambda \right\} \right] \quad 19)$$

Für unsere Untersuchung einzig wichtig ist die Resonanz, d. h. das Unendlichwerden der Ausdrücke

$$\frac{1}{i^4 - (i\delta + \epsilon)^2}, \quad \frac{1}{i^4 - (i\delta - \epsilon)^2}, \quad \frac{1}{i^2} \cdot \frac{i\delta - \epsilon}{i^4 - (i\delta - \epsilon)^2}, \quad \frac{1}{i^2} \cdot \frac{i\delta + \epsilon}{i^4 - (i\delta + \epsilon)^2}$$

wenn deren Nenner Null werden.

Dabei werden immer zwei Werte gleichzeitig ∞ , sodaß die Unbestimmtheit $\infty - \infty$ auftritt. Ein gleichzeitiges Verschwinden von $i\delta - \epsilon$ und $i^4 - (i\delta - \epsilon)^2$ ist nicht möglich.

$$\begin{aligned} i^4 - (i\delta + \epsilon)^2 = 0 & \quad i^2 = i\delta + \epsilon \\ i^4 - (i\delta - \epsilon)^2 = 0 & \quad i^2 = \epsilon - i\delta \end{aligned}$$

¹⁹⁾ Über die Größe von F vergl. Handbuch d. I.-W., zweiter Teil, dritter Band: $F = 1500-5000$ kg. Timoschenko, $F = 3500$ kg für Güterzugslokomotiven, $F = 5000$ kg für Schnellzugslokomotiven.

Setzen wir darin die Werte δ und ε ein, so erhalten wir

$$\omega = \frac{s_i^2 \cdot \pi^2 \cdot i^2}{l^2} - \frac{i \cdot v \cdot \pi}{l} \quad (20)$$

Unter Beachtung, daß $i\delta + \varepsilon = i^2$, gehen die entsprechenden Glieder der Summe über in

$$\frac{\sin\left(\frac{i\pi \cdot v}{l} + \omega\right) \cdot t - \sin\frac{i^2 \pi^2 \cdot s_i^2}{l^2} \cdot t}{i^2 - (i\delta + \varepsilon)^2} = 0$$

Zur weitem Diskussion soll das Summenglied in 19 auf folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} & \frac{Fl^3}{2EJ} \cdot \frac{1}{\pi^4} \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} \left[\sin\left(\frac{i\pi v}{l} + \omega\right) \cdot t \left(\frac{1}{i^2 + i\delta + \varepsilon} + \frac{1}{i^2 - i\delta - \varepsilon} \right) \cdot \frac{1}{i^2} \right. \\ & \quad \left. + \sin\left(\frac{i\pi v}{l} - \omega\right) \cdot t \left(\frac{1}{i^2 + i\delta - \varepsilon} + \frac{1}{i^2 - i\delta + \varepsilon} \right) \cdot \frac{1}{i^2} \right. \\ & \quad \left. + \sin\frac{s_i^2 \pi^2 \cdot i^2}{l^2} \cdot t \left(\frac{1}{i^2 - i\delta + \varepsilon} - \frac{1}{i^2 + i\delta - \varepsilon} + \frac{1}{i^2 - i\delta - \varepsilon} - \frac{1}{i^2 + i\delta + \varepsilon} \right) \cdot \frac{1}{i^2} \right] \end{aligned}$$

Bei Resonanz überwiegen die Glieder mit den Nennern $i^2 + i\delta - \varepsilon$ und $i^2 - i\delta - \varepsilon$. Dann heißt der Ausdruck in der Klammer

$$\left[\frac{\sin\left(\frac{i\pi v}{l} + \omega\right) \cdot t - \sin\frac{s_i^2 \cdot \pi^2 \cdot i^2}{l^2} \cdot t}{i^2 - i\delta - \varepsilon} + \frac{\sin\left(\frac{i\pi v}{l} - \omega\right) \cdot t + \sin\frac{s_i^2 \pi^2 i^2}{l^2} \cdot t}{i^2 + i\delta - \varepsilon} \right]$$

Für $i^2 = i\delta - \varepsilon$ kann die entstehende Unbestimmtheit übergeführt werden in

$$\frac{2F \cdot l^3}{EJ\pi^4} \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} \cdot \frac{1}{i^2} \cdot \frac{1}{4\delta} \left[-\frac{\pi \cdot v}{l} \cdot t \cdot \cos\left(\frac{s_i^2 \pi^2 \cdot i^2}{l^2} \cdot t\right) + \frac{1}{i} \sin\left(\frac{i\pi v}{l} \cdot t\right) \cdot \cos \omega t \right]$$

Das Resonanzglied allein gibt für $t = \frac{l}{2v}$, d. h. Kraft in Balkenmitte, und für $x = \frac{l}{2}$

$$y = \frac{2F \cdot l^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{i^2} \cdot \frac{1}{4\delta} \cdot \left[-\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{s_i^2 \pi^2 \cdot i^2}{l^2} \cdot t\right) + \frac{1}{i} \sin i \cdot \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{s_i^2 \cdot \pi \cdot i^2}{l^2} \cdot t - \frac{i\pi}{2}\right) \right]$$

Im ungünstigsten Fall ergibt sich:

$$\pm \frac{2F \cdot l^3}{EJ\pi^4} \cdot \frac{1}{i^2} \cdot \frac{\pi}{8\delta}$$

Ist die Last am Trägerende angekommen, so ist y in Balkenmitte angewachsen auf

$$\frac{2 F \cdot l^3}{E J \pi^4} \cdot \frac{1}{i^2} \cdot \frac{\pi}{4 \delta}$$

Für $i = 1$ ist $\frac{\pi}{4 \delta}$ der Vergrößerungskoeffizient der statischen Durchbiegung. Führen wir darin δ ein, wobei mit den Eigengewichten nach Seite 39

$$s_1^2 = \sqrt{10^3 \frac{2520 - 45 \cdot l}{880 + 54 \cdot l} \cdot l^3} \quad \text{ist,}$$

so läßt sich für einen statisch dimensionierten Träger dieser Vergrößerungskoeffizient berechnen aus

$$\frac{\pi}{4 \delta} = \frac{25}{v} \sqrt{\frac{25200 - 450 \cdot l}{880 + 54 \cdot l} \cdot l}$$

Fig. 9 gibt Werte für diesen Vergrößerungskoeffizienten.

Die Resonanzbedingung 20 lösen wir nach der kritischen Geschwindigkeit v_z auf. Für ω setzen wir dabei $\frac{v}{R}$. Dann ist

$$v_z = \frac{i^2}{\left(\frac{1}{R} \pm \frac{i\pi}{l}\right)} \cdot \pi^2 \cdot \frac{s_i^2}{l^2}$$

Wird der Rechnung statische Dimensionierung der Träger für den Belastungsgleichwert p_m zu Grunde gelegt, so wird

$$v_z = \frac{50 \cdot i^2}{\left(\frac{1}{R} \pm \frac{i\pi}{l}\right)} \cdot \sqrt{5 \cdot \frac{p_m + p}{z q + p} \cdot \frac{1}{l}} \quad (21)$$

wenn s_i^2 für Vollbelastung q und Federung eingeführt sind.

Wir beschränken uns auf $i = 1$. Führen wir in 21 p , p_m und q nach Seite 38 ein, und ersetzen R durch den Radumfang u , so gelten mit einigen Aufrundungen für eingleisige Eisenbahnbrücken die Formeln

$$v_z = \frac{160}{u \pm \frac{1}{l}} \sqrt{\frac{1000 - 18 \cdot l}{z \cdot 11000 + 880 + 54 \cdot l} \cdot \frac{1}{l}} \quad \text{für } l < 20,0 \text{ m} \quad (21a)$$

$$v_z = \frac{160}{u \pm \frac{1}{l}} \sqrt{\frac{600 + 2,7 \cdot l}{z \cdot 11000 + 880 + 54 \cdot l} \cdot \frac{1}{l}} \quad \text{für } l > 20,0 \text{ m} \quad (21b)$$

Für $l > 20,0\text{ m}$ treten meistens Fachwerkträger an Stelle der Vollwandträger. Dann kann für das mittlere Eigengewicht ein-
gleisiger Eisenbahnbrücken mit Schwellenbelag gesetzt werden ²⁰⁾:

$$p = \sim 1900 + 27 \cdot l \text{ kg/m Brücke.}$$

$$\text{Dann wird } v_x = \frac{160}{\frac{2}{u} \pm \frac{1}{l}} \cdot \sqrt{\frac{645 + 1,35 \cdot l}{z \cdot 11000 + 1900 + 27 \cdot l} \cdot \frac{1}{l}} \quad (21c)$$

Mit diesen Formeln werden für zwei Radumfänge ($u = 6,0\text{ m}$ für Schnellzüge, $u = 3,0\text{ m}$ für Güterzüge), mit und ohne Berücksichtigung der Federung, die kritischen Geschwindigkeiten berechnet. Tabelle III und Fig. 10 geben die berechneten Daten.

Tabelle III. Kritische Geschwindigkeiten für bewegte period. Last

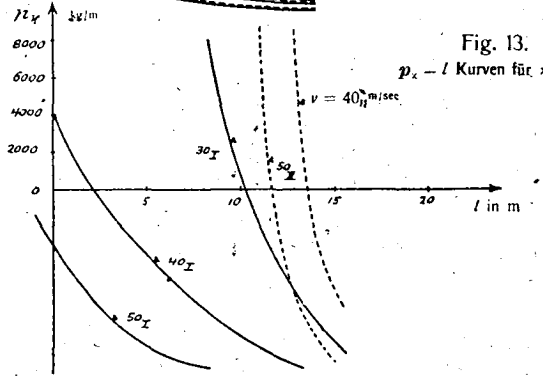
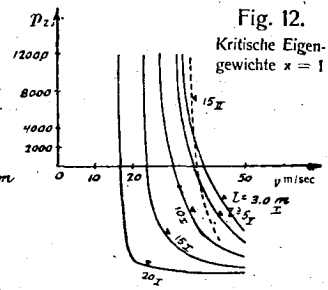
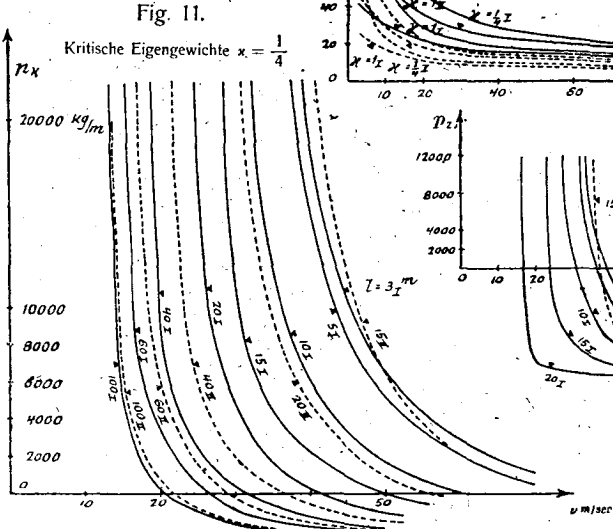
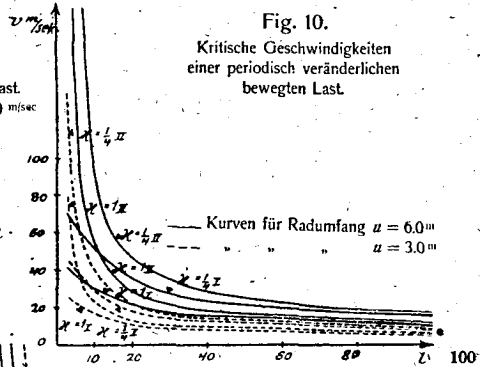
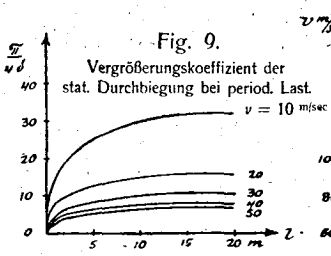
Stützweite l in m			3	5	10	20	40	60	100	Bezeichnung der Kurve*
Radumfang $u = 6,0\text{ m}$	$z = 1$	$v_{x_1}^{m/sec.}$	38,8	36,6	30,0	20,7	15,8	13,2	10,4	$z = 1_I$ —
		v_{x_2}	∞	146,4	55,7	28,0	18,4	14,6	11,0	$z = 1_{II}$ —
	$z = \frac{1}{4}$	v_{x_1}	69,2	65,0	51,7	34,4	24,6	19,9	15,2	$z = \frac{1}{4_I}$ —
		v_{x_2}	∞	260,0	96,0	46,5	28,6	22,0	16,1	$z = \frac{1}{4_{II}}$ —
Radumfang $u = 3,0\text{ m}$	$z = 1$	v_{x_1}	25,8	22,5	17,0	11,1	8,2	6,75	5,31	$z = 1_I$ ----
		v_{x_2}	77,4	41,9	23,0	12,9	8,31	7,10	5,49	$z = 1_{II}$ ----
	$z = \frac{1}{4}$	v_{x_1}	46,2	40,0	29,2	18,4	12,8	10,2	7,68	$z = \frac{1}{4_I}$ ----
		v_{x_2}	138,6	73,5	39,5	21,4	13,8	10,7	7,91	$z = \frac{1}{4_{II}}$ ----

* Zu Fig. 10: ——— Kurven für $u = 6,0\text{ m}$ ---- Kurven für $u = 3,0\text{ m}$

Diese Zahlen zeigen, daß die kritischen Geschwindigkeiten möglich sind. Für kleine Triebräder sind diese Geschwindigkeiten kleiner als für große. Es wäre zu erwarten, daß beim Befahren einer Brücke durch einen Lastenzug sehr häufig starke Schwingungen auftreten müßten. Dem ist nicht so, weil immer mehrere mit Gegengewichten versehene Axen vorkommen. Ihre Einflüsse

²⁰⁾ Handbuch d. Ing.-Wissenschaften, vierte Auflage, zweiter Teil, dritter Band.

stören sich, und heben sich zum Teil auf, sobald die Stellung der Gegengewichte nicht an allen Axen dieselbe ist.



Für große Spannweiten, für welche $p_m = q$ ist, wird die kritische Geschwindigkeit nur von l allein abhängig. Sie ist gegeben durch die Formel

$$v_z^2 = \frac{12500}{\left(\frac{1}{R} \pm \frac{\pi}{l}\right)^2} \cdot \frac{1}{l} = \frac{1250}{\left(\frac{2}{u} \pm \frac{1}{l}\right)^2} \cdot \frac{1}{l} \quad 21d)$$

Dimensionierungsregeln.

Da im allgemeinen die Geschwindigkeiten innerhalb bestimmter Grenzen gegeben sind, ist es für Neukonstruktionen wichtiger, aus 20 Werte für kritische Eigengewichte und Trägheitsmomente abzuleiten. Mit $\pi^2 \sim 10$ und Berücksichtigung der Federung α wird

$$p_z = \frac{1250 \cdot p_m - \alpha \cdot q \left(\frac{2}{u} \pm \frac{1}{l}\right)^2 \cdot v^2 \cdot l}{\left(\frac{2}{u} \pm \frac{1}{l}\right)^2 v^2 \cdot l - 1250}$$

Führen wir p_m und q nach S. 38 ein, so ist

$$p_z = 10^3 \frac{24000 - 515 \cdot l - \alpha \cdot 11 \left(\frac{2}{u} \pm \frac{1}{l}\right)^2 \cdot v^2 \cdot l}{\left(\frac{2}{u} \pm \frac{1}{l}\right)^2 \cdot v^2 \cdot l - 1250} \quad \text{kg/m Brücke für } l < 20,0^m$$

Dimens.-Regel V.

$$p_z = 11 \cdot 10^3 \cdot \frac{1250 - \alpha \left(\frac{2}{u} \pm \frac{1}{l}\right)^2 v^2 \cdot l}{\left(\frac{2}{u} \pm \frac{1}{l}\right)^2 \cdot v^2 \cdot l - 1250} \quad \text{kg/m Brücke für } l > 20,0^m$$

Dim.-Regel Va.

Tabelle IV gibt die Anwendung dieser Formeln für $u = 6,0^m$.

Für $\alpha = 1$ existiert für $l > 20^m$ kein p_z , weil die kritische Geschwindigkeit dann nur mehr von l abhängig ist. Die Tabellenwerte sind in den Fig. 11—15 aufgetragen. In Fig. 11 und 12 wurden die Vertikalkolonnen, d. h. p_z in Funktion von v , in Fig. 13 und 14 die Horizontalkolonnen, d. h. p_z in Funktion von l dargestellt. Die Formel gibt für gewählte v und l zwei Werte p_z , je nachdem das positive oder negative Vorzeichen berücksichtigt wird. Die beiden Werte werden durch die Indices I und II unterschieden.

Tabelle IV. Kritische Eigengewichte. p_{κ} in kg/m Brücke.

Stützsw. l in m	3	5	10	15	20	40	60	100		
$\kappa = 1$ Federung nicht berücksichtigt	$v = 10$ m/sec.	-18800	-17900	- 15800	-13500					
		-18000	-17150	- 15290	-13200					
	$v = 20$	-23100	-22200	- 21250	-19700					
		-18000	-17300	- 15950	-14100					
	$v = 30$	∞	+26400	+ 805	- 8210					
		-18000	-17550	- 17700	-19650					
	$v = 40$	- 1075	- 3500	- 7900	-10000					
		-18000	-17950	- 24400	- 5300					
	$v = 50$	- 6900	- 8330	- 9460	-10450					
		-18000	-18450	+ 35300	- 9230					
	$\frac{1}{4}$ Federung berücksichtigt mit $\kappa = \frac{1}{4}$	$v = 10$	-19750	-19000	- 17250	-15450	- 13480	-16750	-22600	-150000
			-18000	-17250	- 15650	-13950	- 12200	-14600	-18600	- 48000
		$v = 20$	-29200	-29100	- 33600	-47000	-141500	+10150	+ 3400	+ 222
			-18000	-17550	- 17700	-18300	- 19700	+35500	+ 6220	+ 775
		$v = 30$	∞	+59700	+ 32300	+11350	+ 4600	+ 310	- 816	- 1650
-18000			-18150	- 23000	-45500	+ 48500	+ 2000	- 265	- 1485	
$v = 40$		+18700	+14900	+ 6000	+ 2200	+ 225	- 1265	- 1770	- 2160	
		-18000	-19000	- 43300	+26400	+ 4960	- 615	- 1510	- 2080	
$v = 50$		+ 6340	+ 5075	+ 1720	- 48	- 1080	-1860	- 2080	- 2390	
		-18000	-20250	+137000	+ 6490	+ 935	- 1500	- 2000	- 2340	

Bei $l > 20,0$ m und
 $\kappa = 1$ ist v_{κ} nur
 von l abhängig.

Die Fig. 11 und 12 veranschaulichen die $p_{\kappa} - v$ Kurven. Jede Kurve besteht aus zwei Ästen; hier sind nur die Kurvenstücke, welche praktisches Interesse haben, aufgetragen. Mit diesen Kurven kann für bestimmte Stützweiten l und gewähltes Eigengewicht p die kritische Geschwindigkeit angegeben werden.

Beispiel: $p = 8000$ kg/m, $l = 20$ m. $v_{\kappa I} = 27,5$ m/sec = 99 km/Std
 $v_{\kappa II} = 36,0$ " = 129,5 "

Ferner zeigen diese Kurven, daß die kritischen Geschwindigkeiten nicht mehr stark von p abhängen, sobald p einigermaßen große Werte hat. Es ist dann praktisch unmöglich, den kritischen

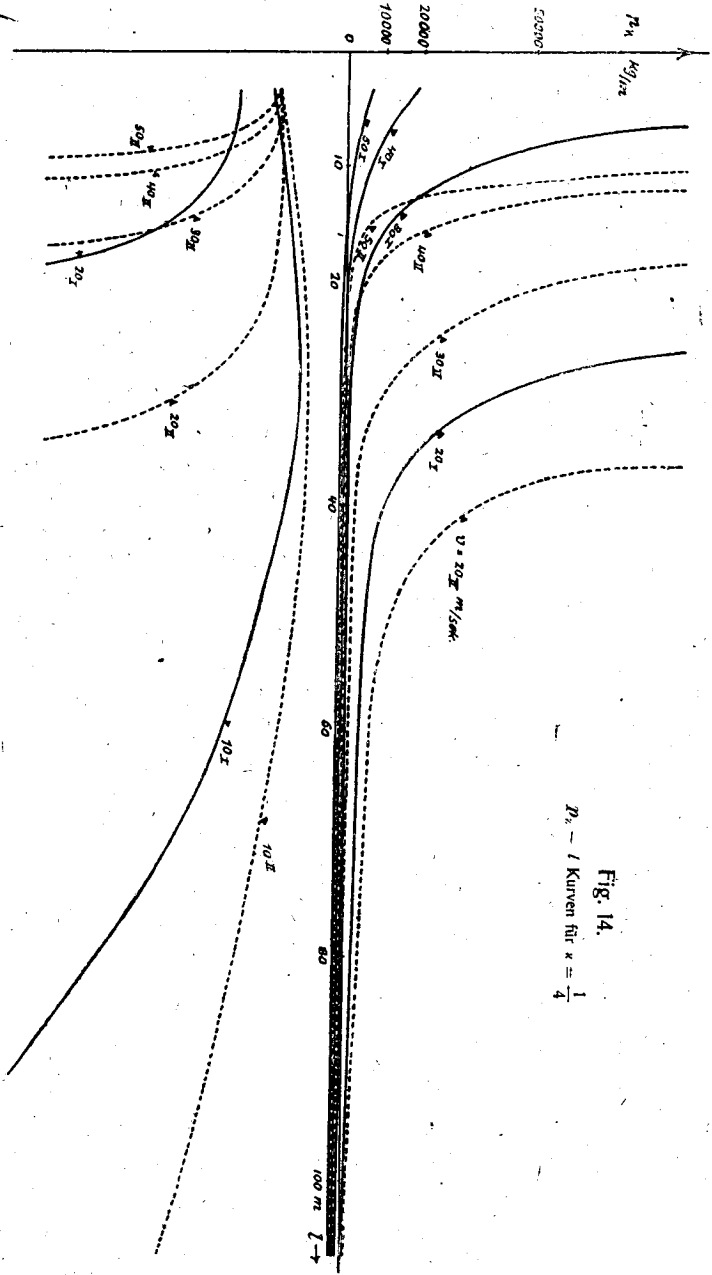


Fig. 14.
 $P_k - l$ Kurven für $\kappa = \frac{1}{4}$

Verhältnissen nur durch Abänderung des Eigengewichtes auszuweichen.

Fig. 15 gibt die $p_z - l$ Kurven für $\alpha = 1/4$. Diese Kurven erlauben uns, das Eigengewicht so zu wählen, daß für ein bestimmtes Intervall von Geschwindigkeiten keine Resonanz auftritt. Das Eigengewicht muß kleiner sein als der Betrag, welcher Resonanz mit der größten Geschwindigkeit gibt, oder größer als jener, der Resonanz mit der kleinsten Geschwindigkeit gibt. Das letztere ist nicht möglich, da eine Brücke für alle Geschwindigkeiten zwischen Null und dem Maximalwert gesichert sein muß. Wie groß nun auch für irgend ein l das p angenommen wird, so geht durch diesen Punkt der Figur 15 eine, den eingezeichneten analoge Kurve für ein bestimmtes v . Man muß auch hier das Intervall der zulässigen Geschwindigkeiten einschränken.

Wie bis jetzt kritische Werte für das Eigengewicht bei $\psi = 1$ abgeleitet wurden, so können umgekehrt bei den üblichen Eigengewichten die kritischen Trägheitsmomente resp. Vergrößerungskoeffizienten ψ_z berechnet werden. Dazu schreiben wir 21 in der Form

$$v \left(\frac{1}{R} \pm \frac{\pi}{l} \right) = 50 \sqrt{\psi_z} \sqrt{5 \cdot \frac{p + p_m}{p + zq}}$$

und lösen nach ψ_z auf.

$$\psi_z = \frac{\left(\frac{2}{u} \pm \frac{1}{l} \right)^2}{1250} \cdot \frac{p + zq}{p + p_m} \cdot v^2 \cdot l$$

Führen wir p , q und p_m ein, so erhalten wir

$$\psi_z = \frac{\left(\frac{2}{u} \pm \frac{1}{l} \right)^2}{1250} \cdot \frac{880 + 54 \cdot l + z \cdot 11000}{20115 - 357 \cdot l} \cdot v^2 \cdot l \quad \text{Dim.-Regel VI.} \quad \text{für } l < 20^m$$

$$\psi_z = \frac{\left(\frac{2}{u} \pm \frac{1}{l} \right)^2}{1250} \cdot \frac{880 + 54 \cdot l + z \cdot 11000}{11880 + 54 \cdot l} \cdot v^2 \cdot l \quad \text{Dim.-Reg. VIa.} \quad \text{für } l > 20^m$$

Für den Spezialfall $u = 6,0^m$ stellt Fig. 16 ψ_z in Funktion von l dar. Diese $\psi_z - l$ -Kurven sind analog zu verwenden wie die p_z -Kurven. Dabei haben nur Werte $\psi_z > 1$ praktische Bedeutung.

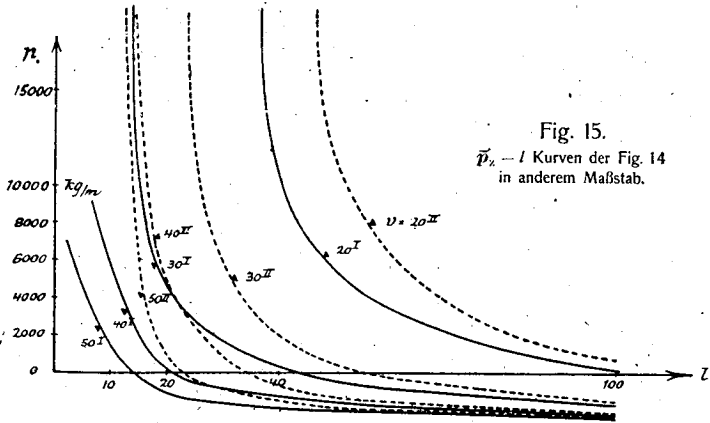


Fig. 15.
 $\bar{p}_x - l$ Kurven der Fig. 14
 in anderem Maßstab.

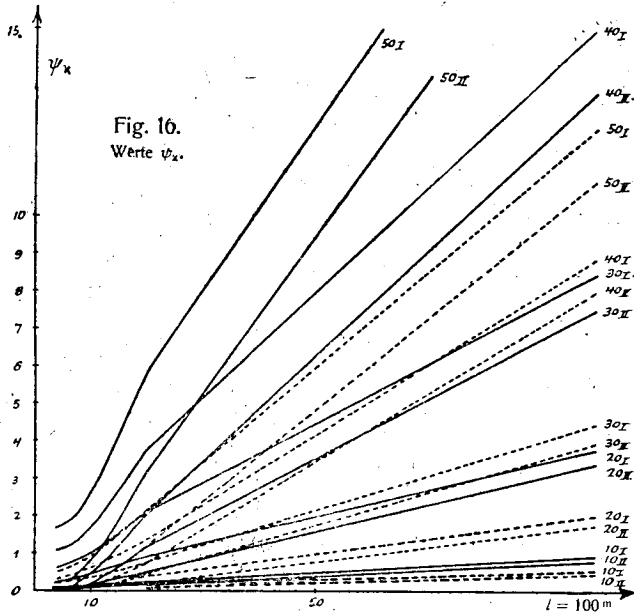


Fig. 16.
 Werte ψ_x .

Die Untersuchung hat gezeigt, daß die Resonanz durch Variation von ψ oder p vermieden werden kann. Ob man ψ oder p ändern soll, wird durch die Wirtschaftlichkeit bedingt. Es muß möglich sein, aus der Änderung der einen Größe die äquivalente

der andern zu berechnen. Zwei Größen p_1, ψ_1 können für unsere Rechnung zwei Werte p_2, ψ_2 ersetzen, wenn sich in beiden Fällen die gleiche Schwingungsdauer ergibt, d. h.

$$(s^2)_1 = (s^2)_2$$

$$\text{oder} \quad \psi_1 \cdot \frac{p_1 + p_m}{p_1 + \alpha q} = \psi_2 \cdot \frac{p_2 + p_m}{p_2 + \alpha q} \quad 22)$$

Für $\psi_1 = 1$ und p_2 dazugehöriges kritisches Eigengewicht, heißt diese Formel

$$\frac{p_2 + p_m}{p_2 + \alpha q} \cdot 1 = \psi_2 \cdot \frac{p_2 + p_m}{p_2 + \alpha q}$$

Ersetzen wir ψ_2 resp. p_2 durch die beliebigen Werte ψ und p , und berechnen das, zu dem üblichen Werte p gehörige ψ so, daß es äquivalent ist einem p^* bei $\psi = 1$, so lösen wir 22 nach ψ_2 auf.

$$\psi = \frac{p + \alpha q}{p + p_m} \cdot \frac{p^* + p_m}{p^* + \alpha q} \quad \text{Dimens. Regel VII.}$$

Wir begnügen uns auch hier mit der Untersuchung der Grundschwingung, da die Erfahrung zeigt, daß Balkenbrücken i. a. als Ganzes, d. h. ohne Knotenpunkte schwingen.

Analoge Betrachtungen, wie wir sie hier für Eisenbahnbrücken durchgeführt haben, können auch für Straßenbrücken gemacht werden. Für eine periodische Last $P = P_0 \cdot \cos(nt)$, die mit der Geschwindigkeit v sich über den Träger bewegt, gilt für Resonanz

$$n = \frac{s_i^2 \pi^2 \cdot i^2}{l^2} \mp \frac{i \pi \cdot v}{l}$$

n und v sind nicht unabhängig voneinander; angenähert gilt der Ansatz $n = c \cdot v$, wobei c eine für jede Lastart zu ermittelnde Konstante ist. Für Spezialfälle ist es einfacher, n und v als solche einzuführen. Da v i. a. bei Straßenbrücken klein ist, so werden die Resultate von § 3, auch hier angenähert gültig sein.

Schließlich erwähnen wir noch jene periodischen Einflüsse, die bei Eisenbahnbrücken infolge der Eigenschwingungen der Lokomotiven (Längs- und Querschwingungen) auftreten. Zur Vermeidung ungünstiger Verhältnisse wird es vorsichtig sein, die Frequenz der Brückenschwingung durch geeignete Wahl von p und ψ von derjenigen der Lokomotivschwingungen verschieden zu machen.

4. Träger mit veränderlichem Trägheitsmoment.

Wir haben bisher Balken mit konstantem Trägheitsmoment vorausgesetzt. Für kleine Stützweiten trifft das meistens zu. Sobald aber an Stelle von Walzträgern Blechträger verwendet werden, wird das Trägheitsmoment möglichst dem Biegemoment angepaßt. Weit mehr noch sind Fachwerke als Träger konstanter Beanspruchung zu betrachten.

Die genaue Lösung des Schwingungsproblems wird unmöglich, sobald das Trägheitsmoment mit x variabel ist. Es gelingt dann i. a. nicht mehr, Ausdrücke für die Normalfunktionen zu finden. Wir müssen daher ein Näherungsverfahren anwenden. Wir setzen voraus, daß bei veränderlichem Trägheitsmoment die dynamischen

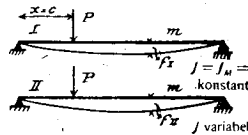


Fig. 17.

Deformationen sich in gleichem Verhältnis ändern wie die statischen. Unter dieser Annahme denken wir uns einen Träger mit konstantem Trägheitsmoment J_M durch eine Kraft P in $x = c$ belastet. Sie erzeugt in einem beliebigen Punkt m eine statische Durchbiegung f_I . Dann werde ein Balken gleicher Stützweite mit einem von J_E bis J_M veränderlichen Trägheitsmoment ebenso belastet. Die Durchbiegung in m sei f_{II} . Nennen wir $\frac{f_{II}}{f_I} = r$, so ist nach unserer Annahme auch die für I berechnete Schwingungsordinate mit r zu multiplizieren. r ist eine Funktion des Ortes und der Laststellung.

Bei veränderlichem Trägheitsmoment ändert sich auch die Schwingungsdauer. In guter Annäherung kann als Schwingungsdauer der Grundschwingung gesetzt werden

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_P}{g}}$$

für eine Einzellast in der Balkenmitte bei masselosem Träger, wenn f_P die statische Durchbiegung im Lastpunkt ist.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_p}{2g}}$$

für gleichmäßig verteilte Belastung p , wenn f_p die statische Durchbiegung in der Balkenmitte, infolge der dorthin reduzierten Last $p \cdot l$ ist.

Für Eigengewicht und Einzellast P in c kann nach A, § 5 geschrieben werden

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_p}{2g} \left(1 + \frac{2P}{p \cdot l} \cdot \sin^2 \pi \cdot \frac{c}{l} \right)}$$

Schreiben wir diese Beziehung für die beiden Fälle I und II an, und machen wir noch die Annahme, daß die Änderung der Schwingungsdauer infolge einer Einzellast in beiden Fällen gleich erfolge, so haben wir

$$T_I = 2\pi \sqrt{\frac{f_I}{g} \left(1 + 2\kappa \cdot \sin^2 \pi \cdot \frac{c}{l} \right)}$$

$$T_{II} = 2\pi \sqrt{\frac{f_{II}}{g} \left(1 + 2\kappa \cdot \sin^2 \pi \cdot \frac{c}{l} \right)}$$

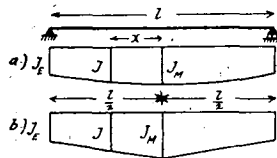


Fig. 18.

Es wird also

$$\frac{T_{II}}{T_I} = \sqrt{\frac{f_{II}}{f_I}}$$

f_{II} und f_I sind hier bezügliche Durchbiegungen in der Balkenmitte infolge der dort wirkenden Last. Nehmen wir den eingeführten Wert r über den ganzen Träger und für jede Laststellung konstant an, so ist

$$\frac{T_{II}}{T_I} = \sqrt{r}$$

Für einen Träger konstanter Beanspruchung gegenüber einem solchen konstanten Trägheitsmomentes gibt Résal²¹⁾ für r den

²¹⁾ Angegeben von H. Saller, siehe Fußnote 2.

Wert 1,4. Wir bestimmen den Wert r für zwei Annahmen über die Variation des Trägheitsmomentes.

1. Änderung von J nach einer quadratischen Parabel.

Der Verlauf des Trägheitsmomentes sei mit den Bezeichnungen von Fig. 18a gegeben durch

$$J = J_M - (J_M - J_E) \cdot 4 \cdot \frac{x^2}{l^2}$$

$$= J_M \left(1 - (1-n) \cdot 4 \cdot \frac{x^2}{l^2} \right),$$

wenn
$$n = \frac{J_E}{J_M}$$

Dieser Verlauf von J gilt auch angenähert, wenn dasselbe infolge Lamellenverwendung sprunghaft ändert.

Für eine Last P in Balkenmitte wird bei konstantem J_M

$$f_I = \frac{P \cdot l^2}{48 E \cdot J_M} \quad \text{in Balkenmitte}$$

f_{II} für veränderliches J bestimmen wir mit einer Arbeitsgleichung.

$$P \cdot f_{II} = \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} = 2 P \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{l}{2} - x \right)^2}{E J_M \left(1 - (1-n) \cdot 4 \cdot \frac{x^2}{l^2} \right)} \cdot dx.$$

Daraus wird

$$f_{II} = \frac{l^3}{16 E J_M} \left[\lg n + \frac{1}{2} \cdot \frac{2-n}{\sqrt{1-n}} \cdot \lg \left(\frac{1+\sqrt{1-n}}{1-\sqrt{1-n}} \right) - 1 \right]$$

Für $J_E = 0$, d. h. $n = 0$, wird der Klammerausdruck zu $[2 \lg 2 - 1]$

$$f_{II} = \frac{1}{41,5} \cdot \frac{l^3}{E J_M}$$

$$r = \frac{f_{II}}{f_I} = \frac{48}{41,5} = 1,16$$

2. Linearer Verlauf von J nach Fig. 18b.

$$J = J_M - (J_M - J_E) \cdot 2 \cdot \frac{x}{l} = J_M \left(1 - 2(1-n) \cdot \frac{x}{l} \right) \quad \text{gültig für } x < \frac{l}{2}$$

Dann wird

$$f_{II} = \frac{l^3}{32 E J_M} \frac{1}{1-n} \left[\frac{1+n}{1-n} + 2 \cdot \frac{n^2}{(1-n)^2} \cdot \lg n \right]$$

Für $n = 0$ wird

$$f_{II} = \frac{l^3}{32 E J_M}$$

$$r = \frac{48}{32} = 1,5$$

Unter Berücksichtigung von r sind die bisher gefundenen Resultate abzuändern, und vor allem sind auch die kritischen Verhältnisse daraufhin zu untersuchen. Bei Vollwandträgern bedingt das keine große Änderung, da bei parabolischem Verlauf r nicht sehr von 1 abweicht. r_{\max} für $n = 0$ ist nur 1,16. Wir begnügen uns daher mit der Andeutung dieser eventuellen Abänderung, ohne dieselbe zahlenmäßig durchzuführen.

II. Stoßbeanspruchungen.

1. Stoß-Schwingungen und Stoßkoeffizienten.

Erfolgen dynamische Einwirkungen auf einen Träger in relativ kurzer Zeit, so spricht man von stoßweiser Wirkung der Last. Jede Brücke ist solchen Beanspruchungen unterworfen. Unebenheiten der Straßenfahrbahn, unrunde Räder, Schienenstöße, störende Lokomotivbewegungen erzeugen Stoßbelastungen.²²⁾ Alle diese Ursachen können meistens wie periodisch wirkende Lasten behandelt werden (vergl. § 3, Abschn. I). Um die Größe der Stoßdeformationen abzuschätzen, sowie im Hinblick auf Träger, welche auf direkte Stoßbelastung zu dimensionieren sind, untersuchen wir den Fall eigentlicher Stoßbelastung dennoch gesondert.

Jeder Stoß auf einen elastischen Körper löst Schwingungen aus. Die kinetische Energie der stoßenden Masse wird zu ver-

²²⁾ Vergl. Deslandres, Action des chocs rythmés sur les travées métalliques. Annales des Ponts et Chaussées, 1892.

schiedenen Zwecken verbraucht, Ein erster Teil verursacht die elastischen Schwingungen des Trägers. Ein zweiter Teil wird in lokale Deformationsarbeit umgewandelt und geht für die Bewegung verloren.²³⁾ Der Rest erzeugt innere elastische Schwingungen der stoßenden Last. Dieser letzte Teil kann für alle folgenden Untersuchungen vernachlässigt werden. Hingegen hat jede Untersuchung einer Stoßbelastung die beiden andern Teile zu berücksichtigen. Eine Berechnung, welche nur den einen Teil der verbrauchten Energie berücksichtigt, ist unvollständig; denn sowohl große Schwingungsausschläge, wie große lokale Deformationen können ein Tragwerk zerstören.

Wir finden in der Literatur verschiedene Abhandlungen über das Stoßproblem. Die Stoßschwingungen wurden u. a. untersucht von Rayleigh, Timoschenko und Lebert. Rayleigh gibt in kurzer Fassung die allgemeine Bestimmung der Schwingungen infolge eines, in einem bestimmten Trägerpunkt wirkenden Impulses. Wohl die ausführlichste und genaueste Untersuchung ist die von Timoschenko.²⁴⁾ Ohne den theoretischen Wert dieser Arbeit zu verkennen, müssen wir im Hinblick auf die praktische Anwendung von dem darin gegebenen Verfahren absehen. Die ausgedehnte Rechnungsarbeit, und vor allem das Fehlen der gemachten Voraussetzungen (z. B. genaue geometrische Form der sich stoßenden Körper) machen es nötig, dieses Verfahren durch ein theoretisch weniger genaues, aber einfacheres, zu ersetzen.

Unsere Lösung unterscheidet sich von der Lebert'schen durch die Bestimmung der Koeffizienten. Die etwas willkürliche und vor allem schwer vorstellbare Bestimmung der Koeffizienten C_i im folgenden Ausdruck 23 wird durch eine einfachere ersetzt, welche auf die verschiedensten Fälle und Annahmen angewandt werden kann.

Fällt irgend eine Last P auf einen Balken, so kann die Schwingungsordinate eines Punktes mit dem Abstand x vom Trägerende geschrieben werden

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_{i \text{ stat. } P} + \left(C_i \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{t_i}{T_i} + D_i \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{t_i}{T_i} \right) \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} \quad 23)$$

²³⁾ Grashof, Elastizität und Festigkeit, 2. Aufl., Berlin 1878.

²⁴⁾ Timoschenko, siehe Fußnote 17.

Das Schwingungsproblem ist gelöst, wenn die Koeffizienten C_i und D_i bestimmt werden können. Das ist nur mit tiefgreifenden Annahmen über die Elastizität des Stoßes und über die Geschwindigkeiten der Trägerpunkte unmittelbar nach dem Stoß möglich.

Wir wollen, wie es in der diesbezüglichen Literatur üblich ist, den Stoß als vollkommen unelastisch annehmen. Weiter untersuchen wir verschiedene Annahmen über die Geschwindigkeitsverteilung. Es läßt sich nicht allgemein entscheiden, welche Verteilungsart die wahrscheinlichste ist. Das hängt wesentlich von den Dimensionen des Trägers ab. Die in der Literatur häufigste Annahme, daß sich die Geschwindigkeiten verhalten wie die statischen Biegungsordinaten, ersetzen wir durch die viel einfachere parabolische Verteilung.

In 23 müssen die Koeffizienten C_i und D_i so bestimmt werden, daß die Bedingungen erfüllt sind

$$(y)_{t=0} = 0 \quad \text{und} \quad (\dot{y})_{t=0} = g(x)$$

Damit erhalten wir:

$$C_i = \frac{T_i \int_0^l \sin\left(i\pi \frac{x}{l}\right) \cdot g(x) \cdot dx}{2\pi \int_0^l \sin^2\left(i\pi \frac{x}{l}\right) \cdot dx} \quad \text{und} \quad D_i = - \frac{y_{i \text{ stat. } P}}{\sin i\pi \frac{x}{l}}$$

Erfolgt der Stoß auf einen Träger mit der ständigen Last p , so ist $(y)_{t=0} = y_p$, und die Werte D_i bleiben unverändert, wenn $y_{i \text{ stat. } p}$ in die Summe 23 aufgenommen wird. Die Werte D_i sind daher durch die vorangegangenen Paragraphen gegeben. Neu ist hier nur die Bestimmung der C_i , welche an zwei Beispielen gezeigt werden soll.

Gleichmäßig verteilte Streckenlast q , unter der Annahme parabolischer Verteilung der Geschwindigkeit über die Laststrecke. Fig. 19.

Wir bezeichnen mit H die Fallhöhe der Last $P = q \cdot d$. Die Geschwindigkeit der Last beim Auffallen ist daher

$$v = \sqrt{2gH}$$

Die maximale Geschwindigkeit unter der Lastmitte heiße \bar{v} . Für einen beliebigen Punkt zwischen λ_1 und λ_2 ist die Geschwindigkeit

$$g(x) = \bar{v} \frac{4}{d^2} \cdot \xi(d - \xi)$$

Der Satz von der Erhaltung des Impulses gibt unter der Annahme vollkommen unelastischen Stoßes

$$\int_0^l \frac{p+q}{g} \cdot dx \cdot g(x) = \frac{q}{g} \cdot d \cdot v.$$

Daraus wird
$$\bar{v} = \frac{3}{2} \cdot \frac{q}{p+q} \cdot v.$$

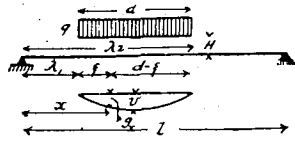


Fig. 19.

Wir bestimmen das Zählerintegral von C_i ; das Nennerintegral ist $\frac{l}{2}$. Mit $\zeta = x - \lambda_1$ wird

$$\int_0^l g(x) \cdot v \cdot dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{q}{q+p} \cdot v \cdot \frac{4}{d^2} \cdot \left[(\lambda_1 + \lambda_2) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} \cdot dx - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x^2 \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} \cdot dx - \lambda_1 \lambda_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sin i\pi \frac{x}{l} \cdot dx \right]$$

Durch wiederholte partielle Integration erhalten wir für C_i

$$C_i = 12 \cdot \frac{q}{p+q} \cdot \frac{l^2}{d^2} \cdot \frac{T_i}{i^3 \pi^3} \cdot \sin \left(\frac{i\pi}{2} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} \right) \cdot v \left[\frac{2}{i\pi} \cdot \sin \left(\frac{i\pi}{2} \cdot \frac{d}{l} \right) - \frac{d}{l} \cdot \cos \left(\frac{i\pi}{2} \cdot \frac{d}{l} \right) \right]$$

Daraus leiten wir folgende Spezialfälle ab:

a) Belastung symmetrisch zur Balkenmitte.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = l. \quad \sin \frac{i\pi}{2} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} = \sin \left(\frac{i\pi}{2} \right)$$

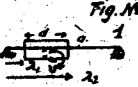
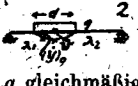
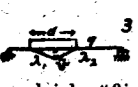
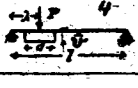
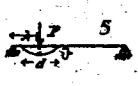
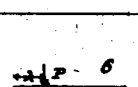
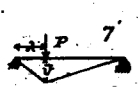
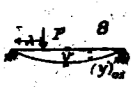
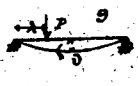
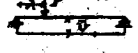
d. h. $C_2 = C_4 = C_6 = \dots = 0.$

b) Sehr kleines d .

$$\sin \frac{i\pi}{2} \cdot \frac{d}{l} = \frac{i\pi}{2} \cdot \frac{d}{l}$$

Tabelle V.

Zusammenstellung der verschiedenen Annahmen bei Stoßbelastung.

	Darstellung von Last- und Geschwindigkeitsverteilung	$\bar{v} = (\dot{y})_{0 \max}$	$(\dot{y})_{0x}$	C_i allgemein	C_i für kleines d	C_i für Totalbelastg.	E_k Schwing.
Verteilte Last und Geschw. auf dieselbe Strecke d verteilt	 <p>Fig. 1 q und v gleichmäßig über d</p>	$\bar{v} = (\dot{y})_{0x} = v \cdot \frac{q}{q + \bar{p}}$		$\frac{2 T_i}{i \pi^2} \cdot \frac{p}{q + \bar{p}} \cdot v \cdot \sin i \pi \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2 l} \cdot \sin i \pi \cdot \frac{s}{2 l}$	$\frac{T_i}{\pi} \cdot \frac{s}{l} \cdot \frac{q}{q + \bar{p}} \cdot v \cdot \sin i \pi \frac{\lambda}{l}$	$2 \cdot \frac{T_i}{i \pi^2} \cdot \frac{q}{q + \bar{p}} \cdot v \cdot \sin^2 \left(\frac{i \pi}{2} \right)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot d}{g} \cdot \frac{q}{q + \bar{p}} \cdot v^2$
	 <p>Fig. 2 q gleichmäßig $(\dot{y})_0$ parabolisch</p>	$\bar{v} = \frac{3}{2} \cdot \frac{q}{\bar{p} + q} \cdot v$	$\frac{4}{d^2} \cdot \xi(d - \xi) \cdot \bar{v}$	$12 \cdot \frac{q}{q + \bar{p}} \cdot \frac{l^2}{d^2} \cdot \frac{T_i v}{i^2 \pi^3} \cdot \sin \left(\frac{i \pi}{2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} \right) \cdot \left[\frac{2}{i \pi} \cdot \sin \left(\frac{i \pi}{2} \cdot \frac{d}{l} \right) - \frac{d}{l} \cos \left(\frac{i \pi}{2} \cdot \frac{d}{l} \right) \right]$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{T_i}{\pi} \cdot \frac{d}{l} \cdot \frac{q}{q + \bar{p}} \cdot v \cdot \sin i \pi \frac{\lambda}{l}$	$24 \cdot \frac{T_i}{i^3 \pi^4} \cdot \frac{q}{\bar{p} + q} \cdot v \cdot \sin^2 \left(\frac{i \pi}{2} \right)$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{q \cdot d}{g} \cdot \frac{q}{\bar{p} + q} \cdot v^2$
	 <p>Fig. 3 q gleichmäßig $(\dot{y})_0$ gradlinig</p>	$2 \cdot \frac{q}{q + \bar{p}} \cdot v$	resp. $2 \cdot \frac{x - \lambda_1}{d} \cdot \bar{v}$ $2 \cdot \frac{\lambda_2 - x}{d} \cdot \bar{v}$	resp. $8 \cdot \frac{q}{q + \bar{p}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{T_i}{i^2 \pi^3} \cdot v \cdot \left[\sin \left(\frac{i \pi}{2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{l} \right) - \sin \left(i \pi \frac{\lambda_2}{l} \right) \right]$ $16 \cdot \frac{q}{q + \bar{p}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{T_i}{i^2 \pi^3} \cdot v \cdot \cos \frac{i \pi}{2} \cdot \frac{2 \lambda_1 + d}{l} \cdot \sin \left(\frac{i \pi}{2} \frac{d}{2 l} \right)$	$4 \cdot \frac{T_i}{i \pi^2} \cdot \frac{q}{q + \bar{p}} \cdot v \cdot \cos i \pi \frac{\lambda}{l}$	$8 \cdot \frac{T_i}{i^2 \pi^3} \cdot \frac{q}{q + \bar{p}} \cdot v \cdot \sin \frac{i \pi}{2}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot d}{g} \cdot \frac{q}{q + \bar{p}} \cdot v^2$
Einzellast mit Verteilung der Geschw. auf Strecke d	 <p>Fig. 4</p>	$\bar{v} = (\dot{y})_0 = \frac{P}{P + \bar{p} d} \cdot v$		in 1 $\frac{q}{q + \bar{p}}$ zu ersetzen durch $\frac{P}{P + \bar{p} d}$	ebenso	ebenso	$\frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{P}{P + \bar{p} d} \cdot v^2$
	 <p>Fig. 5</p>	$\bar{v} = \frac{P}{\frac{2}{3} \bar{p} d + P} \cdot v$	analog wie 2	in 2 ist $12 \cdot \frac{q}{q + \bar{p}}$ zu ersetzen durch $8 \cdot \frac{P}{P + \frac{2}{3} \bar{p} d}$	ebenso	ebenso	$\frac{1}{2} \cdot \frac{P + \frac{8}{15} \bar{p} d}{g} \cdot \left(\frac{P}{P + \frac{2}{3} \bar{p} d} \right)^2 \cdot v^2$
	 <p>Fig. 6</p>	$\bar{v} = \frac{P}{P + \frac{\bar{p} d}{2}} \cdot v$	analog wie 4	in 3 ist $8 \cdot \frac{p}{q + \bar{p}}$ zu ersetzen durch $4 \cdot \frac{P}{P + \frac{\bar{p} \cdot d}{2}}$	ebenso	ebenso	$\frac{1}{2} \cdot \frac{P + \frac{\bar{p} d}{3}}{g} \cdot \left(\frac{P}{P + \frac{\bar{p} d}{2}} \right)^2 \cdot v^2$
Einzellast mit Verteilung der Geschw. auf den ganzen Träger	 <p>Fig. 7</p>	$\frac{2 P}{2 P + \bar{p} \cdot l} \cdot v$	$x < \lambda (\dot{y})_0 = \frac{x}{\lambda} \cdot \bar{v}$ $x > \lambda (\dot{y})_0 = \frac{l - x}{l - \lambda} \cdot \bar{v}$	$\frac{T_i}{i^2 \pi^3} \cdot \frac{l^2}{(l - \lambda) \lambda} \cdot \frac{2 P}{2 P + \bar{p} \cdot l} \cdot v \cdot \sin i \pi \frac{\lambda}{l}$	—	—	$\frac{1}{2} \cdot \frac{P + \bar{p} \cdot \frac{l}{3}}{g} \cdot \left(\frac{2 P}{2 P + \bar{p} \cdot l} \right)^2 \cdot v^2$
	 <p>Fig. 8</p>	$\frac{P}{4 P \cdot \frac{\lambda(l - \lambda)}{l^2} + \frac{2}{3} \bar{p} l} \cdot v$	$4 \cdot \frac{x(l - x)}{l^2} \cdot \bar{v}$	$16 \cdot \frac{P}{4 P \cdot \frac{\lambda(l - \lambda)}{l^2} + \frac{2}{3} \bar{p} \cdot l} \cdot \frac{T_i}{i^3 \pi^4} \cdot v \cdot \sin^2 \frac{i \pi}{2}$	—	—	$\frac{1}{2} \cdot \frac{16 P \cdot \frac{\lambda^2(l - \lambda)^2}{l^2} + \frac{8}{15} \bar{p} \cdot l}{g} \cdot \left(\frac{P}{4 P \cdot \frac{\lambda(l - \lambda)}{l^2} + \frac{2}{3} \bar{p} \cdot l} \right)^2 \cdot v^2$
	 <p>Fig. 9</p>	$\frac{P}{P \cdot \sin i \pi \frac{\lambda}{l} + \frac{2}{\pi} \bar{p} \cdot l} \cdot v$	$\bar{v} \cdot \sin \pi \frac{x}{l}$	alle C außer C_1 werden 0. $C_1 = \frac{T_i}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{P \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l} + \frac{2}{\pi} \bar{p} \cdot l} \cdot v$	—	—	$\frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot \sin^2 \pi \frac{\lambda}{l} + \frac{\bar{p} \cdot l}{2}}{g} \cdot \left(\frac{P}{P \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l} + \frac{2}{\pi} \bar{p} \cdot l} \right)^2 \cdot v^2$
	 <p>Fig. 10</p>	$\bar{v} = (\dot{y})_0 = \frac{P}{P + \bar{p} l} \cdot v$		$2 \cdot \frac{P}{P + \bar{p} l} \cdot \frac{T_i}{i \pi^2} \cdot v \cdot \sin^2 \frac{i \pi}{2}$	—	—	$\frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot \frac{P}{P + \bar{p} \cdot l} \cdot v^2$

$$\cos\left(\frac{i\pi}{2} \cdot \frac{d}{l}\right) = 1 - \frac{i^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{l^2}$$

$$C_i = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_i}{\pi} \cdot \frac{d}{l} \cdot \frac{q}{p+q} \cdot v \cdot \sin\left(i\pi \frac{\lambda}{l}\right)$$

Für eine Einzellast, die wir auf ein sehr kleines d verteilt denken, ist $\frac{q}{p+q}$ zu ersetzen durch $\frac{P}{P+pd}$.

c) Totalbelastung. $d = l$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = l$.

$$C_i = 24 \frac{T_i}{i^3 \pi^4} \cdot \frac{q}{p+q} \cdot v \cdot \sin^2 \frac{i\pi}{2} = 12 \cdot \frac{T_i}{i^3 \pi^4} \cdot \frac{q}{p+q} \cdot v (1 - \cos i\pi)$$

Einzellast, unter der Annahme symmetrisch parabolischer Geschwindigkeitsverteilung über den ganzen Träger. Fig. 20.

Die zur Balkenmitte symmetrische Parabel ersetzt die, für jede Laststellung veränderliche, komplizierte elastische Linie. Die

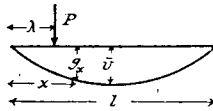


Fig. 20.

Symmetrie bedingt keine starke Abweichung von der Wirklichkeit; denn bekanntlich verschiebt sich die maximale Durchbiegung für eine Einzellast im Grenzfalle nur um ca. 6% von der Mitte weg.

\bar{v} berechnet sich aus

$$P \cdot v = \int_0^l p \cdot dx \cdot 4 \cdot \bar{v} \cdot \frac{x(l-x)}{l^2} + P \cdot 4 \cdot \bar{v} \cdot \frac{\lambda(l-\lambda)}{l^2}$$

$$\bar{v} = v \cdot \frac{P}{4P \cdot \frac{\lambda(l-\lambda)}{l^2} + \frac{2}{3} \cdot p \cdot l}$$

$$\text{Für } \lambda = \frac{l}{2} \text{ ist } \bar{v} = v \cdot \frac{P}{P + \frac{2}{3} p \cdot l}$$

In gleicher Weise wurden die verschiedensten Annahmen untersucht; die Resultate sind in Tabelle V zusammengestellt.

Wie betont wurde, ist bei jedem Stoßproblem die Kenntnis der kinetischen Energie des schwingenden Trägers und der verlorenen kinetischen Energie von Wichtigkeit. Deshalb gibt die Tabelle V für jede Annahme auch den Ausdruck für die kinetische Energie.

Nach getroffener Annahme über die Geschwindigkeitsverteilung berechnet sich die kinetische Energie

$$E_k = \int_0^l \frac{dm}{2} \cdot (g_x)^2$$

Im ersten Beispiel ist daher die kinetische Energie

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \frac{p+q}{g} \int_0^d (g_x)^2 \cdot d\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{l^4} \cdot r^2 \frac{p+q}{g} \int_0^d \xi^2 (l-\xi)^2 \cdot d\xi \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{q \cdot d}{g} \cdot \frac{q}{p+q} \cdot v^2 \end{aligned}$$

Im Beispiel der Einzellast wird E_k

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot \left(4 \cdot \frac{\lambda(l-\lambda)}{l^2} \cdot \bar{v} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \frac{p}{g} \left(4 \frac{x(l-x)}{l^2} \cdot \bar{v} \right)^2 dx \\ &= \frac{16P \cdot \frac{\lambda^2(l-\lambda)^2}{l^4} + \frac{8}{15} p \cdot l}{2g} \cdot \left(\frac{P}{4P \cdot \frac{\lambda(l-\lambda)}{l^2} + \frac{2}{3} \cdot pl} \right)^2 \cdot v^2 \end{aligned}$$

Analog ist E_k für alle weiteren Annahmen berechnet worden. Zu den verschiedenen Annahmen bemerken wir folgendes: Es liegen zur Zeit noch keine Versuchswerte über die Geschwindigkeitsverteilung im Moment des Stoßes vor. Da der Verlauf der Stoßschwingungen in hohem Maße vom anfänglichen Geschwindigkeitszustand abhängt, ist der Wert solcher Versuche klar. Offenbar gibt es kein allgemeines Verteilungsgesetz; dasselbe wird von den Dimensionen des Trägers abhängen. So wird bei relativ schwachem Träger eine begrenzte Geschwindigkeitsverteilung richtiger sein als bei starkem Träger, bei welchem sich die Geschwindigkeit eher allen Trägerpunkten mitteilt. Im Hinblick auf diese Unsicherheit wurden die Annahmen so zahlreich und verschieden gewählt. Für $p = 0$ ergibt sich, je nach Art der Geschwindigkeitsverteilung, ein scheinbarer Energiegewinn; dieser Widerspruch ist durch die Willkürlichkeit der Geschwindigkeitsverteilung bedingt.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen untersuchen wir die Stoßschwingungen für bestimmte Fälle. Die allgemeine Formel 23 zeigt, daß jede Stoßschwingung sich zusammensetzt aus der Schwingung infolge „plötzlicher“ Wirkung der Last ohne Geschwindigkeit

$$y_{i \text{ stat.}} \left(1 - \cos 2\pi \frac{t}{T_i} \right),$$

und aus der Schwingung, die von der Geschwindigkeit, d. h. vom Impuls der Last herrührt

$$C_i \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{t}{T_i} \cdot \sin i\pi \frac{x}{l}.$$

Zur übersichtlichen Darstellung zerlegen wir daher jede Stoßschwingung in „Lastschwingung“ und „Impulsschwingung“. Diese Zerlegung vereinfacht die Rechnung und ist sehr übersichtlich; denn die beiden Schwingungen können nach dem vorangegangenen leicht bestimmt werden.

1. Stoß-Schwingungen infolge einer fallenden Einzellast in $x = \lambda$.

Nach dem Gesagten kann für die Schwingungsordinate aus P gesetzt werden:

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2P \cdot l^3}{EJ} \cdot \frac{\sin i\pi \frac{\lambda}{l}}{i^4 \pi^4} \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} \left(1 - \cos 2\pi \cdot \frac{t}{T_i} \right) + C_i \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{t}{T_i} \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} \quad (24)$$

Darin sind

$$T_i = \frac{2 \cdot l^2}{i^2 \pi \cdot s_i^2}, \quad \text{und} \quad s_i^2 = \sqrt{\frac{EJ \cdot g}{p + \frac{2P}{l} \cdot \sin^2 i\pi \frac{\lambda}{l}}}$$

Da wir uns auf die Grundschwingung beschränken, wählen wir C_1 nach 9 der Tabelle V:

$$C_1 = \frac{T_1}{2\pi} \cdot \frac{P}{P \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l} + \frac{2}{\pi} \cdot p \cdot l} \cdot v$$

Mit Berücksichtigung der ständigen Last p ist

$$y = \frac{2p \cdot l^4}{EJ} \cdot \frac{2}{\pi^5} \cdot \sin \pi \frac{x}{l} + \frac{2P \cdot l^3}{EJ\pi^4} \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l} \cdot \sin \pi \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \cos 2\pi \cdot \frac{t}{T_1} \right) + \frac{T_1}{2\pi} \frac{P \cdot \sin \pi \frac{x}{l}}{P \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l} + \frac{2}{\pi} p \cdot l} \cdot v \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{t}{T_1} \quad (25)$$

y wird maximal für $\dot{y} = 0$, was eine Gleichung für t gibt. Für die erste Wurzel t_1 gilt:

$$\frac{T_1}{4} < t_1 < \frac{T_1}{2}$$

t_1 liegt für einigermaßen großes v in der Nähe von $\frac{T_1}{4}$, und für $v \sim 0$ in der Nähe von $\frac{T_1}{2}$.

Unter Verwendung dieser extremalen Fälle werden Stoßkoeffizienten ermittelt, welche angeben, wieviel mal größer die dynamischen Deformationen sind als die statischen.

Wir bezeichnen mit n^* den Vergrößerungskoeffizienten ohne Berücksichtigung der ständigen Last, und mit n jenen, der diese berücksichtigt. Dann ist

$$n^* = \frac{y_{Pdy}}{y_{Pst}}, \quad n = \frac{y_{Pst} + y_{Pdy}}{y_{Pst} + y_{Pst}} = \frac{y_{Pst} + n^* \cdot y_{Pst}}{y_{Pst} + y_{Pst}}$$

n hat für die praktische Anwendung größere Bedeutung. Bei der Bestimmung dieser Koeffizienten wird zwischen großen und kleinen Werten v zu unterscheiden sein.

a) Relativ großes v .

y wird maximal für $t \sim \frac{T_1}{4}$.

$$y_{x=\lambda}^{max} = 2 \cdot \frac{P \cdot l^3}{EJ} \cdot \frac{\sin^2 \pi \frac{\lambda}{l}}{\pi^4} + \frac{T_1}{2\pi} \cdot \frac{P \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l}}{P \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l} + \frac{2}{\pi} p \cdot l}$$

$$n^* = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^3}{l^3} \cdot T_1 \cdot \frac{1}{\sin \pi \frac{\lambda}{l}} \cdot \frac{EJ}{P \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l} + \frac{2}{\pi} p \cdot l}$$

Führen wir darin ein

$$EJ \cdot g = 125 (2P + p \cdot l) \cdot l^2, \quad k = \frac{P}{p \cdot l}, \quad v = \sqrt{2gh},$$

und ersetzen T_1 durch seinen Wert, so wird

$$n^* = 1 + 78 \frac{\sqrt{(1+2k)(1+2k \cdot \sin^2(\pi \frac{\lambda}{l}))}}{\sin(\pi \frac{\lambda}{l})(\pi \cdot k \cdot \sin(\pi \frac{\lambda}{l}) + 3)} \cdot \sqrt{\frac{H}{l}} \quad 26)$$

Für Stoßpunkt in Balkenmitte wird

$$n_{\lambda=\frac{l}{2}}^* = 1 + 78 \frac{1+2 \cdot k}{3+\pi k} \cdot \sqrt{\frac{H}{l}} \quad 26a)$$

Tabelle VI für die Werte $n_{\lambda=\frac{l}{2}}^*$

$\frac{H}{l}$	$k=0$	1	2	3	4	5	10	∞
$\frac{1}{25}$	6,20	8,63	9,40	9,70	10,00	10,20	10,50	11,00
$\frac{1}{100}$	3,60	4,82	5,20	5,35	5,50	5,60	5,75	5,96
$\frac{1}{400}$	2,30	2,91	3,10	3,17	3,25	3,28	3,37	3,48

Die wichtigeren Werte n berechnen sich aus der Formel

$$n = \frac{4 \cdot \frac{p \cdot l^4}{EJ} \cdot \frac{\sin \pi \frac{\lambda}{l}}{\pi^5} + n^* \cdot 2 \cdot \frac{P \cdot l^3}{EJ} \cdot \frac{1}{\pi^4} \cdot \sin^2\left(\pi \frac{\lambda}{l}\right)}{4 \frac{p \cdot l^4}{EJ} \cdot \frac{\sin \pi \frac{\lambda}{l}}{\pi^5} + 2 \frac{P \cdot l^3}{EJ \pi^4} \cdot \sin^2\left(\pi \frac{\lambda}{l}\right)} \quad 27)$$

Das gibt für $\lambda = \frac{l}{2}$

$$n_{\lambda=\frac{l}{2}} = \frac{2 + \pi \cdot k \cdot n^*}{2 + \pi \cdot k} \quad 27a)$$

Tabelle VII für die Werte $n_{\lambda = \frac{l}{2}}$

$\frac{H}{l}$	$k=0$	1	2	3	4	5	10	∞
$\frac{1}{25}$	1	5,67	7,35	8,15	8,77	9,15	9,71	11
$\frac{1}{100}$	1	3,34	4,18	4,58	4,89	5,09	5,47	5,96
$\frac{1}{400}$	1	2,17	2,58	2,78	2,94	3,02	3,24	3,48

Die Werte n und n^* stimmen nur für $k = \infty$, d. h. bei Vernachlässigung der ständigen Last überein. Die Tabellenwerte sind in Fig. 21 dargestellt, welche Figur auch den Verlauf von n nach Zschetzsche²⁵⁾ gibt. Es zeigt sich gute Übereinstimmung.

Der Koeffizient n ist wesentlich von der Lage des Stoßpunktes im Balken abhängig. Diese Abhängigkeit ist gegeben durch die allgemeine Formel 28 und Fig. 22.

$$n = \frac{2 + \pi \cdot k \left(1 + 78 \cdot \frac{\sqrt{(1 + 2k) \left(1 + 2k \cdot \sin^2 \pi \frac{\lambda}{l} \right)}}{\sin \pi \frac{\lambda}{l} (\pi k \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l} + 3)} \sqrt{\frac{H}{l}} \right)}{2 + \pi \cdot k \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l}} \quad 28)$$

Nehmen wir an, daß sich die Biegemomente im Stoßquerschnitt gleich ändern wie die Durchbiegungen,²⁶⁾ was bei Vernachlässigung des Einflusses der Querkräfte bei nicht allzu kleinen Spannweiten zutreffen wird, so ergeben sich für eine Last P Verhältnisse, wie sie in Tabelle VIII festgelegt sind.

²⁵⁾ A. Zschetzsche, Deutsche Bauzeitung 1894, „Berechnung dyn. beanspruchter Tragkonstruktionen“.

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_h}{A_f}}, \text{ wenn } A_f = \text{Formänderungsarbeit bei statischer Wirkung von } P.$$

²⁶⁾ Die Annahme trifft vollkommen zu bei Beschränkung auf die Grundschwingung.

Tabelle VIII für die Momente.

$k=0$	$\frac{\lambda}{l}=0$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$
$\frac{1}{10}$		0,225	0,277	0,317	0,338	$0,340 \cdot P \cdot l$
1		1,320	1,010	0,917	0,845	0,835 „
10		4,340	2,210	1,710	1,415	1,370 „
∞		4,950	2,560	1,890	1,550	1,490 „

Wir sehen, daß bei kleinen Werten k noch der mittlere Querschnitt das größte Moment aufweist, währenddem für größere Werte k der gefährliche Querschnitt sich gegen die Auflager verschiebt. Für einen Wert k zwischen $1/10$ und 1 werden die Momente überall ungefähr gleich groß werden.

Wir haben bis jetzt die Durchbiegungen berechnet. Ebenso wichtig sind die Energieverhältnisse. Die kinetische Energie beträgt nach Tabelle V

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{1}{2g} \cdot \left[P \cdot \sin^2 \pi \frac{\lambda}{l} + \frac{pl}{2} \right] \left[\frac{P}{P \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l} + \frac{2}{\pi} p \cdot l} \right]^2 \cdot v^2 \\
 &= P \cdot H \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{k \left(2k \cdot \sin^2 \pi \frac{\lambda}{l} + 1 \right)}{\left(k \pi \cdot \sin^2 \pi \frac{\lambda}{l} + 2 \right)^2} = P \cdot H \cdot \Delta \quad (29)
 \end{aligned}$$

Die Diskussion des Wertes Δ führt auf ein Resultat, das zuerst unwahrscheinlich scheint, daß nämlich die kinetische Energie des gestoßenen Trägers um so größer wird, je näher der Stoßpunkt gegen das Auflager rückt. Das ist möglich, weil der Wert n gegen die Auflager hin wächst. Auch \bar{v} , und damit auch die Werte g_x wachsen in diesem Sinne. Damit ist das Anwachsen von E_k mit dem Näherrücken des Stoßpunktes gegen die Auflager erklärt. Die Intensität des Anwachsens ist wesentlich von der Größe k abhängig.

Wie schon bemerkt, kann bei beliebig angenommener Geschwindigkeitsverteilung E_k größer werden als $P \cdot H$. Auch diese

Möglichkeit hängt sehr von k ab. Um diesen Widerspruch auszu-schalten, schlagen wir folgendes Verfahren vor: Für ein bestimmt vorliegendes k ermitteln wir Δ_{\max} . Ist dieses größer als 1, so wird der Ausdruck für E_k mit $\frac{1}{\Delta_{\max}}$ reduziert.

Um die Abhängigkeit des Wertes Δ von k darzutun, wird der Stoßpunkt in Balkenmitte gewählt.

$$\Delta_{\frac{l}{2}} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{k(2k+1)}{(\pi \cdot k + 2)^2} = \sim 5 \cdot \frac{k(2k+1)}{(\pi k + 2)^2}$$

Fig. 23 stellt diese Formel dar.

b) Relativ kleines v .

y wird maximal für $t \sim \frac{T_1}{2}$.

$$y_{\max} = y_{st_p} + 4 \cdot \frac{P \cdot l^3}{EJ} \cdot \frac{\sin^2 \pi \frac{\lambda}{l}}{\pi^4}$$

Damit wird

$$n = 2 \cdot \frac{1 + k \cdot \pi \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l}}{2 + k \cdot \pi \cdot \sin \pi \frac{\lambda}{l}} \quad 30)$$

Für Stoß in Balkenmitte gilt

$$n_{\frac{l}{2}} = 2 \cdot \frac{1 + k \cdot \pi}{2 + k \pi} \quad 30a)$$

Auch der Verlauf dieses Wertes ist in Fig. 21 eingetragen. Formel 30 zeigt, daß bei plötzlicher Wirkung einer Last die Deformation nur dann auf den doppelten statischen Wert anwächst, wenn $k = \infty$, d. h. das Eigengewicht zu vernachlässigen ist.

Fig. 24 gibt die Abhängigkeit des Wertes n von der Stoßstelle.

2. Stoß-Schwingungen infolge gleichmäßig verteilter fallender Last q .

Den Wert C_i entnehmen wir der Tabelle V, Annahme 2. Wir untersuchen nur den Fall der Totalbelastung.

$$C_i = 24 \cdot \frac{T_i}{i^3 \pi^4} \cdot \frac{q}{p+q} \cdot v \cdot \sin^2 i \frac{\pi x}{2}$$

kann auf die Form gebracht werden

$$C_i = 2 \cdot \frac{q \cdot l^4}{EJ} \cdot \frac{1 - \cos i\pi}{i^5 \pi^5} \cdot \frac{24}{i^2 \pi} \cdot \frac{1}{T_i} \cdot \frac{v}{g}$$

Damit gilt, unter Berücksichtigung einer ständigen Last p ,

$$y = 2 \cdot \frac{p \cdot l^4}{EJ} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - \cos i\pi}{i^5 \pi^5} \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} + 2 \frac{q \cdot l^4}{EJ} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - \cos i\pi}{i^5 \pi^5} \left(1 - \cos 2\pi \frac{t}{T_i} + \frac{24}{i^2 \pi} \cdot \frac{1}{T_i} \cdot \frac{v}{g} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T_i} \right) \sin \left(i\pi \frac{x}{l} \right) \quad (31)$$

Für $i = 1$ gelten analoge Beziehungen wie für die Einzellast.

a) Relativ großes v .

y wird maximal für $t \sim \frac{T_1}{4}$.

$$y_{max} = y_{st_p} + y_{st_q} + \frac{4 \cdot q \cdot l^4}{EJ \cdot \pi^5} \cdot \frac{24}{\pi} \cdot \frac{1}{T_1} \cdot \frac{v}{g} \quad (27)$$

Ist q die der Dimensionierung zu Grunde liegende Last, so kann für T_1 gesetzt werden

$$T_1 = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{l}{125}}$$

Wird g durch 10 ersetzt, so ergibt sich für n^* die einfache Formel

$$n^* = 1 + 60 \sqrt{\frac{H}{l}} \quad (32)$$

Ist die fallende Last q_1 von der Dimensionierungslast q verschieden, so ist T_1

$$T_1 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{l}{125} \cdot \frac{p + q_1}{p + q}} = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{l}{125}} \cdot \sqrt{\frac{1 + k_1}{1 + k}}$$

Damit ist $k_1 = \frac{q_1}{p}$. Damit wird n^*

$$n^* = 1 + 60 \sqrt{\frac{1 + k_1}{1 + k}} \cdot \sqrt{\frac{H}{l}} \quad (32a)$$

27) Infolge Beschränkung auf die Grundschwingung ist es für die Bestimmung von n gleichgültig, welcher Punkt gewählt wird.

Der Wert n berechnet sich zu

$$n = \frac{1 + n^* \cdot k_1}{1 + k_1} = \frac{1 + k_1 \left(1 + 60 \sqrt{\frac{1 + k_1}{1 + k}} \sqrt{\frac{H}{l}}\right)}{1 + k_1} \quad 33)$$

Für $k = k_1$ erhalten wir

$$n = \frac{1 + k \left(1 + 60 \sqrt{\frac{H}{l}}\right)}{1 + k} \quad 33a)$$

Die Abhängigkeit von k ist ähnlich wie im Fall der Einzellast.

b) Relativ kleines v .

y wird maximal für $t \sim \frac{T}{2}$.

$$y_{max} = y_{st_p} + \frac{8 \cdot q \cdot l^4}{E \cdot J \cdot \pi^2}$$

$$n^* = 2$$

$$n = \frac{p + 2q}{p + q} = \frac{1 + 2k}{1 + k}$$

Dabei ist es gleichgültig, ob der Träger auf q dimensioniert ist oder nicht; die Formel bleibt gleich.

Die kinetische Energie ist nach Tabelle V

$$E_k = \frac{3}{5} \cdot \frac{q \cdot l}{g} \cdot \frac{q}{p + q} \cdot v^2 = \frac{6}{5} \cdot q \cdot l \cdot H \cdot \frac{k}{1 + k}$$

Für $k = \infty$ ist $E_k = \frac{6}{5} \cdot q \cdot l \cdot H$. Nach der gegebenen Regel ist daher für E_k zu schreiben

$$E_k = q \cdot l \cdot H \cdot \frac{k}{1 + k}$$

Die für lokale Deformationsarbeit verlorene kinetische Energie ist

$$E_{k_v} = q \cdot l \cdot H \cdot \frac{1}{1 + k}$$

Das k bezieht sich auf die wirkliche Größe der fallenden Last q .

Es ist sehr schwer, die Beanspruchung des Trägers durch die verlorene kinetische Energie mathematisch zu fassen. Sehen wir von den ganz lokalen Deformationen an der Berührungsstelle ab, so dürfen wir mit einiger Berechtigung die Annahme machen, daß in der Hauptsache der Steg des Querschnittes beansprucht wird; die kinetische Energie verwandelt sich daher in Deformationsarbeit der Querkräfte. Wir müssen noch Annahmen machen über den Bereich, innerhalb dessen solche Querkräfte auftreten. Dieser wird für eine fallende Einzellast begrenzt sein, währenddem er für verteilte Last den ganzen Träger umfaßt.

Wir betrachten speziell die Stoßbeanspruchung infolge einer gleichmäßig verteilten Belastung q . Wir nehmen an, daß der Verlust an kinetischer Energie längs des ganzen Balkens gleichmäßig statfinde. Wird die Deformationsarbeit der Querkräfte gleich E_{k_v} gesetzt, so gelingt es, die maximale Querkraft zu berechnen.

$$E_{k_v} = A_{fQ} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^l \frac{Q^2 \cdot dx}{G F'} = \frac{l}{2} \left(Q_{max} \cdot \frac{x}{l} \right)^2 \cdot \frac{dx}{G F'} = \frac{1}{6} \frac{Q_{max}^2 \cdot l}{G \cdot F'}$$

Darin ist G der Schubmodul und F' der hypothetische Ersatzquerschnitt für gleichmäßig verteilte Schubspannungen.

Wird $F' = \frac{Q_{max}}{\tau_{zul}}$ gesetzt, und die letzte Gleichung nach Q_{max} aufgelöst, so erhalten wir

$$Q_{max} = 6 \cdot \frac{E_{k_v}}{l} \cdot \frac{G}{\tau_{zul}} = 6 \cdot \frac{1}{1+k} \cdot (q \cdot l) \cdot \frac{H}{l} \cdot \frac{G}{\tau_{zul}}$$

Zahlenbeispiel: $q \cdot l = 2 \text{ t}$; $k = 2$, also Eigengewicht 1 t ; $\tau_{zul} = 1 \text{ t/cm}^2$

$$G = 800 \text{ t/cm}^2; \quad \frac{H}{l} = \frac{1}{200}$$

Damit wird

$$Q_{max} = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{200} \cdot \frac{800}{1} = 16 \text{ t.}$$

Für eine fallende Einzellast können dieselben Annahmen gemacht werden, wobei aber nur ein beschränktes Stück der Trägerlänge wirken wird. Wir ersetzen daher l durch d . Über die Größe

von d fehlen jegliche Anhaltspunkte. Es ist naheliegend, d mit der Trägerhöhe in Zusammenhang zu bringen.

Lebert gibt in seiner Abhandlung auch ein Verfahren zur Ermittlung dieser Beanspruchung.

2. Wiederholte Impulse.

Wirken auf einen Träger zeitlich verschobene Impulse, oder wiederholt sich ein Impuls in beliebigen Zeitintervallen, so addieren sich die verschiedenen Einflüsse. Die im Brückenbau vorkommenden Impulse können wohl immer als periodische Lasten behandelt werden; denn es ist hier lediglich die Resonanz, welche für die Brücke als Ganzes irgendwelche Bedeutung erlangen kann. Aus der Diskussion der Wirkungen wiederholter Impulse sollen hier nur kurz die für den Brückenbau wichtigsten Resultate erörtert werden.

1. Sind die Impulsintervalle τ beliebig und unter sich ungleich, so wird die resultierende Schwingung kaum merklich größer sein als die Einzelschwingung.

2. Ist τ ein ganzes Vielfaches von T_i , so ergibt sich für die i^{te} Schwingung Resonanz, sofern der Stoß nicht in einem Knotenpunkt der i^{ten} Schwingung erfolgt.

3. Ist $\tau = r \cdot \frac{T_i}{2}$, wobei $r = 1, 3, 5, \dots$, so heben sich die Einflüsse zweier aufeinanderfolgender Impulse auf.

Zu 2: Die Schwingungsdauer variiert, wenn die Impulse von fallenden Lasten mit darauffolgender Schwerewirkung erzeugt werden. Bei bloßen Impulswirkungen ändert die Schwingungsdauer nicht. Dieser letzte Fall ist für die Schwingung der ganzen Brücke die Regel, indem z. B. bei den, durch Überfahren der Schienenstöße auftretenden Stoßwirkungen, die Schwingungsdauer der Brücke durch das Eigengewicht und die Verkehrslast bedingt ist, mit der Stoßwirkung aber gar nicht zusammenhängt. Anders verhält es sich bei Stoßwirkungen schwerer Lasten auf kleine Träger, bei denen die Schwingungsdauer nur in dem Intervall zwischen zwei Impulsen konstant bleibt, und mit jedem Impuls ändert.

Zu 3: Aus dem Fehlen wesentlicher Schwingungsausschläge

wird besonders bei Eisenbahnbrücken der Schluß gezogen, daß deshalb auch keine wesentlichen dynamischen Beanspruchungen auftreten. Der Fall $\tau = r \cdot \frac{T_i}{2}$ zeigt aber, daß dabei relativ am meisten kinetische Energie verloren geht. Es wird nämlich die Schwingungsenergie des ersten Impulses und die gesamte kinetische Energie der zweiten Einwirkung „vernichtet“, d. h. in lokale Deformationsarbeit verwandelt. Die verlorene kinetische Energie beträgt also

$$E_{k_v} = PH \cdot \Delta + P \cdot H = PH(1 + \Delta)$$

Alle Konstruktionsteile, welche direkten Stoßwirkungen ausgesetzt sind, sollten unter Berücksichtigung dieser kinetischen Energie berechnet werden.

Eine gleichartige Wirkung, wie durch die Wiederholung von Impulsen, kann durch aufeinanderfolgende Belastung und Entlastung erreicht werden.

3. Näherungsformeln.

Das Problem der Beanspruchung eines Trägers durch einen Stoß wurde wegen seiner großen praktischen Bedeutung schon recht frühzeitig theoretischen Betrachtungen unterzogen. Young, Hodgkinson und Cox, welche sich als erste damit beschäftigten,²⁸⁾ geben schon Resultate an, die sich von den neuern Untersuchungsergebnissen wenig unterscheiden. In neuester Zeit haben besonders H. Zschetzsche²⁹⁾ und H. Saller³⁰⁾ die Stoßbeanspruchung untersucht. Alle diese Lösungen gehen darauf aus, den Träger direkt als System mit einem Freiheitsgrad zu behandeln, indem über die Geschwindigkeitsverteilung gewisse Voraussetzungen gemacht werden. Unter der Annahme vollkommen unelastischen Stoßes, und unter Anwendung des Energiesatzes werden Formeln für den Stoßkoeffizienten n^* abgeleitet. Die allgemeinste Form, wie sie von Zschetzsche gegeben wird, heißt in unserer Bezeichnung

$$n^* = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_k}{A_F}} \quad 34)$$

²⁸⁾ Vergl. kurze Kritik der bezüglichen Resultate von Timoschenko; siehe Fußnote 17. ²⁹⁾ Siehe Fußnote 25. ³⁰⁾ Siehe Fußnoten 17 und 2.

A_F ist die statische Deformationsarbeit der im Stoßpunkte wirkenden Kraft P . Diese Formel hat den Vorteil der Einfachheit. Dagegen hat sie den Nachteil, daß sie für die Fallhöhe $H = 0$ für n^* immer den Wert 2 gibt, unabhängig von den Massenverhältnissen. Wir haben gesehen, daß das nur bei Vernachlässigung des Eigengewichtes richtig ist. Für alle jene Fälle, in denen das Eigengewicht sehr klein oder die Fallhöhe groß ist, ist Formel 34 sehr wertvoll. Zur Anwendung auf solche Fälle soll sie hier etwas umgeformt und spezialisiert werden.

Mit $A_F = \frac{1}{2} P \cdot y_{st}$ und $E_k = P \cdot H \cdot \Delta$ wird n^*

$$n^* = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{H}{y_{st}} \cdot \Delta} \quad (34a)$$

Δ ist abhängig von der Annahme der Geschwindigkeitsverteilung und kann für die verschiedensten Fälle der Tabelle V entnommen werden.

Für eine Einzellast in Balkenmitte wird

nach Zschetzsche $n^* = 1 + \sqrt{1 + 2190 \frac{(2k+1)(35k+17)}{(8k+5)} \cdot \frac{H}{l}}$

Nach Annahme 9 von Tabelle V $n^* = 1 + \sqrt{1 + 6000 \cdot \frac{(2k+1)^2}{(\pi k+2)^2} \cdot \frac{H}{l}}$

Dabei ist nur Δ nach unserer Annahme eingesetzt. Die nach beiden Formeln berechneten Werte n^* unterscheiden sich sehr wenig, was in hohem Maße den Ersatz der komplizierten elastischen Linie durch eine einfache Sinuslinie rechtfertigt.

Tabelle IX.

	$k=0$	1	2	3	4	5	10	∞
Zschetzsche	4,99	5,61	5,76	5,83	5,87	5,89	5,94	6,00
Annahme 9	5,00	5,63	5,78	5,85	5,90	5,92	5,97	6,03

Die allgemeine Formel geht bei Vernachlässigung des Eigengewichtes ($k = \infty$ oder $\Delta = 1$) über in

$$n^* = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{H}{y_{st}}} \quad (34b)$$

Wird 34 auf einen Träger mit dem spezifischen Eigengewicht p und der darauffallenden, gleichmäßig verteilten Last $q \cdot l$ angewandt, so ergibt sich

$$n^* = 1 + \sqrt{1 + 3000 \cdot \frac{H}{l}} \quad 34c)$$

Diese Formel gilt sowohl bei Vernachlässigung des Eigengewichtes, wie auch bei Berücksichtigung desselben, wenn der Träger auf $(p + q)$ dimensioniert ist.

Analog läßt sich Formel 34 auf mehrere Lasten anwenden.

4. Günstigste Trägerformen für Stoßbeanspruchung.

Der Ausdruck $n^* = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_k}{A_F}}$ zeigt, daß n^* um so kleiner wird, je größer die Deformationsarbeit ist, welche im Träger geleistet wird. Es sind bekannte Tatsachen, daß Materialien mit kleinem E , und Trägerformen mit kleinem J , zur Aufnahme von Stoßkräften günstig sind. E und J_{max} sind einerseits begrenzt durch die Festigkeitsverhältnisse. Die nachstehende Untersuchung zeigt, daß bei auf Stoß beanspruchten Trägern durch Variation des Trägheitsmomentes Material gespart, resp. der Sicherheitsgrad erhöht werden kann.

1. Balken auf zwei Stützen.

Für konstantes $J = J_M$ wird die Deformationsarbeit für eine Last in Balkenmitte

$$A_F = \frac{1}{96} \cdot \frac{P^2 \cdot l^3}{E \cdot J_M}$$

Für lineare Variation von J nach Fig. 18^a

$$A_F = \frac{P \cdot f}{2} = \frac{1}{64} \cdot \frac{P^2 \cdot l^3}{E J_M} \cdot \frac{1}{1-n} \left[\frac{1+n}{1-n} + 2 \cdot \frac{n^2}{(1-n)^2} \cdot \lg n \right]$$

Bei $n = 0$ ist $A_F = \frac{1}{64} \cdot \frac{P^2 \cdot l^3}{E J_M}$

Für parabolische Variation von J nach Fig. 18^b ist

$$A_F = \frac{P^2 \cdot l^3}{32 E J_M} \cdot \left[\lg n + \frac{1}{2} \cdot \frac{2-n}{\sqrt{1-n}} \cdot \lg \left(\frac{1+\sqrt{1-n}}{1-\sqrt{1-n}} \right) - 1 \right]$$

Bei $n = 0$ ist $A_F = \frac{P^2 \cdot l^3}{83 E J_M}$

Beide Trägerformen geben also einen kleinern Stoßkoeffizienten n^* . Noch größer ist der Gewinn für irgend einen andern Stoßpunkt, weil das Integral der Deformationsarbeit um so größer ist, je kleiner J in den Schnitten mit den größten Momenten ist.

2. Eingespannter Balken.

Für den einseitig eingespannten Balken und Stoßpunkt am Trägerende berechnen sich ähnliche Ausdrücke.

Für konstantes $J = J_E$ ist $A_F = \frac{P^2 \cdot l^3}{6 E J_E}$

Für linear veränderliches $J = J_E \cdot \frac{x}{l}$ nach Fig. 25a

ist $A_F = \frac{P^2 \cdot l^3}{4 E J_E}$

Ändert J nach Fig. 25 b, $J = J_E \cdot \frac{x^2}{l^2}$, so

wird $A_F = \frac{P^2 \cdot l^3}{2 E J_E}$

Für eine Variation nach Fig. 25c, $J = J_E \cdot \frac{x(2l-x)}{l^2}$,

wird $A_F = \frac{1}{2} \cdot \frac{P^2 \cdot l^3}{E J_E} (2 \lg 2 - 1) = \frac{1}{5,18} \cdot \frac{P^2 \cdot l^3}{E J_E}$

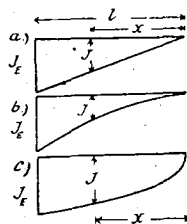


Fig. 25.

Wir sehen daraus, daß bei Schienenstößen für zweigleisige Eisenbahnen das Ablaufende anders zu dimensionieren ist als das Anlaufende. Zur Milderung der Stoßwirkung ist das erste möglichst steif, das zweite nach einer der besprochenen Formen auszubilden, soweit die konstruktive Anordnung dies zuläßt.

III. Dynamische Wirkungen infolge der Schienenstöße bei Eisenbahnbrücken.

1. Dynamische Beanspruchung der Schienenenden.

Nachstehend sollen die bedeutenden dynamischen Wirkungen untersucht werden, welche beim Überfahren eines Schienenstoßes

durch die Räder einer Lokomotive auftreten. Die Heftigkeit dieser dynamischen Wirkungen ist wesentlich bedingt von der Konstruktionsart und dem Zustand des Schienenstoßes, vor allem von der Wirkung der Laschen. Saller gibt in seiner neuesten Abhandlung ausführliche Berechnungen über diesen Gegenstand.³¹

Eine mathematische Fassung der Laschenwirkung ist kaum möglich. Die Untersuchung muß sich daher mit der Behandlung von Grenzfällen begnügen. Ist die Wechselwirkung der beiden Schienenenden durch die Lasche vollkommen gewährleistet, so wirkt das Stoßfeld der Schiene ohne besondere dynamische Zusatzbeanspruchungen, sofern die beiden Schienenenden keinen Höhenunterschied aufweisen. Ist die Laschenwirkung so gedacht, daß dieselbe wohl Querkräfte, aber keine Momente überträgt

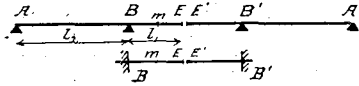


Fig. 26.

kann, so liegen zwar die Schienenenden immer gleich hoch, bilden aber miteinander einen Winkel. Dadurch entstehen bei jedem Überfahren ungünstige dynamische Wirkungen. Wird schließlich von jeder Wechselwirkung abgesehen, d. h. angenommen, die Schienenenden stoßen ohne irgendwelche Verbindung stumpf gegeneinander, so werden sich die größten dynamischen Beanspruchungen der Schienen ergeben. Saller behandelt die, an den Stoß angrenzenden Schienteile als Kragträger auf zwei Stützen. Der Wirklichkeit entsprechender wäre die Annahme eines Kragträgers, dessen abliegendes Ende eingespannt wäre.

Für die genaue mathematische Untersuchung führen beide Annahmen auf komplizierte transzendente Frequenzgleichungen, deren Wurzeln nur graphisch bestimmt werden können. Da es sich, im Hinblick auf die unsichere Annahme der Laschenwirkung, nur um Überschlagsrechnungen handeln kann, wird im Interesse der Einfachheit folgende Annahme gemacht.

Nach Fig. 26 werden die an den Stoß angrenzenden Schienteile als Kragträger ABE aufgefaßt. Um die Schwingungen eines

³¹⁾ Siehe Fußnote 17.

Punktes m des Kragarmes BE zu ermitteln, wird dieser Teil vorübergehend als ein in B eingespannter Balken betrachtet. Handelt es sich um numerische Werte der Durchbiegungen, so soll angenommen werden, daß sich die dynamischen Durchbiegungen im gleichen Verhältnis ändern wie die statischen, wenn BE Kragarm von ABE ist.

Fig. 27 zeigt die gegenseitige Lage der Schienenenden im Moment des Übergehens der Last vom Ablaufende auf das Anlaufende. Bezeichnen wir mit d den Höhenunterschied der beiden Schienenenden, mit $2r$ den Raddurchmesser, so trifft der Berührungspunkt mit der Geschwindigkeit

$$v^* = \frac{v}{r} \sqrt{2 \cdot r \cdot d}$$

auf die höher liegende Schiene. Für die Intensität des Stoßes in vertikaler Richtung kommt nur die Vertikalkomponente v_v^* dieser

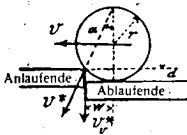


Fig. 27.

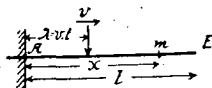


Fig. 28.

Geschwindigkeit in Betracht. Der auf das Anlaufende ausgeübte Stoß kann aufgefaßt werden, als ob die Last mit der Geschwindigkeit v_v^* auf das Schienenende fallen würde. Dabei ist

$$v_v^* = v \cdot \cos \alpha = v \cdot \frac{\sqrt{d(2r - d)}}{r} \quad (35)$$

Zur Beurteilung dieser Größe muß der Wert d geschätzt werden. Man würde wahrscheinlich nicht stark fehl gehen, wenn man im Hinblick auf Montageungenauigkeiten die Größe d unabhängig von den Deformationen wählen würde. Das bleibt richtig, solange der Betrieb diese Ungenauigkeiten nicht beseitigt hat. Nachher können Denivellationen der Schienenenden nur mehr durch Formänderung entstehen. Daher sollen hier die elastischen Schwingungen unter den besprochenen Annahmen berechnet werden. Die Rechnung zerfällt in zwei Teile. Erstens ist d als Schwingungsausschlag des Ablaufendes zu ermitteln, und zweitens ist unter

Verwertung dieser Größe die Stoßschwingung des Anlaufendes zu untersuchen.

2. Erzwungene Schwingungen eines einseitig eingespannten Balkens.

Es handelt sich hier um die Ermittlung der Schwingung irgend eines Punktes m des eingespannten Balkens AE , wenn sich die Last P mit der Geschwindigkeit v in der Richtung AE über den Träger bewegt. Für die Schwingungsordinate kann geschrieben werden.

$$y = \sum_{m_1, m_2, \dots} u_m \cdot \varphi_m$$

Speziell wird uns y_E interessieren, weil dasselbe für $lt = l$ den Wert d gibt.

Die Normalfunktion u_m ist nach Rayleigh

$$u_m = \left(\cos m + ch m \right) \left(\cos m \frac{x}{l} - ch m \frac{x}{l} \right) + \left(\sin m - sh m \right) \left(\sin m \frac{x}{l} - sh m \frac{x}{l} \right)$$

Ebenso gibt Rayleigh die ersten Wurzeln der Frequenzgleichung

$$\cos m \cdot ch m = -1$$

zu $m_1 = \sim 1,875$, $m_2 = \sim 4,695$, \dots

Zur Bestimmung der Normalkoordinate φ_m können wir eines der allgemeinen Verfahren anwenden. Wir wählen dasjenige von Timoschenko, indem wir potentielle und kinetische Energie in den Normalkoordinaten anschreiben, und dann eine Lagrange-Gleichung für φ_m aufstellen.

Die potentielle Energie ist

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l y'' \cdot dx = \frac{EJ}{2} \sum_m (\varphi_m)^2 \int_0^l (u_m'')^2 \cdot dx$$

Allgemein ist nach Rayleigh

$$\int_0^l (u'')^2 \cdot dx = \frac{m^4}{l^3} \int_0^l u^2 \cdot dx = \frac{m^4}{l^3} \left[\frac{l}{4} (u)_l^2 \right]$$

Damit wird

$$V = \frac{EJ}{2} \cdot \frac{1}{l^3} \sum_m m^4 \cdot \sin^2 m \cdot sh \cdot m^2 \cdot \varphi_m^2$$

Die kinetische Energie ist unter Beachtung der von uns getroffenen Annahmen zur Berücksichtigung der Trägheit der Last.

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{g} \sum_m \int_0^l \dot{y} dx + \frac{1}{2} \frac{P}{g} \cdot (\dot{y}_{x=l})^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{p}{g} \sum_m (\dot{\varphi}_m)^2 \int_0^l u_m^2 \cdot dx + \frac{1}{2} \frac{P}{g} \left(\sum_m (u_m)_l \cdot \dot{\varphi}_m \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{p}{g} l \sum_m \sin^2 m \cdot sh^2 m (\dot{\varphi}_m)^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} \sum_m u_{m\lambda}^2 \cdot \dot{\varphi}_m^2 \end{aligned}$$

Die Lagrange-Gleichung für φ_m wird damit

$$\ddot{\varphi}_m \frac{l}{g} \left[p \cdot \sin^2 m \cdot sh^2 m + \frac{P}{l} (u_m)_\lambda^2 \right] + \frac{EJ}{l^3} \cdot m^4 \cdot \sin^2 m \cdot sh^2 m \cdot \varphi_m = \Phi_m$$

oder
$$\ddot{\varphi}_m + n_m^2 \cdot \varphi_m = \frac{1}{a_m} \cdot \Phi_m,$$

wenn
$$\frac{1}{a_m} = \frac{l^3}{EJ} \cdot \frac{s_m^4}{l^4} \cdot \frac{1}{\sin^2 m sh^2 m}$$

$$s_m^4 = \frac{EJ \cdot g}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{P}{l} \cdot \frac{(u_m)_\lambda^2}{\sin^2 m sh^2 m}}$$

$$n_m^2 = \frac{EJg \cdot m^4 \cdot \sin^2 m sh^2 m}{p \cdot l^4 \left(\sin^2 m \cdot sh^2 m + \frac{P}{l} (u_m)_\lambda^2 \right)} = \frac{m^4 \cdot s_m^4}{l^4}$$

Die verallgemeinerte Kraft Φ_m bestimmt sich aus

$$P \cdot (u_m)_{x=vt} \cdot \delta \varphi_m = \Phi_m \cdot \delta \varphi_m$$

zu

$$\begin{aligned} \Phi_m &= P \left[(\cos m + ch m) \left(\cos \left(m \cdot \frac{v \cdot t}{l} \right) - ch \left(m \cdot \frac{v \cdot t}{l} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. (\sin m - sh m) \left(\sin \left(m \cdot \frac{v \cdot t}{l} \right) - sh \left(m \cdot \frac{v \cdot t}{l} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Weiterhin bezeichnen wir abkürzend

$$C_{1m} = (\cos m + ch m)$$

$$C_{2m} = (\sin m - sh m)$$

Für die erzwungene Schwingung infolge P heißt das Integral der Differentialgleichung

$$\varphi_m = \frac{1}{a_m \cdot n_m} \cdot \int_0^t \Phi_m \cdot \sin n_m (t - t_1) \cdot dt_1$$

Φ_m ist als Funktion von t_1 einzuführen.

Damit ergibt sich für y

$$y = \frac{P \cdot l^3}{EJ} \sum_m \frac{\left(C_{1m} \cos\left(\frac{mx}{l}\right) C_{2m} \sin\left(\frac{mx}{l}\right) \right) - \left(C_{1m} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{mx}{l}\right) + C_{2m} \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{mx}{l}\right) \right)}{\sin^2 m \cdot \operatorname{sh}^2 m} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{s_m^4}{m^4 s_m^4 - m^2 v^2 l^2} \cdot \left(C_{1m} \cos\left(m \cdot \frac{vt}{l}\right) + C_{2m} \cdot \sin\left(m \cdot \frac{vt}{l}\right) \right) \\ & - \frac{s_m^4}{m^4 \cdot s_m^4 + m^2 v^2 \cdot l^2} \cdot \left(C_{1m} \cdot \operatorname{ch}\left(m \cdot \frac{vt}{l}\right) + C_{2m} \cdot \operatorname{sh}\left(m \cdot \frac{vt}{l}\right) \right) \\ & - 2 \cdot \frac{v^2}{m^2} \cdot \frac{s_m^4}{m^4 \cdot s_m^8 - v^4 \cdot l^4} \cdot \cos\left(\frac{m^2 s_m^2}{l^2} \cdot t\right) - 2 \frac{v^3 \cdot l}{m^3 s_m^2} \cdot \frac{s_m^4}{m^4 s_m^8 - v^4 \cdot l^4} \cdot \sin\left(\frac{m^2 \cdot s_m^2}{l^2} \cdot t\right) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Ganz analog wie in A, § 5, läßt sich auch hier ein Geschwindigkeitsfaktor α_m ableiten. Derselbe heißt

$$\alpha_m = \frac{EJ \cdot m^2 \cdot g}{EJ \cdot m^2 g + P \cdot v^2 \cdot l (u_m)_\lambda \cdot (u_m)''_\lambda}$$

Darin ist

$$(u_m)_\lambda \cdot (u_m)''_\lambda = \left(C_{1m} \cdot \operatorname{ch} m \frac{\lambda}{l} + C_{2m} \cdot \operatorname{sh} m \frac{\lambda}{l} \right)^2 - \left(C_{1m} \cdot \cos m \frac{\lambda}{l} + C_{2m} \cdot \sin m \frac{\lambda}{l} \right)^2$$

Der Wert α_m ist hier ≤ 1 , weil im Gegensatz zum beidseitig gestützten Balken hier die Bahnkurve der Last nach oben konvex ist.

Mit Berücksichtigung von α_m ist

$$y = \sum_m \alpha_m \cdot u_m \cdot \varphi_m.$$

Kritische Geschwindigkeiten.

Auch hier gibt es Geschwindigkeiten, für welche die Nenner einzelner Summenglieder verschwinden, und dieselben unendlich werden. Hier kann es sich nicht darum handeln, der Resonanz durch Änderung des Eigengewichtes vorzubeugen; denn die Schienenprofile müssen als gegeben betrachtet werden. Die Untersuchung wird sich daher auf den Zusammenhang zwischen kritischer Geschwindigkeit und Länge des Ablaufendes beschränken.

Im Ausdruck für y werden drei Glieder einzeln ∞ für

$$m^2 s_m^4 = v^2 \cdot l^2$$

s_m^4 schwankt zwischen den Werten

$$\frac{EJ}{p} \cdot g \leq s_m^4 \leq \frac{EJ}{p} \cdot g \frac{1}{1 + 4 \frac{zP}{p \cdot l}}$$

Daher wird die kritische Geschwindigkeit

$$v_{\kappa} = m \cdot \frac{s_m^2}{l} \quad , \quad 37)$$

Zahlenbeispiel:

Radlast $P = 12\,500$ kg, $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm², $l = 30$ cm

Schienenprofil Typ S. B. B. 1904. $J \sim 1600$ cm⁴, $p \sim 45$ kg/m

$m_1 = 1,875$

a. Unbelastete Schiene

$v_{\kappa} = 1630$ m/sec, ein unerreichbar großer Wert.

b. Belastete Schiene und keine Federung. $\kappa = 1$.

$v_{\kappa_1} = 27,8$ m/sec ~ 100 km/Stde.

c. Belastete Schiene und vollkommene Federung. $\kappa = \frac{1}{4}$.

$v_{\kappa_2} = 55,6$ m/sec ~ 200 km/Stde.

Formel 37 kann für das gewählte Schienenprofil mit guter Annäherung geschrieben werden

$$v_{\kappa} = 1,8 \cdot 10^5 \cdot \frac{\mu}{l} \quad \text{in km/Stde} \quad 37a)$$

wenn

$$\mu = \sqrt{\frac{p \cdot l}{p \cdot l + 4 \kappa P}}$$

Fig. 29 gibt die Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit von der Länge der Ablaufschiene:

Schwingungsordinate y_E

Mit $x = l$ und $\lambda = v \cdot t = l$ wird

$$y_{E_{\lambda=l}} = 4 \cdot \frac{P \cdot l^3}{EJ} \sum_m \frac{1}{m^4} \cdot \frac{1}{v^4 \cdot l^4} \left[1 + \frac{1}{m^2} \cdot \frac{v^2 \cdot l^2}{s_m^4} \cdot \frac{1}{\sin m \cdot \text{sh } m} \left(\cos \left(\frac{m^2 \cdot s_m^2}{v \cdot l} \right) + \frac{v \cdot l}{s_m^2} \cdot \frac{1}{m} \cdot \sin \left(\frac{m^2 \cdot s_m^2}{v \cdot l} \right) \right) \right] \quad 36a)$$

Für $v = 0$ ergibt sich die statische Durchbiegung $\frac{P \cdot l^3}{3 EJ}$

Für die Schwingungsordinate schreiben wir annähernd

$$y_E = y_{E_{st}} \frac{m_1^4}{m_1^4} \cdot \frac{1}{v^4 \cdot l^4} \left[1 + \frac{1}{m_1^2} \cdot \frac{v^2 \cdot l^2}{s_1^4} \cdot \frac{1}{\sin m_1 \cdot \text{ch } m_1} \left(\cos \left(m_1^2 \cdot \frac{s_1^2}{v \cdot l} \right) + \frac{v \cdot l}{s_1^2} \cdot \frac{1}{m_1} \cdot \sin \left(m_1^2 \cdot \frac{s_1^2}{v \cdot l} \right) \right) \right]$$

Vor allem gibt der Multiplikator

$$\frac{m_1^4}{m_1^4 - \frac{v^4 \cdot l^4}{s_1^8}} = \frac{1}{1 - \frac{v^4 \cdot l^4}{m_1^4 \cdot s_1^8}}$$

einen Maßstab der Vergrößerung der statischen Durchbiegung. Es sind daher in der nachstehenden Tabelle X Werte dafür berechnet, welche in Fig. 30 dargestellt sind.

Tabelle X. Wert $\frac{1}{1 - \frac{v^4 \cdot l^4}{m_1^4 \cdot s_1^8}}$ bei vollkommener Federung.

l_{cm}	$v = 10 \text{ km/Stde}$	20	50	70	100	150	200
10	1,000 001	1,000 012	1,000 048	1,001 190	1,008 88	1,040	1,141
20	1,000 002	1,000 051	1,001 196	1,007 760	1,033 0	1,185	2,010
30	1,000 007	1,000 111	1,004 450	1,017 700	1,077 0	1,572	8,740
40	1,000 012	1,000 197	1,008 876	1,031 100	1,141 0	2,725	1,040
50	1,000 019	1,000 308	1,012 210	1,049 900	1,238 0	~ 50	0,488

Da diese Werte noch keinen wirklichen Vergleich der dynamischen Deformationen mit den statischen gestatten, wurde für das gewählte Zahlenbeispiel $y_{E_z=l}$ für verschiedene Geschwindigkeiten mit der Summenformel 36^a gerechnet und folgende Werte gefunden.

Tabelle XI. y_E , bei vollkommener Federung, Radlast 12,5^{tn}, Profil S. B. B. 1904.

$v \text{ km/Stde}$	10	20	50	70	100	150	197	200
$y = \frac{P \cdot l^3}{3 E J}$	1,000	1,003	1,021	1,051	1,135	1,458	∞	1,017

Fig 30 stellt diese Werte dar und zeigt, daß im Ausdruck

$$y_E = \Phi \cdot \frac{P \cdot l^3}{3 E J}$$

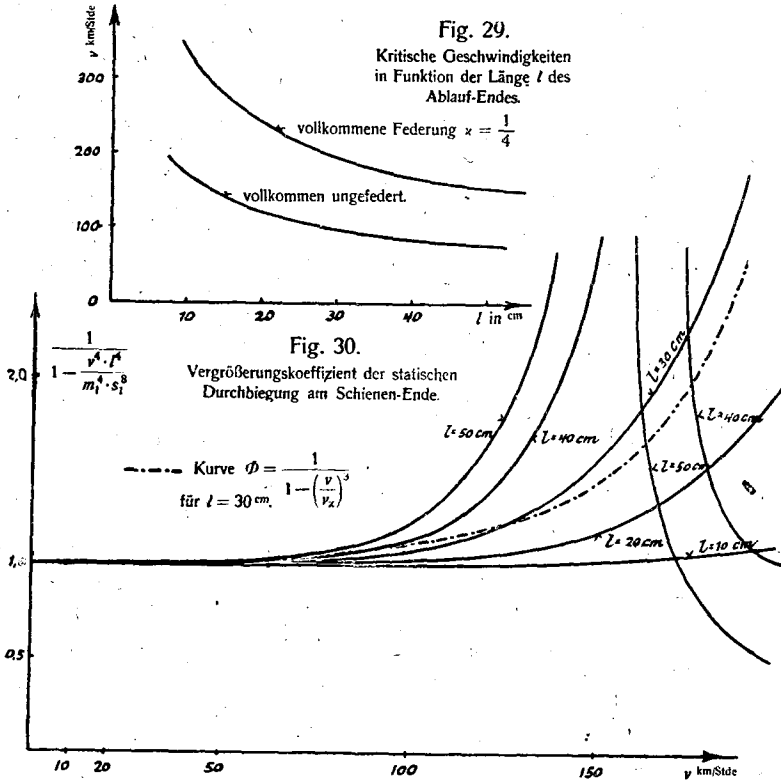
für den Vergrößerungsfaktor Φ mit sehr guter Näherung gesetzt werden kann

$$\Phi = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{v_z}\right)^3} \quad 38)$$

v_x hat darin den, durch 37 gegebenen Wert

Nun kann die Größe $d = y_{E_{\lambda=l}}$ abgeschätzt werden. Spezialisieren wir uns wieder auf das gewählte Beispiel und $v = 100$ km/Stde, so wird

$$y_{E_{\lambda=l}} = 1,135 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{12500 \cdot 30^3}{1600 \cdot 2 \cdot 10^6} = 0,4 \text{ mm}$$



Der Schlag auf die Anlaufschiene erfolgt nicht erst für $v \cdot t = l$. Der nach Fig. 27 bezeichnete Abstand w des Berührungspunktes vom Schienenende berechnet sich zu

$$w = \sqrt{(2r - d) \cdot d}$$

Für $r = 1,0$ gibt das

$$w = \sqrt{1996 \cdot 0,4} \approx 28,3 \text{ mm}$$

d, h. es darf ohne weiteres $\lambda = l$ gesetzt werden. Im Hinblick auf das Fehlen der Einspannung der Schiene über der Schwelle, sowie auf andere unberücksichtigte Einflüsse, wird $d = 0,4$ mm auf $d = 1,0$ mm erhöht. Mit $d = 1,0$ mm werden im nächsten Abschnitt die Stoß-Schwingungen der Anlaufschiene untersucht.

3. Stoß-Schwingungen eines einseitig eingespannten Balkens.

Mit dem Werte $d = 1,0$ mm bestimmen wir nach Formel 35 die Vertikalkomponente der Stoßgeschwindigkeit. Ihre entsprechende Fallhöhe ist

$$H = \frac{v_v^2}{2g}$$

Formel 35 gibt folgende Zahlenwerte für v_v :

Für Schnellzugverhältnisse $r \sim 1,0$ m und $v_{max} = 100$ km/Stde
 $v_v = 1,242$ m/sec.

Für Güterzugverhältnisse $r \sim 0,5$ m und $v_{max} = 60$ km/Stde
 $v_v = 0,878$ m/sec.

Wir rechnen weiterhin nur mit den ungünstigen Schnellzugsverhältnissen. Dafür bestimmen wir

$$H = \frac{1,242^2}{2 \cdot 9,81} = 0,0788 \text{ m} \sim 8 \text{ cm}$$

Diesen Wert $H = 8$ cm verwenden wir bei der Spezialisierung unserer Formeln. Derselbe wird für die gegenwärtigen Verhältnisse nicht überschritten.

Fällt eine Last P von der Höhe H auf das Ende eines eingespannten Balkens, so ist

$$y = \sum_m y_{m \text{ stat}} + \left(C_m \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{t}{T_m} \right) + D_m \cos \left(2\pi \cdot \frac{t}{T_m} \right) \right) \cdot u_m \quad 39$$

C_m und D_m sind durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Für $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = g_x$.

Bei Vernachlässigung des Eigengewichtes der Schiene wird die Geschwindigkeit des Stoßpunktes nach dem Stoß gleich jener der Last vor dem Stoß

$$\bar{v} = v_v = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

Die kinetische Energie bleibt voll erhalten.

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \cdot v^2, \quad E_{k_v} = 0$$

Der Wert C_m hängt von der Annahme der Geschwindigkeitsverteilung ab.

Für lineare Geschwindigkeitsverteilung nach Fig 31^a

$$g_x = \bar{v} \cdot \frac{x}{l}$$

wird

$$C_m = - \frac{T_m}{\pi} \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \frac{\cos m + ch m}{\sin^2 m \cdot sh^2 m} \cdot \bar{v} \quad 40a)$$

Sollen sich die Geschwindigkeiten nach dem Stoß nach Art der statischen Durchbiegungen verteilen (Fig. 31^b), so ist

$$g_x = \bar{v} \cdot \frac{x^3}{l^3}$$

Mit wiederholter partieller Integration erhalten wir für C_m

$$C_m = - 6 \cdot \frac{T_m}{\pi} \cdot \frac{1}{m^4} \cdot \frac{\sin m (m - sh m + m \cdot ch m)}{\sin^2 m \cdot sh^2 m} \cdot \bar{v} \quad 40b)$$

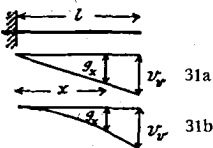


Fig. 31.

Bestimmung einer Stoßziffer n .

Wie in B II, § 1 wird für große Werte \bar{v} die Schwingungsordinate bei $t \sim \frac{T_1}{4}$ ein Maximum.

Für lineare Geschwindigkeitsverteilung ist

$$n = \frac{y_{Dym}}{y_{stat}} = \frac{4 \cdot \frac{P \cdot l^3}{EJ} \cdot \frac{1}{m_1^4} \cdot \frac{T_1}{\pi} \cdot \frac{1}{m_1^2} \cdot \frac{\cos m_1 + ch m_1}{\sin^2 m_1 \cdot sh^2 m_1} \cdot \bar{v} \cdot u_{m_1(t)}}{4 \cdot \frac{P \cdot l^3}{EJ} \cdot \frac{1}{m_1^4}}$$

Da: $u(l) = 2 \cdot \sin m \cdot sh m,$

$$T_1 = \frac{2\pi}{m_1^2} \cdot \frac{l^2}{s_1^2}, \quad s_1^2 = \sqrt{\frac{EJ \cdot g}{p + 4 \frac{P}{l}}} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{EJ}{P} \cdot g \cdot l}$$

$$\bar{v} = \sqrt{2gH}, \quad \frac{\cos m_1 + ch m_1}{\sin m_1 \cdot sh m_1} = \sim \frac{3,64}{3,06} = 1,18$$

so wird n

$$n = 1 + \frac{3,35}{l} \sqrt{\frac{EJ}{P} \cdot \frac{H}{l}} \quad 41)$$

Spezialisieren wir diese Formel auf das gewählte Schienenprofil und setzen vollkommene Federung voraus,

d. h. $P = \frac{12500}{4}$ kg, so wird

$$n = 1 + \frac{3350}{l} \sqrt{\frac{H}{l}} \quad 41a)$$

Mit $H = 8$ cm und $l = 30$ cm erhalten wir

$$n = 58,6.$$

Für die Geschwindigkeitsverteilung nach kubischer Parabel wird

$$n = 1 + \frac{8,03}{l} \sqrt{\frac{EJ}{P} \cdot \frac{H}{l}} \quad 41b)$$

Diese Formel gilt für den Spezialfall

$$n = 139$$

Die Formel von Zschetzsche gibt bei Vernachlässigung des Eigengewichtes

$$n = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{H}{y_{stat}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{6 EJ}{P \cdot l^2} \cdot \frac{H}{l}}$$

Da der zweite Wert unter der Wurzel weit größer ist als der erste, so können wir dafür schreiben

$$n = 1 + \frac{2,45}{l} \sqrt{\frac{EJ}{P} \cdot \frac{H}{l}} \quad 41c)$$

Für das Zahlenbeispiel erhalten wir $n = 43,2$.

Alle diese Formeln geben sehr große Werte $n^{32)}$; sie sind bedingt durch die Annahme starrer Stützen, welche im Falle von Querschwellen keineswegs der Wirklichkeit entspricht. Diese Zahlen geben daher nur Vergleichswerte für verschiedene Schientypen und verschiedene Längen den Schienenenden.

³²⁾ Saller (Fußnote 17) hat in seiner Untersuchung für den analogen Wert $n = 132$ berechnet.

Die Werte n beziehen sich nur auf den abgefederten Teil der Last gestatten daher nicht ohne weiteres einen Vergleich mit den statischen Deformationen aus der ganzen Radlast. Um einen solchen Wert herzuleiten beachten wir, daß

$$y_{total} = \frac{3}{4} y_{stat p} + n \cdot \frac{1}{4} y_{stat p}$$

Damit wird der wirkliche Vergleichswert

$$N = \frac{3}{4} + n \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (n + 3) \quad (42)$$

Die damit berechneten Werte des Zahlenbeispiels sind

$$N = 15,4, 35,5, 11,5.$$

Wird in Fig. 26 an Stelle des eingespannten Balkens BE ein Kragarm des einfachen Balkens AE angenommen, so ergibt sich für P in E daselbst die statische Durchbiegung

$$y = \frac{P \cdot l_1^3}{3 E J} + \frac{P \cdot l_1^2 \cdot l_2}{3 E J}$$

Das Verhältnis der statischen Durchbiegung der beiden Annahmen wird

$$1 + \frac{l_2}{l_1}$$

Das gibt für die Verhältnisse eines Schienenstoßes, mit $\frac{l_2}{l_1} \sim 2$, den Wert 3.

Die Werte n werden daher noch ungefähr $\sqrt[3]{3}$ mal kleiner.

4. Stoßkoeffizient für eiserne Brücken.

Die Annahme starrer Stützung einzelner Konstruktionsteile in einer eisernen Brücke, wie z. B. der Schienen auf starren Schwellen, führt zu unmöglich hohen Stoßkoeffizienten. Um für Brücken eine brauchbare Stoßformel zu gewinnen muß der Elastizität aller einzelnen Konstruktionsteile Rechnung getragen werden. Im allgemeinsten Falle beteiligen sich Schiene, Schwelle, Längsträger, Querträger und Hauptträger an der Übertragung einer Last oder eines Stoßes auf die Auflager.

Es ist unmöglich die Schwingungen eines so komplizierten Systems nach den gegebenen allgemeinen Verfahren zu behandeln.

Auch die Reduktion auf ein vielfach gekoppeltes System von Massenpunkten erfordert praktisch undurchführbare Rechnungsarbeit.

Hingegen kann die für den Stoßkoeffizienten gegebene Formel

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_k}{A_F}}$$

auf das komplizierteste System angewandt werden, sofern A_F berechnet werden kann, und für E_k eine Geschwindigkeitsverteilung angenommen wird. Mit dieser Formel leiten wir einen Stoßkoeffizienten ab. Um der Tatsache einer starken Stoßbeanspruchung der Fahrbahnteile Rechnung zu tragen, finden wir es als das zutreffendste, das zu berechnende n nur für solche Lasten zu berücksichtigen, die über einem Schienenstoß stehen, und nicht wie bis anhin üblich war, die ganze Verkehrslast um einen bestimmten Betrag zu vergrößern. Damit werden sich für kleine Träger bedeutend größere prozentuale Zuschläge der Dimensionierungslast ergeben als für größere Träger. Bei der Berechnung einer Brücke ist demnach auf die Lage der Schienenstöße schon Rücksicht zu nehmen. Zur Bestimmung irgend einer Beanspruchung sind nur die Lasten über den Stoßlücken mit dem Stoßkoeffizienten zu multiplizieren. Das kann bei der Verwendung von Einflußflächen sehr gut gemacht werden.

Der Wert n hängt wesentlich von $E_k = \Delta \cdot P \cdot H$, d. h. von der gewählten Geschwindigkeitsverteilung ab. Nehmen wir dafür einen geradlinigen Verlauf vom Stoßpunkt gegen die beiden Auflager an, so wird nach Tabelle V

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{P + p \cdot \frac{l}{3}}{g} \cdot \left(\frac{2P}{2P + p \cdot l} \right)^2 \cdot v^2 = \Delta \cdot P \cdot H.$$

Für p verwenden wir wieder die auf Seite 39 eingeführten Werte:

$$\begin{aligned} l < 20 \text{ m} & \quad p = 880 + 54 \cdot l \text{ kg/m} \\ l > 20 \text{ m} & \quad p = 1900 + 27 \cdot l \text{ " } \end{aligned}$$

Die beiden Schienen sollen an derselben Stelle gestoßen werden. Bei vollkommener Federung ergibt sich dann als Stoß-

last für jede Schiene

$$P = \frac{12\,500}{4} = 3125 \text{ kg.}$$

Der Wert Δ läßt sich damit in guter Annäherung schreiben.

$$\Delta = \frac{5}{l+5}, \quad (43)$$

wobei l in Metern einzusetzen ist.

Nachstehend folgt die Bestimmung der Deformationsarbeit in den einzelnen Teilen.

Werden die Schienenenden (nach Fig. 26) als einfache Balken mit überstehenden Enden betrachtet, so ist die von jeder Schiene geleistete Arbeit

$$A_{Fs} = \frac{P^2 \cdot l_1^3}{6 EJ} \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) \sim \frac{1}{2} \frac{P^2 \cdot l_1^3}{EJ}$$

Das gibt für Schienenprofil S. B. B. 1904 für beide Schienen

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3125^2 \cdot 30^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 1600} = \sim 82,5 \text{ cmkg.}$$

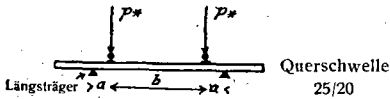


Fig. 32.

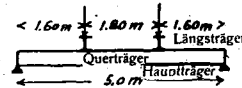


Fig. 33.

Die Schwellen ist nach Fig. 32 gelagert und gibt folgende Deformationsarbeit:

$$P^* \text{ ist bei übertragener Schiene} \\ \sim \frac{3}{2} P$$

$$A_{Fsch} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\left(\frac{3}{2}P\right)^2 \cdot x^2}{E \cdot J} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\left(\frac{3}{2}P\right)^2 \cdot a^2}{EJ} \cdot dx \\ = \frac{\left(\frac{3}{2}P\right)^2}{EJ} \left[\frac{a^3}{3} + \frac{a^2 \cdot b}{3} \right]$$

Für die Schwellen ist $EJ = 10^5 \cdot 20 \cdot \frac{25^3}{12} = \sim 26 \cdot 10^8 \text{ kg. cm}^2$

Damit gibt das Zahlenbeispiel

$$A_{Fsch} = \frac{9}{4} \cdot \frac{3125^2}{26 \cdot 10^8} \cdot 15^2 [5 + 75] = 153 \text{ cmkg.}$$

Die Deformationsarbeit der Längsträger kann weggelassen werden, weil dieselbe verschwindet, wenn der Schienenstoß in der Nähe des Querträgers ist, welcher ungünstigen Fall wir der weiteren Berechnung zu Grunde legen.

Der Querträger ist nach Fig. 33 ähnlich belastet wie die Querschwelle. Als Hauptträgerabstand nehmen wir den Mittelwert 5,0 m, als mittlere Längsträgerlänge bei größeren Brücken auch 5,0 m und als Längsträgerdistanz 1,80 m.

Aus der mittleren Feldlänge 5,0 m bestimmt sich für den gegebenen Lastenzug der maximale Druck A zu 36,6 t. Damit wird bei einer Trägerhöhe $h = 0,80$ m $EJ = 46,5 \cdot 10^6$ kg cm².

Die Deformationsarbeit wird

$$A_F = \frac{3125^2}{46,5 \cdot 10^6} \cdot \left(\frac{1,6^3}{3} + \frac{1,6^2 \cdot 1,8}{2} \right) = 0,77 \text{ mkg} = 77 \text{ cmkg,}$$

wenn wir mit der gleichen Formel wie bei der Querschwelle rechnen.

Die Deformationsarbeit der Hauptträger unter der Last $2P$ wird

$$A_{FH} = \frac{1}{96} \cdot \frac{(2P)^2 \cdot l^3}{EJ} \cdot \left(1 - 4 \cdot \frac{x^2}{l^2} \right)^2,$$

wenn wir mit x den Abstand des Stoßpunktes von Balkenmitte bezeichnen. Die Deformationsarbeit der Hauptträger kann bei veränderlichem Trägheitsmoment mit 1,4 multipliziert werden.

Mit den auf Seite 39 gegebenen Belastungsgleichwerten und den damit berechneten Werten EJ , mit der Fallhöhe $H = 0,08$ m und mit zwei fallenden Lasten $\frac{12500}{4} = 3125$ kg, kann für ein-

gleisige Eisenbahnbrücken eine einfache Formel für n resp. N abgeleitet werden. Die Formel gilt mit guter Annäherung für alle Stützweiten, indem sie mit mittleren Werten aufgestellt wurde.

Formel 34 geht in folgende Formen über:

1. Trägerende, konstantes und variables J :

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{800}{l+5}}, \quad N = 1 + \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{800}{l+5}} \quad (44a)$$

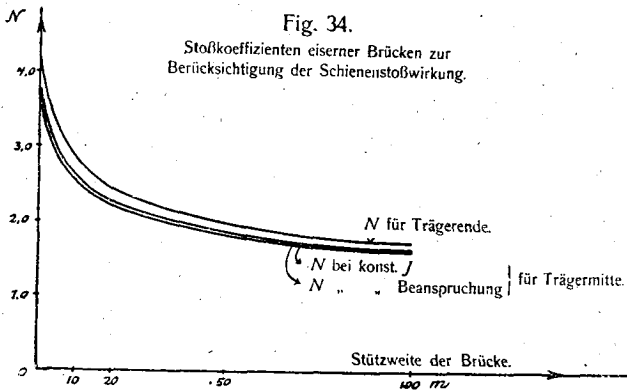
Trägermitte, konstantes J :

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{600}{l+5}}, \quad N = 1 + \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{600}{l+5}} \quad 44b)$$

Trägermitte, variables J :

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{550}{l+5}}, \quad N = 1 + \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{550}{l+5}} \quad 44c)$$

Die Kurven der Fig. 34 sind nach diesen Formeln auf-
gezeichnet.



Jedem Punkt auf dem Träger kommt ein anderer Stoßkoeffizient zu. Die Formeln geben nur jene für Mitte und Auflager in Funktion von l . Für dazwischenliegende Punkte kann der genaue Wert berechnet werden. Es genügt, für n einen geradlinigen Verlauf vom Auflager bis Trägermitte anzunehmen.

C. Schwingungen von Fachwerken.

1. Allgemeines über Fachwerkschwingungen.

Bedeutend komplizierter als die bisher durchgeführten Rechnungen gestaltet sich die Berechnung der Schwingungen von Fachwerken. Dementsprechend finden wir in der Literatur darüber fast keine Angaben. Die einzige eingehende Untersuchung ist von H. Reißner³³⁾ durchgeführt worden. Seine Methode führt schon bei ganz einfachen Systemen auf sehr komplizierte Rechnungen, und sie gibt uns kein Mittel an die Hand, den Einfluß bewegter Lasten zu bestimmen.

Das Problem vereinfacht sich bedeutend, wenn an Stelle des Fachwerks ein System von gekoppelten Punkten angenommen wird, d. h. wenn die Masse des Fachwerks in die Knotenpunkte reduziert wird. Für jeden Knotenpunkt sind die Verschiebungen nach zwei Richtungen, bei r Knotenpunkten also $2 \cdot r$ Verschiebungen zu bestimmen. Dementsprechend sind $2r$ Differentialgleichungen aufzustellen, deren Lösung Reißner³⁴⁾ in einer weiteren Abhandlung ausführlich bespricht. Auch dieses Verfahren führt bei einigermaßen großen Fachwerken auf ausgedehnte Rechnerarbeit.

³³⁾ H. Reißner, Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerks, Diss.-Arbeit und „Zeitschrift für Bauwesen“ 1903, S. 136.

³⁴⁾ H. Reißner, Schwingungsaufgaben aus der Theorie des Fachwerks. „Zeitschrift für Bauwesen“ 1903, S. 154. — Polhausen, Berechnung der Eigenschwingungen statisch bestimmter Fachwerke. „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“, Februar 1921. Polhausen behandelt das von Reißner aufgestellte Problem und bestimmt die Eigenfrequenzen auf einem graphischen Wege successiver Annäherung. Auch dieses Verfahren erfordert schon für einfache Fachwerke ausgedehnte Rechner- und Zeichnungsarbeit. Weiterhin ist darin gar nicht versucht, die erzwungenen Schwingungen infolge bewegter Last zu bestimmen.

In Spezialfällen mit besonderer Eigengewichtsverteilung kann die Zahl der Massenpunkte reduziert werden; die Zahl der Gleichungen wird dadurch kleiner. Die elastischen Größen dieser Gleichungen bestimmen sich gleichwohl unter Beachtung der Elastizität des ganzen Trägers.

Wir sehen von einer Berechnung nach einem dieser Verfahren ab und nehmen folgendes an:

a) Die Wirkung der steif vernieteten Knotenpunkte sei eine solche, daß ein Fachwerk in seinen Schwingungen eher einem Vollwandträger als einem System gekoppelter Massenpunkte gleichkommt. Bei einigermaßen starren Trägern gelten dann die, für Vollwandträger durchgeführten Rechnungen, sofern es sich um die Schwingungen des ganzen Trägers handelt. Für jede Fachwerkart muß das zutreffende Ersatzträgheitsmoment bestimmt werden. Wir setzen allgemein

$$J_{\text{Fachwerk}} = \nu \cdot J_{\text{Vollwandträger}}$$

Der Faktor ν ist für jeden Fachwerktypus anders.

b) Die Schwingungen der einzelnen Stäbe sollen als Longitudinal- und Querschwingungen untersucht werden, wobei auch wieder der Resonanz besondere Aufmerksamkeit zu schenken ist.

Wir begnügen uns in diesem Teil mit der Ableitung allgemeiner Resultate. Die genaue Diskussion derselben wird nicht mehr durchgeführt.

2. Näherungsverfahren zur Bestimmung der Longitudinalschwingung von Fachwerkstäben.

Die Art der Stützung von Fachwerkstäben entspricht keiner der theoretischen Stabstützungen frei—frei, fest—fest oder frei—fest. Es ist daher wertlos, die Schwingungen solcher Stäbe unter dem Einfluß beliebiger Längskräfte nach der genauen Schwingungstheorie zu bestimmen. Da die Knotenpunktmassen im Vergleich zu den Stabmassen relativ groß sind, so gehen wir direkt zu der, von Rayleigh bewiesenen Annäherung über, daß die Schwingung eines solchen Stabes als solche eines masselosen Stabes, mit auf die Enden reduzierten Massen, behandelt werden kann. Der Reduktionsfaktor der Stabmasse ist bei einseitig eingespanntem Stab $\frac{1}{3}$, bei beiderseits freiem Stab $\frac{1}{6}$ für jedes Ende.

Ganz allgemein betrachten wir nach Fig. 35 einen Fachwerkstab als eine masselose Feder mit der Federkonstanten λ_3 , welche an beiden Enden die Massen m_1 und m_2 trägt. Diese Massen setzen sich zusammen aus den reduzierten Massen des betreffenden Stabes, vermehrt um die, auf diese Punkte reduzierten Massen der be-

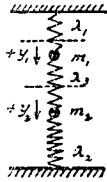


Fig. 35.

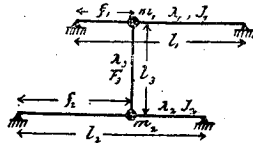


Fig. 36.



Fig. 37.

nachbarten Konstruktionsteile. Die elastische Wirkung der angrenzenden Stäbe denken wir uns ebenfalls durch elastische Federn ersetzt, deren Konstanten λ_1 und λ_2 heißen mögen. Für die freien Schwingungen der beiden Massenpunkte lassen sich mit den Bezeichnungen der Fig. 35 die folgenden totalen Differentialgleichungen aufstellen:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{y}_1 &= -\lambda_1 y_1 + \lambda_3 (y_2 - y_1) \\ m_2 \cdot \ddot{y}_2 &= -\lambda_2 y_2 - \lambda_3 (y_2 - y_1) \end{aligned} \right\} 45)$$

Als allgemeinste Lösung finden wir damit für jedes y eine Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen, d. h. der beiden Normalschwingungen.

Die, in den Formeln vorkommenden Konstanten berechnen wir bei dem, in Fig. 36 dargestellten System zu:

$$m_1 = \mu_1 \cdot m_1' + \frac{m_3}{6}; \quad m_2 = \mu_2 \cdot m_2' + \frac{m_3}{6}$$

$$\lambda_1 = \frac{16 EJ_1}{l_1^3} \cdot \frac{1}{\frac{\xi_1}{l_1} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\xi_1^3}{l_1^3}}$$

$$\lambda_2 = \frac{16 EJ_2}{l_2^3} \cdot \frac{1}{\frac{\xi_2}{l_2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\xi_2^3}{l_2^3}}, \quad \lambda_3 = \frac{EF_3}{l_3}$$

Die Reduktionsfaktoren μ der biegefesten Teile können unter der Annahme einer bestimmten Geschwindigkeitsverteilung ermittelt werden.

Wird λ_1 oder λ_3 sehr groß, so schwingt der Stab als einseitig eingespannt mit der Masse $\frac{m_3}{3}$ am andern Stabende.

Setzen wir reibungslose Gelenke voraus, so geht die Schwingung des Stabes über in jene zweier Massenpunkte, die durch eine Feder miteinander verbunden sind. Bezeichnen wir in Fig. 37 die Ablenkungen aus den Gleichgewichtslagen mit y_1 resp. y_2 , so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -\lambda (y_1 - y_2) \\ m_2 \ddot{y}_2 &= +\lambda (y_1 - y_2) \end{aligned}$$

Für jedes y ergibt sich damit die vollständige Lösung.

$$y = A \cdot \cos \kappa t + B \cdot \sin \kappa t + C \cdot t + D,$$

worin A, B, C, D beliebige Integrationskonstanten, und

$$\kappa = \sqrt{\lambda \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}}$$

bedeuten.

Die durch κ bedingte einzige Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{2\pi}{\kappa} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

Wir wenden nun diese allgemeinen Angaben auf Fachwerkstäbe an. Wir haben wesentlich zwischen Gurtstäben und Füllungsmitgliedern zu unterscheiden.

a) Gurtstäbe. Eine einfache und trotzdem einigermaßen genaue Festlegung der Stützungsart der Gurtstäbe und der dadurch bedingten Schwingungen ist nicht möglich, da die Longitudinalschwingungen der Stäbe, weil in derselben Richtung erfolgend, sich gegenseitig zu stark beeinflussen, als daß ein Einzelstab herausgetrennt, und für sich allein betrachtet werden könnte. Es bleibt nichts anderes übrig, als diese Schwingungen als solche einer Kette von gekoppelten Massenpunkten zu behandeln. Im allgemeinen sind die Longitudinalschwingungen der Gurtstäbe nicht von Bedeutung, weil die Gurtkräfte keinen Vorzeichenwechsel aufweisen. Dementsprechend sind aus der Praxis keine Fälle bekannt, wo Gurtstäbe, infolge dynamischer Beanspruchung aus Längsschwingungen, Schaden gelitten haben.

b) Füllungsglieder. Viel bedeutender wird der dynamische Einfluß auf Diagonalen und Vertikalen. Infolge Vorzeichenwechsels der Stabkraft ist die Vorbedingung für ungünstig wirkende Longitudinalschwingungen gegeben. Schlanke Zugdiagonalen können unter den Druckbeanspruchungen der Schwingung ausknicken. Die Praxis bestätigt diese theoretische Möglichkeit.

Die Schwingungen der einzelnen Füllungsglieder werden von den anschließenden biegungsfesten Gurtungen und von den andern Füllungsgliedern beeinflusst. Wir wollen im folgenden diesen Einfluß zu schätzen versuchen.

Angenäherte Berücksichtigung der biegungsfesten Verbindungen.

Die Bestimmung der Werte λ_1 und λ_2 in Gl. 45 kann nur mit weitgehenden Annahmen durchgeführt werden. In Fig. 38 sei $m_1 m_2$ der zu untersuchende Stab. c_1 heiße, bei Fehlen des Stabes

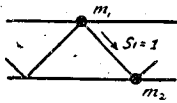


Fig. 38.

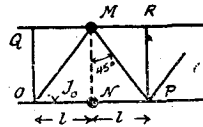


Fig. 39.

$m_1 m_2$, die Verschiebung von m_1 gegenüber m_2 infolge $S_1 = 1$.

Dann ist $\lambda_1 = \frac{1}{c_1}$. c_1 muß unter Berücksichtigung der Biegungsfestigkeit und Steifigkeit der Knotenpunkte ermittelt werden, weil das Fachwerk mit reibungslosen Gelenken durch das Fehlen eines Stabes labil würde. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die Formänderung des ganzen Tragwerkes infolge $S_1 = 1$ klein sei im Vergleich zur Formänderung des Teiles, aus welchem der Stab herausgenommen wurde. An zwei Beispielen soll gezeigt werden, wie wir diese Koeffizienten annähernd bestimmen können.

1. Knotenpunkt N einer Vertikalen nach Fig. 39. Wird OP als einfacher Balken aufgefaßt mit Gelenken in O und P , so wird

$$c_N = \frac{1}{6} \cdot \frac{l^3}{EJ_G}; \quad \lambda_N = 6 \cdot \frac{EJ_G}{l^3}$$

Bei vollkommener Einspannung in O und P ist

$$\lambda_n = 24 \frac{EJ_G}{l^3}$$

Am zutreffendsten ist wohl die Annahme unvollkommener Einspannung, d. h. der Mittelwert

$$\lambda_n = 15 \frac{EJ_G}{l^3}$$

2. Knotenpunkt M einer Vertikalen.

Zur Bestimmung von c_M resp. λ_M wird QR als Balken mit den schiefen Stützen OM und PM betrachtet. Dieses zweifach statisch unbestimmte System wird für die Vertikalkraft $\nu = 1$ infolge Symmetrie einfach unbestimmt. Bezeichnen wir die resultierende Vertikalkraft aus beiden Stützen mit χ , so wird, sofern die Neigung der Diagonalen 45° ist, nach bekannten Methoden

$$\chi = \frac{l^2 \cdot 6 \cdot J_G}{l^2 \cdot 6 \cdot J_G + \sqrt{2} F_d}$$

$$c_M = (1 - \chi) \cdot \frac{l^3}{6 EJ_G} = \frac{l^3}{6 EJ_G} \cdot \frac{1}{\frac{l^2 F_d}{6 \sqrt{2} J_G} + 1}; \quad \lambda_M = \frac{1}{c_M} = \left(1 + \frac{l^2 \cdot F_d}{6 \sqrt{2} J_G}\right) 6 \cdot \frac{EJ_G}{l^3}$$

Wird QR als in Q und R eingespannt betrachtet, so ist

$$\lambda_M = \left(1 + \frac{l^2 \cdot F_d}{24 \sqrt{2} J_G}\right) \cdot 24 \cdot \frac{EJ_G}{l^3}$$

$$\text{Halbe Einspannung gibt } \lambda_M = \left(1 + \frac{l^2 \cdot F_d}{15 \sqrt{2} J_G}\right) \cdot 15 \cdot \frac{EJ_G}{l^3}$$

Darin bedeuten:

J_G = Trägheitsmoment d. Gurtung (Mittelwert aus beiden Stäben)

F_d = Mittelwert des Querschnittes beider Diagonalen

l = Feldweite des Hauptträgers.

Analog können für andere Knotenpunktanordnungen diese Koeffizienten bestimmt werden.

Im folgenden Abschnitt werden die Longitudinalschwingungen der Füllungsglieder unter Vernachlässigung der Werte λ bestimmt,

d. h. es werden reibungslose Gelenke vorausgesetzt. Diese Annahme wird auch für die statischen Berechnungen gemacht.

3. Longitudinalschwingungen von Füllungsgliedern.

Wir bestimmen hier die erzwungenen Längsschwingungen der Füllungsglieder infolge einer wandernden Last. Wie bereits erwähnt, fassen wir den Stab als frei—frei, mit an den Enden konzentrierten Massen m_1 und m_2 auf. Die auf die Enden wirkende Kraft soll wie die Ordinaten der Einflußflächen wachsen.

Betrachten wir die Diagonale MN , so zeigt die Einflußfläche der Diagonalkraft, daß die erzwungene Schwingung in drei Phasen zerfällt:

- Erste Phase $t < \frac{l_1}{v}$
 Zweite „ $\frac{l_1}{v} < t < \frac{l_1 + l}{v}$
 Dritte „ $\frac{l_1 + l}{v} < t < \frac{L}{v}$

Für die erste Phase ist die Diagonalkraft

$$D = P \cdot D' \cdot \frac{v}{L} \cdot t = R \cdot t$$

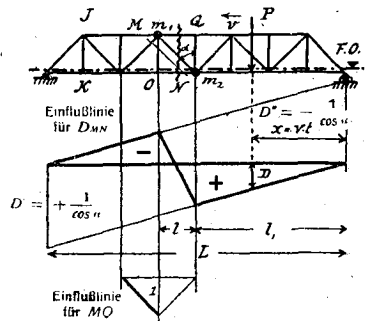


Fig. 40.

Stellen wir nach Fig. 41 für Stab MN , d. h. für die Massenpunkte m_1 und m_2 die Differentialgleichungen auf, so heißen sie

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1 = -\lambda (y_1 - y_2) + R \cdot t$$

$$m_2 \cdot \ddot{y}_2 = +\lambda (y_1 - y_2) - R \cdot t$$

Durch Kombination dieser Gleichungen ergeben sich die zwei weiteren

$$\ddot{y}_1 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\lambda} + \ddot{y}_1 (m_1 + m_2) = 0$$

$$\ddot{y}_2 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\lambda} + \ddot{y}_2 (m_1 + m_2) = 0$$

Wird $\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}}$ wieder mit λ bezeichnet, so heißen die



Fig. 41.

Integrale y_1 und y_2

$$y_1 = A_1 \cdot \cos zt + B_1 \cdot \sin zt + C_1 \cdot t + D_1$$

$$y_2 = A_2 \cdot \cos zt + B_2 \cdot \sin zt + C_2 \cdot t + D_2$$

Die acht Integrationskonstanten lassen sich mit Hilfe der Differentialgleichungen auf vier reduzieren, sodaß die Lösungen heißen:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A \cdot \cos (zt) + B \cdot \sin (zt) + C \cdot t + D \\ y_2 &= -\frac{m_1}{m_2} (A \cdot \cos (zt) + B \cdot \sin (zt) + \left(C - \frac{R}{\lambda}\right) t + D) \end{aligned} \right\} 46)$$

Die Integrationskonstanten werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

$$\text{Für } t = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, \dot{y}_1 = 0, \dot{y}_2 = 0$$

$$\text{Es werden } A = 0, D = 0, B = -\frac{R}{m_1 \cdot z^2}, C = +\frac{R}{m_1 z^2}$$

Damit sind

$$y_1 = \frac{R}{m_1 \cdot z^2} \cdot \left(t - \frac{1}{z} \cdot \sin zt\right)$$

$$y_2 = -\frac{R}{m_2 \cdot z^2} \left(t - \frac{1}{z} \cdot \sin zt\right) = -\frac{m_1}{m_2} \cdot y_1$$

Die Verlängerung, und damit die Beanspruchung des Stabes, ist durch die Differenz $y_2 - y_1$ gegeben.

$$\begin{aligned} \Delta s &= y_2 - y_1 = \frac{R}{\lambda} \left(t - \frac{1}{z} \cdot \sin (zt)\right) \\ &= \frac{R}{\lambda} \left(t - \frac{T}{2\pi} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)\right) \end{aligned}$$

Ersetzen wir R durch seinen Wert mit $\lambda = \frac{s}{EF}$, so ist

$$\Delta s = D' \cdot \frac{v}{L} \cdot P \cdot \frac{s}{EF} \cdot t - D' \cdot \frac{v}{L} \cdot P \cdot \frac{s}{EF} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{t}{T}$$

$$\Delta s_{dyn} = \Delta s_{stat} - P \cdot D' \cdot \frac{v}{EF} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{s}{L} \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{t}{T}$$

Die prozentuale Vergrößerung der statischen Verlängerung ist von der Laststellung auf dem Träger abhängig. Für Last in N , $t = \frac{l_1}{v}$, ist im ungünstigsten Fall die Vergrößerung

$$\Delta \% = \frac{100 \cdot P \cdot D' \cdot \frac{v}{EF} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{s}{L}}{P \cdot D' \cdot \frac{l_1}{L} \cdot \frac{s}{EF}} = 100 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{v \cdot T}{L_1}$$

Wir wollen noch die Schwingungsdauer T präzisieren. Dazu bezeichnen wir mit g_H das Gewicht eines Hauptträgers pro laufenden Meter und mit g_F das halbe Fahrbahngewicht pro laufenden Meter. Dann sind

$$m_1 = g_H \cdot \frac{l}{2}, \quad m_2 = l \left(\frac{g_H}{2} + g_F \right)$$

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{s}{EF} \cdot \frac{\frac{g_H}{2} \cdot \left(\frac{g_H}{2} + g_F \right)}{g_H + g_F}} \cdot l \\ &= \pi \sqrt{\frac{s}{EF} \cdot \frac{g_H(g_H + 2g_F)}{g_H + g_F}} \cdot l \end{aligned}$$

Der Ausdruck für T könnte weiter umgeformt werden, indem alle Größen in Funktion der Stützweite wenigstens annähernd eingeführt würden. Wir überlassen dies dem Spezialfall.

Sobald $vt > l_1$, ist die Stabkraft D gegeben durch

$$D_{II} = P \left[D_r - \frac{D_l - D_r}{l} \cdot v \cdot t \right] = \frac{P}{L} \left[D' \cdot l_1 - \frac{D'' \cdot l_2 - D' \cdot l_1}{l} \cdot v \cdot t \right]$$

Mit dieser Kraft und den Anfangsbedingungen

$$(y_{2II}^1)_{t=0} = (y_{2I}^1)_{t=\frac{l_1}{v}}$$

$$(\dot{y}_{2II}^1)_{t=0} = (\dot{y}_{2I}^1)_{t=\frac{l_1}{v}}$$

können die Schwingungen der Phase II bestimmt werden.

Für die dritte Phase gilt die Kraft

$$D_{III} = P \cdot \frac{D''}{L} [l_2 - v \cdot t]$$

Die Anfangsbedingungen sind analog.

Wir führen die diesbezüglichen Rechnungen nicht durch. Wir können ohne weiteres sagen, daß der Übergang der Last aus Stellung N in Stellung M dann ungünstigste Spannungen erzeugt, wenn

$$\frac{l}{v} = (2n + 1) \cdot \frac{T}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Das gibt folgende Konstruktionsbedingung:

$$F \neq \frac{(2n+1)^2}{E \cdot \pi^2} \cdot \frac{g_H(g_H + 2g_F)}{g_H + g_F} \cdot \frac{s}{l} \cdot v^2 \quad \text{Dimens. Regel VII.}$$

Damit können entweder für gegebene Querschnitte die kritischen Geschwindigkeiten, oder für gegebene Geschwindigkeiten die ungünstigsten Querschnitte F ermittelt werden. Dieser Wechsel der Stabkraft von Zug auf Druck ist besonders für die relativ schwachen Diagonalen der Trägermitte gefährlich. Vor allem sind die ersten Werte $n = 0, 1, 2$ wichtig, weil für höhere n , in Anbetracht der Dämpfung, die Verhältnisse nicht mehr so ungünstig liegen.

Die Schwingungen infolge eines bewegten Lastenzuges können durch Superposition der einzelnen Lastwirkungen nach der gegebenen Methode bestimmt werden. Damit sich die Schwingungen aus den einzelnen Kräften nicht verstärken, muß die Bedingung erfüllt sein

$$\frac{a}{v} \neq n \cdot T, \quad \text{vor allem } \neq 1 \cdot T,$$

wenn a den Lastabstand bedeutet.

Gleichmäßig verteilte Verkehrslast gibt nach der Einflußfläche für die erste Phase $x < l_1$ eine Stabkraft

$$D = q \cdot \frac{D'}{2L} \cdot v^2 \cdot t^2 = R \cdot t^2$$

Damit erhalten wir nach der gleichen Methode wie für eine Einzellast

$$y_1 = 2 \cdot \frac{R}{m_1 \cdot z^4} \left[\cos(zt) - 1 + \frac{z^2}{2} \cdot t^2 \right]$$

$$y_2 = -\frac{m_1}{m_2} \cdot y_1$$

$$\Delta s = y_1 - y_2 = \frac{R}{\lambda} \left[t^2 - \frac{4}{z^2} \cdot \sin^2\left(\frac{z}{2} \cdot t\right) \right]$$

Diese Formel zeigt, daß während der Bewegung der Last die dynamische Dehnung die statische nie überschreitet. Hingegen wird bei plötzlichem Anhalten der Last eine Schwingung um die dazugehörige statische Gleichgewichtslage auftreten, deren Amplitude von Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit abhängt.

Eine periodische Einzellast, welche an bestimmter Trägerstelle wirkt, oder welche sich mit sehr kleiner Geschwindigkeit über den Träger bewegt, erzeugt in einem beliebigen Stab eine Kraft, welche gegeben werden kann durch

$$D = D_0 \cdot \sin(nt).$$

Die Bewegungsgleichungen der beiden Massenpunkte m_1 und m_2 lauten dann

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1 = -\lambda(y_1 - y_2) + D_0 \cdot \sin(nt)$$

$$m_2 \cdot \ddot{y}_2 = -\lambda(y_1 - y_2) - D_0 \cdot \sin(nt)$$

Daraus folgen die Lösungen

$$y_1 = + \frac{D_0}{m_1} \cdot \frac{1}{n^2 - \kappa^2} \left[\frac{n}{\kappa} \cdot \sin(\kappa t) - \sin(n \cdot t) \right]$$

$$y_2 = - \frac{D_0}{m_2} \cdot \frac{1}{n^2 - \kappa^2} \left[\frac{n}{\kappa} \cdot \sin(\kappa t) - \sin(n \cdot t) \right]$$

Es liegt Resonanz vor, wenn $n = \kappa$. Die Unbestimmtheit $\infty \cdot 0$ läßt sich entwickeln in

$$y_1 = \frac{D_0}{2m_1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{\sin(nt)}{n} - t \cdot \cos(nt) \right]$$

Die Amplituden wachsen mit t unbegrenzt.

Die Resonanzbedingung $n^2 = \kappa^2 = \lambda \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}$ kann umgeschrieben werden auf

$$n^2 = \frac{EF}{s} \cdot g \cdot 4 \cdot \frac{g_H + g_F}{g_H(g_H + 2g_F)} \cdot \frac{1}{l} \quad (47)$$

Diese Gleichung kann aufgelöst werden nach F oder g_H und gibt uns dadurch Dimensionierungsregeln. Ein Blick auf die Gleichung zeigt, daß nur für sehr große Werte n Resonanz möglich ist, weshalb wir von einer genauen Diskussion absehen.

Schwingungen von Vertikalstäben.

Wir untersuchen noch die Schwingungen der Vertikalen MO , JK u. s. f. von Fig. 40, weil dieselben einer unmittelbaren Wirkung der Last ausgesetzt sind. Dabei nehmen wir folgende Verteilung der Last an:

$$m_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{g} \cdot g_H \cdot l; \quad m_2 = \frac{1}{g} \left(\frac{2}{5} \cdot g_H + g_F \right)$$

Dann ist
$$z = \lambda \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} = \frac{25}{3} \cdot g \cdot \lambda \frac{g_F + g_H}{g_H(2g_H + 5g_F)}$$

Wir vernachlässigen die Veränderlichkeit der Masse m_2 mit der Laststellung.³⁵⁾

Nach der Einflußlinie für V ist die Stabkraft gegeben durch

$$V = P \cdot \frac{1}{l} \cdot v \cdot t$$

Wir ersetzen diesen Ausdruck durch

$$V = P \cdot 1 \cdot \sin(nt), \quad \text{wobei } n = \frac{\pi \cdot v}{2 \cdot l}$$

Die Lösung für diese Last ist

$$y_1 = \frac{P}{m_1} \cdot \frac{1}{n^2 - z^2} \cdot \left[\frac{n}{z} \cdot \sin(zt) - \sin(nt) \right]$$

$$y_2 = \frac{P}{m_2} \cdot \frac{1}{n^2 - z^2} \left[\frac{n}{z} \cdot \sin(zt) - \sin(nt) \right]$$

Für Resonanz ist $n^2 = z^2$. Das gibt für die kritischen Geschwindigkeiten unerreichbar große Werte, weil z gegenüber n

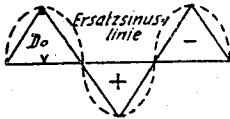


Fig. 42.

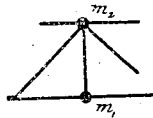


Fig. 43.

sehr groß ist. Daher dürfen wir i. a. in y das erste Glied neben dem zweiten vernachlässigen. Dann wird

$$\Delta s_{max} = \frac{P}{z^2 - n^2} \left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right]$$

Weil z^2 sehr groß ist, bleiben diese Vergrößerungen klein.

Die letzte Untersuchung gilt besonders auch für Füllungsglieder mehrfacher Systeme, deren Einflußlinien angenähert die in Fig. 42 gegebene Form haben können. Der Ersatz des wirklichen Verlaufes der Stabkraft durch einen sinusöidalen $D = D_0 \cdot \sin(nt)$ ist hier sicher zulässig.

³⁵⁾ Sie könnte berücksichtigt werden nach dem in Fußnote 17 besprochenen Verfahren.

4. Stoßwirkungen.

Größer als die bisher behandelten dynamischen Einflüsse werden die Stoßbeanspruchungen. Das Fachwerk als Ganzes ist insofern behandelt, als wir angenommen haben, daß es sich wie ein Vollwandträger verhält. Auch die Formel von Zschetzsche gilt für alle Tragwerke, also auch für Fachwerke.

Wir wollen mit unserer Näherungsmethode speziell die Verhältnisse für eine Vertikale abschätzen. Dazu nehmen wir an, daß für $t = 0$ der Massenpunkt m_1 eine Geschwindigkeit \bar{v} habe. Die allgemeinen Lösungen 46 geben dann:

$$y_1 = \bar{v} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \sin(\alpha t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \bar{v} \cdot t$$

$$y_2 = -\bar{v} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \sin(\alpha t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \bar{v} \cdot t$$

$$\Delta s = y_1 - y_2 = \frac{\bar{v}}{z} \cdot \sin(\alpha t)$$

\bar{v} ist gegeben oder bestimmt sich für eine aus der Höhe H auf die Masse m_1 fallende Last zu

$$\bar{v} = v \cdot \frac{\frac{P}{g}}{\frac{P}{g} + m_1} = \frac{P}{P + m_1 \cdot g} \sqrt{2gH}$$

In unserer Anwendung handelt es sich nicht um bloße Impulswirkung, sondern um Impulswirkung und darauffolgende Schwere-
wirkung der Last. Dafür werden die y

$$y_1 = \frac{P}{\lambda} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 - \cos(\alpha t)) + \bar{v} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \sin(\alpha t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \bar{v} \cdot t$$

$$y_2 = -\frac{P}{\lambda} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 - \cos(\alpha t)) - \bar{v} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \sin(\alpha t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \bar{v} \cdot t$$

Die Verlängerung des Stabes ist

$$\Delta s = \frac{P}{\lambda} [1 - \cos(\alpha t)] + \frac{\bar{v}}{z} \cdot \sin(\alpha t)$$

Das Maximum für Δs tritt auf für $\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}$

Für kleine \bar{v} ist Δs maximal für $t \sim \frac{T}{2}$ und es ist

$$\Delta s_{max} = 2 \Delta s_{stat}$$

Für große \bar{v} tritt das Maximum bei $\frac{T}{4}$ auf, und es ist

$$\Delta s_{max} = \frac{\bar{v}}{z}$$

Ganz analoge Verhältnisse haben wir bei den transversalen Stoß-Schwingungen gefunden.

Bezeichnen wir $\frac{P}{g} = m$ und $\frac{P}{g} + m_1 = M_1$, so wird

$$\bar{v} = v \cdot \frac{m}{M_1} \cdot \frac{1}{z} = P \cdot \sqrt{\frac{1}{g} \cdot \frac{m_2}{(M_1 + m_2) \cdot M_1} \cdot \frac{s}{EF}} \sqrt{\frac{2H}{s}}$$

Der Stoßkoeffizient n wird

$$n = \frac{\frac{\bar{v}}{z}}{P \cdot \frac{s}{EF}} = \sqrt{\frac{EF}{g} \cdot \frac{m_2}{(M_1 + m_2) \cdot M_1}} \sqrt{\frac{2H}{s}} \quad 48)$$

Wir könnten auch hier die Biegungswiderstände der benachbarten Teile berücksichtigen, wobei sich analoge Formeln mit etwas andern Werten ergeben.

In beiden Fällen geben die Formeln sehr große dynamische Mehrbeanspruchungen. Das weist wieder darauf hin, daß es nicht angehen wird, die Stoßbeanspruchung zu lokalisieren, solange es nicht möglich ist, über die lokale Deformationsarbeit an der Berührungsstelle oder über den wirklichen Stoßverlauf nähere Angaben zu machen.

Es bleibt uns daher nichts anderes übrig, als unter der Annahme unendlich großer Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Beanspruchung im Träger, mit dem Werte N zu rechnen, der für das ganze Tragwerk abgeleitet wurde. Andererseits ist ganz sicher, daß solche, direkten Stößen ausgesetzte Konstruktionsteile besonders ungünstig beansprucht sind. Eine Notiz in Eng. News Record³⁶⁾ gibt Beweise aus der Praxis, wo die „harte Wirkung“

³⁶⁾ Siehe Fußnote 1.

in solchen Stäben sich durch starkes Ausbohren der Knotenpunktsgelenke gezeigt hat.

Solange experimentelle Grundlagen über die wirklich auftretenden Beanspruchungen fehlen, können wir aus unsern Rechnungen vom praktischen Standpunkt aus nur folgende Schlüsse konstruktiver Art ziehen:

1. Stoßwirkungen in Knotenpunkten sollen womöglich vermindert werden, indem man Stellen, in denen Stöße erfolgen können (Schienenstöße u. s. w.), in Quer- und Längsrichtung von den Knotenpunkten entfernt.

2. Zwischen den Stoßpunkten und den Knotenpunkten sollen elastisch wirkende Zwischenkonstruktionen liegen. Bei einer aus Querschwellen auf Längsträgern bestehenden Fahrbahn ist es verfehlt, den Abstand der Längsträger gleich dem Schienenabstand zu machen und dadurch die Deformationsarbeit der Querschwellen auszuschalten.

5. Querschwingungen von Fachwerkstäben.

Neben den Longitudinalschwingungen treten in den einzelnen Stäben auch Querschwingungen auf, welche von den Schwingungen der benachbarten Knotenpunkte oder von Momenten erzeugt werden.

Für die erstern kann eine Näherungsmethode angewandt werden. Nach den Verfahren von Reißner und Polhausen können die Schwingungen der mit Masse belegten Stabenden bestimmt werden. Diese Bewegungen erregen erzwungene Querschwingungen des Stabes. Zur einfachern Berechnung derselben kann die Stabmasse auf die Stabmitte reduziert werden. Diese Querschwingungen eines Stabes bleiben sicher klein, solange ihre Eigenfrequenzen von den Schwingungsfrequenzen der Endpunkte verschieden sind.

Wir untersuchen hier nur solche Querschwingungen eines Einzelstabes, welche durch Momente auf die Endquerschnitte erregt werden. Zur Vereinfachung fassen wir den Stab als beidseitig fest, aber frei drehbar gestützten Balken auf. Die Annahme eines vollkommen eingespannten Balkens fällt dahin, weil dann zeitlich veränderliche Momente in den Endquerschnitten keine Stabschwingungen erzeugen. Die Momente an den Enden können von ex-

zentrischem Anschluß der Stäbe an die Knotenbleche oder von der Steifigkeit der Knotenpunkte herrühren. Wir bezeichnen im folgenden die Momente an den Enden mit M . Sie sind i. a. mit der Laststellung, d. h. mit der Zeit veränderlich. Einzig im Fall einer plötzlichen Lastwirkung an bestimmter Trägerstelle dürfen sie in erster Annäherung konstant angenommen werden, wenn wir von der gleichzeitigen Wirkung der Longitudinalschwingungen absehen.

Bei der Berechnung der Querschwingungen dürfen die Längsspannungen in den Fachwerkstäben nicht unberücksichtigt gelassen werden.

Mit den Bezeichnungen: T = Längsspannung, q = Maße pro Längeneinheit = $\frac{q}{g}$, F = Querschnitt des Stabes, $\kappa^2 = \frac{J}{F}$, $b^2 = \frac{E + T}{q}$, $a^2 = \frac{T}{q}$, heißt die Differentialgleichung nach Rayleigh

$$\kappa^2 \left(b^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} \right) - a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Für diese Gleichung gibt Clebsch³⁷⁾ die vollständige Lösung

$$y = \sum u_i \cdot \varphi_i$$

u_i wird durch die Längsspannung nicht geändert und bleibt

$$u_i = \sin \left(i \pi \frac{x}{l} \right)$$

In

$$\varphi_i = (\varphi_i)_0 \cdot \cos(n_i t) + \frac{1}{n_i} \cdot (\dot{\varphi}_i)_0 \cdot \sin(n_i t) + \frac{2 \cdot g}{q \cdot l} \cdot \frac{1}{n_i} \int_0^t \Phi_i \sin n_i(t-t_1) dt_1$$

ist die Frequenz n_i bei Vernachlässigung der Rotationsträgheit

$$n_i = \frac{i \pi}{l} \sqrt{\frac{F}{q} \left[T \left(1 + i^2 \pi^2 \cdot \frac{\kappa^2}{l^2} \right) + E \cdot i^2 \pi^2 \cdot \frac{\kappa^2}{l^2} \right]}$$

Bei Fachwerkstäben ist meistens $\frac{l}{\kappa} > 100$, $\left(\frac{\kappa}{l} \right)^2$ also $< \frac{1}{10000}$

Daher ist für die ersten Schwingungstypen $i^2 \pi^2 \cdot \frac{\kappa^2}{l^2}$ gegenüber 1 klein und zu vernachlässigen.

³⁷⁾ Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper.

Selbst $E \cdot i^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{\lambda^2}{l^2}$ wird bei $E = 20 T$ und $i = 1$ nur ungefähr $\frac{T}{50}$. Vernachlässigen wir auch dieses Glied, so ist mit S als Stabkraft

$$n_i = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{T \cdot E}{\rho}} = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

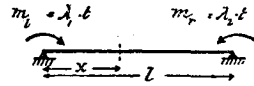


Fig. 44.

Setzen wir in Fig. 44 einen beidseitig gestützten Stab voraus, auf dessen Enden die Momente $m_l = \lambda_1 \cdot t$ und $m_r = \lambda_2 \cdot t$ in der angedeuteten Art wirken, so bestimmt sich die verallgemeinerte Kraft Φ_i aus

$$m_l \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)_{x=0} \cdot \delta \varphi_i - m_r \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)_{x=l} \cdot \delta \varphi_i = \Phi_i \cdot \delta \varphi_i$$

$$\Phi_i = t \cdot \frac{i\pi}{l} [\lambda_1 - (-1)^i \cdot \lambda_2]$$

Ist z. B. $\lambda_1 = \lambda_2$, so fallen alle geraden Schwingungstypen für die erzwungenen Schwingungen weg, währenddem die ungeraden eine Verdoppelung des Wertes Φ_i aufweisen.

Zur Abkürzung der Rechnung wird weiterhin nur mit dem Moment am linken Ende gerechnet. Dann ist

$$\Phi_i = \frac{i\pi}{l} \cdot \lambda_1 \cdot t = m_l \cdot \frac{i\pi}{l}$$

Damit wird die Schwingungsordinate eines beliebigen Punktes

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cdot g}{q \cdot l} \cdot \frac{1}{n_i} \cdot m_l \cdot \frac{i\pi}{l} \cdot \int_0^t \sin n_i (t - t_1) dt_1 \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} \\ &= 2 \cdot \frac{m_l}{l^2} \cdot \frac{g}{q} \cdot \pi \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{1}{n_i^2} \cdot (1 - \cos (n_i \cdot t)) \cdot \sin i\pi \frac{x}{l} \end{aligned}$$

Für n_i^2 ist einer der angeführten Werte einzusetzen.

Ist z. B. die Längsspannung Null, so ist

$$n_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{g}} \cdot g = \frac{i^2 \pi^2 \cdot b}{l^2}$$

und

$$y = 2 \cdot \frac{m \cdot l^2}{EJ \cdot \pi^3} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin i\pi \frac{x}{l}}{i^3} \left(1 - \cos \left(\frac{i^2 \pi^2 \cdot b}{l^2} \cdot t \right) \right)$$

Für das veränderliche Moment $m = \lambda \cdot t$ resp. $\Phi_i = \frac{i\pi}{l} \cdot \lambda \cdot t$ ist

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2g}{q \cdot l} \cdot \frac{1}{n_i} \cdot \lambda \cdot \frac{i\pi}{l} \int_0^l t_1 \cdot \sin n_i (t - t_1) dt_1$$

$$= \frac{2 \cdot g}{q \cdot l^2} \cdot \lambda \cdot \pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{n_i^2} \left(t - \frac{1}{n_i} \sin(n_i \cdot t) \right)$$

Für n_i sind wieder die gegebenen Werte einzusetzen.

Die ungünstigsten Verhältnisse liegen vor, wenn das Moment sein Vorzeichen in Intervallen τ wechselt, wobei

$$\tau = \frac{2n+1}{2} \cdot T_i \quad n = 0, 1, \dots$$

T_i bedeutet die Eigenschwingungsdauer der Querschwingung. Bei Exzentrizitätsmomenten ist der Vorzeichenwechsel durch jenen der Stabkraft bedingt. Das gibt für Füllungsglieder

$$\frac{l}{v} \neq \frac{2n+1}{2} \cdot T_{i\text{quer}}$$

l bedeutet wieder die Feldweite.

Aus dieser Ungleichung lassen sich Dimensionierungsregeln für die Stabquerschnitte ableiten. Da die Querschwingungsdauer bedeutend größer ist als die Längsschwingungsdauer, so ist hier eher Resonanz möglich. Die Rechnung wird nicht weiter spezialisiert, weil T_i der Querschwingung ganz von der Anordnung des Stabquerschnittes abhängig ist. Diese kann so vielfältig sein, daß eine Kontrolle nach der letzten Gleichung jeweils dem Spezialfall vorbehalten werden muß.

D. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Abhandlung wurde versucht, die verschiedenen dynamischen Einflüsse auf eiserne Brücken zu ermitteln. Für den einfachen vollwandigen Balken wurden Dimensionierungsregeln abgeleitet, während dem für Fachwerke durch die sehr weitgehenden Annahmen nur Wege angedeutet wurden, auf denen die dynamischen Erscheinungen eventuell untersucht werden können.

Wir geben hier noch eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten Annahmen und Resultate der Arbeit.

a) Annahmen.

1. Die einzelnen dynamischen Einflüsse, deren Berücksichtigung die Lösung der Differentialgleichungen unmöglich macht, wie Trägheit und Geschwindigkeit der Last, wurden getrennt untersucht.

2. Bei diesen Rechnungen wurden die unveränderten Normalfunktionen des homogenen Stabes beibehalten.

3. Es wurde durchgehend nur das erste Reihenglied diskutiert und zur Ableitung von Dimensionierungsregeln verwendet.

4. Zur Untersuchung der Stoßwirkung wurde unelastischer Stoß angenommen. Für die Geschwindigkeitsverteilung unmittelbar nach dem Stoß sind verschiedene Annahmen durchgerechnet worden.

5. Für die Ermittlung der Schienenstoßwirkung wurden die Schienenenden als stumpf gegeneinander stoßend und nicht verbunden angenommen.

6. Die Schwingungen eines Fachwerks als Ganzes wurden nicht eigens untersucht, sondern angenommen, daß sie gleich seien wie bei Vollwandträgern.

7. Die Schwingungen des einzelnen Fachwerkstabes wurden als solche eines beidseitig freien Stabes, mit an den Enden konzentrierten Massen, berechnet. Die Untersuchung beschränkt sich auf Füllungsglieder.

b) Resultate.

1. Die regelmäßigen dynamischen Einflüsse sind bei den vorkommenden Geschwindigkeiten und großen Stützweiten sehr gering. Bei sehr kleinen Stützweiten sind sie bedeutend.

2. Für diese Einflüsse sind die dynamischen Zusatzbeanspruchungen numerisch durch Tabellen und Kurven dargestellt worden.

3. Für periodisch wirkende Belastungen sind Tabellen und Kurven für kritische Eigengewichte und Trägheitsmomente berechnet worden. Dadurch sind dem entwerfenden Ingenieur die Mittel gegeben, diese Größen so zu wählen, daß keine Resonanz möglich wird. Hierbei ist zu beachten, daß es sich bei den vorliegenden Untersuchungen um ungedämpfte Schwingungsvorgänge handelt, wie sie in der Praxis kaum vorkommen.

4. Für wirkliche Stoßbelastung haben wir für verschiedene Annahmen die Schwingungen, und vor allem die Stoßkoeffizienten bestimmt. Die Stoßbeanspruchungen werden bei starrer Lagerung der Träger sehr groß.

6. Speziell wurde die Stoßbeanspruchung infolge der Schienenstöße untersucht. Wir haben eine Stoßformel abgeleitet, welche diese Wirkung allein gibt, wobei nur die Lasten über den Stoßlücken mit dem Stoßkoeffizienten zu multiplizieren sind.

7. In gedrängter Form wurden auch noch einige Erscheinungen in Fachwerkstäben behandelt.

E. Anordnung von Versuchen zur Bestimmung dynamischer Einflüsse.

Wie eingangs erwähnt wurde, und sich im Verlaufe der Untersuchungen bestätigt hat, müssen für unsere Rechnungen sehr viele Annahmen gemacht werden, deren Zuverlässigkeit sich oft jeder theoretischen Beurteilung entzieht. Es läßt sich nicht mit Sicherheit entscheiden, ob theoretisch genaue Verfahren mit großer Rechnungsarbeit besser, d. h. den wirklichen Verhältnissen entsprechender sind, als viel einfachere Rechnungsmethoden, die sich auf weitgehende Annahmen aufbauen. Darüber können einzig Versuche Aufschluß geben. Diese müssen sehr zahlreich durchgeführt werden; denn ihre Resultate sind viel größern Zufälligkeiten ausgesetzt als statische Versuchswerte, und haben daher nur in sehr großer Anzahl wirklichen Wert.

Leider bestehen zur Zeit noch keine Apparate, welche mit der erforderlichen Genauigkeit alle besprochenen dynamischen Wirkungen festzustellen erlauben. Alle bisher verwendeten Apparate haben zu große Trägheit. Äußerst schwer wird es sein, einen Apparat zu bauen, der die sehr heftigen Stoßwirkungen genau zu registrieren vermag. In der Nähe des Stoßpunktes versagen alle bestehenden Apparate vollständig.

Eine systematische Durchführung solcher dynamischer Versuche fehlt bis anhin. Es ist sehr zu wünschen, daß die gegenwärtig in der Praxis aufgetauchten Anregungen mit aller Tatkraft und Planmäßigkeit weitergeführt werden.³⁸⁾ Dann kann man annehmen, daß mit der Zeit auch geeignete Apparate gefunden werden, und daß es gelingen wird, die bisher theoretisch her-

³⁸⁾ Zur Zeit werden vom „Verband Schweizerischer Brückenbauanstalten“ (V. S. B.) solche Versuche ausgeführt.

geleiteten Resultate auf ihre Richtigkeit zu prüfen, oder deren Abänderung aus den Versuchswerten abzuleiten. Die folgende Zusammenstellung gibt einige Winke für durchzuführende Versuche.

1. Feststellung der Eigenschwingungen, besonders der Eigenschwingungsdauer von Brücken verschiedener Bauart. Diese Versuche werden am besten mit kleinen fallenden Lasten durchgeführt. Bei kleinen Brücken kann das Fallen der Last ersetzt werden durch plötzliches Entfernen einer am Träger aufgehängten Last. Auch die Resonanzerscheinungen mit kleinen, periodisch wirkenden Lasten eignen sich zur Bestimmung der Schwingungsdauer sehr gut. Für diese und alle weiteren Versuche muß die Geschwindigkeit des Papierstreifens, welcher das Schwingungsdiagramm aufnimmt, relativ zum Schreibstift möglichst groß sein. Das gilt besonders bei schnellen Schwingungen, d. h. bei kleinen Brücken.

2. Es müssen für bewegte Lasten (Einzellasten und Lastengruppen), und für verschiedene Geschwindigkeiten derselben, die dynamischen Deformationen ermittelt werden. Dabei sind vorerst alle störenden Nebeneinflüsse möglichst auszuschalten. Zum Beispiel muß die Fahrbahn in sehr gutem Zustand gehalten sein. Die gleichzeitige Aufnahme der Schwingungsdiagramme vieler Punkte gestattet dann die Darstellung der Trägerform in verschiedenen Zeitpunkten, sowie die Ermittlung der Bahnkurven bestimmter Lastpunkte. Weiter kann daraus auch die Frage der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Beanspruchung in Brückenkonstruktionen klargelegt werden. Die Zeitmarkierung muß für alle diese Erhebungen sehr genau sein.

3. Es ist die Frage der kritischen Geschwindigkeiten bei konstanten Lasten zu untersuchen, wobei es sich zeigen wird, ob diese ungefähr in der, dafür berechneten Größe praktisch vorkommen.

4. Zum Studium besonderer Fragen, wie Dämpfung, Energieverhältnisse u. s. f., eignen sich vor allem periodisch veränderliche Kräfte, welche bei Resonanz große, leicht konstatierbare Wirkungen haben.

5. Besonders wichtig, weil für die Theorie fast unzugänglich, ist die Feststellung der Fachwerkschwingungen. Dabei müssen

die Schwingungen der Knotenpunkte, sowie Longitudinal- und Querschwingungen der einzelnen Stäbe bestimmt werden.

6. Bei auf Stoß beanspruchten Trägern interessiert vor allem die Geschwindigkeitsverteilung im Stoßmoment, wobei die Verhältnisse in der Nähe des Stoßpunktes das größte Interesse bieten. Damit wird sich eine Kontrolle resp. Verbesserung der Formel für den Stoßkoeffizienten n resp. N ergeben. Für wiederholte Impulse wird auch bei Resonanz die Schwingungsamplitude nicht unbegrenzt wachsen. Sie wird sich relativ schnell einem obern Grenzwert nähern. Es kann nur durch Versuche festgestellt werden, ob der Träger dabei wirklich gefährdet ist. Währenddem bei Balkenbrücken große Schwingungen i. a. mit Überbeanspruchungen verbunden sind, gibt es andere Systeme, wie z. B. Hänge- und Bogenbrücken, bei denen die großen Deformationen in der Art des Systems begründet sind, und daher keine bedenklichen Beanspruchungen zur Folge haben.

7. Um den Einfluß der Schienenstöße zu bestimmen, sind die Versuche mit verschiedenen Stoßtypen durchzuführen. Auch der Einfluß des Fahrbahnzustandes, gelockerter Laschen u. s. f. muß durch Versuche dargetan werden.

Wir schließen damit die Arbeit ab, und möchten gerade durch diesen letzten Abschnitt darauf hinweisen, daß die für die Technik nötige Lösung des dynamischen Problems der Brücken nur in Anlehnung an die Praxis, d. h. durch Versuche gegeben werden kann. Die Theorie kann nur die Grundlagen geben, auf denen sich mit Hilfe der Versuchswerte die Dimensionierungsregeln aufbauen. Sollte je einmal der Haarmann'sche Gedanke einer großen Versuchseisenbahn verwirklicht werden, so sollten verschiedene Brückentypen in dieselbe eingebaut werden. So allein scheint es uns möglich, die notwendigen Installationen und Instrumente zweckmäßig anzubringen, um reichliche und wertvolle Versuchswerte zu gewinnen.

Lebenslauf.

Ich, Marin Arnold Stoop, Sohn des J. B. Stoop von Flums und der Elisa, geb. Herman, von Flums, wurde am 22. April 1897 in Flums, Kanton St. Gallen, geboren. In meinem Heimatort Flums besuchte ich Primar- und Sekundarschule. 1911—1915 absolvierte ich die technische Abteilung der Kantonsschule St. Gallen, 1915—1919 die Bauingenieurschule an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, wo ich im Juli 1919 das Diplom als Bauingenieur erhielt. 1919—1921 war ich als Assistent in Mechanik bei Herrn Prof. Dr. Meißner tätig; in dieser Zeit ist die vorliegende Arbeit entstanden.