ÜBER DIE
Wärmetheoretische Summation
Fourier'scher und Laplace'scher Reihen

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH
ZUR ERLANGUNG DER
WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK
GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

Ernst VÖLLM
dipl. Fachlehrer
aus Amriswil.

Referent: Herr Prof. Dr. M. PLANCHEREL.
Korreferent: Herr Prof. Dr. H. WEYL.

N° 394

GENF 1925
DRUCK VON ALBERT KUNDIG

Leer - Vide - Empty

Meiner Braut

Leer - Vide - Empty

INHALTSÜBERSICHT

ERSTER TEIL.
Die wärmetheoretische Summation Fourier'scher Reihen.

Kapitel I.
Ueber die Temperaturfunktion u(φ, t).

Kapitel II.
Differentialsätze.

ZWEITER TEIL.
Die wärmetheoretische Summation Laplace'scher Reihen.

Kapitel III.
Ueber die Temperaturfunktion u(ϑ, φ; t).

Kapitel IV.
Differentialsätze.

Leer - Vide - Empty

ERSTER TEIL

DIE WÄRMETHEORETISCHE SUMMATION FOURIER'SCHER REIHEN

KAPITEL I

UEBER DIE TEMPERATURFUNKTION $u(\varphi, t)$

§ 1.

EINLEITUNG.

Die vorliegende Arbeit gehört ins Gebiet der sogenannten Summationen. Es liegen ihnen allgemeine Grenzwertbegriffe zu Grunde, die den klassischen als Sonderfall in sich begreifen.

Wir setzen ein für allemal fest, dass $f(\varphi)$ eine periodische, in Lebesgue'schem Sinne integrierbare Funktion darstellt, die die Periode 2π besitzt. Ist dann

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{1.1}$$

$$\left(\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\psi) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n\psi \, d\psi \right) \tag{1.2}$$

ihre Fourierreihe, so bilden wir mit Hilfe der konvergenzerzeugenden Faktoren $e^{-n^2 t} (t > 0)$ die Reihe

$$u(\varphi, t) = \sum_{0}^{\infty} u_n(\varphi, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) e^{-n^2 t} . \tag{1.3}$$

Diese Funktion löst bekanntlich die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.4}$$

und das folgende physikalische Problem [1]:

Auf einem dünnen geschlossenen Draht von der Länge 2π, der keine Wärme ausstrahlt und dessen Wärmekapazität überall 1 ist, hat man die Temperaturverteilung $f(\varphi)$ zur Zeit $t = 0$. Man frägt nach der Temperaturverteilung $u(\varphi, t)$ zu irgend einer spätern Zeit.

Unter *wärmetheoretischer Summe der Fourierreihe* (1.1) (W. Summe) verstehen wir den Grenzwert von $u(\varphi, t)$, wenn $t \to +0$.

Ist $f(\vartheta, \varphi)$ eine im Lebesgue'schen Sinne integrierbare Funktion auf der Oberfläche K der Einheitskugel (ϑ, φ sind die Polarkoordinaten eines ihrer Punkte) und

$$\sum_0^\infty X_n(\vartheta, \varphi) = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \int_K f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)\, d\sigma' \tag{1.5}$$

$$\left(\begin{aligned} \cos\omega &= \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi') \\ d\sigma' &= \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi' \end{aligned}\right) \tag{1.6}$$

ihre *Laplace'sche Reihe*, so nennen wir *W. Summe* dieser Reihe den Grenzwert für $t \to +0$ von

$$u(\vartheta, \varphi; t) = \sum_0^\infty X_n(\vartheta, \varphi) \,.\, e^{-n(n+1)t} = \sum_0^\infty u_n(\vartheta, \varphi; t) \,. \tag{1.7}$$

Die Reihe (1.7) löst das analoge Wärmeleitungsproblem [2] für eine dünne Kugelschale, die keine Wärme ausstrahlt und deren Wärmekapazität in jedem Punkte 1 ist. Die Wärmeleitungsgleichung ist hier

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \,. \text{ [3]} \tag{1.8}$$

---

[1] Siehe Sätze I und III. Vergl. Riemann-Weber, *Partielle Differentialgleichungen d. Math. Physik.* Bd. 2, S. 82 (1912).

[2] Siehe Sätze XIV und XVI.

[3] Δ bedeutet das Symbol des 2. Beltrami'schen Differentiators für die Kugelfläche. — Sind ferner $\psi(\vartheta, \varphi)$ ein Skalar und $v(\vartheta, \varphi)$ ein die Kugelfläche berührender Vektor, so werden wir schreiben

$$\nabla\psi = \operatorname{grad}\psi \qquad \nabla v = \operatorname{div} v$$

Diese Vektor-Grössen sind « in der Kugelfläche » zu bilden.

Die Funktion (1.3) hat schon Fourier betrachtet [1]. Er stellte jedoch die Beziehung

$$\lim_{t=+0} u(\varphi, t) = f(\varphi)$$

fest nur für Funktionen, welche in seine Reihe entwickelbar sind. Weierstrass bewies sie wohl als erster (1885) für nur stetige Funktionen [2]. Die W. Summe wird später auch von Sommerfeld erwähnt [3]. Diese Autoren betrachten nur $u(\varphi, t)$, nicht auch seine Derivierten. In einer Abhandlung von H. Hahn, welche mir beim Abschluss dieser Arbeit bekannt wurde, werden auch die Derivierten untersucht, jedoch nur für Grenzübergänge $t \to +0$, $\varphi = \text{const}$ [4]. Die Wärmesumme Laplace'scher Reihen scheint bisher nicht betrachtet worden zu sein.

Die vorliegende Arbeit hat die W. Summe Fourier'scher und Laplace'scher Reihen zum Gegenstand. Sie ist in zwei Teile zu je zwei Kapiteln gegliedert.

Das *erste Kapitel* enthält Sätze über die W. Summe Fourier'scher Reihen selbst, über die Eindeutigkeit des durch die Funktion $u(\varphi, t)$ gelösten physikalischen Problems und Sätze, die etwelchen Einblick gewähren in die ausgleichende Wirkung des Wärmeleitungsvorganges.

Das *zweite Kapitel* behandelt das Verhalten der Derivierten der Funktion $u(\varphi, t)$ beim Uebergang $t \to +0$ [5].

In den *Kapiteln III und IV* des zweiten Teiles sind entsprechende Sätze dargestellt für die W. Summe Laplace'scher Reihen. Die im Falle des Kreises angewandten Methoden lassen sich nicht durchwegs übertragen [6]. Den komplizierteren analytischen Hilfsmitteln entsprechend wurde die Darstellung in einzelnen Teilen umfangreicher.

---

1 FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, chap. X.

2 Siehe Satz III. Vergl. WEIERSTRASS, *Ueber die analytische Darstellbarkeit sog. willkürlischer Funktionen reeller Argumente.* Math. Werke, Bd. III, S. 1-37.

3 SOMMERFELD, *Die willkürlichen Funktionen in der math. Physik.* Diss. Königsberg (1891).

4 H. HAHN, Ueber die Darstellung willkürlich gegebener Funktionen durch singuläre Integrale. I und II. *Denkschriften der Wiener Akademie der Wissenschaften*, Bd. 93, S. 585-692 (1916).

5 Hier wurden Untersuchungen von de la VALLÉE-POUSSIN zu Rate gezogen, denen die Poisson'sche Summation zu Grunde liegt. Vergl. *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique* (1908), p. 245.

6 Der eingeschlagene Weg ist z. T. dem ähnlich, den Strässle wählte in seinen Betrachtungen über die Poisson'sche Summation. Vergl. E. STRAESSLE. *Untersuchungen über das Poisson'sche Integral auf der Kugel.* Diss. Freiburg. *Tohoku Math. Journal*, Vol. 22, Nos. 1, 2, Dec. 1922.

Sämtliche Sätze über Grenzübergänge $t \to +0$ wurden « direkt » bewiesen. Mit Rücksicht auf bekannte Sätze über die Summierbarkeit Fourier'scher und Laplace'scher Reihen durch Cesaro'sche Mittel ergeben sich insbesondere die Sätze für Grenzübergänge *auf der Mantellinie* (siehe unten) auch aus dem folgenden Theorem: Ist eine Reihe summierbar C_k, so ist sie auch W. summierbar [1]. In Anbetracht gewisser Ergebnisse der Strässle'schen Arbeit wären diese besondern Sätze und ein Teil derjenigen über beliebige Annäherung auch bewiesen, wenn man zeigen könnte, dass eine im Poisson-Abel'schen Sinne summierbare Reihe auch W. summierbar ist.

Das Definitionsgebiet der Funktion $u(\varphi, t)$ stellt man zweckmässigerweise dar durch die Fläche des geraden Halbzylinders, der den Einheitskreis zur Leitlinie hat. Wir werden also von einer Funktion auf dem Zylinder sprechen und verstehen unter dessen Innerem die einseitig unendliche Oberfläche mit Ausschluss des Grundkreises. Im Falle der Kugel haben wir es zu tun mit demjenigen Halbzylinder im vierdimensionalen Raume, der die Einheitskugel zur Leitfläche hat. Seine Punkte können dargestellt werden durch ϑ, φ und die Zeit t.

In den Nummern der Formeln gibt die Zahl vor dem Punkte den Paragraphen an.

§ 2.

Vorbereitende Aussagen.

Sei l irgend eine positive Zahl. Dann ist für jedes positive ξ die Ungleichung richtig:

$$e^{-\xi} \leq \frac{\max(e^{-\xi}\xi^l)}{\xi} = \frac{e^{-l}\,l^l}{\xi^l} = \frac{\mathrm{K}(l)}{\xi^l}\,. \tag{2.1}$$

Es bedeute $\mathfrak{P}_k(n; x, t)$ ein Polynom vom Maximalgrad k in der ganzen Zahl n, dessen Koeffizienten stetige Funktionen von Ver-

[1] Hardy, *Math. Annalen* 64, S. 77.

änderlichen x und t seien in einem Gebiete $-\pi \leqq x \leqq \pi$, $0 < T \leqq t \leqq T'$. Wir betrachten die Reihe

$$\Phi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_k(n; x, t) e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{t}} = \Phi_0(x, t) + \Phi^*(x, t) .$$

Dabei sei Φ_0 der Summand für $n = 0$, Φ^* die Reihe der andern.

Aussage 1. Im Gebiete $-\pi \leqq x \leqq \pi$, $T \leqq t \leqq T'$ ist die Reihe Φ absolut und gleichmässig konvergent. Sie ist also dort eine stetige Funktion von x und t.

Wir brauchen nur Φ^* zu betrachten. Da die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_k$ nach Voraussetzung beschränkt bleiben, so bleibt das allgemeine Glied von Φ^* absolut kleiner als das Produkt einer von n unabhängigen Konstante und des Ausdruckes

$$|n|^k e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{t}} .$$

Wir wählen l derart, dass $2l - k \geqq 2$ und haben

$$e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{t}} \leqq K(l) \left| \frac{t}{(x - 2n\pi)^2} \right|^l .$$

Da $-\pi \leqq x \leqq \pi$ und $n \neq 0$, gilt

$$\frac{1}{(x - 2n\pi)^2} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\left(\frac{x}{n} - 2\pi\right)^2} \leqq \frac{1}{\pi^2 n^2} .$$

Wenn wir abermals von einem beschränkten Faktor absehen, so wird jenes Glied absolut kleiner als

$$\frac{t^l}{|n|^{2l-k}} \leqq T'^l \frac{1}{n^2} ,$$

also kleiner als das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe von Konstanten.

Wir haben $T > 0$ vorausgesetzt, nur weil $\mathfrak{P}_k(0; x, t) e^{-\frac{x^2}{t}}$ singulär ist bei $x = t = 0$. Für dieses Glied ist jedoch in $0 < \varepsilon \leqq |x| \leqq \pi$

$$\left| \mathfrak{P}_k(0) e^{-\frac{x^2}{t}} \right| \leqq \text{const} \frac{T'^l}{\varepsilon^{2l}} .$$

Wir gelangen zur

Aussage 2. Es gibt eine von x und t unabhängige Zahl $M(l)$ und eine nur von ε abhängige Zahl $\mu(\varepsilon, l)$ so, dass bei beliebig vorgeschriebenem $l \geqq 1 + \frac{k}{2}$

$$
\begin{aligned}
|\Phi^*(x, t)| &\leqq M t^l \quad &&\text{in} \quad -\pi \leqq x \leqq \pi\,, \quad 0 \leqq t \leqq T \\
|\Phi_0(x, t)| &\leqq \mu(\varepsilon)\, t^l \quad &&\text{in} \quad 0 < \varepsilon \leqq |x| \leqq \pi\,, \quad 0 \leqq t \leqq T\,.
\end{aligned}
$$

Diese Ergebnisse bleiben auch richtig, wenn in den Funktionen statt x die komplexe Zahl $z = x + iy$ auftritt, falls $|y| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ und der Realteil x bezw. den obigen Gebieten angehört. Denn man braucht nur zu bemerken, dass

$$\left| e^{-\frac{(z-2n\pi)^2}{t}} \right| = e^{-\frac{(x-2n\pi)^2 - y^2}{t}}$$

und dass dann die Beziehungen gelten

$$
\begin{aligned}
&\min_{n \neq 0} \left[\left(\frac{x}{n} - 2\pi \right)^2 - \frac{y^2}{n^2} \right] = \pi^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} \quad &&\text{für} \quad -\pi \leqq x \leqq \pi\,, \ |y| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \\
&\min\,(x^2 - y^2) = \frac{3}{4}\varepsilon^2 \quad &&\text{für} \quad 0 < \varepsilon \leqq |x| \leqq \pi\,, \ |y| \leqq \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Das erste Minimum wird erreicht für $|x| = \pi$, $n = \pm 1$.

Wir betrachten insbesondere die nach Aussage 1 absolut konvergierende Reihe

$$F^*(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^n (x - 2n\pi)\, e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{t}}\,. \tag{2.2}$$

Wenn $a_n(x, t)$ das n-te Glied ist ($n \geqq 1$), so wird

$$
\begin{aligned}
a_n + a_{-n} = x&\left(e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{t}} + e^{-\frac{(x+2n\pi)^2}{t}} \right) \\
&+ 2n\pi \left(e^{-\frac{(x+2n\pi)^2}{t}} - e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{t}} \right).
\end{aligned}
$$

Ferner gibt es ein C so, dass

$$|e^{-x} - 1| < |x|\, C \quad \text{in} \quad -\pi \leqq x \leqq +\pi\,,$$

dass also

$$
\begin{aligned}
\left| e^{-\frac{(x+2n\pi)^2}{t}} - e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{t}} \right| &= e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{t}} \left| e^{-\frac{8n\pi x}{t}} - 1 \right| \\
&\leqq \frac{8n\pi|x|}{t}\, C \,.\, e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{t}}\,.
\end{aligned}
$$

So findet man, dass $F^*(x, t)$ absolut kleiner ist als das Produkt von $|x|$ und einer Summe von Funktionen, auf die Aussage 2 angewendet werden kann. Hier gibt es also ein solches M, dass z. B.

$$|F^*(x, t)| < M|x|t^2 \quad \text{in} \quad -\pi \leqq x \leqq \pi\,, \quad 0 \leqq t \leqq T\,. \tag{2.3}$$

§ 3.

Transformation mit Hilfe der ϑ-Funktionen.

Im Folgenden werden wir auf die Reihe stossen

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{1}^{\infty} e^{-n^2 t}\,.\cos nx\right)\,, \tag{3.1}$$

$$(t > 0\,, \quad -\pi \leqq x \leqq +\pi)\,.$$

Sie eignet sich in dieser Form nicht zur Untersuchung ihres Verhaltens für $t \to +0$. Aus der Theorie der elliptischen ϑ-Funktionen sind jedoch Transformationsformeln bekannt, die es ermöglichen, eine für diesen Grenzübergang günstige Form von Φ herzustellen[1].

Setzt man

$$\vartheta_3(\nu\,|\,\tau) = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2}\,.\cos 2n\pi\nu = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\tau n^2}\,.\,e^{i2n\pi\nu}\,, \tag{3.2}$$

so gilt auch die Formel

$$\vartheta_3(\nu\,|\,\tau) = +\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,.\,e^{-\frac{i\pi\nu^2}{\tau}}\,.\,\vartheta_3\left(\frac{\nu}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)\,. \tag{3.3}$$

Wenn

$$x = 2\pi\nu\,, \quad t = -i\pi\tau\,, \qquad \text{so gilt} \qquad \Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi}\vartheta_3(\nu\,|\,\tau)\,.$$

Wählt man für $\vartheta_3\left(\frac{\nu}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)$ die erste Reihe in (3.2), so liefert (3.3) wegen

$$\frac{\nu}{\tau} = \frac{ix}{2t} \qquad -\frac{1}{\tau} = \frac{i\pi}{t}$$

---

[1] Die hier gewählten Bezeichnungen stimmen überein mit denen von Halphen in seinem *Traité des fonctions elliptiques* (1886). Wegen der Formeln (3.3) und (3.8) sei auf den ersten Teil dieses Werkes verwiesen, S. 252 und 264.

die wichtige Beziehung

$$\mathcal{O}(x,\, t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{4t}} \,. \tag{3.4}$$

Wir werden auch die folgende Reihe zu betrachten haben für $t > 0$.

$$\frac{e^{t/4}\,.\,\sqrt{\pi}}{2t^{3/2}} F(z,\, t) = \sum_{0}^{\infty} 2\,(n + {}^1\!/_2)\,\sin\,(n + {}^1\!/_2)\,z\,.\,e^{-n(n+1)t}$$

$$= -\frac{d}{dz}\left[2\sum_{0}^{\infty}\cos\,(n + {}^1\!/_2)\,z\,.\,e^{-n(n+1)t}\right]. \tag{3.5}$$

Da

$$2\sum_{0}^{\infty} e^{-n(n+1)t}\cos\,(n + {}^1\!/_2)\,z = 2e^{t/4}\,\Sigma\, e^{-(n+1/2)^2 t}\,.\cos\,(n + {}^1\!/_2)\,z$$

und

$$\vartheta_2(\nu\,|\,\tau) = 2\sum_{0}^{\infty} e^{i\pi\tau(n+1/2)^2}\,.\cos\,(n + {}^1\!/_2)\,2\pi\nu \;,$$

ist

$$\frac{\sqrt{\pi}\,F(z,\, t)}{2t^{3/2}} = -\frac{d}{dz}\,\vartheta_2\left(\frac{z}{2\pi}\,\middle|\, -\frac{t}{i\pi}\right). \tag{3.6}$$

Man erkennt nachträglich die Berechtigung der oben ausgeführten gliedweisen Derivation, da die ϑ-Reihen gleichmässig konvergieren für $|e^{i\pi\tau}| = e^{-t} < 1$, was hier verwirklicht ist.

Setzt man noch

$$\vartheta_0(\nu_1\,|\,\tau_1) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n\,.\,e^{i\pi\tau_1 n^2}\,.\,e^{2i\pi\nu_1 . n} \;, \tag{3.7}$$

so gilt ähnlich wie oben

$$\vartheta_2(\nu\,|\,\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\,.\,e^{-\frac{i\pi\nu^2}{\tau}}\,\vartheta_0\left(\frac{\nu}{\tau}\,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right). \tag{3.8}$$

Wegen

$$\tau = -\frac{t}{i\pi} \quad \text{ist} \quad i\pi\nu_1 \doteq i\pi\frac{\nu}{\tau} = \frac{z\pi}{2t}\,, \quad i\pi\tau_1 = -\frac{i\pi}{\tau} = \frac{-\pi^2}{t}\,.$$

Man verwerte diese Beziehungen in (3.7) und setze das Ergebnis in (3.8) ein. Alsdann errechnet man leicht, dass

$$\vartheta_2\left(\frac{z}{2\pi}\,\middle|\,\frac{-t}{i\pi}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\,.\,e^{-\frac{(z-2n\pi)^2}{4t}}\,.$$

Die rechte Seite und ihre gliedweise gebildete Derivierte konvergieren gleichmässig nach Aussage 1. Es folgt aus (3.6)

$$F(z, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n (z - 2n\pi) \cdot e^{-\frac{(z-2n\pi)^2}{4t}} . \qquad (3.9)$$

Wir schliessen mit zwei später nützlichen Bemerkungen: Wie man in der Theorie der ϑ-Funktionen zeigt, nimmt die Funktion $\vartheta_2\left(\frac{z}{2\pi}\middle|\tau\right)$ ab im Intervall $0 \leqq z \leqq \pi$, wenn, wie im vorliegenden Fall, $i\tau$ reell ist [1]. Diese Tatsache ergibt mit (3.6), dass $F(z, t)$ nicht negativ ist in $0 \leqq z \leqq \pi$.

Da $\sin(n + \frac{1}{2})(2\pi - z) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)z$, ist nach (3.5) auch

$$F(z, t) = F(z - 2\pi, t) = F(2\pi - z, t) . \qquad (3.10)$$

§ 4.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

In (1.1) gilt $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Wir brauchen nur die Beschränktkeit dieser Koeffizienten.

Die Reihen der u_n und ihrer Derivierten konvergieren absolut und gleichmässig in $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$, $0 \leqq T \leqq t < \infty$. Denn es gilt nach (2.1)

$$\left|\frac{\partial^{i+k}}{\partial\varphi^i \partial t^k} u_n(\varphi, t)\right| \leqq n^{i+2k}(|a_n| + |b_n|) \cdot e^{-n^2 t} \leqq \frac{Mn^{i+2k}}{(n^2 t)^{k+i+1}} \leqq \frac{M'}{T^{k+i+1} \cdot n^2} .$$

Da u_n die Wärmeleitungsgleichung erfüllt, können wir also sagen:

Satz I: *Für $t > 0$ ist $u(\varphi, t)$ eine stetige, beliebig oft differenzierbare Lösung der Wärmeleitungsgleichung.*

Führt man in (1.3) die Werte der Koeffizienten ein, so findet man leicht, dass

$$u(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\psi) \left[1 + 2\sum_{1}^{\infty} \cos n(\varphi - \psi) \cdot e^{-n^2 t}\right] d\psi ; \qquad (4.1)$$

[1] Halphen, a.a.O., p. 286.

denn die Reihe in der Klammer konvergiert gleichmässig in Bezug auf ψ für $t > 0$. In Anbetracht der Gleichungen (3.1) und (3.4) wird

$$u(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\psi)\,d\psi \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\varphi-\psi-2n\pi)^2}{4t}} = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(\psi)\,\mathfrak{D}(\varphi-\psi, t)\,d\psi \; [1] \tag{4.2}$$

und wegen (4.1) insbesondere

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \mathfrak{D}(\varphi-\psi, t)\,d\psi = 1 \,. \tag{4.3}$$

Den Ausdruck $\mathfrak{D}$ nennen wir Diskontinuitätsfaktor. Wir zerlegen ihn so, dass

$$\mathfrak{D}(x, t) = \mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}^* \quad \text{mit} \quad \mathfrak{D}_0(x, t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{4.4}$$

und erkennen mit Aussage 2:

Aussage 3. Gleichmässig in Bezug auf x gilt

$$\lim_{t \to +0} \mathfrak{D}^*(x, t) = 0 \quad \text{in} \quad -\pi \leqq x \leqq \pi$$

und bei festem $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to +0} \mathfrak{D}_0(x, t) = 0 \quad \text{in} \quad \varepsilon \leqq |x| \leqq \pi \,.$$

§ 5.

Abhängigkeit des Grenzverhaltens nur von der Umgebung. Annäherung an einen Stetigkeitspunkt.

Den Punkt auf dem Zylinder bezeichnen wir mit p, den Punkt $(\varphi, 0)$ auf dem Grundkreis mit P, den Grenzpunkt $(\varphi_0, 0)$ mit P_0.

---

[1] Man könnte auch

$$u(\;, t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\psi) e^{\frac{-(\varphi-\psi)^2}{4t}} d\psi$$

setzen. Obschon die folgenden Betrachtungen dadurch leicht vereinfacht würden, bleiben wir bei der Form (4.2), um ähnlich vorzugehen, wie im zweiten Teil. Die Darstellung durch ein Randintegral (4.2) ist das Analogon des Poisson'schen Integrals für Potentialfunktionen. Wir nennen (4.2) das Weierstrass'sche Integral (Vergl. § 5).

Aussage 4. Die nachstehenden Beziehungen gelten gleichmässig in Bezug auf φ:

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\pi}^{\varphi+\pi} f(\psi)\,\mathcal{O}^*(\varphi-\psi,\,t)\,d\psi = 0 \qquad \lim_{t\to+0}\int_{\varepsilon\leqq|\varphi-\psi|\leqq\pi} f\cdot\mathcal{O}_0\cdot d\psi = 0$$

Diese Beziehungen folgen unmittelbar aus Aussage 3. Man sieht auch, dass die erste noch besteht, wenn sich das Integral nicht über den ganzen Kreis erstreckt, sondern über eine beliebige, mit t veränderliche messbare Teilmenge des Kreises. Die zweite gilt auch für solche Mengen, falls für genügend kleines t der Abstand der Menge vom Punkt φ grösser als ε bleibt. — Mit Rücksicht auf (4.4) lässt sich das Ergebnis so darstellen:

$$\lim_{t\to+0}\left[u(\varphi,\,t)-\int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} f(\psi)\,\mathcal{O}_0(\varphi-\psi,\,t)\,d\psi\right]=0 \tag{5 1}$$

gleichmässig in $-\pi\leqq\varphi\leqq\pi$. Z. B. ist wegen (4.3)

$$\lim_{t\to+0}\int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon}\mathcal{O}_0(\varphi-\psi,\,t)\,d\psi = 1\,. \tag{5.2}$$

Satz II: *Strebt p irgendwie gegen einen Punkt P_0, so ist das Verhalten von $u(p)$ dabei nur von den Werten in der Umgebung der Grenzstelle abhängig.*

In der Tat wird schliesslich

$$\varphi-\frac{\varepsilon}{2}>\varphi_0-\varepsilon,\ \varphi+\frac{\varepsilon}{2}<\varphi_0+\varepsilon,$$

weshalb gleichmässig in φ_0

$$\lim_{p\to P_0}\left[u(p)-\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} f\,\mathcal{O}_0\,.\,d\psi\right]=0 \tag{5.3}$$

$$\lim_{p\to P_0}\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0-\varepsilon}\mathcal{O}_0(\varphi-\psi,\,t)\,d\psi = 1\,. \tag{5.4}$$

Diese Formel sagt mehr als Satz II behauptet.

Satz III[1] : *Ist φ_0 ein Stetigkeitspunkt der Funktion f, so strebt $u(p)$ gegen $f(\varphi_0)$, wenn $p \to P_0$, und zwar gleichmässig in einem abgeschlossenen Intervall, in dem $f(\varphi_0)$ stetig ist* [2].

Wir stützen den Beweis auf die Beziehung (5.3). Wenn in $(\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon)$ f eine untere und obere Grenze $m(\varepsilon, \varphi_0)$, $M(\varepsilon, \varphi_0)$ besitzt, so sagt der erste Mittelwertsatz, dass

$$m \int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \mathcal{O}_0 \, . \, d\psi \leq \int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} f \, . \, \mathcal{O}_0 \, d\psi \leq M \int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \mathcal{O}_0 \, . \, d\psi \, . \; .$$

(5.4) sagt also, dass

$$m(\varepsilon, \varphi_0) \leq \underline{\lim}_{p \to P_0} u(p) \leq \overline{\lim}_{p \to P_0} u(p) \leq M(\varepsilon, \varphi_0) \, .$$

Bei passender Wahl von ε kommen die äusseren Glieder dieser Ungleichungen dem Werte $f(\varphi_0)$ beliebig nahe. — Die Gleichmässigkeit ist eine Folge der gleichmässigen Gültigkeit der angewendeten Formeln und der Gleichmässigkeit der Stetigkeit.

Ist $\lim\limits_{\varphi \to \varphi_0} f(\varphi) = \infty$, so wird auch $u(p) \to \infty$ für $p \to P_0$.

§ 6.

Grenzwert bei Existenz des Mittelwertes.

Wir setzen

$$\frac{1}{2x} \int_{\varphi-x}^{\varphi+x} f(\psi) \, d\psi = f_1(\varphi \, . \, x)$$

und behaupten:

Satz IV: *Existiert an der Stelle φ der Mittelwert*

$$\lim_{x=0} f_1(\varphi, x) = f_1(\varphi) \, ,$$

so gilt

$$\lim_{t \to +0} u(\varphi, t) = f_1(\varphi) \, .$$

---

[1] Dieser Satz wurde erstmals von Weierstrass bewiesen (verg. § 1).

[2] In den Endpunkten soll f beidseitig stetig sein.

Wegen (4.4) wird der Subtrahend in (5.1) durch eine partielle Integration zu

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^\varepsilon e^{-\frac{x^2}{4t}}[f(\varphi+x)+f(\varphi-x)]\,dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(\varphi+\xi)\,d\xi - \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^\varepsilon\left[\frac{\int_{-x}^{+x} f(\varphi+\xi)\,d\xi}{2x}\right].2x.d\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

Das erste Glied zur Rechten strebt mit t gegen 0. Wir stellen fest, dass auf das zweite der erste Mittelwertsatz angewendet werden darf, wenn $f_1(\varphi, x)$ in $|x| \leqq \varepsilon$ eine untere und obere Grenze $m(\varepsilon, \varphi)$, $M(\varepsilon, \varphi)$ besitzt, und finden so, dass das zweite Glied grösser bezw. kleiner ist als das Produkt von m bezw. M und

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} - x\,.\,d\left(e^{-\frac{x^2}{4t}}\right).$$

Eine partielle Integration zeigt wegen (5.2), dass dieser Ausdruck gegen 1 strebt, wenn $t \to +0$. Wie bei Satz III folgt hieraus die Behauptung.

$f_1(\varphi)$ existiert bei integrablen Funktionen fast überall [1] und ist fast überall gleich $f(\varphi)$. Insbesondere existiert $f_1(\varphi)$ in jedem Punkt, in dem das unbestimmte Integral von f eine Ableitung besitzt [2].

Zusatz IV *a*: *$u(\varphi, t)$ strebt fast überall gegen $f(\varphi)$ für $t \to +0$.*

§ 7.

Annäherung an Sprungstellen.

Wie gezeigt, hängt das Grenzverhalten von u nur von den Werten in der Umgebung der Grenzstelle ab (Satz II). Um die Annäherung an Unstetigkeitsstellen erster Art von f zu untersuchen, genügt es also, eine bestimmte Funktion f mit einem Sprung zu betrachten.

---

[1] D. h. höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Masse 0.
[2] Siehe De la Vallée-Poussin: *Intégrales de Lebesgue*, p. 72.

Wir setzen

$$f(\psi) = -1 \quad \text{in} \quad -\pi < \psi < 0$$
$$f(\psi) = +1 \quad \text{in} \quad 0 < \psi < \pi$$
$$f(0) = f(\pi) = 0$$

und untersuchen das Verhalten des zugehörigen Weierstrass'schen Integrals für $(\varphi, t) \to (0, +0) = P_0$.

Schliesslich ist $\varphi - \varepsilon < 0$ und $\varphi + \varepsilon > 0$. Setzt man $\frac{\varphi - \psi}{2\sqrt{t}} = x$, so wird also der Subtrahend in (5.1) zu

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\left[\int_{\varphi-\varepsilon}^{0} - e^{-\frac{(\varphi-\psi)^2}{4t}} . d\psi + \int_{0}^{\varphi+\varepsilon} e^{-\frac{(\varphi-\psi)^2}{4t}} d\psi\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-\int_{+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}}^{-\varphi/2\sqrt{t}} e^{-x^2} dx + \int_{-\varphi/2\sqrt{t}}^{\varepsilon/2\sqrt{t}} e^{-x^2} dx\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\varphi/2\sqrt{t}} e^{-x^2} dx .$$

Darum gilt

$$\lim_{p \to P_0}\left[u(\varphi, t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\varphi/2\sqrt{t}} e^{-x^2} . dx\right] = 0 ,$$

und u hat zugleich mit $\frac{\varphi}{2\sqrt{t}}$ einen Grenzwert.

Nähert sich z. B. p auf dem Grundkreis durch positive φ-Werte an P_0, so ist $u(\varphi, t) \to +1$. Wenn dies durch negative φ-Werte geschieht, so ist $u(\varphi, t) \to -1$. Und das arithmetische Mittel 0 erhält man solange $\frac{\varphi}{2\sqrt{t}} \to 0$. Dies bedeutet Annäherung nicht so stark berührend wie die Parabeln $\frac{\varphi^2}{t} = \text{const.} > 0$ der (φ, t)-Ebene [1].

§ 8.

INTEGRALSÄTZE.

Die mit 2π periodischen Funktionen v, welche der Differentialgleichung

$$D^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

[1] Ueber dieses Ergebnis vergl. H. WEYL: «Ueber die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene». *Rendiconti di Palermo* 30, S. 399.

genügen, können aufgefasst werden als Temperaturfunktionen in einem geschlossenen dünnen Draht von der Länge 2π und konstanter Wärmekapazität 1. $v d\varphi$ ist die Wärmemenge auf dem Bogenelement von der Länge $d\varphi$. Die Funktion v genügt dem

ENERGIESATZ (V):

$$\int_0^{2\pi} v(\varphi, t)\, d\varphi = \text{const.}$$

Zum Beweis zeigen wir, dass die Derivierte nach t verschwindet:

$$\int_0^{2} \frac{\partial v}{\partial t} d\varphi = \int_0^{2\pi} D^2 v \,.\, d\varphi = [Dv]_0^{2\pi} = 0\,,$$

weil v und seine Ableitungen die Periode 2π haben in Bezug auf φ. Die ausgeführte Derivation und die Benützung der Wärmeleitungsgleichung sind nur zulässig für $t > 0$. Um den Wert der Konstante zu bestimmen im Falle $v(\varphi, t) = u(\varphi, t)$, setzen wir in der gleichmässig für $t \geqq t_1 > 0$ geltenden Formel (4.1) $t = \infty$ und sehen, dass

$$\int_0^{2\pi} u(\varphi, t)\, d\varphi = 2\pi u(\varphi, \infty) = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi\,.$$

Wir werden im folgenden Paragraphen sehen, dass jede Funktion v eine Funktion u ist.

Für das Folgende bedürfen wir eines Hilfssatzes, wegen dessen Beweis auf die schon genannte Dissertation von Strässle (S. 13) verwiesen sei. Die Uebertragung vom dortigen Fall auf den vorliegenden ist selbstverständlich.

HILFSSATZ: *Zwischen irgend einer integrierbaren Funktion $v(\varphi, t)$ auf dem Zylinder und einer integrierbaren Funktion auf dem Grundkreis sollen die Beziehungen gelten :*

1) $$v(\varphi, t) \to f(\varphi) \qquad \text{fast überall für } t \to +0$$

2) $$\int_0^{2\pi} |v|\, d\psi \to \int_0^{2\pi} |f(\psi)|\, d\psi \qquad \text{für } t \to +0$$

Dann folgt

$$\int_0^{2\pi} |v - f|\, d\psi \to 0 \qquad \text{für } t \to +0$$

Mit dieser Hilfe beweisen wir nun den

SATZ VI: *Die Funktion* $u(\varphi, t)$ [(4.2)] *genügt den Beziehungen*

$$\int_0^{2\pi} |u|\, d\varphi \rightarrow \int_0^{2\pi} |f|\, d\varphi$$

und

$$\int_0^{2\pi} |u - f|\, d\varphi \rightarrow 0$$

wenn $t \rightarrow +0$.

Beweis: Da der Diskontinuitätsfaktor positiv ist, wird u nirgends negativ sein, wenn f es auch nirgends ist. Für diesen Fall ist die erste Behauptung richtig nach Satz V, die zweite also nach dem Hilfssatz. Im allgemeinen Fall erklären wir zwei Funktionen f_1 und f_2 wie folgt:

$$f_1 = \begin{cases} f & \text{dort wo} \quad f \geqq 0 \\ 0 & \text{dort wo} \quad f < 0 \end{cases} \qquad f_2 = \begin{cases} 0 & \text{dort wo} \quad f \geqq 0 \\ f & \text{dort wo} \quad f < 0 \,. \end{cases}$$

f_1 und $-f_2$ sind nirgends negativ und es gilt stets $f_1 + f_2 = f$. Nun betrachten wir

$$u_i = \int_0^{2\pi} f_i \cdot \mathcal{D} \cdot d\psi \qquad (i = 1, 2)$$

Dann gilt $u_1 + u_2 = u$. Die Funktionen u_i und f_i haben die behaupteten Beziehungen:

$$\int_0^{2\pi} |u_i|\, d\varphi = \int_0^{2\pi} |f_i|\, d\varphi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} |u_i - f_i|\, d\varphi \rightarrow 0 \qquad \text{für} \quad t \rightarrow +0\,.$$

Die Behauptung fliesst hieraus und aus den folgenden Ungleichungen:

$$\left| \int_0^{2\pi} (|u| - |f|)\, d\varphi \right| \leqq \int_0^{2\pi} \big|\, |u| - |f| \,\big|\, d\varphi \leqq \int_0^{2\pi} |u - f|\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} |(u_1 - f_1) + (u_2 - f_2)|\, d\varphi \leqq \int_0^{2\pi} |u_1 - f_1|\, d\varphi + \int_0^{2\pi} |u_2 - f_2|\, d\varphi\,.$$

§ 9.

Eindeutigkeitssätze.

Spezieller Eindeutigkeitssatz (VII a)[1]: *Auf dem Einheitskreis sei $f(\psi)$ eine überall stetige Funktion mit überall stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Dann gibt es eine und nur eine Funktion von folgenden Eigenschaften:*

1) *In jedem Punkt p sind stetig:*

$$v\,, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi}\,.$$

2) *In jedem solchen Punkt ist*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial v}{\partial t}\,.$$

3) *Bei Annäherung auf der Mantellinie des Zylinders gilt für jedes φ*

$$v(\varphi, t) \rightarrow f(\varphi)\,. \qquad \text{für} \quad t \rightarrow +0$$

Beweis: Die Stetigkeitsvoraussetzungen rechtfertigen die folgenden Umformungen. Nach den bisherigen Ergebnissen besitzt u alle diese Eigenschaften (§§ 4 und 5). Aus der Annahme der Existenz einer zweiten Funktion mit diesen Eigenschaften folgt, dass $w = u - v$ die Bedingungen 1) und 2) erfüllt und dass zudem $w \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +0$, gleichmässig in φ.

Wegen der Identität

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[w\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right] = \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 + w\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$$

und 2) hat man die Beziehung

$$0 = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} w^2 d\varphi\,,$$

[1] Riemann-Weber, a.a.O. II, S. 86.

der man entnimmt, dass für $t \geqq t_1 > 0$

$$\int_0^{2\pi} w^2(\varphi, t)\, d\varphi \leqq \int_0^{2\pi} w^2(\varphi, t_1)\, d\varphi \,.$$

Da die rechte Seite mit t_1 nach 0 strebt, während die linke von t_1 unabhängig ist, muss $w(\varphi, t) \equiv 0$ sein.

Allgemeiner Eindeutigkeitssatz (VII *b*)[1]: *Auf dem Einheitskreis sei $f(\psi)$ integrabel nach Lebesgue. Dann gibt es eine und nur eine Funktion $v(\varphi, t)$ mit den Eigenschaften:*

1′)
$$v\,, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi}\,,$$
sind stetig für $t > 0$.

2′) *Dort gilt*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial v}{\partial t}\,.$$

3′) *Bei Annäherung auf der Mantellinie an den Grundkreis strebt $v(\varphi, t)$ fast überall gegen $f(\varphi)$.*

4′)
$$\int_0^{2\pi} |v|\, d\psi \longrightarrow \int_0^{2\pi} |f|\, d\psi \qquad \text{für} \quad t \longrightarrow +0\,.$$

Die Funktion u erfüllt alle Bedingungen (§ 4, Satz VI, Zusatz IV *a*). Es bleibt die Einzigkeit zu zeigen. v sei eine zweite Funktion mit den verlangten Eigenschaften. Im Zylinder $t \geqq t_1 > 0$ erfüllen u und v die Bedingungen des speziellen Eindeutigkeitssatzes. Darum kann man sie für $t > t_1$ darstellen durch

$$u(\varphi, t) = \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} u(\psi, t_1)\, \mathcal{O}(\varphi - \psi, t - t_1)\, d\psi$$

$$v(\varphi, t) = \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} v(\psi, t_1)\, \mathcal{O}(\varphi - \psi, t - t_1)\, d\psi \,.$$

---

[1] Dieses Theorem ist die Uebertragung auf Wärmeleitungsfunktionen eines Satzes von Herrn Prof. Dr. Plancherel über Potentialfunktionen im Einheitskreis. Vergl. M. Plancherel, Remarques sur l'intégration de l'équation $\Delta u = 0$. *Bulletin des Sc. math.* (2) 34 (1910), pp. 111-114.

Hieraus folgt

$$u(\varphi, t) - v(\varphi, t) = \int_{\varphi-}^{\varphi+\pi} [u(\psi, t_1) - v(\psi, t_1)]\, \mathfrak{W}(\varphi - \psi, t - t_1)\, d\psi\ .$$

Ist z. B. $t_1 \leqq \frac{t}{2}$, so wird $\frac{t}{2} \leqq t - t_1 < t$. Nach Aussage 1 gibt es also eine Zahl $M(t)$ derart, dass

$$|\mathfrak{W}(\varphi - \psi, t - t_1)| \leqq M(t) \quad \text{in} \quad 0 \leqq t_1 \leqq \frac{t}{2},\ |\varphi - \psi| \leqq \pi\ .$$

Man ermittelt, dass

$$|u - v|_t \leqq M(t) \left[\int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} |u - f|_{t_1}\, d\psi + \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} |v - f|_{t_1}\, d\psi \right] .$$

Die linke Seite ist unabhängig von t_1. Die rechte strebt mit t_1 nach 0 (Satz VI); also ist $u(\varphi, t) = v(\varphi, t)$.

Zu diesem Theorem, zu Zusatz V*a* und Satz VI haben wir das

Korrollar: *Für die Darstellbarkeit einer den Bedingungen* 1′) *und* 2′) *genügenden Funktion durch das Weierstrass'sche Integral ist das Bestehen der Bedingungen* 3′) *und* 4′) *notwendig und hinreichend.*

Die verschiedenen Funktionen $v_1 = 0$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\varphi^2}{4t}}$ besitzen die Eigenschaften 1′) 2′) 3′) mit $f(\varphi) = 0$. Nach (5.2) erfüllt v_2 die Bedingung 4′) nicht. Dieses Beispiel lehrt die Notwendigkeit von 4′) im Korrollar.

§ 10.

Temperaturausgleich.

Ungenau gesagt, sind die drei folgenden Sätze Ausdrücke für die ausgleichende Wirkung der Wärmeleitung.

Auf die Funktion

$$u(\varphi, t) = \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} f \cdot \mathfrak{W} \cdot d\psi$$

können wir den ersten Mittelwertsatz anwenden, falls f eine obere und untere Grenze m, M besitzt. Wegen (4.3) führt dies für jedes t zu

$$m \leqq u(\varphi, t) \leqq M .$$

Das erste Gleichheitszeichen wird nur erreicht, wenn fast überall $f(\psi) = m$, das zweite, wenn fast überall $f(\psi) = M$. Wir wenden diesen Schluss an auf eine verschobene Anfangszeit $t_1 > 0$. Für sie sind die Anfangswerte stetig. Sehen wir ab von fast überall konstanten Funktionen f, so gilt also:

Maximumssatz (VIII): *Die obere Grenze (für $t > 0$ das Maximum) der Temperatur nimmt ab und die untere (das Minimum) zu mit wachsender Zeit* [1].

Satz IX: *Die mittlere Abweichung $\bar{A}(t)$ der Temperatur von ihrem (nach Satz V) konstanten Mittel c ist eine abnehmende Funktion von t für $t > 0$.*

Beweis: Differenziert man unter dem Zeichen, so ergibt sich wegen (1.4) durch eine partielle Integration, da u periodisch ist:

$$2\pi \frac{d}{dt} \bar{A}^2(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} (u - c)^2 \, d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} (u - c)\, u'' \, d\varphi = -2 \int_0^{2\pi} u'^2 \, d\varphi \leqq 0 .$$

Zur festen Zeit t tragen wir vom Grundkreis aus auf der Mantellinie des Zylinders ein Stück $u(\varphi, t)$ ab. Wir erhalten so das Momentandiagramm von u.

Satz X: *Die Länge*

$$L(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + u'^2}\, d\psi$$

des Momentandiagramms ist eine abnehmende Funktion von t für $t > 0$.

Nach Satz I darf man differenzieren. Es ist

$$\frac{dL}{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{u' \frac{\partial}{\partial t} u' \, . \, d\psi}{(1 + u'^2)^{1/2}} = \int_0^{2\pi} \frac{u' \, . \, u''' d\psi}{(1 + u'^2)^{1/2}} ,$$

[1] Wir dürfen hier sagen « Temperatur » und nicht nur « Weierstrass'sches Integral », wegen der Eindeutigkeitssätze.

wegen

$$\frac{\partial}{\partial t} u' = \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3}.$$

Nun hat man

$$(u'u'')' = u''^2 + u'u'''$$

also

$$\frac{dL}{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{(u'u'')'d\psi}{(1+u'^2)^{1/2}} - \int_0^{2\pi} \frac{u''^2 d\psi}{(1+u'^2)^{1/2}}.$$

Für das erste Integral ergibt eine partielle Integration den Wert

$$\left[\frac{u'u''}{(1+u'^2)^{1/2}}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{u'^2 u''^2 d\psi}{(1+u'^2)^{3/2}}.$$

Die Klammer ist 0 wegen der Periodizität von u. Führt man den neuen Wert oben ein, so erscheint

$$\frac{dL}{dt} = -\int_0^{2} \frac{u''^2 d\psi}{(1+u'^2)^{3/2}} \leqq 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

Bemerkung: Mit Rücksicht auf die Periodizität von u sieht man, dass $\frac{dA}{dt}$ und $\frac{dL}{dt}$ nur verschwinden, wenn u zu fester Zeit t_1 konstant ist. Nach Satz VII ist u dann auch inbezug auf t konstant für $t \geqq t_1$. Fordern wir die Analytizität von u in $0, t_1$, so ist u überhaupt konstant. Eine Frage drängt sich auf, die physikalisch gefasst etwa lautet: Wenn eine Temperaturverteilung $f(\psi)$ auf dem Einheitskreis gegeben ist, gibt es dann eine frühere Temperaturverteilung, die zur Verteilung f führt? Die Behandlung dieser Frage gehört jedoch nicht in den Rahmen unserer Erörterungen [1].

[1] Vergl. Heft über Wärmeleitung in der Encyclopädie d. Math. Wiss., Bd. V. 1. Teil, 4. insbes. S. 175.

KAPITEL II.

DIFFERENTIALSAETZE

§ 11.

VORBEREITENDE BEMERKUNGEN.

1. Hat man für eine Funktion $f(\psi) = f(\varphi + x)$ bei geradem k eine Darstellung

$$\frac{f(\varphi + x) + f(\varphi - x)}{2} = a_0 + a_2 \cdot \frac{x^2}{2\,!} + \dots + \left(\frac{a_k}{k\,!} + \Omega(x)\right) x^k \qquad (11.1)$$

mit der Eigenschaft $\Omega(x) \to 0$ für $x \to 0$, so nennt man die a_{2i} die verallgemeinerten Ableitungen der Ordnung $2i$ der Funktion f an der Stelle φ.

Wenn sich bei ungeradem k Konstanten a_1, a_3 .... a_k und ein $\Omega(x)$ so finden lassen, dass

$$\frac{f(\varphi + x) - f(\varphi - x)}{2} = a_1 x + a_3 \frac{x^3}{3\,!} + \dots + \left(\frac{a_k}{k\,!} + \Omega(x)\right) x^k \qquad (11.2)$$

und $\Omega(x) \to 0$ für $x -\ 0$, so nennt man die a_{2i+1} die verallgemeinerten Ableitungen der Ordnungen $2i + 1$ an der Stelle φ.

Anderseits beweist man aus bekannten Sätzen: Wenn an der Stelle φ die k-te gewöhnliche Ableitung existiert, so existieren die k ersten verallgemeinerten Ableitungen und sind bezw. den gewöhnlichen gleich.

2. Wenn in der Umgebung des Punktes φ_0 die k ersten Ableitungen existieren, so gilt in dieser Umgebung die Taylor'sche Formel mit dem Rest von Lagrange. Wir entnehmen ihr:

Man setze bei geradem k

$$\frac{f(\varphi + x) + f(\varphi - x)}{2} = f(\varphi) + f''(\varphi)\,\frac{x^2}{2} + \dots + \left(\frac{f^k(\varphi)}{k\,!} + \Omega(x, \varphi)\right) x^k .$$

Ist $f^k(\varphi)$ in φ_0 stetig, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$|\Omega(x, \varphi)| < \eta \qquad \text{für} \qquad 0 \leqq x \leqq \varepsilon\,, \ |\varphi - \varphi_0| \leqq \varepsilon\,.$$

3. $p(x)$ sei ein Polynom zweiten Grades in x. Dann hat man der Form nach

$$D_x^k e^{-p(x)} = e^{-p(x)} \Sigma c_i \, p'(x)^{a_i} \, . \, p''(x)^{b_i} \tag{11.3}$$

$$\text{mit} \quad a_i + 2b_i = k$$

und mit Koeffizienten c_i, welche nur von k abhangen.

Für $k = 1$ ist beides richtig. Durch einen Induktionsschluss bestätigt man leicht die Allgemeingültigkeit. — Ist k ungerade, so ist es auch jedes a_i. Dann verschwindet (11.3) zugleich mit $p'(x)$.

Setzt man z. B. $p(x) = \frac{(x - 2n\pi)^2}{4t}$, so wird

$$p'(x) = \frac{x - 2n\pi}{2t} \qquad p''(x) = \frac{1}{2t} \, .$$

Es gilt also der Form nach

$$D_x^k \,\Theta(x, t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_x^k e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{4t}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, t^{k+1/2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{P}_k(n;\, x,\, t) \, . \, e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{4t}} \tag{11.4}$$

mit einer Reihe zur Rechten, welche durch die Aussagen 1 und 2 erfasst wird. Nach der Zerlegung (4.4) gelangt man zur

Aussage 5: Gleichmässig in Bezug auf x gilt

$$\lim_{t=+0} D_x^k \,\Theta^*(x, t) = 0 \qquad \text{in} \qquad -\pi \leqq x \leqq +\pi \, ,$$

$$\lim_{t=+0} D_x^k \,\Theta_0(x, t) = 0 \qquad \text{in} \qquad 0 < \varepsilon \leqq |x| \leqq \pi \, .$$

§ 12.

Abhängigkeit des Grenzverhaltens nur von der Umgebung. — Differentialsatz für Annäherung auf der Mantellinie.

Nach den Regeln über die Derivation unter dem Zeichen hat man

$$D_\varphi^k \, u(\varphi, t) = \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} f(\psi) \, D_\varphi^k \,\Theta(\varphi - \psi, t) \, d\psi \, .$$

Aus Aussage 5 fliesst unmittelbar die folgende:

Aussage 6. Es gelten gleichmässig in $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$ die Beziehungen

$$\lim_{t=+0} \int_{\varphi-\pi}^{\varphi+\pi} f \cdot D_\varphi^k \mathfrak{O}^* (\varphi - \psi, t)\, d\psi = 0$$

$$\lim_{t=+0} \int_{\varepsilon \leqq |\varphi-\psi| \leqq \pi} f \cdot D_\varphi^k \mathfrak{O}_0 (\varphi - \psi, t)\, d\psi = 0 \, .$$

Sie gelten noch, falls über solche allgemeinere Mengen integriert wird, wie sie in § 5 erklärt wurden. Wie dort schliesst man, dass gleichmässig mit φ bezw. φ_0

$$\lim_{t=+0} [D^k u(p) - \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} f(\psi)\, D_\varphi^k \mathfrak{O}_0 \cdot d\psi] = 0 \tag{12.1}$$

$$\lim_{p=P_0} [D^k u(p) - \int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} f(\psi)\, D_\varphi^k \mathfrak{O}_0 (\varphi - \psi, t)\, d\psi] = 0 \, . \tag{12.2}$$

SATZ XI: *Strebt p irgendwie gegen einen Punkt P_0 des Grundkreises, so ist das Verhalten von $D_\varphi^k u(\varphi, t)$ nur abhängig von den Werten, die f in der Umgebung von P_0 annimmt.*

SATZ XII: *Im Punkt φ_0 sollen die k ersten verallgemeinerten Ableitungen von $f(\varphi)$ existieren. Dann strebt bei Annäherung auf der Mantellinie von p an $P=P_0$, $D_\varphi^k u(p)$ gegen die k-te verallgemeinerte Ableitung von f an dieser Stelle* [1].

Nach § 11, 1. enthält dieser Satz den Fall der gewöhnlichen Ableitungen. Offenbar ist

$$D_\varphi^k e^{-\frac{(\varphi-\psi)^2}{4t}} = (-1)^k D_\psi^k e^{-\frac{(\varphi-\psi)^2}{4t}} \, .$$

Die Besonderheit des Ausdruckes ermöglicht also, in das Integral von (12.1) eine Derivierte nach der Integrationsvariabeln einzuführen, ein Umstand, der für das Gelingen des Beweis-

[1] Dieser Satz ist auch bei Hahn bewiesen (a.a.O.).

verfahrens ausschlaggebend ist. — Nach diesem Ersatz substituieren wir

$$\begin{array}{lll} \psi - \varphi = x & \text{in} & \varphi \leqq \psi \leqq \varphi + \varepsilon \\ \varphi - \psi = x & \text{in} & \varphi - \varepsilon \leqq \psi \leqq \varphi \end{array}$$

und rechnen nach, dass

$$\lim_{p=P_0} D_\varphi^k u(p)$$

$$= \lim (-1)^k \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^\varepsilon \frac{f(\varphi + x) + (-1)^k f(\varphi - x)}{2} D^k e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \,, \tag{12.3}$$

falls der rechtsstehende Limes existiert, und zwar gleichmässig in Bezug auf φ. Hier ist $P = P_0$. Wir nehmen an, k sei gerade und benützen die Darstellung (11.1). Um den ausgesprochenen Satz zu beweisen, wird es in Anbetracht der Erörterungen von § 11 genügen, die folgenden drei Beziehungen darzutun:

1. Bei festem $\varepsilon > 0$ und geradem $i < k$, gilt für $t \to +0$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\varepsilon x^i D^k e^{-\frac{x^2}{4t}} . dx \to 0 \,. \tag{12.4}$$

2. Bei festem $\varepsilon > 0$ gilt für $t \to +0$

$$\frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^\varepsilon x^k D^k e^{-\frac{x^2}{4t}} . dx \to 1 \,. \tag{12.5}$$

3. Man kann $\varepsilon > 0$ so klein wählen, dass der Ausdruck

$$\left| \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^\varepsilon x^k \Omega(x) D^k e^{-\frac{x^2}{4t}} . dx \right| \tag{12.6}$$

kleiner wird als ein vorgegebenes η, unabhängig von t.

Ad 1. Durch eine partielle Integration erscheint

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\varepsilon x^i D^k e^{-\frac{x^2}{4t}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \left[x^i D^{k-1} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right]_0^\varepsilon - \frac{i}{\sqrt{t}} \int_0^\varepsilon x^{i-1} D^{k-1} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \,.$$

Der Klammerausdruck verschwindet an der untern Grenze, wenn $i > 0$, welches auch $t > 0$ sei. Der Wert an der obern strebt mit t gegen 0, da $\varepsilon > 0$ fest ist (Aussage 5). Also kümmert uns nur noch das Integral zur Rechten. Wir wenden hier wieder partielle Integration an. Tun wir dies im Ganzen i mal, so ergibt sich

$$\lim_{t=+0} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\varepsilon x^i D^k dx = \lim_{t=+0} \frac{i!}{\sqrt{t}} \int_0^\varepsilon D^{k-i} dx = \lim_{t=+0} \frac{1}{\sqrt{t}} \left[D^{k-i-1} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right]_0^\varepsilon .$$

Diese Ableitung von ungerader Ordnung verschwindet an der untern Grenze (§ 11.3) und der Wert an der obern geht mit t gegen 0.

Ad 2. Verfährt man wie vorhin, so sieht man nach k partiellen Integrationen, dass

$$\lim_{t=+0} \frac{1}{k!\,\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^\varepsilon x^k D^k dx = \lim_{t=+0} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^\varepsilon D^0 dx = \lim_{t=+0} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = 1 ,$$

nach (5.2).

Ad 3. Da sich nach Voraussetzung ein solches $\varepsilon > 0$ finden lässt, dass $|\Omega(x)| < \eta$ für alle $|x| < \varepsilon$, so ist für dieses ε

$$\left| \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\varepsilon x^k \Omega(x) D_x^k dx \right| \leqq \eta \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\varepsilon x^k \left| D_x^k e^{-\frac{x^2}{4t}} \right| dx .$$

Man muss zeigen, dass der Faktor von η beschränkt ist für $0 \leqq t \leqq T$. $\mathrm{D}^k e^{-\frac{x^2}{4t}}$ zerfällt in endlichviele Summanden gemäss (11.3); es genügt die Beschränktheit zu ermitteln von

$$\left| \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\varepsilon \frac{x^{k+a_i}}{t^{a_i+b_i}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \right| \leqq \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty \frac{x^{2(a_i+b_i)}}{t^{a_i+b_i}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} dx .$$

Bis auf einen konstanten Faktor geht dies durch die Substitution $\frac{x}{2\sqrt{t}} = y$ über in

$$\int_0^\infty y^{2(a_i+b_i)} \cdot e^{-y^2} dy ,$$

ein Integral, das bekanntlich existiert.

Ist k ungerade, so verläuft der Beweis ganz entsprechend. Dann tritt

$$\frac{f(\varphi + x) - f(\varphi - x)}{2}$$

auf und man kann diesen Ausdruck darstellen mit ungeraden Potenzen x^i, wie in (11.2). Nach wie vor ist D^{k-i-1} eine Ableitung von ungerader Ordnung. Nirgends sonst kam der Geradheitscharakter von k in Frage.

ZUSATZ: *Ist f^{k-1} stetig in einer Umgebung des Punktes φ und $f^k(\varphi) = +\infty (-\infty)$, so strebt $D^k u(p)$ gegen $+\infty$ $(-\infty)$ bei Annäherung auf der Mantellinie.*

Aus (12.1) schliesst man

$$\lim_{t=+0} D^k u(\varphi, t) = \lim_{t=+0} (-1)^k \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(\varphi + x) D^k e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \,,$$

wenn der rechtsstehende Limes existiert. Eine partielle Integration liefert für die Funktion rechts den Wert

$$(-1)^k \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \left[f D^{k-1} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}$$
$$+ (-1)^{k+1} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f'(\varphi + x) D^{k-1} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \,.$$

Wie soeben strebt der Klammerausdruck mit t gegen 0. Wir dürfen so $k - 1$ mal partiell integrieren, wenn ε klein genug ist. Man sieht dann, dass

$$\lim_{t=+0} D^k u = \frac{-1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f^{k-1} D^1 e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \,.$$

Man kann schreiben

$$f^{k-1}(\varphi + x) = a_0 + \omega(x) \,.\, x$$

mit einem $\omega(x)$, das für $x \to 0$ gegen $\pm\infty$ geht, je nachdem ob $f^k(\varphi) = \pm\infty$. Der Teil, welcher a_0 entspricht, lässt sich integrieren. Er strebt gegen 0. Der übrige Teil ist

$$-\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \omega(x) \,.\, x D e^{-\frac{x^2}{4t}} dx$$

Man kann $\varepsilon > 0$ so festsetzen, dass $\omega(x) > M$ (bzw. $< -M$) im Intervall bei irgend einem gegebenen $M > 0$. Der erste Mittelwertsatz ist anwendbar, weil $-xDe^{-\frac{x^2}{4t}} \geqq 0$ und es gilt

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left|xDe^{-\frac{x^2}{4t}}\right|dx = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\left[x \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}\right]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}e^{-\frac{x^2}{4t}}dx\,.$$

Rechts geht der erste Teil mit t gegen 0, der zweite gegen 1 (5.2). Unter gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen folgt der Zusatz daraus.

§ 13.

Differentialsatz für nicht zu stark berührende Annäherung.

Bisher setzten wir voraus, dass φ konstant sei beim Grenzübergang $t \to +0$, dass sich also p auf der Mantellinie dem Grundkreis des Zylinders nähere. Nun betrachten wir allgemeinere Annäherungen. Der Punkt auf dem Zylinder $p \equiv (\varphi, t)$ nähere sich dem Randpunkt P_0.

Satz XIII: *Wenn die gewöhnliche Ableitung $f^k(\varphi_0)$ im Punkte φ_0 existiert, so gilt*

$$\lim_{p \to P_0} D^k u(p) = f^k(\varphi_0)\,,$$

wenn nur p gegen P strebt in dem Gebiet $\left|\frac{\varphi - \varphi_0}{\sqrt{t}}\right| \leqq C$, wo C irgend eine positive Konstante ist.

Diese Annahme besagt, dass man in der (φ, t)-Ebene eine solche Parabel finden kann, deren Scheitel in φ_0 die φ-Axe berührt, dass p von einem gewissen t an ihre konvexe Seite meidet.

Beweis: Wir nehmen wieder an k sei gerade und gehen aus von (12.3). Wenn $\varphi - \varphi_0 = \Delta$ gesetzt wird, hat man

$$f(\varphi + x) = f(\varphi_0 + \Delta + x)\,, \quad f(\varphi - x) = f(\varphi_0 + \Delta - x)\,.$$

Da

$$f(\varphi_0 + \xi) = f(\varphi_0) + \frac{f'(\varphi_0)\,\xi}{1\,!} + \cdots + \left[\frac{f^k(\varphi_0)}{k\,!} + \omega(\xi)\right]\xi^k$$

mit $\omega(\xi) \to 0$ für $\xi \to 0$, so findet man durch Addition

$$\frac{f(\varphi + x) + f(\varphi - x)}{2} = f(\varphi_0) + f'(\varphi_0)\,\Delta + \cdots$$
$$+ \frac{f^k(\varphi_0)}{k\,!}\,\frac{(\Delta + x)^l + (\Delta - x)^l}{2} + \omega(\Delta \pm x)\,(\Delta \pm x)^k\,.$$

In der binomischen Entwicklung von

$$(\Delta + x)^l + (\Delta - x)^l$$

treten nur gerade Potenzen von x auf. Benützen wir diese Darstellung in (12.3) und ordnen wir dann nach Potenzen von x, so stossen wir

1. auf Ausdrücke von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{\varepsilon} x^i\, D^k\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\, dx \qquad \text{mit geradem } i < k,$$

abgesehen von beschränkten Faktoren. Sie streben gegen 0 mit t (12.4).

2. auf genau den Ausdruck

$$\frac{f^k(\varphi_0)}{k\,!}\,\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^{\varepsilon} x^k\, D^k\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\, dx\,.$$

Sein Grenzwert ist $f^k(\varphi_0)$, wenn t gegen 0 geht (12.5).

3. und schliesslich auf die beiden Glieder

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^{\varepsilon} \omega(\Delta \pm x)\,(\Delta \pm x)^k\, D^k\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\, dx\,.$$

Wir zeigen, dass sie beliebig klein werden, wenn ε klein genug festgesetzt wird und p nahe genug an P_0 ist. Man kann, bei vorgegebenem η, ε_1 so bestimmen, dass $|\omega(\xi)| < \eta$ für $|\xi| < \varepsilon_1$.

Beim Grenzübergang $p \to P_0$ geht Δ gegen 0. Sobald $|\Delta| \leqq \frac{\varepsilon_1}{2}$, gilt bei der Festsetzung $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$, $|\Delta + x| \leqq \varepsilon_1$ und $|\Delta - x| \leqq \varepsilon_1$. Dann ist der obige Ausdruck kleiner als

$$\eta \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^{\varepsilon} |\Delta \pm x|^k \left| D^k e^{-\frac{x^2}{4t}} \right| dx \,.$$

Der Faktor von η ist beschränkt, denn: Abgesehen von konstanten Koeffizienten liefert D^k nach (11.3) Ausdrücke von der Form

$$\frac{x^{a_i}}{t^{a_i+b_i}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \,,$$

die Entwicklung von $(\Delta \pm x)^k$ solche wie $\Delta^r \cdot x^{k-r}$. Wir müssen nur einsehen, dass

$$\frac{|\Delta|^r}{\sqrt{t}} \int_0^{\varepsilon} \frac{x^{a_i+k-r}}{t^{a_i+b_i}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} dx$$

beschränkt ist. Es war $k = a_i + 2b_i$ (11.3). Der Ausdruck ist kleiner als

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \left| \frac{\Delta}{\sqrt{t}} \right|^r \int_0^{\infty} \frac{x^{2a_i+2b_i-r}}{t^{a_i+b_i-r/2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \,.$$

Durch die Substitution $\frac{x}{2\sqrt{t}} = y$ geht dies über in

$$\left| \frac{\Delta}{\sqrt{t}} \right|^r \int_0^{\infty} y^{2a_i+2b_i-r} \cdot e^{-y^2} dy \,.$$

Das Integral existiert und sein Faktor ist nach Voraussetzung beschränkt.

§ 14.

Differentialsatz für beliebige Annäherung.

Satz XIV: *Die kte Ableitung der Funktion $f(\varphi)$ existiere in einer Umgebung eines Punktes φ_0 und sei in diesem Punkte stetig. Dann gilt für jeden Grenzübergang $p \rightarrow P_0$*

$$\lim_{p \to P_0} D_\varphi^k u(p) = f^k(\varphi_0) .$$

Wiederum können wir zum Beweis ausgehen von der gleichmässig in Bezug auf φ geltenden Beziehung (12.3). Auch hier sei k gerade. Wir benützen die Darstellung von § 11.2. Es kommt wieder auf die Herleitung von drei Beziehungen an, wie (12.4) bis (12.6). Die erste ist sofort dargetan; die $f^i(\varphi)$ sind zwar nicht konstant, aber stetig, also beschränkt. Zweitens strebt

$$f^k(\varphi) \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^\varepsilon x^k D^k e^{-\frac{x^2}{4t}} dx$$

gegen $f^k(\varphi_0)$, da $f^k(\varphi)$ gegen $f^k(\varphi_0)$ strebt, während der andere Faktor nach (12.5) gegen 1 strebt, wenn $t \rightarrow +0$. Drittens ist nach § 11.2 für $|x| < \varepsilon$, $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$

$$\left| \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^\varepsilon \Omega(x, \varphi) x^k D^k e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \right| \leqq \eta \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^\varepsilon \left| x^k D^k e^{-\frac{x^2}{4t}} \right| dx .$$

Dass der Faktor von η beschränkt ist, wurde bereits unter 3. in § 12 gezeigt.

$\varphi_1 < \varphi_2$ seien zwei besondere Werte von φ, C sei irgend eine positive Konstante. Wir bezeichnen mit S die Summe der drei folgenden Gebiete:

1. des Halbstreifens

$$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2 , \qquad t > 0$$

2. des Gebietes

$$0 < \varphi_1 - \varphi \leqq \sqrt{t} \, . \, C$$

3. des Gebietes

$$0 < \varphi - \varphi_2 \leqq \sqrt{t} \, . \, C .$$

Zusatz: *$f^k(\varphi)$ existiere in allen Punkten des abgeschlossenen Intervalles $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$, sei in dessen inneren Punkten stetig und in den Endpunkten innenstetig. Strebt dann p irgendwie in einem Gebiete S gegen irgendeinen Punkt P_0, so strebt $D^k u(p)$ gegen $f^k(\varphi_0)$, gleichmässig in $\varphi_1 \leqq \varphi_0 \leqq \varphi_2$. Ist ferner $f^k(\varphi)$ in jedem Endpunkt beiderseits stetig, so gilt die Behauptung für ganz beliebige Annäherung.*

Dieser Satz folgt sogleich aus Satz XIII und dem obigen, mit Hilfe des Theorems von Heine-Borel.

ZWEITER TEIL.

DIE WARMETHEORETISCHE SUMMATION LAPLACE'SCHER REIHEN.

KAPITEL III.

UEBER DIE TEMPERATURFUNKTION $u(\vartheta, \varphi; t)$.

§ 15.

VORBEREITENDE BEMERKUNGEN, MEHLER'SCHE FORMEL.

Wir erinnern an gewisse Tatsachen aus der Theorie der Kugelfunktionen und verweisen bezüglich ihrer Herleitung auf den Artikel von Wangerin in der Encyclopädie der Math. Wissenschaften II. A. 10.

Ist $P_n(\alpha)$ das n-te Legendre'sche Polynom, so gilt

$$P_0(\alpha) = 1 \qquad |P_n(\cos\omega)| \leqq 1 \tag{15.1}$$

Für $n \neq 0$ hat man (vergl. (1.6))

$$\int_K d\sigma' P_n(\cos\omega) = 0 \tag{15.2}$$

Die P_n genügen als Funktionen von (ϑ, φ) der Differentialgleichung der allgemeinen Kugelfunktionen

$$\Delta X_n(\vartheta, \varphi) + n(n+1) X_n(\vartheta, \varphi) = 0 \tag{15.3}$$

Wir erinnern auch an die Beziehung

$$\frac{d P_n(\alpha)}{d\alpha} = (2n-1) P_{n-1}(\alpha) + (2n-5) P_{n-3}(\alpha) + \dots ,$$

durch deren fortgesetzte Anwendung man erkennt, dass

$$\left| \frac{d^k P_n(\alpha)}{d\alpha^k} \right| \leqq M \cdot n^{2k} \tag{15.4}$$

Die P_n kann man explizit angeben. Uns leistet eine Integraldarstellung gute Dienste, die Mehler'sche Formel:

$$P_n(\cos\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{\omega}^{\pi} \frac{\sin(n + {}^1/_2)\, z\, dz}{+\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}} \tag{15.5}$$

für $0 \leqq \omega < \pi$. Die Wurzel ist positiv zu nehmen. Insbesondere ist für $n = 0$

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_{\omega}^{\pi} \frac{\sin z/_2\, dz}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}}$$

Man schliesst, dass

$$1 \geqq \frac{2}{\pi} \cdot \sin\frac{\omega}{2} \int_{\omega}^{\pi} \frac{dz}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}} ,$$

dass also zu jedem Intervall $0 < \varepsilon \leqq \omega \leqq \pi$ ein endlicher Wert $M(\varepsilon)$ gehört von der Eigenschaft

$$\int_{\omega}^{\pi} \frac{dz}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}} \leqq M(\varepsilon) . \tag{15.6}$$

$M(\varepsilon)$ wird unendlich wie $\frac{1}{\varepsilon}$ wenn $\varepsilon \to 0$. Für $\omega\ 0 =$ hat dieses Integral keinen Sinn. Durch Entwicklung in eine Reihe sieht man ein, dass

$$2(\cos\omega - \cos z) = (z^2 - \omega^2)\, \Psi(z, \omega) ,$$

wo Ψ eine beschränkte Funktion ist in $0 \leqq \omega \leqq z \leqq \pi$. Kommt es auf einen beschränkten Faktor nicht an, so kann man also das Verhalten von $\frac{1}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}}$ schildern mit $\frac{1}{\sqrt{z^2 - \omega^2}}$. Es ergibt sich z. B., dass in $0 \leqq \omega \leqq \pi$

$$\left| \int_{\omega}^{\pi} \frac{z\,dz}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}} \right| < M \tag{15.7}$$

daraus, dass $\left| \int_{\omega}^{\pi} \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 - \omega^2}} \right| = +\sqrt{\pi^2 - \omega^2} \leqq M'$.

§ 16.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Wir setzen

$$p = (\vartheta, \varphi; t) \quad \text{mit } t > 0\,, \quad P = (\vartheta, \varphi)\,, \quad P_0 = (\vartheta_0, \varphi_0)\,, \quad P' = (\vartheta', \varphi')\,.$$

Das n–te Glied $u_n(p)$ in (1.7) genügt wegen (15.3) der Wärmeleitungsgleichung (1.8). Kugelfunktionen sind unbeschränkt derivierbar, also sind es auch die $u_n(p)$, in Bezug auf ϑ, φ und t.

Die Reihe der partiellen Ableitung einer bestimmten Ordnung der u_n konvergiert absolut und gleichmässig für $t \geqq t_1 > 0$ und P auf K. Da die Derivierten von $\cos\omega$ in Bezug auf ϑ, φ stetig sind, braucht man nur in (1.5) unter dem Zeichen nach $\cos\omega$ zu derivieren. Ist in (2.1) l derart, dass $k + i \leqq l - 2$, so wird wegen (1.5) und (15.4)

$$\left| \frac{2n+1}{4\pi} \frac{d^i e^{-n(n+1)t}}{dt^i} \int_K d\sigma' f(P') \frac{d^k P_n(\cos\omega)}{(d\cos\omega)^k} \right| \leqq \frac{\text{const}}{t_1^{\,i} \cdot n^3}$$

Satz XV: *Für $t > 0$ ist $u(p)$ eine beliebig oft differenzierbare Lösung der Wärmeleitungsgleichung.*

Die Reihe

$$\mathcal{O}(\omega, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty P_n(\cos\omega)\,(2n+1)\,e^{-n(n+1)t} \qquad (16.1)$$

konvergiert absolut und gleichmässig in $0 \leqq \omega \leqq \pi$, $0 < t_1 \leqq t < \infty$, nach (2.1) und (15.1). Man gelangt also von (1.5) und (1.7) mit (15.5) zu

$$u(p) = \frac{1}{2\pi^2} \int_K d\sigma' f(P') \sum_0^\infty (2n+1) e^{-n(n+1)t} \int_\omega^\pi \frac{\sin(n + 1/2)\, z\, dz}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}}\,.$$

Die Summation und die innere Integration sind vertauschbar; wegen (3.5) haben wir

$$u(p) = \frac{e^{t/4}}{4(\pi t)^{3/2}} \int_K d\sigma' f(P') \int_\omega^\pi \frac{F(z, t)\, dz}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}} = \int_K d\sigma' f(P')\, \mathcal{O}(\omega, t)$$

(16.2) [1]

[1] Das Integral (16.2) sei wieder nach Weierstrass benannt.

und für den Diskontinuitätsfaktor im Falle der Kugel

$$\mathcal{D}(\omega, t) = \frac{e^{t/4}}{4(\pi t)^{3/2}} \int_{\omega}^{\pi} \frac{F(z, t)\, dz}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}} . \tag{16.3}$$

Ist $f(P) = 1$, so folgt aus (1.5), (1.7) und (15.2)

$$\int_K d\sigma' \mathcal{D}(\omega, t) = 1 . \tag{16.4}$$

Hier ziehen wir die Relation (3.9) heran; wir setzen

$$F_0(z, t) = z \, . \, e^{-\frac{z^2}{4t}}$$

und haben nach (2.2)

$$F = F_0 + F^\star .$$

Aus dieser Zerlegung entsteht durch (16.3) die neue

$$\mathcal{D}(\omega, t) = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}^\star$$

mit

$$\mathcal{D}_0(\omega, t) = \frac{e^{t/4}}{4(\pi t)^{3/2}} \int_{\omega}^{\pi} \frac{z \, . \, e^{-\frac{z^2}{4t}} dz}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}} . \tag{16.5}$$

Nach (2.3) und (15.7), bezw. Aussage 2 und (15.6), wird

$$|\mathcal{D}^\star(\omega, t)| < M\sqrt{t} \qquad \text{in} \qquad 0 \leqq \omega \leqq \pi$$

$$|\mathcal{D}_0(\omega, t)| < \mu(\varepsilon)\sqrt{t} \qquad \text{in} \qquad 0 < \varepsilon \leqq \omega \leqq \pi .$$

Dies liefert mit einer Bemerkung am Schlusse von § 3 und (16.3) die

Aussage 7: Der Diskontinuitätsfaktor ist nicht negativ. Gleichmässig gilt

$$\lim_{t=+0} \mathcal{D}^\star(\omega, t) = 0 \qquad \text{in} \qquad 0 \leqq \omega \leqq \pi$$

und bei festem $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t=+0} \mathcal{D}_0(\omega, t) = 0 \qquad \text{in} \qquad 0 < \varepsilon \leqq \omega \leqq \pi .$$

§ 17.

ABHÄNGIGKEIT DES GRENZVERHALTENS NUR VON DER UMGEBUNG. — ANNÄHERUNG AN EINEN STETIGKEITSPUNKT.

Aus der letzten Aussage folgt unmittelbar:

Aussage 8: Gleichmässig in Bezug auf P auf der Kugel gilt

$$\lim_{t=+0} \int_K f \Phi^* \, d\sigma' = 0$$

und bei festem $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t=+0} \int_{\omega \geqq \varepsilon} f \Phi_0 \, d\sigma' = 0 \,.$$

Also gilt gleichmässig in Bezug auf P

$$\lim_{t=+0} \left[u(p) - \int_{\omega \leqq \varepsilon} f \Phi_0(\omega, t) \, d\sigma' \right] = 0 \qquad (17.1)$$

Insbesondere ist nach (16.4)

$$\lim_{t=+0} \int_{\omega \leqq \varepsilon} \Phi_0(\omega, t) \, d\sigma' = 1 \,. \qquad (17.2)$$

Bedeutet ω_0 den sphärischen Radius $\widehat{P_0 P'}$, so schreibt man mit derselben Begründung wie in § 5

$$\lim_{p=P_0} \left[u(p) - \int_{\omega_0 \leqq \varepsilon} f \Phi_0(\omega, t) \, d\sigma' \right] = 0 \,. \qquad (17.3)$$

SATZ XVI: *Beim Uebergang $p \to P_0$ hängt das Verhalten der Funktion $u(p)$ nur ab von den Werten von f in der Umgebung von P_0.*

SATZ XVII: *Strebt p beliebig gegen einen Stetigkeitspunkt P_0, so strebt $u(p)$ gegen $f(P_0)$, gleichmässig in einem abgeschlossenen Stetigkeitsgebiet von f*[1].

Der Beweis verläuft wie für Satz III, in Anbetracht von (17.2) und weil $\Phi_0(\omega, t) \geqq 0$.

[1] In den Randpunkten sei f im gewöhnlichen Sinne stetig.

§ 18.

Annäherung an einen Punkt, wo der Kreis- bezw. Kalotten-Mittelwert existiert.

Zur Vereinfachung wählen wir hier den Pol N des Koordinatensystems an die Stelle P, gegen die p auf der Mantellinie strebt. ω ist dann gleich ϑ'. Auf dem Kreis $\vartheta' = const.$ ist der Mittelwert von f gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi')\, d\varphi' = f_1(P, \vartheta') .$$

Unter dem Kreismittelwert an der Stelle P verstehen wir den Limes

$$f_1(P) = \lim_{\vartheta'=0} f_1(P, \vartheta') ,$$

wenn er besteht.

Satz XVIII: *Nähert sich p auf der Mantellinie dem Punkt P, in welchem der Kreismittelwert von f existiert, so ist die Wärmesumme diesem Werte gleich.*

Wir können von der Beziehung (17.1) ausgehen mit $P = P_0$ und schreiben

$$\int_{\vartheta' \leqq \varepsilon} f(\vartheta', \varphi')\, \mathcal{O}_0(\vartheta', t) \sin \vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi' = \int_0^{\varepsilon} d\vartheta' \sin \vartheta'\, \mathcal{O}_0(\vartheta', t) \int_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi')\, d\varphi'$$

$$= 2\pi \int_0^{\varepsilon} d\vartheta' \sin \vartheta'\, \mathcal{O}_0(\vartheta', t)\, f_1(P, \vartheta') = \int_{\vartheta' < \varepsilon} f_1(P, \vartheta')\, \mathcal{O}_0(\vartheta', t)\, d\sigma' . \tag{18.1}$$

In Anbetracht von (17.2) deckt sich von hier an der Beweis mit dem von Satz III.

Wieder sei der Pol in P. Wir setzen dann

$$f_2(P, \theta) = \frac{\int_0^{\theta} d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin \vartheta' f(\vartheta', \varphi')}{2\pi(1 - \cos\theta)}$$

und nennen Kalottenmittelwert den Grenzwert

$$\lim_{\theta=0} f_2(P, \theta) = f_2(P) ,$$

wenn er besteht.

Satz XIX: *Bei Annäherung $p \to P$ auf der Mantellinie ist die W. Summe gleich $f_2(P)$, wo dieser Wert besteht.*

(17.1) und (18.1) ergeben, dass

$$\lim_{p \to P} \left[u(p) - 2\pi \int_0^{\varepsilon} f_1(P, \vartheta') \mathcal{O}_0(\vartheta', t) \, d\vartheta' \right] = 0 .$$

Eine partielle Integration führt für den Subtrahenden zum Ausdruck

$$2\pi \left[\mathcal{O}_0(\vartheta', t) \int_0^{\vartheta'} f_1(P, \xi) \sin \xi \, d\xi \right]_0^{\varepsilon}$$

$$- 2\pi \int_0^{\varepsilon} \left(\frac{\int_0^{\vartheta'} f_1(P, \xi) \sin \xi \, d\xi}{\sin^2 \vartheta'} \right) \frac{d}{d\vartheta'} \mathcal{O}_0(\vartheta', t) \sin^2 \vartheta' \, d\vartheta' .$$

Der Klammerausdruck ist 0 an der untern Grenze. Der Wert an der obern strebt mit t gegen 0 nach Aussage 7.

Das Gebilde

$$2 \frac{\int_0^{\vartheta'} f_1(P, \xi) \sin \xi \, d\xi}{\sin^2 \vartheta'} = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_0^{\vartheta'} d\xi \sin \xi \int_0^{2\pi} f(\xi, \varphi') \, d\varphi'}{\cos^2 \vartheta'/_2 \, (1 - \cos \vartheta')}$$

strebt für $\vartheta' \to 0$ gegen $f_2(P)$, dort wo dieser Wert besteht. Um den Beweis wie in Satz III beendigen zu können, genügt es zu wissen:

1. $\frac{\partial}{\partial \vartheta'} \mathcal{O}_0(\vartheta', t)$ ist für genügend kleine t zeichenbeständig. Dies werden wir am Schluss von § 24 zeigen.

2. $$\lim_{t=+0} - \pi \int_0^{\varepsilon} \frac{d}{d\vartheta'} \mathcal{O}_0(\vartheta', t) \sin^2 \vartheta' \, d\vartheta' = 1 .$$

Zu dieser Beziehung gelangen wir durch eine partielle Integration, denn ihre linke Seite wird zu

$$-\Big[\Phi_0(\vartheta', t)\sin^2\vartheta'\Big]_0^\varepsilon + \int_0^\varepsilon \Phi_0(\vartheta', t)\sin\vartheta'\cos\vartheta'\,d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \,.$$

Hier geht der erste Teil gegen 0, der zweite gegen 1 nach Satz XVII, da er den Subtrahenden von (17.1) darstellt mit $f(P') = \cos\vartheta'$.

$f_2(P)$ existiert fast überall und ist fast überall gleich $f(P)$.

Zusatz XIX a: *Beim Grenzübergang $p \to P$ strebt $u(p)$ fast überall gegen $f(P)$.*

§ 19.

Integralsätze.

Energiesatz (XX): *Ist $v(P, t)$ irgend eine Lösung von* (1.8), *so gilt*

$$\int_K d\sigma\, v(P, t) = \text{const}\,.$$

Ist $u\,(P, t)$ das Weierstrass'sche Integral, so gilt

$$\int_K d\sigma\, u(P, t) = \int_K d\sigma f(P)\,.$$

Dass das Integral konstant ist, sieht man so:

$$\int_K d\sigma\,\frac{\partial u}{\partial t} = \int_K d\sigma\,\Delta\, u = 0\,;$$

denn die Integrationsfläche ist geschlossen. Dass die Konstante im zweiten Falle den behaupteten Wert besitzt, erfährt man, wenn man in der gleichmässig konvergierenden Reihe (1.7) $t = \infty$ setzt.

Auch hier übernehmen wir aus der Arbeit von Strässle, ohne einen Beweis zu geben, den

Hilfssatz: *Zwischen irgend einer integrierbaren Funktion $v(P, t)$ auf dem Zylinder und der absolut integrierbaren Funk-*

tion f auf seiner Grundkugel sollen nach Voraussetzung die Beziehungen gelten

1) $v(P, t) \to f(P)$ *fast überall für* $t \to +0$

2) $\int\limits_K |v| \, d\sigma \to \int\limits_K |f| \, d\sigma$ *für* $t \to +0$.

Dann folgt $\int\limits_K |v - f| \, d\sigma \to 0$ *für* $t \to +0$.

Darauf stützen wir den

Satz XXI: *Die Wärmesumme $u(P, t)$ genügt den Beziehungen*

$$\int\limits_K |u| \, d\sigma \to \int\limits_K |f| \, d\sigma \, , \quad \int\limits_K |u - f| \, d\sigma \to 0 \text{ für } t \to +0 \, .$$

Der Beweis deckt sich mit dem von Satz VI. Wir müssen nur wissen, dass der Diskontinuitätsfaktor $\mathcal{D}$ nicht negativ ist (Aussage 7).

§ 20.

Eindeutigkeitssätze.

Spezieller Eindeutigkeitssatz (XXII a):

Es sei $f(P)$ eine auf der ganzen Kugel stetige Funktion, welche stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach ϑ und φ besitzt. Dann gibt es eine und nur eine Funktion $v(p) = v(P, t)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) *In jedem Punkt p ist sie stetig, sowie ihre Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach ϑ und φ und ihre erste Ableitung nach t.*

2) *In jedem solchen Punkte gilt*

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial t}$$

3) *Bei Annäherung auf der Mantellinie hat man für jedes P*

$$\lim_{t=+0} v(P, t) = f(P) \, .$$

Nach den Sätzen der §§ 16 und 17 wissen wir, dass $u(p)$ sämtlichen Bedingungen genügt. — Wir zeigen, dass $u - v = w \equiv 0$.

w genügt den vorstehenden Bedingungen. Zudem ist gleichmässig in Bezug auf P

$$\lim_{t=+0} w(P, t) = 0 .$$

In der Green'schen Formel

$$\int_K (\nabla w)^2 \, d\sigma + \int_K w \, \Delta w \, d\sigma = 0$$

ist das erste Glied nicht negativ. Wegen 2) ist also

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_K \frac{w^2}{2} \, d\sigma \leq 0$$

oder

$$0 \leqq \int_K w^2 (P, t) \, d\sigma \leqq \int_K w^2 (P, t_1) \, d\sigma \qquad (t > t_1 > 0)$$

Das zweite Integral geht mit t_1 gegen 0, während das erste dabei konstant bleibt. Also ist $w(p) = 0$.

Allgemeiner Eindeutigkeitssatz (XXII b):

Es gibt eine und nur eine Funktion $v(p)$, die folgenden Bedingungen genügt:

1′) *$v(p)$ ist stetig für $t > 0$; dasselbe gilt von den partiellen Ableitungen der ersten Ordnung nach t und der beiden ersten Ordnungen nach ϑ und φ.*

2′) *Dort gilt überall*

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial t} .$$

3′) *Beim Grenzübergang $t \to +0$ auf der Mantellinie strebt $v(P, t)$ fast überall gegen $f(P)$.*

4′)

$$\lim_{t=+0} \int_K |v| \, d\sigma = \int_K |f| \, d\sigma$$

Das Weierstrass'sche Integral u genügt allen Bedingungen, insbesondere nach Satz XXI und Zusatz XIX a. Es stellt also diese einzige Funktion dar.

Beweis. u und v seien zwei Funktionen mit den verlangten Eigenschaften. Zeigen wir, dass sie identisch sind! — Im abgeschlossenen Zylinder $t \geq t_1 > 0$ erfüllen u und v sämtliche Bedingungen des speziellen Satzes. Wie bei Satz VII b kann man also sagen

$$u(P, t) - v(P, t) = \int_K u(P', t_1) - v(P', t_1)\ \mathcal{O}(\omega, t - t_1)\, d\sigma' .$$

t ist fest, t_1 sei nicht grösser als $\frac{t}{2}$. Dann ist $t - t_1 \geqq \frac{t}{2}$. Nach der Bemerkung bei (16.1) gibt es also eine solche Zahl $M(t)$, dass

$$|u - v|_t \leqq M(t) \int_K |u(P', t_1) - v(P', t_1)|\, d\sigma' \leqq$$

$$\leqq M(t) \int_K |u(P', t_1) - f(P')|\, d\sigma' + M(t) \int_K |v(P', t_1) - f(P')|\, d\sigma'$$

Die Bedingungen 3′) und 4′) sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes von § 19. Beim Grenzübergang $t \to +0$ lässt seine Anwendung auf u und v erkennen, dass sich beide Funktionen um beliebig wenig voneinander unterscheiden. Sie müssen gleich sein, da sie doch von t_1 unabhängig sind.

Dieses Theorem, Satz XXI und der Zusatz XIX a haben folgendes

Korrollar: *Für die Darstellbarkeit einer den Bedingungen 1′) und 2′) genügenden Funktion durch das Weierstrass'sche Integral ist notwendig und hinreichend, dass sie die Bedingungen 3′) und 4′) erfüllt.*

§ 21.

Temperaturausgleich.

Der Diskontinuitätsfaktor ist nicht negativ (Aussage 7); er genügt der Beziehung (16.4). Wenn wir fast überall konstante Funktionen $f(P)$ ausschliessen, finden wir daraus wie in § 10:

Maximumssatz (XXIII): *Die obere Grenze (für $t > 0$ das Maximum) der Temperatur nimmt ab und die untere (das Minimum) zu mit wachsender Zeit.*

Satz XXIV: *Die mittlere Abweichung $\bar{A}(t)$ der Temperatur von ihrem (nach Satz XX) konstanten Mittel c ist eine abnehmende Funktion von t für $t > 0$.*

Beweis: Differenziert man unter dem Zeichen, so ergibt sich wegen (1.8) und der Identität

$$u \Delta u = \nabla (u \nabla u) - (\nabla u)^2$$

aus der Geschlossenheit der Kugelfläche:

$$4\pi \frac{d}{dt} \bar{A}^2(t) = \frac{d}{dt} \int_K (u-c)^2 d\sigma = 2 \int_K (u-c) \Delta u \, d\sigma = -2 \int_K (\nabla u)^2 d\sigma \leqq 0 .$$

Auch Satz X gestattet eine Verallgemeinerung.

SATZ XXV: *Der Ausdruck*

$$S(t) = \int_K \sqrt{1 + (\nabla u)^2} \, d\sigma$$

ist eine abnehmende Funktion der Zeit.

$S(t)$ ist offenbar eine Verallgemeinerung des Ausdrucks für die Länge des Momentandiagramms. Man könnte S geometrisch deuten im vierdimensionalen Raum. Wir wollen einsehen, dass $\frac{dS}{dt} \leqq 0$. Da

$$\frac{dS}{dt} = \int_K \frac{\nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u \, d\sigma}{[1 + (\nabla u)^2]^{1/2}}$$

ergibt sich wegen (1.8)

$$\frac{dS}{dt} = \int_K \frac{\nabla u \cdot \nabla (\Delta u) \, d\sigma}{[1 + (\nabla u)^2]^{1/2}} .$$

Bei Benützung der Identität

$$\nabla (\Delta u \cdot \nabla u) = (\Delta u)^2 + \nabla u \cdot \nabla (\Delta u)$$

wird

$$\frac{dS}{dt} = \int_K \frac{\nabla (\Delta u \cdot \nabla u) \, d\sigma}{[1 + (\nabla u)^2]^{1/2}} - \int_K \frac{(\Delta u)^2 \, d\sigma}{[1 + (\nabla u)^2]^{1/2}} .$$

In der Identität

$$\nabla (\psi \cdot \mathfrak{v}) = \psi \nabla \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \nabla \psi$$

nehmen wir, das erste Integral betreffend,

$$\mathfrak{v} = \Delta u \, . \nabla u \qquad \psi = \frac{1}{[1 + (\nabla u)^2]^{1/2}} \, .$$

Da

$$\nabla \frac{1}{[1 + (\nabla u)^2]^{1/2}} = - \frac{\Delta u \, . \nabla u}{[1 + (\nabla u)^2]^{3/2}}$$

und weil das Integral von ∇ über K verschwindet, wird

$$\frac{dS}{dt} = - \int\limits_K \left\{ \frac{(\Delta u)^2}{[1 + (\nabla u)^2]^{1/2}} - \frac{(\Delta u \, \nabla u)^2}{[1 + (\nabla u)^2]^{3/2}} \right\} d\sigma$$

$$= - \int\limits_K \frac{(\Delta u)^2 \, d\sigma}{[1 + (\nabla u)^2]^{3/2}} \leqq 0 \, .$$

$\frac{dS}{dt}$ bezw. $\frac{d\bar{A}}{dt}$ verschwindet nur, wenn zu einer festen Zeit t_1 die auf K ausnahmslos reguläre Funktion u der Gleichung $\Delta u = 0$ bezw. $\nabla u = 0$ genügt. Bekanntlich ist dann $u(P, t_1) = Const.$ und nach Satz XXII a auch $u(P, t) = Const.$ für $t \geqq t_1 > 0$.

Kapitel IV.

DIFFERENTIALSAETZE.

§ 22.

Stereographische Projektion.

Wir denken uns ein räumliches Koordinatensystem so gelegt, dass die Polaraxe der Einheitskugel Südpol-Nordpol sich deckt mit dem Stück 0, + 2 der z-Axe. Man kann die Punkte der Kugel mit Strahlen von S aus auf die Tangentialebene $z = 2$ in N projizieren (stereographische Projektion). Dem Punkt $P \equiv (\vartheta, \varphi) \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ entspricht dann ein Punkt x, y jener Ebene, dem Punkt P' ein Punkt x', y'. Zur Abkürzung setzen wir

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \qquad x'^2 + y'^2 = \rho'^2 \qquad (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = \delta^2 \, . \qquad (22.1)$$

Die Funktionen von P kann man auffassen als solche von x, y. So ist

$$\cos\omega = \frac{(4-\rho^2)(4-\rho'^2)+16(xx'+yy')}{(4+\rho^2)(4+\rho'^2)} \,. \tag{22.2}$$

Die stereographische Projektion kann man einbetten in die Transformation durch reziproke Radien, deren Zentrum der Ursprung S des Koordinatensystems ist und deren Bezugskugel den Radius 2 besitzt. Entsprechende Punkte x, y, z; $(\xi, \eta, \zeta) \equiv P$ dieser Verwandtschaft haben den Zusammenhang

$$x = \frac{4\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \qquad y = \frac{4\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \qquad z = \frac{4\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \,.$$

Unsere stereographische Projektion bekommen wir für $z = 2$.

Die Differenz

$$x' - x = 4\left(\frac{\xi'}{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2} - \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)$$

ist eine analytische Funktion der Variabeln ξ', η', ζ' in allen Punkten einer räumlichen Umgebung U von N $(\xi'=\eta'=0, \zeta'=2)$. Gehört P zu U, so lässt sich also $x'-x$ entwickeln in eine Potenzreihe mit den Argumenten $\xi'-\xi$, usw., deren Koeffizienten analytisch von $\xi \ldots$ abhangen. Wenn also $\varkappa$ irgend eine ganze positive Zahl ist, so gibt es eine Darstellung

$$x' - x = \pi^*_{\varkappa-1}(\xi'-\xi, \eta'-\eta, \zeta'-\zeta; \xi, \eta, \zeta) + \mathfrak{P}_\varkappa(\xi'-\xi, \ldots; \xi \ldots)$$

derart, dass $\pi^*_{\varkappa-1}$ ein Polynom vom Maximalgrad $\varkappa - 1$ ist in den Variabeln $\xi'-\xi$, $\eta'-\eta$, $\zeta'-\zeta$, mit Koeffizienten, die analytisch von ξ, η, ζ abhangen und derart, dass $\mathfrak{P}_\varkappa$ eine Potenzreihe in denselben Variabeln ist, deren Glieder den Minimalgrad $\varkappa$ besitzen.

Setzt man

$$a^2 = (\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2 + (\zeta'-\zeta)^2 \,, \tag{22.3}$$

so ist $\mathfrak{P}_\varkappa$ das Produkt von $a^\varkappa$ und einer für P und P' in U gleichmässig beschränkten Funktion. Eine entsprechende Darstellung ist möglich für $y'-y$. Auch ist zu bemerken, dass die nach den gestrichenen Variabeln genommenen Differentiale von $\mathfrak{P}$, deren Ordnung kleiner als $\varkappa$ ist, für $P' = P$ verschwinden. Dies gilt auch von den Differentialen nach x' und y', da der Uebergang von den ξ'... zu ihnen beschränkte Faktoren bringt. Wählt man $\varkappa \geqq n+1$, so kommt man zur

Aussage 9: Ist $\mathfrak{f}_n(x'-x, y'-y; x, y)$ ein Polynom vom Grade n in $x'-x$, $y'-y$ mit Koeffizienten, welche von x und y abhangen, aber beschränkt sind solange P und P' in U sind, dann gibt es eine Darstellung

$$\mathfrak{f}_n(x'-x, y'-y; x, y) = \pi_n(\xi'-\xi, \ldots; \xi \ldots) + a^n \Omega_1(\xi', \eta', \zeta'; \xi, \eta, \zeta)$$

mit den Eigenschaften:

1) π_n ist ein Polynom vom Maximalgrad n in $\xi'-\xi$, $\eta'-\eta$, $\zeta'-\zeta$.

2) Ω_1 strebt gegen 0, wenn $P' \to P$, und zwar gleichmässig in Bezug auf P in U.

3) $$d'^n \mathfrak{f}_n(x'-x, \ldots)_{P'=P} = d'^n \pi_n(\xi'-\xi, \ldots)_{P'=P},$$

wo d' ein Differential nach x', y' bedeutet.

4) Wenn die Koeffizienten von $\mathfrak{f}_n$ stetig von x, y abhangen, so sind die Koeffizienten von π_n stetig von ξ, η, ζ abhängig.

§ 23.

Definition des n-ten Differentials.

Durch die stereographische Projektion wird $f(\vartheta', \varphi')$ zu einer Funktion $\mathfrak{f}(x', y')$. Dass die Funktion $f(\vartheta', \varphi')$ im Punkt $P = (\vartheta, \varphi)$ ein n-tes *Differential besitze*, heisst nach Definition:

1. Alle partiellen Ableitungen von $\mathfrak{f}(x', y')$ nach x' und y' bis zur Ordnung n einschliesslich existieren im Punkt $x' = x$, $y' = y$.

2. Die Darstellung

$$f(\vartheta', \varphi') = \mathfrak{f}(x', y') = \mathfrak{f}(x, y)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}\left[(x'-x)\frac{\partial}{\partial x} + (y'-y)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(i)} \mathfrak{f}(x, y) + \delta^n \Omega_2(x', y'; x, y), \tag{23.1}$$

kurz

$$f(\vartheta', \varphi') = \mathfrak{f}_n(P', P) + \delta^n \Omega_2(P', P)$$

hat die Eigenschaft:

$$\lim_{\delta=0} \Omega_2 (P', P) = 0 .$$

Dann definieren wir

$$d^n f(\vartheta, \varphi) = d^n \mathfrak{f}(x, y) = \left[dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(n)} \mathfrak{f}(x, y) .$$

Das *n-te Differential* heisst *stetig* im Punkt P_0, wenn

1′) es existiert in allen Punkten P einer Umgebung von P_0;

2′) die partiellen Ableitungen von $\mathfrak{f}$ bis zur Ordnung n im Punkt x_0, y_0 stetig sind;

3′) $$\lim_{\delta=0} \Omega_2 (P', P) = 0 ,$$

gleichmässig in Bezug auf P in dieser Umgebung.

Man stellt fest, dass

$$d^n f = d'^n \mathfrak{f}(x', y')_{P'=P} = d'^n \mathfrak{f}_n (x' - x, \ldots; y)_{P'=P} \tag{23.2}$$

Die Willkürlichkeit in der Wahl der Koordinaten ist nicht wesentlich: Wenn eine Funktion u dargestellt werden kann durch das eine $[\vartheta, \varphi]$ oder andere $[v, w]$ von zwei Koordinatenpaaren, die eineindeutig und derivierbar bis zur Ordnung n aufeinander bezogen sind, so folgt aus

$$\lim_{p \to P_0} \frac{\partial^{i+k} u (\vartheta, \varphi, t)}{\partial \vartheta^i \, \partial \varphi^k} = \frac{\partial^{i+k} f (\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta^i \, \partial \varphi^k} ,$$

dass auch

$$\lim_{p \to P_0} \frac{\partial^{i+k} u}{\partial v^i \, \partial w^k} = \frac{\partial^{i+k} f}{\partial v^i \, \partial w^k}$$

und umgekehrt.

Denn die einen partiellen Ableitungen können ausgedrückt werden durch Polynome in den andern und den Ableitungen der Koordinaten in Bezug auf einander; ihre Koeffizienten sind Konstanten.

Das erste Differential von $\cos \omega$ betreffend, hat man nach (22.2)

$$1 - \cos \omega = \frac{8 \, \delta^2}{(4 + \rho'^2)(4 + \rho^2)}$$

$$d(-\cos \omega) = d(1 - \cos \omega) = \frac{-16}{(4 + \rho'^2)} \cdot \frac{[(x' - x)(4 + \rho^2) + x \, \delta^2] \, dx + [(y' - y)(4 + \rho^2) + y \, \delta^2] \, dy}{(4 + \rho^2)^2} .$$

Da $\left|\frac{x'-x}{\delta}\right| \leqq 1$ usw., gibt es ein solches m, dass für alle Punkte P, P' einer Umgebung von N

$$|\, d\,(-\cos\omega)\,| \leqq m\,\delta\,[|dx| + |dy|] \tag{23.3}$$

Setzt man $x = y = 0$, so wird

$$d\,(-\cos\omega) = -4\,\frac{x'\,dx + y'dy}{4 + \rho'^2}$$

und man erkennt wegen $\left|\frac{x'}{\rho'}\right| \leqq 1$ usw., dass

$$|d\,(-\cos\omega)| \leqq m\,.\,\rho'\,[|dx| + |dy|] \tag{23.4}$$

§ 24.

Derivation des Diskontinuitätsfaktors.

Wir setzen

$$\cos\omega = -\alpha \qquad \cos z = -x$$

$$G\,(\alpha) = \int_{\omega}^{\pi} \frac{F\,(z,\,t)\,dz}{\sqrt{2\,(\cos\omega - \cos z)}}\,. \tag{24.1}$$

Um $u\,(P,\,t)$ zu differenzieren, muss man $G\,(\alpha)$ nach α derivieren und α nach den Koordinaten von P differenzieren. Wir zeigen hier, wie das erste erfolgen kann.

Da wir in (24.1) nicht unter dem Zeichen derivieren dürfen, suchen wir für G einen Ausdruck, dessen Derivation nach bekannten Regeln ausführbar ist.

Wir haben

$$G\,(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{1} \frac{F\,dx}{\sin z/_2\,\sqrt{(1-x)\,(x-\alpha)}}$$

und durch die Substitution $x - \alpha = y\,(1-\alpha)$

$$G\,(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{F\,(z\,(y,\,\alpha),\,t)\,dy}{\sin z/_2\,\sqrt{y\,(1-y)}}\,. \tag{24.2}$$

Bei der Voraussetzung $0 < \omega < \pi$ ist dieses Integral in Bezug auf α gleichmässig konvergent in $y = 0$ und $y = 1$; denn

$$\Phi(z, t) = \frac{F(z \,.\, t)}{\sin z/_2} \tag{24.3}$$

ist im betrachteten Gebiet stetig. Dasselbe gilt von den folgenden Integralen, weil die Ableitungen von Φ nach α ebenfalls stetig sind, wie weiter unten ersichtlich ist. Nach einem bekannten Satze wird also

$$\frac{\partial^r G}{\partial \alpha^r} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial^r}{\partial \alpha^r} \Phi(z(\alpha)) \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$$

Weil wir finden

$$\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}} = \frac{2\, dz \sin z/_2}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}}$$

ist

$$\frac{\partial^r G}{\partial \alpha^r} = \int_\omega^\pi \frac{\partial^r}{\partial \alpha^r} \Phi(z(\alpha)) \,.\, \frac{\sin z/_2 \, dz}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}} \tag{24.4}$$

$$[\, z = \operatorname{arc\,cos}(-x) = \operatorname{arc\,cos}(\alpha(1-y) - y)\,] \,.$$

Wir derivieren Φ nach α, indem wir zuerst nach z derivieren. Den Wert von (24.4) werden wir nur bis auf einen beschränkten Faktor kennen müssen. Auch wird in der Anwendung ω klein sein.

Erstens ist zu bemerken, dass, wenn s ganz und positiv ist, man schreiben kann

$$\frac{\partial^s}{\partial z^s} \Phi = \frac{\partial^s}{\partial z^s} \left(\frac{F}{\sin z/_2} \right) = \frac{F^s \sin^s z/_2 + F^{s-1} \sin^{s-1} z/_2 \,(\,)\, \ldots\ldots + F.\,(\,)}{\sin^{s+1} z/_2} \,.$$

Dabei bedeuten die leeren Klammern Polynome in $\sin z/_2$ und $\cos z/_2$. Man sieht es für $s = 1$, und ein Induktionsschluss beweist es leicht allgemein.

Da ferner

$$\frac{\partial^i z}{\partial \alpha^i} = \frac{\partial^i z}{\partial(-x)^i} \cdot \left(\frac{\partial(-x)}{\partial \alpha} \right)^i \qquad \frac{\partial(-x)}{\partial \alpha} = 1 - y = \frac{1-x}{1-\alpha}$$

und mit einem gewissen Polynom $Q_i(-x)$

$$\frac{\partial^i z}{\partial(-x)^i} = \frac{Q_i(-x)}{(1-x^2)^{\frac{2i-1}{2}}},$$

also

$$\frac{\partial^i z}{\partial\alpha^i} = \frac{1}{\sin^{2i-1} z}\left(\frac{1+\cos z}{1+\cos\omega}\right)^i Q_i(\cos z)$$

$$= \frac{1}{\sin^{2i-1} z/_2}\left[\frac{(1+\cos z)^i}{(2\cos z/_2)^{2i-1}}\cdot\frac{Q_i(\cos z)}{(1+\cos\omega)^i}\right]$$

bemerken wir *zweitens*, dass diese Funktion in eckiger Klammer in $0 \leqq \omega \leqq \varepsilon < \pi$, $0 \leqq z \leqq \pi$ stetig ist.

Wir ziehen eine Formel heran, welche von Fàa di Bruno [1] angegeben wurde. Sie sagt: Wenn z eine differenzierbare Funktion von α ist und Φ eine differenzierbare Funktion von z ist, so gilt

$$\frac{\partial^r \Phi}{\partial\alpha^r} = \sum_{s,\varkappa_i} C_{s,\varkappa_i}\frac{\partial^s}{\partial z^s}\Phi\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)^{\varkappa_1}\cdot\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}\right)^{\varkappa_2}\cdots\left(\frac{\partial^r z}{\partial\alpha^r}\right)^{\varkappa_r}, \tag{24.5}$$

wobei die $\varkappa_i$ alle ganzen nicht negativen Werte annehmen, welche den Gleichungen genügen

$$s = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \dots \varkappa_r$$
$$r = \varkappa_1 + 2\varkappa_2 + \dots r\varkappa_r .$$

Die Koeffizienten $C_{s,\varkappa_i}$ sind angebbare rationale Zahlen, von denen wir nur zu wissen brauchen, dass sie mit r zugleich beschränkt sind.

Die Nennerpotenz von *sin* $^z/_2$ übertrifft nicht

$s+1$	in	$\frac{\partial^s}{\partial z^s}\Phi$	(Bemerkung 1)
$2i-1$	in	$\frac{\partial^i z}{\partial\alpha^i}$	(Bemerkung 2) ,

[1] Fàa di Bruno, *Einleitung in die Theorie der binären Formen*, S. 3 (1884).

also nicht

$$s + 1 + \varkappa_1 + 3\varkappa_2 + \dots (2r-1)\varkappa_r = s + 1 + 2(\varkappa_1 + 2\varkappa_2 + \dots r\varkappa_r) - (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \dots \varkappa_r) = 2r + 1$$

im Summanden von (24.5). Nach (24.4) gilt also die

Aussage 10: Es gibt solche Zahlen $M_i > 0$, $(0 \leqq i \leqq s)$, dass

$$\left|\frac{\partial^r G}{\partial \alpha^r}\right| \leqq \sum_{i=0}^{r} M_i \int_{\omega}^{\pi} \frac{|F^i(z) \sin^i z/_2|\, dz}{\sin^{2r}\frac{z}{2}\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}}$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{r} \frac{M_i}{\sin^{2r}\frac{\omega}{2}} \int_{\omega}^{\pi} \frac{|F^i(z) \sin^i z/_2|\, dz}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}}.$$

Wir sind noch von § 18 her den Beweis schuldig, dass $\frac{\partial}{\partial\vartheta'} \mathcal{O}_0(\vartheta', t)$ beständig negativ ist für genügend kleine t. Nach (16.5) muss man in (24.4) $F(z, t) = z . e^{-\frac{z^2}{4t}}$ setzen. Nach der einmaligen Derivation nach α sieht man, dass der Integrand in (24.4) beständig negativ ist, wenn

$$\left(1 - \frac{z^2}{2t}\right) \sin\frac{z}{2} - \frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$$

es ist. Wir zeigen, dass diese für $t > 0$ stetige und für $z = \sqrt{2t}$ negative Funktion von z nirgends verschwindet in $0, \pi$ für genügend kleine t. Es müsste sonst

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \frac{z}{2\left(1 - \frac{z^2}{4t}\right)}.$$

Für $\sqrt{2t} \leqq z \leqq \pi$ haben die beiden Seiten verschiedene Vorzeichen. Dagegen sind sie gleich für $z = 0$. Sie sind es also nicht mehr in $0 \leqq z \leqq \pi$, wenn die Derivierte der linken Seite in $0 \leqq z \leqq \sqrt{2t}$ stets kleiner ist als die der rechten, wenn also

$$\frac{1}{\cos^2\frac{z}{2}} < \frac{1 + z^2}{\left(1 - \frac{z^2}{4t}\right)^2}.$$

Für genügend kleine t ist aber in $0 \leqq z \leqq \sqrt{2t}$

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{z}{2}} < \frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{4}\right)^2} \leqq \frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{4t}\right)^2} \leqq \frac{1+z^2}{\left(1-\frac{z^2}{4t}\right)^2} .$$

§ 25.

Abhängigkeit des Grenzverhaltens nur von der Umgebung.

Aussage 11:

$$\lim_{t=+0} d^n \mathfrak{O}(\omega, t) = 0 ,$$

gleichmässig in

$$0 < \varepsilon \leqq \omega \leqq \pi .$$

Wegen (16.2), (24.1) und weil die Differentiale von α beschränkt sind [(22.2)], genügt das Aufweisen einer solchen Zahl $\mu(\varepsilon)$, dass

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \mathrm{G}(\alpha) \right| \leqq \mu(\varepsilon)\, t^2 \qquad \text{in } 0 < \varepsilon \leqq \omega \leqq \pi .$$

Als Derivierte einer ϑ-Reihe ist $F(z, t)$ eine ganze Funktion von z für jedes $t > 0$. Im Streifen

$$0 \leqq \mathfrak{I}(z) \leqq 2\pi$$

der komplexen z-Ebene sind die Stellen $z = \omega, 2\pi - \omega$ die einzigen Singularitäten des Integranden in (24.1). Wegen (3.10) findet man leicht, dass

$$4\mathrm{G}(\alpha) = \oint \frac{F dz}{\sqrt{2(\cos \omega - \cos z)}} ,$$

ausgeführt über den geschlossenen Weg, bestehend aus zwei Kreisen vom Radius ρ um ω bezw. $2\pi - \omega$ und den beiden Ufern eines Schlitzes zwischen $\omega + \rho$ und $2\pi - \omega - \rho$; der Weg ist in positivem Sinne zu durchlaufen, wenn auf dem untern Ufer die Wurzel positiv genommen wird. Dieser Weg kann aber nach dem Cauchy'schen Integralsatz ersetzt werden durch den Rand R des von ω unabhängigen Rechteckes der z-Ebene

$$0 < \frac{\varepsilon}{2} \leqq \Re(z) \leqq 2\pi - \frac{\varepsilon}{2} \qquad |\Im(z)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Also ist auch

$$G(\alpha) = \frac{1}{4} \int\limits_R \frac{F(z,t)\,dz}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}} .$$

Da $\varepsilon > 0$ fest ist, bleibt $\frac{1}{\sqrt{2(\cos\omega - \cos z)}}$ regulär, solange z auf dem neuen Integrationsweg bleibt, falls ω reell und zwischen ε und $2\pi - \varepsilon$ bleibt. Man darf jetzt unter dem Zeichen derivieren:

$$\frac{\partial^n G}{\partial \alpha^n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2n!}{2^{2n} \cdot n!} \int\limits_R \frac{F(z,t)\,dz}{(\cos\omega - \cos z)^{\frac{2n+1}{2}}} .$$

Der absolute Wert des Nenners im Integranden hat eine positive, nur von ε abhängige untere Schranke. Wir wählen jetzt nach der Ergänzung zu Aussage 2, t so klein, dass auf dem Integrationsweg

$$|F(z,t)| \leqq \text{const.}\ t^2 \quad [1]$$

und gelangen unmittelbar zur Behauptung.

Aus Aussage 11 ergibt sich

Aussage 12: Es gilt gleichmässig in Bezug auf P

$$\lim_{t=+0} \int\limits_{\omega \geqq \varepsilon} f(P')\, d^n \mathcal{O}(\omega, t)\, d\sigma' = 0 .$$

Wir können also schreiben

$$\lim_{t=+0} \left[d^n u(p) - \int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} f(P')\, d^n \mathcal{O}(\omega, t)\, d\sigma' \right] = 0 \qquad (25.1)$$

und mit der Begründung von § 5

$$\lim_{p \to P_0} \left[d^n u(p) - \int\limits_{\omega_0 \leqq \varepsilon} f(P')\, d^n \mathcal{O}(\omega, t)\, d\sigma' \right] = 0 . \qquad (25.2)$$

---

[1] Dort war vorausgesetzt, dass $\varepsilon \leqq \Re(z) \leqq \pi$. Wegen (3.10) gilt aber die Ungleichung auf dem ganzen Weg.

Satz XXVI: *Das Verhalten von $d^n u(p)$ beim Grenzübergang $p \rightarrow P_0$ ist nur abhängig von den Werten von f in der Umgebung von P_0.*

§ 26.

Differentialsatz für Annäherung auf der Mantellinie.

Nun sind wir in der Lage zu beweisen:

Satz XXVII: *Wenn $f(P)$ an der Stelle P_0 ein n-tes Differential besitzt, so ist sein dortiger Wert gleich dem Grenzwert von $d^n u(P, t)$ bei Annäherung $p \rightarrow P = P_0$ (auf der Mantellinie).*

Zur Vereinfachung sei $P = P_0$ der Nordpol N. In (23.1) ist also $x = y = 0$ und nach (22.1) $\delta^2 = \rho'^2 = x'^2 + y'^2$. Nach (23.1) und Aussage 9 wird in der Umgebung von P

$$f(\vartheta', \varphi') = \pi_n(\xi', \eta', \zeta') + \rho'^n \Omega_2(P') + a^n \Omega_1(P')$$

mit unendlich kleinen Ω_1 und Ω_2. $\left|\frac{a}{\rho'}\right|$ ist seiner geometrischen Bedeutung nach beschränkt in dieser Umgebung ((22.3)). Also gilt

$$f(\vartheta', \varphi') = \pi_n(\xi', \eta', \zeta') + \rho'^n \Omega(P')$$

mit

$$|\Omega(P')| < \eta \qquad \text{für} \qquad \rho' < \varepsilon\,. \tag{26.1}$$

In Anbetracht von (25.1) ist

$$\lim_{t=+0} d^n u(p) = \lim_{t=+0} \left[\int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} \pi_n(P')\, d^n \mathcal{O}(\omega, t)\, d\sigma' + \int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} \rho'^n \Omega(P')\, d^n \mathcal{O}(\omega, t)\, d\sigma' \right],$$

falls der rechtsstehende Grenzwert besteht. Nun gilt nach Aussage 9 und (23.2)

$$d'^n f(\vartheta', \varphi')_{P'=P} = d'^n \pi_n(\xi', \eta', \zeta')_{P'=P}\,.$$

Um also die Behauptung zu begründen, wird es wegen (26.1) genügen, die folgenden zwei Punkte darzutun.

1) Bei festem $\varepsilon > 0$ ist

$$\lim_{t=+0} \int_{\omega<\varepsilon} \pi_n(P')\, d^n \Phi\, d\sigma' = d'^n \pi_n(\xi', \eta', \zeta')_{P'=P}$$

2) $$\int_{\omega\leqq\varepsilon} \rho'^n \,|\, d^n \Phi \,|\, d\sigma'$$

bleibt beschränkt, wenn $t \to +0$.

Ad 1) $\pi_n(\xi', \eta', \zeta')$ ist ein Polynom in diesen drei kartesischen Koordinaten. Es ist auf der ganzen Kugel definiert.

Nach Satz XXVI gilt

$$\lim_{t\to+0} \int_{\omega\leqq\varepsilon} \pi_n d^n \Phi\, d\sigma' = \lim_{t\to+0} d^n \int_K d\sigma' \pi_n \Phi \ .$$

$\int_K$ stellt aber das Weierstrass'sche Integral des Polynoms

$$\pi_n(\xi, \eta, \zeta) = \pi_n[(\vartheta, \varphi)]$$

dar. Eine solche Funktion gestattet eine einzige Entwicklung nach Kugelfunktionen

$$\Sigma X_k(\vartheta, \varphi) = \pi_n(\xi, \eta, \zeta) \ ,$$

und zwar ist diese Entwicklung endlichgliedrig, n-gliedrig [1].

Darum schreiben wir mit Recht

$$d^n \int_K \pi_n \Phi .\, d\sigma' = d^n \sum_0^n X_k(\vartheta, \varphi) \ .\ e^{-n(n+1)t} \to d^n \sum X_k = d^n f$$

Es ist klar, dass diese Beziehungen auch gelten, wenn der Grenzübergang $p \to P_0$ keiner Beschränkung unterworfen ist; daran werden wir im nächsten Paragraphen denken.

---

[1] Vergl. Encyclopädie II A. 10. 15 und einen Beweis im Nachlass von Gauss, Werke 5, S. 630. Es sei $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \sigma^2$ und $H_n(\xi, \eta, \zeta)$ ein homogenes Polynom vom Grade n. Gauss zeigt mit einem Induktionsschluss, dass man solche homogene harmonische Polynome $h_\nu(\xi, \eta, \zeta)$ (also räumliche Kugelfunktionen) finden kann, dass

$$H_n(\xi, \eta, \zeta) = h_n + h_{n-2} . \sigma^2 + h_{n-4}\, \sigma^4 + \dots \ .$$

Auf der Einheitskugel ist $\sigma = 1$.

Ad 2. Nach (16.2) und (24.1) haben wir zu zeigen, dass

$$\frac{1}{t^{3/2}} \int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} \rho'^n \, | d^n G(\alpha) | \, d\sigma' \tag{26.2}$$

beschränkt bleibt, wenn t gegen 0 strebt. Mit (24.5) wird

$$d^n G(\alpha) = \sum_{r, k_i} C_{r, k_i} \frac{\partial^r G}{\partial \alpha^r} (d\alpha)^{k_1} \cdot (d^2\alpha)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (d^n \alpha)^{k_n} ,$$

wobei

$$\begin{aligned} r &= k_1 + k_2 + \ldots + k_n \\ n &= k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n , \end{aligned}$$

in ganzen, nicht negativen Werten. Die Indicesbeziehungen zeigen, dass

$$k_1 + n - 2r = k_3 + 2k_4 + \ldots + (n-2)\, k_n \geqq 0 \tag{26.3}$$

Aus (22.2) liest man, dass obige Differentiale von α beschränkt sind; insbesondere gilt (23.4) . Bis auf beschränkte Faktoren ist also (26.2) absolut kleiner als eine endliche Anzahl von Ausdrücken

$$\frac{1}{t^{3/2}} \int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} \rho'^{\,n+k_1} \left| \frac{\partial^r G}{\partial \alpha^r} \right| d\sigma' .$$

Wegen Aussage 10 ist dies beschränkt, wenn

$$\frac{1}{t^{3/2}} \int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} d\sigma' \, \frac{\rho'^{n+k_1}}{\left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2r}} \int\limits_{\omega}^{\pi} \frac{| F^i(z) \sin^i (z/2) | \, dz}{\sqrt{2 (\cos \omega - \cos z)}}$$

es ist. Aus der sogleich einzusehenden Beziehung

$$\rho' = 2 tg \frac{\omega}{2}$$

und (26.3) folgt, dass in der Umgebung von $P = N$, $\dfrac{\rho'^{n+k_1}}{\left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{2r}}$ beschränkt bleibt. Wenn man noch von einer Bemerkung in

§ 15 Gebrauch macht und $\sin\frac{z}{2}$ durch $\frac{z}{2}$ ersetzt, bleibt also zu zeigen, dass

$$\frac{1}{t^{3/2}}\int\limits_{\omega\leqq\varepsilon} d\sigma' \int\limits_{\omega}^{\pi} \frac{|F^i(z)\,z^i|\,dz}{\sqrt{z^2-\omega^2}}$$

beschränkt bleibt, wenn $t \to +0$.

Den Fall $i = 0$ können wir ausschliessen. Er wird durch (16.3) und (16.4) erledigt, da $F \geqq 0$ (§ 3). Der Beitrag der Glieder $n \neq 0$ in $F^i(z)$ ist nach Aussage 2 kleiner als $M \,.\, t^2$; und nach § 15 hat $\int\limits_{\omega}^{\pi} \frac{z^s\,dz}{\sqrt{z^2-\omega^2}}$ einen Sinn [1].

Darum sind wir am Ziel, wenn wir die Beschränktheit einsehen von

$$\frac{1}{2t^{3/2}}\int\limits_{\omega\leqq\varepsilon} d\sigma' \int\limits_{\omega}^{\pi} \frac{\left|D^i\left(z\,.\,e^{-\frac{z^2}{4t}}\right)z^i\right|dz}{\sqrt{z^2-\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_{\omega\leqq\varepsilon} d\sigma' \int\limits_{\omega}^{\pi} \frac{\left|D^{i+1}\left(e^{-\frac{z^2}{4t}}\right)\right|z^i\,dz}{\sqrt{z^2-\omega^2}}\,.$$

Dank (11.3) ist dies wahr, wenn es zutrifft für

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_{\omega\leqq\varepsilon} d\sigma' \int\limits_{\omega}^{\pi} \frac{z^i\left(\frac{z}{t}\right)^{i}\left(\frac{1}{t}\right)^{b_i} e^{-\frac{z^2}{4t}}\,dz}{\sqrt{z^2-\omega^2}}$$

wo $a_i + 2b_i = i + 1$. Setzt man noch $k + 1$ für die Potenz in der t autritt, so erkennt man, dass der letzte Ausdruck gleich ist

$$\frac{1}{t^{3/2}}\int\limits_{\omega\leqq\varepsilon} d\sigma' \int\limits_{\omega}^{\pi} \frac{z^{2k+1}\,e^{-\frac{z^2}{4t}}\,dz}{t^k\sqrt{z^2-\omega^2}}\,.$$

Durch die Substitution $z^2 - \omega^2 = \rho^2$ geht das innere Integral

---

[1] Beim Grenzübergang auf der Mantellinie dürfen wir also in (25.1) Ω durch Ω_0 ersetzen, d. h. die Glieder $n \neq 0$ von F vernachlässigen.

über in eines, das absolut kleiner ist als

$$\int_0^\infty \left(\frac{\nu^2+\omega^2}{t}\right)^k . e^{-\frac{\nu^2+\omega^2}{4t}} d\nu$$

$$= \sqrt{t} . e^{-\frac{\omega^2}{4t}} \sum_{\nu=0}^{k} c_\nu \left(\frac{\omega^2}{4t}\right)^\nu \int_0^\infty \left(\frac{\nu^2}{4t}\right)^{k-\nu} . e^{-\frac{\nu^2}{4t}} . d\left(\frac{\nu}{2\sqrt{t}}\right)$$

mit passenden beschränkten c_ν. Das letzte Integral hat bekanntlich einen Sinn. Da $d\sigma' < d\vartheta' d\varphi' . \vartheta'$ und $\vartheta' = \omega$, zeigt die folgende Abschätzung endlich das Gewünschte

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^\varepsilon d\varphi' d\vartheta' . \vartheta' \left(\frac{\vartheta'^2}{t}\right)^\nu . e^{-\frac{\vartheta'^2}{4t}} \right|$$

$$\leqq \text{const} \int_0^\infty \left(\frac{\vartheta'}{2\sqrt{t}}\right)^{2\nu+1} . e^{-\frac{\vartheta'^2}{4t}} . d\left(\frac{\vartheta'}{2\sqrt{t}}\right);$$

denn ν ist nach seiner Herkunft nur beschränkt vieler, ganzer nicht negativer Werte fähig.

Es würde dem Satz XIII entsprechen, jetzt die Behauptung von Satz XXVII zu bestätigen für Annäherungen $p \rightarrow P_0$, bei denen $\frac{\vartheta}{\sqrt{t}}$ beschränkt bleibt. Da $\frac{\rho'}{\sin \omega/_2}$ bei diesen Grenzübergängen nicht beschränkt bleiben muss, wäre zum Beweis Aussage 10 zu verschärfen. Bemühungen in dieser Richtung scheiterten jedoch bisher.

§ 27.

Differentialsatz für beliebige Annäherung.

Wir setzen jetzt die Stetigkeit des n-ten Differentials von f voraus und können darum jede Beschränkung in der Art der Annäherung fallen lassen. Wir beweisen:

Satz XXVIII: *$f(\vartheta, \varphi)$ besitze in allen Punkten einer Umgebung von P_0 ein n-tes Differential, das in P_0 stetig sei. — Dann ist sein Wert an der Stelle P_0 gleich dem Grenzwert von $d^n u(p)$, für $p \rightarrow P_0$ (irgendwie). Ist $d^n f$ stetig in einem abgeschlossenen Gebiete (also auch auf dem Rande), so gilt die Behauptung hierin gleichmässig.*

P_0 sei wieder der Pol N. Nach (23.1) und Aussage 9 hat man in allen Punkten einer Umgebung von P eine Darstellung

$$f(\vartheta', \varphi') = \pi_n(\xi' - \xi, \ldots ; \xi, \eta, \zeta) + \delta^n \Omega_2(P', P) + a^n \Omega_1(P', P) .$$

Da $\left|\frac{a}{\delta}\right|$ beschränkt ist, gilt in einer Umgebung von P eine Darstellung

$$f(\vartheta', \varphi') = \pi_n(\xi' - \xi \ldots ; \xi \ldots) + \delta^n \Omega(P', P)$$

und es gibt ein solches von P unabhängiges $\varepsilon > 0$, dass

$$|\Omega(P', P)| \leqq \eta \qquad \text{für} \qquad \delta < \varepsilon .$$

Wegen (25.1) ist also

$$\lim_{t \to +0} d^n u(p) = \lim_{t \to +0} \left[\int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} \pi_n(\xi' - \xi \ldots ; \xi \ldots)\, d^n \omega \,.\, d\sigma' + \int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} \delta^n \,.\, \Omega \,.\, d^n \omega \,.\, d\sigma' \right]$$

wenn der rechtsstehende Grenzwert besteht.

Nach Aussage 9 und (23.2) schreibt man

$$d^n f(\vartheta', \varphi')_{P'=P} = d'^n \pi_n(\xi' - \xi, \ldots ; \xi \ldots)_{P'=P=P_0} .$$

Um den Satz zu beweisen, genügt es also zu zeigen:

1. Bei festem $\varepsilon > 0$ ist

$$\lim_{p \to P_0} \left[\int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} \pi_n(\xi' - \xi \ldots, \xi \ldots)\, d^n \omega \,.\, d\sigma' = d'^n \pi_n(\xi' - \xi, \ldots ; \xi \ldots)_{P'=P=P_0} \right.$$

2. $$\int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} \delta^n \,|d^n \omega|\, d\sigma'$$

bleibt für $p \to P_0$ beschränkt.

Ad 1. π_n zerfällt in endlichviele Monome $S(\xi, \eta, \zeta) \,.\, M(\xi', \eta', \zeta')$, deren Koeffizienten S im Punkt P_0 stetig sind. Für einen solchen Ausdruck sieht man die Richtigkeit von 1. leicht ein, und das genügt.

Nach 1) § 26 gilt nämlich für jede Annäherung

$$\lim_{p \to P_0} \int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} S(P)\, M(\xi', \eta', \zeta')\, d^n \omega\, d\sigma' = \lim_{P \to P_0} S(P)\, d'^n M(P')_{P=P_0}$$

$$= d'^n [S(P_0) \,.\, M(P')]_{P'=P_0} .$$

Beim Uebergang zum letzten Ausdruck wurde die Stetigkeit von S benützt.

Ad 2. Weil die Differentiale von α sämtlich in der betrachteten Umgebung gleichmässig beschränkt sind und wegen (23.3) sieht man, wie unter 2) § 26, dass die Beschränktheit zu zeigen ist von

$$\left| \frac{1}{t^{3/2}} \int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} \delta^{n+k_1} \frac{\partial^r}{\partial \alpha^r} G(\alpha)\, d\sigma' \right| .$$

Genau wie in § 26 ist dies richtig, wenn

$$\frac{1}{t^{3/2}} \int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} d\sigma' \frac{\delta^{n+k_1}}{\sin^{2r} \frac{\omega}{2}} \int\limits_{\omega}^{\pi} \frac{|F^i(z) \sin^i (z/2)|\, dz}{\sqrt{2(\cos \omega - \cos z)}}$$

beschränkt bleibt. δ ist der Abstand der stereographischen Bilder zweier Kugelpunkte P und P', deren sphärischer Abstand ω ist. Geometrisch ist offenbar, dass $\frac{\delta}{\sin \frac{\omega}{2}}$ beschränkt ist, wenn P und P' zum Beispiel auf der nördlichen Halbkugel bleiben. Wegen (26.3) bleibt nur die Beschränktheit zu zeigen von

$$\frac{1}{t^{3/2}} \int\limits_{\omega \leqq \varepsilon} d\sigma' \int\limits_{\omega}^{\pi} \frac{|F^i(z) z^i|\, dz}{\sqrt{2(\cos \omega - \cos z)}} .$$

Wir haben dies bereits eingesehen für den Fall des *festen* Punktes $P = P_0$ und der damit festen Kalotte $\omega_0 \leqq \varepsilon$. Aber das innere Integral hängt nur von der gegenseitigen Lage von P und P' ab. Sein Integral über die mit P wandernde Kalotte hängt also nicht von P ab. Unser Ausdruck ist also für beliebige Annäherung $p \to P_0$ beschränkt.

Die Betrachtungen des 4. Kapitels könnten auch für verallgemeinerte Ableitungen durchgeführt werden, entsprechend dem Vorgehen des Herrn Prof. Dr. Plancherel in seiner Abhandlung « Sur la sommation des séries de Laplace et de Legendre » (Rendiconti di Palermo, Band XXXIII, 1912). Für unsern Fall wurden die Rechnungen durchgeführt für die beiden ersten Ordnungen. Da sie umfangreich sind, verzichten wir auf ihre Wiedergabe.

LEBENSLAUF

Ich, Ernst Völlm, von Amriswil (Thurgau), wurde am 7. Oktober 1898 in Sonvilier (Berner Jura) geboren, als Sohn des Ernst und der Marie, geb. Steffen. Ich besuchte die Primarschule in Sonvilier, die Sekundarschule in Amriswil. Vom Jahre 1915 an war ich Seminarist in Kreuzlingen, wo ich im Frühling 1919 das Thurgauische Lehrerpatent erhielt. Dann war ich ein halbes Jahr thurgauischer Primarlehrer.

Nach bestandener Aufnahmeprüfung an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, im Herbst 1919, studierte ich an ihrer Abteilung für Fachlehrer in Mathematik und Physik während 8 Semestern. Im Juli 1923 erwarb ich das Diplom dieser Abteilung. Während meiner Studienzeit hörte ich Vorlesungen der Herren Professoren und Dozenten: Amberg, Debye, Franel, Grossmann, Hirsch, Kollros, Marchand, Medicus, Meissner, Plancherel, Pòlya, Scherrer, Weyl, Wolfer. Gerne gebe ich hier dem Dank Ausdruck, zu dem ich diesen Herren verpflichtet bin.

Während des Wintersemesters 1923-24 war ich in darstellender Geometrie Assistent des Herrn Prof. Dr. M. Grossmann. Seither betätige ich mich als Versicherungsmathematiker.

In der vorliegenden Arbeit bin ich Ideen des Herrn Prof. Dr. Plancherel gefolgt. Bei der Durchführung war mir seine Wegleitung sehr wertvoll. Ich freue mich, ihm dafür herzlich danken zu dürfen.

Dankbar gedenke ich auch meiner Eltern und Freunde.

Ernst Völlm.

Zürich, den 25. Dezember 1924.