Ueber die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten

Author(s):
Frei, Margrit

Publication Date:
1961

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000103825

Prom. Nr. 2976

Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

MARGRIT FREI

DIPL. MATH. ETH

VON REGENSDORF (ZÜRICH)

Referent: Herr Prof. Dr. W. Saxer

Korreferent: Herr Prof. Dr. A. Pfluger

1961

ART. INSTITUT ORELL FÜSSLI AG, ZÜRICH

Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten

von MARGRIT FREI, Zürich

Einleitung

Jede Lösung $w_0 (\not\equiv 0)$ einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung (abgekürzt DGl.) n-ter Ordnung

$$w^{(n)} + a_{n-1} w^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_1 \cdot w' + a_0 \cdot w = 0 \tag{1}$$

läßt sich aus n linear-unabhängigen Integralen von (1): $w_1, \ldots, w_n$ superponieren:

$$w_0 = c_1 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2 + \ldots\ldots + c_n \cdot w_n\,, \tag{2}$$

wobei die c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ konstant und nicht sämtliche 0 sind. Die n Funktionen bilden ein Fundamentalsystem der DGl. (1).

Im folgenden setzen wir voraus, daß sämtliche Koeffizienten der DGl. (1) *ganze* Funktionen sind. Dann sind auch ihre Lösungen *ganz.*

Wenn die Koeffizienten von (1) *Polynome* oder konstant sind und mindestens einer von ihnen $\not\equiv 0$, so ist nach den Untersuchungen von WIMAN, VALIRON und WITTICH bekannt, daß das allgemeine Integral von (1) eine ganze *transzendente* Funktion vom Mitteltypus einer *endlichen* Wachstumsordnung[1]) $\varrho \geq 1$ ist. Mindestens *eine* der Funktionen eines Fundamentalsystems von (1) ist also eine ganze transzendente Funktion der W.O. ϱ. Doch können Funktionen von schwächerem Wachstum, insbesondere Polynome, als partikuläre Lösungen auftreten, jedoch höchstens $n - 1$ linear-unabhängige.

Unsere Untersuchungen werden zeigen, daß ein *Analogon* vorliegt, wenn als Koeffizienten von (1) auch *transzendente* Funktionen zugelassen werden: Die allgemeine Lösung von (1) ist nämlich eine ganze Funktion *unendlicher* W.O., wenn wenigstens einer der Koeffizienten transzendent ist. Funktionen *endlicher* W.O. können aber als partikuläre Integrale auftreten, das heißt von den n Funktionen eines Fundamentalsystems der DGl. (1) ist mindestens 1 von unendlicher W.O., während höchstens $n - 1$ von endlicher W.O. sein können.

Das ist unser wichtigstes Resultat. Dabei macht aber der Hauptsatz (§ 2) noch eine genauere Aussage über die Höchstzahl möglicher partikulärer Integrale endlicher W.O.

[1]) Um die Begriffe «Ordnung einer Differentialgleichung» und «Ordnung einer meromorphen Funktion» auseinanderzuhalten, werde ich von jetzt an die Ordnung einer meromorphen Funktion als «Wachstumsordnung» bezeichnen, abgekürzt W.O.

Wenn wir nach einer schärferen Abschätzung für das Wachstum der allgemeinen Lösung der DGl. (1) mit mindestens 1 transzendenten Koeffizienten fragen, zeigt sich, daß die Analogie zum Fall der linearen DGl. mit Polynomen bzw. Konstanten als Koeffizienten noch tiefer geht. Dort sind nämlich die Lösungen nach VALIRON [1] von «vollkommen *regelmäßigem* Wachstum», entsprechend den regelmäßig wachsenden Koeffizienten.

In unserm Fall aber – besonders wenn wir als transzendente Koeffizienten nur Funktionen von endlicher W.O. $\varrho \geq 0$ zulassen – zeigt sich, daß die allgemeine Lösung eine Funktion ist, die exponentiell-iteriert denjenigen Koeffizienten überlagert ist, die für diese $r > r_0$ am stärksten wachsen. Sie ist also quasi vom «Mitteltypus» des jeweils stärksten Koeffizienten. Insbesondere heißt das: Die allgemeine Lösung einer DGl. (1) mit mindestens 1 transzendenten Koeffizienten ist nicht nur von unendlicher W.O., sondern sogar von «regelmäßig unendlicher» W.O.

Unser verschärfter Hauptsatz (§ 3) enthält Bedingungen für die Existenz partikulärer Integrale von schwächerem Wachstum als die allgemeine Lösung. Sie sind aber nur notwendig, nicht hinreichend. Zwar können wir Differentialgleichungen konstruieren, welche die nach diesem Satz *mögliche* Höchstzahl solcher Integrale auch realisieren, aber an andern Beispielen wird es wahrscheinlich, daß eine DGl. (1) mit transzendenten Koeffizienten nur in Ausnahmefällen partikuläre Integrale besitzt, die das Wachstum der allgemeinen Lösung nicht erreichen, auch wenn solche nach unserm Satz zugelassen wären.

Insbesondere besitzt also eine DGl. (1) mit transzendenten Koeffizienten nur selten partikuläre Integrale endlicher W.O.

Einen Teil meiner Resultate habe ich schon 1953 ohne Beweis in den «Comptes rendus» veröffentlicht (Band 236, S. 38–40).

Die Anregung zu diesem interessanten Thema verdanke ich Herrn Prof. SAXER. Er und Herr Prof. PFLUGER haben durch ihr wohlwollendes Interesse meine Arbeit gefördert. Beiden bin ich zu großem Dank verpflichtet.

§ 1. Obere Schranken für das Anwachsen der Lösungen der DGl. (1)

Methode von WIMAN nach den Untersuchungen von WIMAN [1], [2], VALIRON [1], WITTICH [1], [2], [3], [4] und POLYA-SZEGÖ [1].

Es sei $w = g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot z^k$ ganz transzendent (g.tr.). Da für ein festes r die Glieder $|b_j| \cdot r^j$ bei $j \to \infty$ gegen Null streben, gibt es unter diesen Gliedern mindestens 1 größtes. Falls es mehrere gibt, wird dasjenige mit dem größten Index $j = \nu = \nu(r)$ ausgewählt. $\nu(r)$ heißt nach SAXER [1] der *Zentralindex*. $m(r) = |b_{\nu(r)} r^{\nu(r)}|$ das *Maximalglied.*