Prom.-Nr. 2038

ÜBER WACHSTUMSEIGENSCHAFTEN GEWISSER KLASSEN VON SUBHARMONISCHEN FUNKTIONEN

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

ALFRED HUBER

VON BINNINGEN (BASELLAND)

Referent: Herr Prof. Dr. A. PFLUGER

Korreferent: Herr Prof. Dr. W. SAXER

1952

ART. INSTITUT ORELL FÜSSLI AG.,

ZÜRICH

Über Wachstumseigenschaften gewisser Klassen von subharmonischen Funktionen

Von Alfred Huber, Zürich

Einleitung

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden einige Fragen aus folgender allgemeiner Problemstellung heraus behandelt: Eine Reihe von Sätzen über den Betrag einer analytischen Funktion $f(z)$ können als Aussagen über die subharmonische Funktion $\log | f(z) |$ gedeutet werden, und man kann fragen, ob solche Sätze auf allgemeinere subharmonische Funktionen ausgedehnt werden können.

Unter der Ordnung ϱ einer in der ganzen endlichen z-Ebene subharmonischen Funktion $u(z)$ verstehen wir die Größe

$$\varrho = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{\log r} ,$$

wobei $M(r) = \max\limits_{|z|=r} u(z)$.

Zunächst erweitern wir zwei Sätze von *A. S. Besicovitch* [2] über den Minimalbetrag ganzer analytischer Funktionen der Ordnung $\varrho < 1$ auf allgemeine in der ganzen Ebene subharmonische Funktionen derselben Ordnung (Sätze 2 und 3). Dabei gehen wir von einem Darstellungssatz von *M. Heins* [10, p. 203] aus. Bis zu Hilfssatz D benützen wir den Leitgedanken des *Wiman*schen Beweises [22] einer Vermutung von *Littlewood*. Eine zusätzliche Maßbetrachtung, die sich im Spezialfall der ganzen analytischen Funktionen sehr vereinfachen würde, liefert dann die obgenannten Sätze. Eine teilweise Übertragung der Sätze von *A. S. Besicovitch* auf eine spezielle Klasse von subharmonischen Funktionen hat *A. Dinghas* [8] im Jahre 1937 veröffentlicht, wobei er eine Abschätzungsmethode von *T. Carleman* [4] verwendete.

Dann beschränken wir uns auf eine spezielle Klasse von Funktionen der Ordnung 0, indem wir die zusätzliche Voraussetzung $M(r) = O(\log r)$ einführen. Es zeigt sich, daß über diese Funktionenklasse – die unter anderem die Funktionen der Form $\log|P(z)|$ ($P(z) =$ Polynom) in sich schließt – eine besonders weitgehende Aussage gemacht werden kann (Satz 6).

Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit Problemen vom Phragmén-Lindelöfschen Typus im R_n ($n \geqq 2$). Wir betrachten dabei ein willkürliches, sich ins Unendliche erstreckendes Gebiet und benützen eine Abschätzungsmethode, die für $n = 2$ von *T. Carleman* eingeführt, von *A. Dinghas* [6], [7], [8] und *A. Pfluger* [18] weiterentwickelt wurde. Wir wenden eine für den Fall harmonischer Funktionen im R_3 von *H. Keller* [12] zuerst hergeleitete, zur Beziehung von *T. Carleman* [4] analoge Differentialungleichung (Formel 21) an und erweitern Sätze für den R_2 von *A. Dinghas* [6] und *A. Pfluger* [18] auf den R_n ($n \geqq 2$)[1]). Die Spezialisierung auf den Fall genügend regulär berandeter Kegelgebiete liefert uns die Möglichkeit, die erhaltenen Resultate mit den Sätzen von *L. Ahlfors* und *M. Heins* [1], *J. Deny* und *P. Lelong* [5] und *J. Lelong-Ferrand* [14], [15] zu vergleichen.

Die Begriffe „monoton wachsend" bzw. „monoton fallend" sind stets im schwachen Sinne – „nicht abnehmend" bzw. „nicht zunehmend" – aufzufassen.

Unter mE ($E =$ meßbare lineare Punktmenge) verstehen wir das lineare Lebesguesche Maß, unter $m_e E$ ($E =$ beliebige lineare Punktmenge) das äußere lineare Lebesguesche Maß von E.

Die in dieser Arbeit gültige Definition des „Graphs" einer monotonen Funktion wurde dem Lehrbuch von *C. Carathéodory* entnommen [3, p. 161].

Für die Anregung zur vorliegenden Arbeit, sowie für viele wertvolle Ratschläge während ihrer Entstehung, bin ich Herrn Prof. Dr. *A. Pfluger* zu herzlichem Dank verpflichtet.

I. Über die in der ganzen endlichen Ebene subharmonischen Funktionen, deren Ordnung kleiner als 1 ist

$u(z)$ sei eine in der ganzen endlichen z-Ebene subharmonische Funktion der Ordnung ϱ ($0 \leqq \varrho < 1$). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir im folgenden stets annehmen, daß $u(z)$ in einer gewissen Um-

[1]) Vor kurzem — nach beendigter Redaktion der vorliegenden Arbeit — hat *A. Dinghas* eine Verallgemeinerung seiner Abschätzung auf höherdimensionale Räume veröffentlicht [9].