EXTREMALPROBLEME UND UNGLEICHUNGEN KONFORMER GEBIETSGRÖSSEN

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG
DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
MATHEMATIK

GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON
HANS RUDOLF HAEGI
VON ZÜRICH

REFERENT:
HERR PROF. DR W. SAXER

KORREFERENT:
HERR PROF. DR A. PFLUGER

P. NOORDHOFF N.V. VERLAG, GRONINGEN — 1950

Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen

Einleitung

Ist eine Operation Ω gegeben, welche jedem ebenen Gebiet G eine reelle Zahl $g = \Omega(G)$ zuordnet, so nennen wir g eine „Gebietsgröße". Solche Gebietsgrößen sind etwa Fläche, Durchmesser, Länge der Berandung, transfiniter Durchmesser, Kapazität von G etc. Zwischen diesen verschiedenartigsten Größen braucht kein Zusammenhang zu bestehen, aber es liegt nahe, nach Ungleichheitsrelationen zwischen ihnen zu fragen.

Dieser Problemkreis bildet den Hauptgegenstand einer demnächst erscheinenden Abhandlung von G. Pólya und G. Szegö [1]). Die Fülle der darin enthaltenen suggestiven Detailfragen, Anregungen und Vermutungen gab Anlaß zu der vorliegenden Arbeit.

Sie befaßt sich speziell mit den Beziehungen zwischen geometrischen und funktionentheoretischen Größen. Dabei ist zweierlei von Interesse: erstens das Aufsuchen von Ungleichungen zwischen den betrachteten Größen, und zweitens die Frage nach der Existenz von Extremalgebieten, für die in der Ungleichung das Gleichheitszeichen eintritt. Zur Untersuchung bieten sich daher 2 Methoden. Die erste stellt mit Hilfe von Abschätzungen direkt die Ungleichung her, wobei sich die Extremalgebiete gelegentlich nebenbei ergeben. Die zweite sucht die Extremalgebiete auf, nachdem sie deren Existenz sichergestellt hat, woraus dann umgekehrt die Ungleichung folgt. Diesen beiden Aspekten gemäß gliedert sich die Arbeit in zwei Teile.

In einem ersten Teil wird zunächst die Funktion r_z des inneren Radius untersucht. Dies bietet an sich einiges Interesse; so wird etwa der Satz bewiesen, daß r_z in konvexen, symmetrischen Gebieten sein Maximum im Symmetriepunkt und nur dort annimmt (Vermutung [1], 1.23). Außerdem aber zeigt sich nämlich,

---

1) siehe [1] im Literaturverzeichnis.

daß sich aus der Kenntnis des Charakters der stationären Stellen von r_z Abschätzungen gewinnen lassen, die zu Relationen der gesuchten Art führen. Auf diese Weise resultiert eine Ungleichung für die Größe $\dot{r}\overline{r}F^{-1}$, sowie Ungleichungen zwischen $\dot{r}$ und ϱ. Hierbei zeigt sich ein enger Zusammenhang mit dem Bloch-Landau-Problem für schlichte Funktionen, woraus ein neuer Beweis für den Wert $\pi/4$ der Bloch-Konstanten für konvexe Gebiete fließt. Die meisten in diesem Teil hergeleiteten Resultate finden sich ohne Beweis in den „Comptes rendus" [2]).

Im zweiten Teil wird die Existenz von Gebieten bewiesen, welche bei gegebenem $\dot{r}$ und $\overline{r}$ den Durchmesser s maximieren. Moderne Variationsmethoden (Schiffer) sowie das Symmetrisierungstheorem (Pólya-Szegö) ermöglichen es, alle diese Extremalgebiete zu bestimmen, woraus eine scharfe Ungleichung für die 3 Größen $\dot{r}$, $\overline{r}$ und s resultiert.

Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

---

[2]) siehe [4] im Literaturverzeichnis.