Prom.-Nr. 2240

Beziehungen zwischen speziellen linearen Integralgleichungen erster und zweiter Art und Lösung des Dirichletschen Problems durch das Potential einer einfachen Schicht

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH
ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER MATHEMATIK
GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

HANS BLUMER

VON GLARUS

Referent: Herr Prof. Dr. M. PLANCHEREL
Korreferent: Herr Prof. Dr. W. SAXER

1954

ART. INSTITUT ORELL FÜSSLI AG.

ZÜRICH

Beziehungen zwischen speziellen linearen Integralgleichungen erster und zweiter Art und Lösung des Dirichletschen Problems durch das Potential einer einfachen Schicht

von Hans Blumer, Glarus

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist aus der Aufgabe entstanden, die lineare Integralgleichung 1. Art, die bei der Lösung des Dirichletschen Problems im R_3 durch ein Newtonsches Potential einfacher Schicht auftritt, auf eine lineare Integralgleichung 2. Art zu transformieren.

Hilbert hat die analoge Aufgabe in der Ebene in einer Vorlesung über Integralgleichungen (Sommersemester 1905) folgendermaßen gelöst. Wird der Rand C des einfach zusammenhängenden Gebietes G durch die reduzierte Bogenlänge s, $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$, beschrieben und sind $f(s)$ die Randwerte der gesuchten harmonischen Funktion $u(p) = \int\limits_C g(t) \cdot \log \frac{1}{r_{pt}} \cdot dt$, $p \epsilon G$, so ist die Dichte g der einfachen Schicht Lösung der Integralgleichung 1. Art

$$f(s) = \int\limits_C g(t) \cdot \log \frac{1}{r_{st}} \cdot dt$$

Hilbert hat festgestellt, daß der Kern $\log \frac{1}{r_{st}}$ dieselbe Singularität aufweist wie die Funktion $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(s-t)}{\pi \cdot n^{2\zeta}} \equiv H(s,t;\zeta)$ für $\zeta = \frac{1}{2}$. Der Operator

$$I^{\zeta} f \equiv \int\limits_0^{2\pi} H(s,t;\zeta) \cdot f(t) \cdot dt + \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} f(t) \cdot dt$$

ermöglicht die Überführung der Integralgleichung 1. Art

$$f(s) = \int\limits_0^{2\pi} K(s,t) \cdot g(t) \cdot dt \;, \quad K(s,t) = H(s,t;\zeta) + \text{reguläre Funktion}$$

in eine Integralgleichung 2. Art, dank den Eigenschaften

$$I^{\zeta}(I^{\zeta_1}f) = I^{\zeta+\zeta_1}f\,, \quad I^0 f = f\,, \quad \frac{d^2}{dt^2} I^{\zeta} f = -I^{\zeta-1} f + \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} f(t)\cdot dt\ .$$

Bei der Übertragung dieser Methode in den Raum kann man von der Tatsache ausgehen, daß die Eigenfunktionen $\sin(ns)$, $\cos(ns)$ des Kernes $H(s,t;\zeta)$ die periodischen Lösungen der Differentialgleichung $\varphi''(s)+\lambda\cdot\varphi(s)=0$ $(0\leqslant s\leqslant 2\pi,\ \lambda=n^2)$ sind. Man wird somit die Eigenschaften der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(p)\cdot\varphi_n(q)}{\lambda_n^{\zeta}}\equiv H(p,q;\zeta)$ untersuchen, wobei die $\varphi_n(p)$ die überall auf dem Rande Ω eines Gebietes regulären Lösungen und die λ_n die entsprechenden Eigenwerte der Laplace-Beltramischen Differentialgleichung $\Delta\varphi+\lambda\cdot\varphi=0$ sind (§ 2).

Eine uns während diesen Untersuchungen zur Kenntnis gekommene Arbeit von *Minakshisundaram* und *Pleijel* [4] löst im wesentlichen die uns interessierenden Probleme über die analytische Fortsetzung von $H(p,q;\zeta)$ bezüglich ζ. Für den Nachweis der Ableitungen von $H(p,q;\zeta)$ benötigen wir aber Abschätzungen für $\xi\to+\infty$ der Greenschen Funktion $G(p,q;\xi)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(p)\cdot\varphi_n(q)}{\lambda_n+\xi}$ des Differentialausdruckes $\Delta f-\xi f$, die über die Resultate der Abhandlung [4] hinausgehen, und die wir in Anlehnung an die erwähnte Arbeit in § 1 entwickeln.

Der Operator $I^{\zeta}f\equiv\int\limits_{\Omega} H(p,q;\zeta)\cdot f(q)\cdot d\omega_q+\frac{1}{S}\cdot\int\limits_{\Omega} f(q)\cdot d\omega_q$,
$S=$ Inhalt von Ω, besitzt ähnliche Eigenschaften wie das Analogon in der Ebene (§ 3) und gestattet die Zurückführung der Integralgleichungen 1. Art, deren Kerne die gleiche Singularität wie $H(p,q;\zeta)$ aufweisen, auf Integralgleichungen 2. Art vom Fredholmschen Typus (§ 4).

Insbesondere hat der reziproke Abstand $\frac{1}{r_{pq}}$ der Punkte p und q $(p,q\in\Omega)$ die Singularität von $H(p,q;\frac{1}{2})$, so daß die am Anfang gestellte Frage über die Lösung des Dirichletschen Problems durch Anwendung der Resultate von § 4 in § 5 behandelt werden kann. In § 6 wird für die Einheitskugel noch ein weiteres Resultat in dieser Richtung angegeben.

E. Picard hat eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben für die Lösung des Dirichletschen Problems durch das Potential einer einfachen Schicht mit quadratisch integrierbarer Dichte. (Siehe [2], S. 478 und [6].) Es scheint aber nicht leicht zu sein, daraus Lösbarkeitsbedingungen herzuleiten, die nur Differenzierbarkeitseigenschaften der Randwerte enthalten. Unter Benützung Cauchyscher Hauptwerte hat *Bertrand*

[7] im Falle der Ebene zeigen können, daß die Existenz der zweiten Ableitung der Randwerte hinreicht, was der in unserer Arbeit gefundenen Bedingung entspricht.

§ 1 Greensche Funktion und Parametrix

Wir betrachten eine im R_3 eingebettete, endliche, geschlossene, zusammenhängende, zweidimensionale Fläche Ω. Ihre Punkte bezeichnen wir mit $p, q, t \ldots$, die geodätische Entfernung von p und q mit s_{pq}.

Wir setzen in der ganzen Arbeit voraus, daß, in bezug auf lokale Normalkoordinaten q_1, q_2, die Koeffizienten $g_{ik}(q)$ der metrischen Form $ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}(q) \cdot dq_i \cdot dq_k$ 5mal stetig differenzierbar sind.

Für Funktionen f auf Ω führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$f(p) \in C^{(n)}$ oder $f(p,q) \in C^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, heißt, f besitzt ein n.stetiges Differential im betrachteten Bereiche. Wenn keiner bezeichnet ist, handelt es sich um Ω bzw. $\Omega \times \Omega$.

$f(p,q) \in C_\kappa^{(n)}$ heißt: 1) $f(p,q) \in C^{(n)}$ für $s_{pq} > 0$.
2) Es gibt zwei positive Konstanten δ und c so, daß im Bereiche $0 < s_{pq} \leqslant \delta$ von $\Omega \times \Omega$ $|f(p,q)| \leqslant c(s_{pq}^\kappa + 1)$ für $\kappa \neq 0$ und $|f(p,q)| \leqslant c\,|\log s_{pq}|$ für $\kappa = 0$ ist, und daß die absoluten Beträge der Ableitungen ν. Ordnung, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, in diesem Bereiche kleiner sind als $c(s_{pq}^{\kappa-\nu} + 1)$.

$f(p,q) \in C_\kappa^{(n)}$ für q fest, heißt, die Ableitungen und ihre Schranken brauchen nur bezüglich des Punktes p zu existieren.

Der Laplace-Beltrami-Operator auf Ω lautet

$$\Delta_q f(q) \equiv \frac{1}{\sqrt{d(q)}} \cdot \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{d(q)} \cdot \sum_{k=1}^{2} g^{ik}(q) \frac{\partial f(q)}{\partial q_k}\right), \quad q = q(q_1, q_2)$$

wobei die g^{ik} durch $\sum_{k=1}^{2} g_{ik} \cdot g^{kl} = \delta_i^l$ definiert sind. $d(q) \equiv \| g_{ik}(q) \|$.

Die einzige überall auf Ω reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Delta_q f(q) = 0$ ist $f = \text{const.}$ Folglich existiert eine verallgemeinerte Greensche Funktion $G_0(p,q)$ des Differentialausdruckes Δf, welche für $s_{pq} \to 0$ logarithmisch singulär wird und den Beziehungen

$$\Delta_p G_0(p,q) = \Delta_q G_0(p,q) = \frac{1}{S}, \quad p \neq q, \quad S = \text{Inhalt von } \Omega,$$

genügt. Ebenso existiert ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_n(p)\}$ von Eigenfunktionen und eine Folge von reellen, nichtnegativen Eigenwerten λ_n der Differentialgleichung $\Delta\varphi + \lambda_n \cdot \varphi = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,