Algebren mit multiplikativen Strukturen

Author(s):
Vögele, Heinz

Publication Date:
1967

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000107345

Diss. Nr. 3906

Algebren mit multiplikativen Strukturen

ABHANDLUNG

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von
HEINZ VÖGELE
dipl. Math. ETH
geboren am 13. August 1936
von Leibstadt (Kt. Aargau)

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. B. Eckmann, Referent
Prof. Dr. H. Läuchli, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1967

EINLEITUNG

In einer Kategorie $\mathcal{C}$ mit Nullabbildungen, in welcher Produkte und Coprodukte existieren, nennt man ein Objekt A ein H-Objekt, falls eine Strukturabbildung $m : A \times A \longrightarrow A$ des Produktes $A \times A$ in A existiert, derart dass

$$m \varkappa = \bar{d} : A * A \longrightarrow A \times A \longrightarrow A$$

gilt. Dabei ist $\varkappa$ die kanonische Abbildung des Coproduktes $A * A$ in das Produkt $A \times A$; $\bar{d}$ ist die Faltungsabbildung des Coproduktes $A * A$ nach A. Die Strukturabbildung m heisst eine Multiplikation oder H_2-Struktur. Durch gewisse zusätzliche Axiome können "Assoziativität" und "Kommutativität" der Multiplikation sowie die Existenz einer Inversenabbildung formuliert werden, und zwar sind diese Axiome so konzipiert, dass sie den Gruppenbegriff in die kategorische Sprache übertragen. Genauer: diese Axiome gehen in dem Falle wo $\mathcal{C}$ die Kategorie der punktierten Mengen ist, in die üblichen Gruppenaxiome über.

In [1] wird eine Theorie solcher Strukturabbildungen in allgemeinen Kategorien entwickelt. Durch die Beschreibung der Gruppenaxiome durch rein kategorische Begriffe gewinnt man nicht nur an Allgemeinheit, sondern es wird auch die Möglichkeit der Dualisierung geschaffen.

So werden in [1] die zu den H_2-Strukturen dualen H^2-Strukturen definiert. Ein Objekt $B \in \mathcal{C}$ heisst ein H'-Objekt, falls eine H^2-Struktur oder Comultiplikation $\delta : B \longrightarrow B * B$ existiert, derart dass:

$$\varkappa \delta = \underline{d} : B \longrightarrow B * B \longrightarrow B \times B ,$$

wobei $\underline{d} : B \longrightarrow B \times B$ die Diagonale ist.

Eine sinngemässe Verallgemeinerung der H_2- resp. der H^2-Strukturen gewinnt man aus der Betrachtung der kanonischen Abbildung $\varkappa$:

$$\varkappa : X_1 * X_2 \dots * X_n \longrightarrow X_1 \times X_2 \dots \times X_n$$

des Coproduktes der n Objekte $X_1, \dots , X_n$ in das Produkt dieser Objekte. Unter der Voraussetzung, dass in der Kategorie $\mathcal{C}$ endliche Limites existieren, werden in [1] zwei zueinander duale Faktorisierungen (F) und (F') der Abbildung $\varkappa$ konstruiert.

Man sagt, ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ besitze eine H_n-Struktur μ, wenn sich die Faltungsabbildung $\bar{d} : X_1 * \ldots * X_n \longrightarrow X$, $X_1 = \ldots = X_n = X$, über ein bestimmtes Zwischenobjekt T von (F) faktorisieren lässt:

$$\bar{d} = \mu\sigma : X_1 * X_2 \ldots * X_n \xrightarrow{\sigma} T \xrightarrow{\mu} X$$

Dual dazu sind die H^n-Strukturen definiert. Die H_n- resp. die H^n-Strukturen geben Anlass zu zwei zueinander dualen Längenbegriffen $\underline{\ell}(X)$ und $\bar{\ell}(X)$, $X \in \mathcal{C}$. Diese Längen ordnen den Objekten aus $\mathcal{C}$ gewisse ganze Zahlen, möglicherweise ∞, zu.

In [4] wird die Bedeutung der Länge in der Kategorie $\mathfrak{G}$ der Gruppen untersucht. Es zeigt sich, dass jede Gruppe G von der Länge $\bar{\ell}(G) < 3$ ist, und dass die Gruppen der Länge 1 die freien Gruppen sind. Andererseits ist eine Gruppe G genau dann von der Länge $\underline{\ell}(G) = n$, wenn ihre Nilpotenzklasse gleich n ist.

In der vorliegenden Arbeit werden die Längen $\underline{\ell}$ und $\bar{\ell}$ in der Kategorie $\mathfrak{A}$ der augmentierten Algebren mit Eins untersucht. Wir zeigen, dass eine Algebra $A \in \mathfrak{A}$ genau dann von der Länge $\underline{\ell}(A) \leq n$ ist, wenn alle Produkte von n Elementen aus dem Augmentationskern Null sind; ferner, dass für alle Algebren $A \in \mathfrak{A}$ die duale Länge $\bar{\ell}(A) < 3$ ist. In [2] untersucht I. Berstein die Algebren von der Länge $\bar{\ell}(A) = 1$ in der Kategorie der zusammenhängenden, graduierten Algebren. I. Berstein zeigt dort, dass jede zusammenhängende, graduierte Algebra A von der Länge $\bar{\ell}(A) = 1$ einen Untermodul N, den sogenannten Modul der "normierten" Elemente, enthält, derart dass A isomorph ist zur vollen Tensoralgebra über diesem Modul N. Weiter zeigt I. Berstein, dass im Falle, wo die Comultiplikation δ einer zusammenhängenden, graduierten Algebra A mit $\bar{\ell}(A) = 1$ assoziativ ist, der obige Modul N eine Coalgebrastruktur besitzt und dass diese Coalgebrastruktur sowohl die multiplikative als auch die Comultiplikative Struktur der Algebra A eindeutig bestimmt. Wir formulieren diesen von I. Berstein bewiesenen Sachverhalt, die zusammenhängenden, graduierten Algebren der Länge $\bar{\ell}(A) = 1$ betreffend, in zwei Sätzen, deren Inhalt von der Berstein'schen Fassung leicht verschieden ist und geben dann neue Beweise für diese beiden Sätze.

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit werden die grundlegenden Begriffe in der Kategorie der augmentierten Algebren definiert und Produkte und Coprodukte konstruiert. Im Abschnitt 2 werden die fundamentalen Konstruktionen der Faktorisierungen (F) und (F') gemäss [1] rekapituliert, worauf sie dann in Abschnitt 3 und 4 in der Kategorie der augmentierten Algebren explizit ermittelt werden und zu den genannten Sätzen über Längen führen. Im Abschnitt 5 werden die H'-Objekte mit assoziativer Comultiplikation in der Kategorie der zusammenhängenden, graduierten Algebren behandelt. Zum Schluss werden als Illustration zwei Anwendungen der Sätze über Längen von Algebren auf algebraisch-topologische Fragestellungen beschrieben.

1. Produkt und Coprodukt in der Kategorie der augmentierten Algebren

Mit Λ bezeichnen wir einen beliebigen, im Folgenden aber fest gewählten, kommutativen Ring mit Eins. Wenn wir von Moduln sprechen, meinen wir immer Λ-Moduln und Tensorprodukte von Moduln sind immer über dem Ring Λ gebildet.

Der Ring Λ selbst soll, wenn nötig, als Λ - Modul über sich selbst aufgefasst werden. Modulhomomorphismen sind immer, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, Λ - Modulhomomorphismen.

Eine assoziative Λ - Algebra A mit Eins ist ein Λ - Modul A mit Λ - Modulhomomorphismen $\varphi : A \otimes A \longrightarrow A$ und $\eta : \Lambda \longrightarrow A$, sodass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1 \otimes \varphi"] \arrow[d, "\varphi \otimes 1"] & A \otimes A \arrow[d, "\varphi"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\varphi"] & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \Lambda \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes 1"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\varphi"] \\ & A \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} A \otimes \Lambda \arrow[r, "1 \otimes \eta"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "\varphi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

kommutativ sind. In diesem Sinne kann der Ring Λ auch als Λ - Algebra interpretiert werden.

Ein Modulhomomorphismus $: A \longrightarrow \Lambda$, welcher verträglich ist mit φ und η, heisst Augmentation der Algebra A. Der Modulhomomorphismus $\varepsilon\eta : \Lambda \longrightarrow A$