Exaktes Rechnen mit reellen Zahlen und anderen unendlichen Objekten

Doctoral Thesis

Author(s):
Wiedmer, Edwin

Publication date:
1977

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000108936

Diss. ETH 5975

EXAKTES RECHNEN MIT REELLEN ZAHLEN UND ANDEREN UNENDLICHEN OBJEKTEN

A B H A N D L U N G

zur Erlangung des Titels eines

Doktors der Mathematik

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

Edwin Wiedmer

Dipl. Math. ETH

geboren am 7. November 1949

von Diemtigen (Kt. Bern)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. E. Engeler, Referent

Prof. Dr. E. Specker, Korreferent

1977

Abstract

Real numbers are the best known examples of objects represented by words of infinite length (e.g. infinite decimal fractions).

In the first part of this thesis we show how to actually compute with real numbers in a reliable way, using signed digit number representations.

In the second, more theoretical part we generalize to computation on arbitrary sets S by means of surjective mappings from subsets of the set of all finite and infinite words over a finite Alphabet A into S .

In the third part we illustrate our theory with further examples : $\mathbb{N} \cup \{\text{" undefined"}\}$, $2^{\mathbb{N}}$, formal power series , etc .

key phrases : multiple precision arithmetic, signed digit number representation, network of parallel processes, fixpoint computation, constructive analysis, theory of computation, complete partial order (CPO), recursion schema, fixpoint theorem .

Zusammenfassung

Reelle Zahlen sind das bekannteste Beispiel von Objekten, welche durch unendlich lange Wörter (d.h. unendliche Dezimalbrüche) beschrieben werden.

Im ersten Teil dieser Arbeit beschreiben wir nun, wie man damit in der Praxis trotzdem zuverlässig rechnen kann.

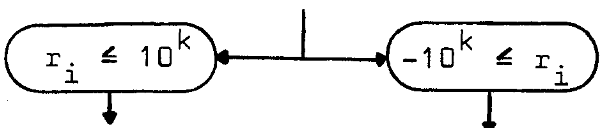
Stellt man nämlich die reellen Zahlen durch verallgemeinerte Dezimalbrüche dar, d.h. mit Ziffern zwischen -9 und 9 (signed digit number representation, A. Avizienis [1960, 1962]), so ist exaktes Rechnen möglich (Kap. 1.4) .

Das heisst :

1) Alle berechneten Stellen sind korrekt.

2) Die Anzahl der berechneten Stellen kann mit entsprechendem Arbeitsaufwand (auch nachträglich) beliebig erhöht werden.

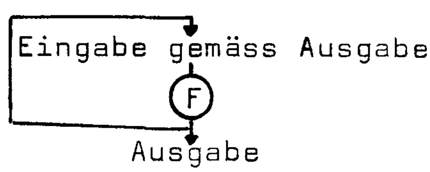
Insbesonders können Resultate von beliebigen Algorithmen aufgebaut aus Wertzuweisungen $r_i := r_j + r_k$ (bzw. $-$, $\cdot$, $/$, Γ) und (da deterministische Verzweigungen nicht konstruktiv sind) nichtdeterministischen Verzweigungen der Art



$(k \in \mathbb{Z})$

exakt berechnet werden (1.5) .

Fixpunkte von diversen kontrahierenden Abbildungen $F : I \dashrightarrow I$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ lassen sich durch zirkuläres Verknüpfen von Prozessen elegant berechnen (1.6.2, 1.6.3) .



Grenzwerte von genügend stark konvergierenden Reihen (Bsp. : $e = \sum_{0=k<\infty} 1/(k!)$) können mit - entsprechend der gewünschten Anzahl Stellen - unbeschränkt wachsenden Prozessgraphen (Prozessornetzwerken) berechnet werden (1.6.4) .

Im zweiten, theoretischen Teil untersuchen wir Berechnungen auf beliebigen Mengen S bezüglich Codierungen $c : C \longrightarrow S$. Dabei ist die Menge der Codewörter C eine Teilmenge aller endlichen und unendlichen Wörter über einem endlichen Alphabet A , das heisst $C \subseteq A^{\omega}$.

Jede solche Codierung c induziert auf naheliegende Weise eine Topologie G_c in S (bzw. $G_c^{(k)}$ in S^k), bezüglich welcher alle (in 2.1 und 2.3) als <u>approximativ berechenbar</u> definierte Funktionen <u>stetig</u> sind (2.4) .

Die approximativ berechenbaren Funktionen sind auch der geeignete Rahmen für das Rechnen mit <u>Prozessgraphen</u> (Prozessornetzwerken) (2.2 und 2.5) .

Im dritten Teil schliesslich, werden die theoretischen Resultate an weiteren Beispielen illustriert : $\mathbb{N} \cup \{\text{"undefiniert"}\}$, $2^{\mathbb{N}}$, formale Potenzreihen, etc. .