Ueber die linearen Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten

Author(s):
Patry, Jean

Publication Date:
1957

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000111037 →

Prom. Nr. 2618

Über die lineare Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten

Von der
Eidgenössischen Technischen
Hochschule in Zürich

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der Mathematik
genehmigte

PROMOTIONSARBEIT

vorgelegt von

JEAN PATRY
Dr. ès Sciences physiques de l'Université de Genève
von Genf und Zürich

Referent: Herr Prof. Dr. M. Strutt
Korreferent: Herr Prof. Dr. E. Stiefel

Juris-Verlag Zürich
1957

Summary

The importance of differential linear equation with periodical coefficients can be estimated by the number of publications concerning them. Numerous problems of physics, chemistry and technics must be solved by the help of these equations. On the other hand it is evident that their properties and those of their solutions are only very imperfectly known. For each type of equation several methods of solution are proposed without their being the object of a general research, except in rare cases.

Two methods for the solution of equation with sinusoidal coefficients are treated here in a very general way. It will thus be possible to discover many known properties for certain types of equation and to pose with great precision the conditions essential for their realisation. These two methods are based on an equation with recurrence to three terms, and are therefore specially adapted to modern automatic digital computer. Further it must be pointed out that these two methods of solution can also be applied to other equations if the basic substitution is modified. It is even possible to obtain the solution of certain equations in two different forms or more.

The spheres of application of these two methods are complementary: They are determined at the stait of the singular points of the differential equation. The latter are 4 in number, if we include an auxiliary variable ($Z = e^{ix}$ for the equation with sinusoidal coefficients), the origin, the point at infinity and two isolated singular points whose position varies from one equation to the other.

An analytical method, deducted from the theory of Fuchs (part 11 and 12) allows us to calculate the coefficients of a series-solution convergent either in the sphere of the origin, or in that of the point at infinity.

The characteristical values are all determined by an algebraical equation (part 12). The recurrent system can then be resolved directly, hence the name of "direct method" which will refer to this method throughout the whole of this publication. For the case of two characteristical value only differing an entire number, the general form of the solution must be modified. These solutions, known as of second or third kind, can be calculated by means of a modified recurrent system and of a method quite as direct as the solution of the first kind. Equations with right hand side give rise to no particular difficulty, if the right hand side fullfills certain very general conditions (part 31). Two numerical examples (part 17 and 32) allows of the estimation of the practical value of these results.

The second method under consideration here, is applicable in the intermediary sphere. It has often been employed in special cases for instance for the equation of Mathieu, Lamé and Whittaker. It may be considered as an extension of the method of infinite determinants (part 13 and 14). The recurrent system to three terms is infinite

in both directions and can be resolved only numerically with the help of a serie of successive approximations. The sphere of convergence of this method named numerical must be examined very carefully, as to our knowledge no such research has been made (part 15 and 16).

In the majority of practical applications, the differential equation presents certain symmetrical properties. These properties are very important, as they allows us to simplify the method of calculation. The characteristical equation which is almost allways transcendant, can be slightly simplified (part 21). For certain values of parameters, two or three solutions exist for the same characteristical value, of which one at least is quasiperiodical by the means of Floquet's theorem. If one very precise condition is fullfilled, two solutions are periodical (part 22) whereas, asa general rule, the second has the same form as the solution of second kind of the direct method. This problem of double solution is closely allied to that of the stability of the solutions. It is therefore interesting to note that the sphere of instability can disappear in certain cases. The condition fixed for double solutions often lead to solutions in the form of limited sums. The characteristical equation is therefore algebraical and no longer transcendant (part 23). The Whittaker's equation (part 25), equations which can be described as "equations of the optical net" (part 24), and two antisymetrical equations (part 26) are treated numerically to illustrate those theoretical results.

The resolution in the intermediary sphere of differential equations with right hand side is possible by a method analogous to the numerical method (part 33) in very general conditions. The determination of solutions of second kind is not so simple, but the linearity of the recurrent system allows us to avoid the difficulty (part 34). The Mathieu's equation will serve as a practical exemple (part 35).

A bibliographical list without any pretence of being complete, close this study.

Résumé

L'importance des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques peut s'évaluer au nombre des publications qui s'y rapportent. De nombreux problèmes de la physique, de la chimie et de la technique doivent être résolus par l'intermédiaire de ces équations.

D'autre part, il est manifeste que leurs propriétés et celles de leurs solutions ne sont connues que très imparfaitement. Pour chaque type d'équations, plusieurs méthodes de résolution sont proposées sans qu'elles fassent l'objet d'une étude approfondie pour le cas général, à de rares exceptions près.

Deux méthodes pour la résolution des équations à coefficients sinusoïdaux sont considérées ici à un point de vue très général. Il est ainsi possible de retrouver de nombreuses propriétés, connues pour certains types d'équations, et de déterminer avec plus de précision les conditions nécessaires à leur réalisation. Ces deux méthodes présentent en outre deux avantages remarquables. Elles sont tout-d'abord basées sur une équation de récurrence à trois termes et, de ce fait, sont spécialement adaptées aux machines à calculer automatiques modernes. D'autre part, elles peuvent aussi s'appliquer à d'autres équations, si la substitution de base est modifiée. Il est même possible d'obtenir la solution de certaines équations sous plusieurs formes différentes.

Les domaines d'application de ces deux méthodes sont complémentaires. Ils se déterminent à partir des points singuliers de l'équation différentielle. Ces derniers sont au nombre de quatre, si l'on considère une variable auxiliaire ($Z=e^{ix}$ pour les équations à coefficients sinusoïdaux), l'origine, le point à l'infini et deux points singuliers isolés, dont la position varie d'une équation à l'autre.

Une méthode analytique, déduite du théorème de Fuchs (chap. 11 et 12), permet de calculer les coefficients d'une série solution convergente, soit dans le domaine de l'origine, soit dans celui du point-infini.

Les valeurs caractéristiques sont déterminées par une équation algébrique unique (chap. 12). Le système récurrent peut alors être résolu directement, d'où le nom de "méthode directe" qui désignera cette méthode tout au long de cette étude. Dans le cas où deux valeurs caractéristiques ne diffèrent que d'un nombre entier, il est nécessaire de modifier l'expression générale de la solution. Ces solutions, dites du deuxième ou du troisième rang, peuvent se calculer au moyen d'un système récurrent modifié et par une méthode tout aussi directe que les solutions de premier rang.

Les équations avec second membre ne donnent lieu à aucune difficulté particulière, si le second membre remplit certaines conditions très générales (chap. 31). Deux exemples numériques (chap. 17 et 32) permettent d'évaluer la valeur pratique de ces résultats.

La second méthode envisagée ici est valable dans le domaine intermédiaire. Elle a déjà souvent été utilisée dans des cas particuliers, comme pour l'équation de Mathieu, de Lamé, de Whittaker. On peut la considérer comme une extension de la méthode de Hill par les déterminants infinis (chap. 13 et 14). Le système récurrent à trois termes est infini dans les deux directions et ne peut être résolu que numériquement à l'aide d'une méthode par approximations successives. Le domaine de convergence de cette méthode numérique doit être examiné très soigneusement (chap. 15 et 16),car une telle étude n'a pas encore été effectuée à notre connaissance.

Dans la plupart des applications pratiques, l'équation différentielle présente certaines propriétés de symétrie. Ces propriétés sont très importantes, car elles permettent de simplifier la méthode de calcul. L'équation caractéristique, qui est presque toujours transcendante, peut être un peu simplifiée (chap. 21).

Pour certaines valeurs des paramètres, il existe, pour la même valeur caractéristique, deux ou trois solutions dont l'une au moins est quasi-périodique au sens de Floquet. Si une condition très précise est satisfaite, deux solutions sont quasi-périodiques (chap. 22) alors que, dans le cas général, la seconde a la même forme que les solutions de second rang de la méthode directe. Ce problème des solutions doubles est intimément lié à celui de la stabilité des solutions. Il est donc intéressant de constater que le domaine d'instabilité peut disparaître dans certains cas.

Les conditions déterminées pour les solutions doubles conduisent souvent à des solutions sous forme de sommes finies. L'équation caractéristique est alors algébrique et non plus transcendante (chap. 23). L'équation de Whittaker (chap. 25), trois équations que l'on peut désigner sous le nom d'"équations du réseau optique" (chap. 24) et deux équations antisymétriques (chap. 26) font l'objet d'une étude numérique pour illustrer ces résultats théoriques.

La résolution des équations différentielles avec second membre est possible dans le domaine intermédiaire par une méthode analogue à la méthode numérique (chap. 33) dans des conditions très générales. La détermination des solutions de second rang n'est pas aussi simple, mais la linéarité du système récurrent permet de tourner la difficulté (chap. 34). L'équation de Mathieu servira d'exemple pratique (chap. 35).

La liste bibliographique, qui termine cette étude, ne prétend en aucune façon être complète.