

Prom. Nr. 2618

**Über die
linearen Differentialgleichungen
mit sinusförmigen Koeffizienten**

Von der
Eidgenössischen Technischen
Hochschule in Zürich

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der Mathematik
genehmigte

PROMOTIONSARBEIT

vorgelegt von

JEAN PATRY

Dr. ès Sciences physiques de l'Université de Genève
von Genf und Zürich

Referent: Herr Prof. Dr. M. Strutt

Korreferent: Herr Prof. Dr. E. Stiefel

Juris-Verlag Zürich
1957

Leer - Vide - Empty

**Meiner Mutter und
meiner Frau
gewidmet**

Leer - Vide - Empty

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Summary	7
Résumé	9
Einleitung	11
Kapitel I : DREI ALLGEMEINE LOESUNGSMETHODEN	15
11. Die analytischen Grundlagen	15
12. Die Lösungen in den Randgebieten	21
13. Die Hill'sche Methode für das Gebiet III	25
14. Die numerische Lösungsmethode	33
15. Die Gültigkeit der numerischen Methode	40
16. Die besonderen Fälle	48
17. Ein praktisches Beispiel der direkten Methode: Die Grundgleichung der elektrostatischen Fokussierung	51
Kapitel II : DIE GLEICHUNGEN MIT SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN	61
21. Die allgemeine Theorie der Gleichungen mit Symmetrie-Eigenschaften	61
22. Das Problem der Doppellösungen	68
23. Andere Eigenschaften der Gleichungen mit Doppellösungen	71
24. Ein praktisches Beispiel der numerischen Methode: Die Differentialgleichungen des optischen Gitters	77
25. Eine Differentialgleichung mit Doppellösungen: Die Whittaker'sche Gleichung	86
26. Zwei praktische Beispiele von antisymmetrischen Differential- gleichungen	101
Kapitel III : DIE INHOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	108
31. Die direkte Methode	108
32. Ein praktisches Beispiel: Die Steuerungs-Schaltung	113
33. Die numerische Methode	116
34. Die Lösungen zweiter Art im Gebiet III	119
35. Die Lösungen zweiter Art der Mathieu'schen Gleichung	124
Allgemeine Schlussbemerkungen	131
Literatur-Verzeichnis	132

Leer - Vide - Empty

Summary

The importance of differential linear equation with periodical coefficients can be estimated by the number of publications concerning them. Numerous problems of physics, chemistry and technics must be solved by the help of these equations. On the other hand it is evident that their properties and those of their solutions are only very imperfectly known. For each type of equation several methods of solution are proposed without their being the object of a general research, except in rare cases.

Two methods for the solution of equation with sinusoidal coefficients are treated here in a very general way. It will thus be possible to discover many known properties for certain types of equation and to pose with great precision the conditions essential for their realisation. These two methods are based on an equation with recurrence to three terms, and are therefore specially adapted to modern automatic digital computer. Further it must be pointed out that these two methods of solution can also be applied to other equations if the basic substitution is modified. It is even possible to obtain the solution of certain equations in two different forms or more.

The spheres of application of these two methods are complementary: They are determined at the stait of the singular points of the differential equation. The latter are 4 in number, if we include an auxiliary variable ($Z = e^{ix}$ for the equation with sinusoidal coefficients), the origin, the point at infinity and two isolated singular points whose position varies from one equation to the other.

An analytical method, deducted from the theory of Fuchs (part 11 and 12) allows us to calculate the coefficients of a series-solution convergent either in the sphere of the origin, or in that of the point at infinity.

The characteristical values are all determined by an algebraical equation (part 12). The recurrent system can then be resolved directly, hence the name of "direct method" which will refer to this method throughout the whole of this publication. For the case of two characteristical value only differing an entire number, the general form of the solution must be modified. These solutions, known as of second or third kind, can be calculated by means of a modified recurrent system and of a method quite as direct as the solution of the first kind. Equations with right hand side give rise to no particular difficulty, if the right hand side fullfills certain very general conditions (part 31). Two numerical examples (part 17 and 32) allows of the estimation of the practical value of these results.

The second method under consideration here, is applicable in the intermediary sphere. It has often been employed in special cases for instance for the equation of Mathieu, Lamé and Whittaker. It may be considered as an extension of the method of infinite determinants (part 13 and 14). The recurrent system to three terms is infinite

in both directions and can be resolved only numerically with the help of a serie of successive approximations. The sphere of convergence of this method named numerical must be examined very carefully, as to our knowledge no such research has been made (part 15 and 16).

In the majority of practical applications, the differential equation presents certain symmetrical properties. These properties are very important, as they allows us to simplify the method of calculation. The characteristical equation which is almost allways transcendant, can be slightly simplified (part 21). For certain values of parameters, two or three solutions exist for the same characteristical value, of which one at least is quasiperiodical by the means of Floquet's theorem. If one very precise condition is fulfilled, two solutions are periodical (part 22) whereas, as a general rule, the second has the same form as the solution of second kind of the direct method. This problem of double solution is closely allied to that of the stability of the solutions. It is therefore interesting to note that the sphere of instability can disappear in certain cases. The condition fixed for double solutions often lead to solutions in the form of limited sums. The characteristical equation is therefore algebraical and no longer transcendant (part 23). The Whittaker's equation (part 25), equations which can be described as "equations of the optical net" (part 24), and two antisymmetrical equations (part 26) are treated numerically to illustrate those theoretical results.

The resolution in the intermediary sphere of differential equations with right hand side is possible by a method analogous to the numerical method (part 33) in very general conditions. The determination of solutions of second kind is not so simple, but the linearity of the recurrent system allows us to avoid the difficulty (part 34). The Mathieu's equation will serve as a practical exemple (part 35).

A bibliographical list without any pretence of being complete, close this study.

Résumé

L'importance des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques peut s'évaluer au nombre des publications qui s'y rapportent. De nombreux problèmes de la physique, de la chimie et de la technique doivent être résolus par l'intermédiaire de ces équations.

D'autre part, il est manifeste que leurs propriétés et celles de leurs solutions ne sont connues que très imparfaitement. Pour chaque type d'équations, plusieurs méthodes de résolution sont proposées sans qu'elles fassent l'objet d'une étude approfondie pour le cas général, à de rares exceptions près.

Deux méthodes pour la résolution des équations à coefficients sinusoidaux sont considérées ici à un point de vue très général. Il est ainsi possible de retrouver de nombreuses propriétés, connues pour certains types d'équations, et de déterminer avec plus de précision les conditions nécessaires à leur réalisation. Ces deux méthodes présentent en outre deux avantages remarquables. Elles sont tout-d'abord basées sur une équation de récurrence à trois termes et, de ce fait, sont spécialement adaptées aux machines à calculer automatiques modernes. D'autre part, elles peuvent aussi s'appliquer à d'autres équations, si la substitution de base est modifiée. Il est même possible d'obtenir la solution de certaines équations sous plusieurs formes différentes.

Les domaines d'application de ces deux méthodes sont complémentaires. Ils se déterminent à partir des points singuliers de l'équation différentielle. Ces derniers sont au nombre de quatre, si l'on considère une variable auxiliaire ($Z=e^{ix}$ pour les équations à coefficients sinusoidaux), l'origine, le point à l'infini et deux points singuliers isolés, dont la position varie d'une équation à l'autre.

Une méthode analytique, déduite du théorème de Fuchs (chap. 11 et 12), permet de calculer les coefficients d'une série solution convergente, soit dans le domaine de l'origine, soit dans celui du point-infini.

Les valeurs caractéristiques sont déterminées par une équation algébrique unique (chap. 12). Le système récurrent peut alors être résolu directement, d'où le nom de "méthode directe" qui désignera cette méthode tout au long de cette étude. Dans le cas où deux valeurs caractéristiques ne diffèrent que d'un nombre entier, il est nécessaire de modifier l'expression générale de la solution. Ces solutions, dites du deuxième ou du troisième rang, peuvent se calculer au moyen d'un système récurrent modifié et par une méthode tout aussi directe que les solutions de premier rang.

Les équations avec second membre ne donnent lieu à aucune difficulté particulière, si le second membre remplit certaines conditions très générales (chap. 31). Deux exemples numériques (chap. 17 et 32) permettent d'évaluer la valeur pratique de ces résultats.

La seconde méthode envisagée ici est valable dans le domaine intermédiaire. Elle a déjà souvent été utilisée dans des cas particuliers, comme pour l'équation de Mathieu, de Lamé, de Whittaker. On peut la considérer comme une extension de la méthode de Hill par les déterminants infinis (chap. 13 et 14). Le système récurrent à trois termes est infini dans les deux directions et ne peut être résolu que numériquement à l'aide d'une méthode par approximations successives. Le domaine de convergence de cette méthode numérique doit être examiné très soigneusement (chap. 15 et 16), car une telle étude n'a pas encore été effectuée à notre connaissance.

Dans la plupart des applications pratiques, l'équation différentielle présente certaines propriétés de symétrie. Ces propriétés sont très importantes, car elles permettent de simplifier la méthode de calcul. L'équation caractéristique, qui est presque toujours transcendante, peut être un peu simplifiée (chap. 21).

Pour certaines valeurs des paramètres, il existe, pour la même valeur caractéristique, deux ou trois solutions dont l'une au moins est quasi-périodique au sens de Floquet. Si une condition très précise est satisfaite, deux solutions sont quasi-périodiques (chap. 22) alors que, dans le cas général, la seconde a la même forme que les solutions de second rang de la méthode directe. Ce problème des solutions doubles est intimement lié à celui de la stabilité des solutions. Il est donc intéressant de constater que le domaine d'instabilité peut disparaître dans certains cas.

Les conditions déterminées pour les solutions doubles conduisent souvent à des solutions sous forme de sommes finies. L'équation caractéristique est alors algébrique et non plus transcendante (chap. 23). L'équation de Whittaker (chap. 25), trois équations que l'on peut désigner sous le nom d'"équations du réseau optique" (chap. 24) et deux équations antisymétriques (chap. 26) font l'objet d'une étude numérique pour illustrer ces résultats théoriques.

La résolution des équations différentielles avec second membre est possible dans le domaine intermédiaire par une méthode analogue à la méthode numérique (chap. 33) dans des conditions très générales. La détermination des solutions de second rang n'est pas aussi simple, mais la linéarité du système récurrent permet de tourner la difficulté (chap. 34). L'équation de Mathieu servira d'exemple pratique (chap. 35).

La liste bibliographique, qui termine cette étude, ne prétend en aucune façon être complète.

Einleitung

Die Wichtigkeit der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten lässt sich aus der sehr grossen Zahl der, sie behandelnden Arbeiten beurteilen (Siehe das bei weitem nicht vollständige Literaturverzeichnis am Schluss dieser Untersuchung). Viele Probleme der Physik, der Chemie und der Technik können nur über die Lösungen solcher Gleichungen untersucht werden. Zum Beispiel wurde das Problem der Schwingungen nicht linearer Gebilde [Q] *, dasjenige bestimmter elektrischer Schwingungen [R] und das der Frequenzmodulation [S] sehr oft in irgendeiner Form untersucht. Es gibt jedoch noch zahlreiche offene Fragen in der Elektrotechnik [T] oder in anderen Gebieten der Wissenschaften [U], die auf Gleichungen mit periodischen Koeffizienten führen.

Die mathematischen Untersuchungen über besondere Typen von Gleichungen mit periodischen Koeffizienten sind auch sehr zahlreich. Viele Lösungsmethoden wurden für die verschiedenen besonderen Gleichungen vorgeschlagen [E, F, G, I, K]. Sehr interessante Eigenschaften konnten damit entdeckt werden. Mit ganz wenigen Ausnahmen blieben jedoch die Untersuchungen auf das kleine Gebiet einiger allgemein bekannter Gleichungstypen beschränkt. Die Uebersicht fehlt deshalb im allgemeinen. Der gesamte Gültigkeitsbereich der Lösungsmethoden und genaue Bedingungen für das Auftreten besonderer Eigenschaften sind deshalb nur selten bestimmt worden.

Zwei Methoden haben sich als besonders wirksam bei der numerischen Bestimmung der Lösungen erwiesen. Durch die hier sehr allgemein gehaltene Untersuchung ist es möglich zahlreiche Eigenschaften wiederzufinden, die bei besonderen Typen schon bekannt waren. Eine genaue Abgrenzung der in Betracht kommenden Bedingungen zeigt, dass sehr interessante Eigenschaften der Lösungen relativ oft vorkommen, während man sie bis jetzt eher als Ausnahme betrachtet hatte.

Die beiden erwähnten Lösungsmethoden weisen noch zwei grosse Vorteile auf. Der erste beruht auf der Tatsache, dass sie sich auf eine Rekursionsformel mit drei Gliedern stützen, und daher für das Arbeiten mit modernen automatischen Rechenmaschinen besonders geeignet sind. Der zweite Vorteil liegt darin, dass diese beiden Methoden auch auf bestimmte Differentialgleichungen anwendbar sind, die nicht sinusförmige Koeffizienten haben. Man muss, z. B., eine ganz bestimmte Substitution durchführen, um die Lamé'sche Gleichung in die oben erwähnte Form zu verwandeln [M - 4, 6 und 7]. Weiter sind die Lösungen in der Form einer Reihe von Bessel'schen Funktionen [N] oder von Legendre'schen Polynomen [M - 3] erhältlich. Die Mathieu'schen Funktionen können sogar in zwei oder mehr verschiedene Formen gebracht

* Die Hinweise auf das Literaturverzeichnis am Schluss der Arbeit werden durch Buchstaben mit eventuell angehängten Zahlen in eckigen Klammern angegeben.

werden [H - 16, K - 5, N - 23] . Es wird sich auch zeigen, dass besondere Gleichungen mit polynomischen Koeffizienten sich mit den beiden Methoden ebenfalls behandeln lassen.

Die Gültigkeitsbereiche dieser beiden Methoden ergänzen sich in der Weise, dass man mit Hilfe beider Methoden die Lösung in der ganzen komplexen Ebene bestimmen kann. Diese Bereiche sind durch die singulären Punkte der Differentialgleichung bestimmt. Wenn man eine Hilfsgrösse als Unabhängige betrachtet ($Z = e^{ix}$ für Gleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten), sind ausserhalb vom Nullpunkt und vom Punkt im Unendlichen noch zwei singuläre Punkte vorhanden, deren Lage nur von der Gleichung selbst abhängt. Die Bereichsgrenzen sind zwei Kreise, je durch einen singulären Punkt, mit dem Nullpunkt als Zentrum.

Die erste Methode kann aus dem Fuchs'schen Satz [C - 1, 5, 6 und 7] abgeleitet werden (Abschn. 11 und 12). Die dadurch bestimmten Koeffizienten der Reihen werden ohne Näherungsverfahren, das heisst direkt, berechnet. Diese Methode wird deshalb in dieser Arbeit immer als "direkte Methode" bezeichnet. Die Reihen selbst konvergieren in den beiden Gebieten des Nullpunktes und des unendlichen Punktes. Die charakteristischen Werte werden durch eine einzige algebraische Gleichung bestimmt, deren Grad der gleiche wie derjenige der Differentialgleichung ist. Wenn zwei dieser charakteristischen Werte nur um eine ganze Zahl differieren, muss man eine andere Form der Lösungen annehmen. Diese Lösungen, die von zweiter Art genannt werden, können auch direkt mit Hilfe eines geänderten Rekursionssystems berechnet werden. Dieses Ergebnis kann auch auf inhomogene Gleichungen erweitert werden, wenn die rechte Seite sehr allgemeine Bedingungen erfüllt (Abschn. 31). Zwei numerische Beispiele (Abschn. 17 und 32) lassen die praktische Bedeutung dieser Methode leicht erkennen. Sie führen zur Lösung von zwei wichtigen Problemen der Elektrotechnik [T - 2, 5, 7 und 11] .

Die zweite, hier betrachtete Methode wurde schon mehrmals für besondere Gleichungen, z.B. für die Mathieu'sche [K] , die Lamé'sche [M - 3, 4, 6 und 7] und die Whittaker'sche [P - 9 und 10] Gleichung angewandt. Sie ist in dem Gebiet zwischen den beiden singulären Stellen gültig. Das Rekursionssystem ist in beiden Richtungen unendlich. Die charakteristische Gleichung kann als unendliche Determinante, wie bei Hill und von Koch [F] geschrieben werden. Diese Form ist jedoch wegen der Konvergenz der Reihe nicht immer anwendbar. Die Kettenbrüche können dagegen praktisch immer angewandt werden. Trotzdem kann nur ein numerisches Näherungsverfahren zur Lösung führen; daher die Bezeichnung "numerische Methode", die in dieser ganzen Arbeit benützt wird.

Trotzdem diese numerische Methode schon wertvolle Dienste geleistet hat, wurde eine eingehende Untersuchung ihres Gültigkeitsbereichs nach unseren Kenntnissen nicht durchgeführt. Es ist das erste Ziel dieser Arbeit, die Lücke zu schlies-

sen. Die bekannten Eigenschaften der Kettenbrüche geben keine genügende Grundlage für diese Untersuchung [A - 6, 8 und 9]. Der Satz von Poincaré [A - 7 und 11], über Rekursionsformeln mit drei Gliedern, ist eher entmutigend, so dass ein neuer Weg beschritten werden muss, der sich aus dem tatsächlichen Berechnungsverfahren ableitet. Damit kann man auch die Genauigkeit der Rechnung überprüfen (Abschn. 15 und 16).

Bei fast allen praktischen Anwendungen weist die Differentialgleichung bestimmte Symmetrie-Eigenschaften auf. Die Lösungen müssen dann die entsprechenden Eigenschaften zeigen. Das kann zu einer sehr interessanten Vereinfachung der Rechenarbeit führen (Abschn. 21). Das Rekursionssystem lässt sich in zwei - nur einseitig unendliche - Teilsysteme trennen.

Bei bestimmten charakteristischen Werten müssen zwei linear unabhängige Lösungen vorhanden sein, von denen mindestens eine quasiperiodisch im Sinne des Floquet'schen Satzes ist. Bei der Mathieu'schen Gleichung kann man beweisen [H - 9], dass die zweite Lösung von zweiter Art ist und deshalb aperiodisch sein muss. Es lässt sich zeigen (Abschn. 22), dass eine besondere Bedingung erfüllt sein muss, damit die zweite Lösung auch quasiperiodisch ist. Dieses Problem der "Doppellösungen" ist eng mit demjenigen der Stabilitätskarte der Differentialgleichung verbunden, weil eine quasiperiodische Lösung als Grenze zwischen einer stabilen und einer labilen Lage betrachtet werden kann. In bestimmten Fällen kann deshalb der labile Bereich verschwinden [L - 3].

Es wurde auch bewiesen, dass die Whittaker'sche Gleichung Lösungen aufweist, die nur eine beschränkte Zahl von Gliedern enthalten [P - 4 und 10]. Die charakteristische Gleichung verliert ihre Transzendenz und wird algebraisch. Es lässt sich zeigen, dass diese Eigenschaft auch mit den Doppellösungen eng verbunden ist (Abschn. 23).

Einige Beispiele werden eingehend besprochen, um diese Ergebnisse praktisch und numerisch zu erläutern. Wir werden die Grundgleichungen der Lichtbeugung am optischen Gitter [U - 10] (Abschn. 24) untersuchen, die als verallgemeinerte Mathieu'sche Gleichungen zu betrachten sind. Die Whittaker'sche Gleichung ist deshalb interessant (Abschn. 25), weil sie einmal alle Eigenschaften aufweist, die im Zusammenhang mit den Doppellösungen stehen, und zum anderen, weil sie auf zwei Arten asymptotisch zu der Mathieu'schen Gleichung führt. Als drittes Beispiel werden noch zwei antisymmetrische Gleichungen untersucht, da solche Gleichungen eine bemerkenswerte Eigenschaft aufweisen (Abschn. 26).

Die inhomogenen Differentialgleichungen lassen sich auch mit Hilfe einer geänderten "numerischen Methode" lösen, wenn einfache Bedingungen erfüllt sind (Abschn. 33). Die rechte Seite muss als Summe einer beschränkten Zahl entsprechender Glieder darstellbar sein. Daraus folgt, dass die Bestimmung von Lösungen zweiter

Art nicht mit dieser einfachen Methode durchgeführt werden kann. Goldstein [H - 6] hat sie für die Anwendung auf die Mathieu'sche Gleichung besonders anpassen müssen. Wegen der Linearität des Problems lässt sich jedoch ein "Relaxationsverfahren" mit grosser Leichtigkeit anwenden (Abschn. 34). Die Fourierkoeffizienten der Mathieu'schen Funktionen zweiter Art werden auf diese Weise berechnet (Abschn. 35).

Wie schon erwähnt, enthält das angegebene Literaturverzeichnis bei weitem nicht alle Arbeiten, die über die Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten veröffentlicht wurden.

I. Kapitel

DREI ALLGEMEINE LOESUNGSMETHODEN

11. Die analytischen Grundlagen

a) Die untersuchte Differentialgleichung

Die, in dieser Arbeit untersuchte Differentialgleichung lässt sich folgendermassen schreiben:

$$\sum_{k=0}^s \left(e_k + f_k \cdot e^{-ix} + g_k \cdot e^{ix} \right) \cdot \frac{d^k u}{dx^k} = 0 \quad (11.1)$$

Hierbei sind e_k , f_k und g_k reelle oder komplexe Konstanten. Die Substitution

$$z = e^{ix} \quad (11.2)$$

liefert

$$\sum_{k=0}^s \left(F_k + E_k \cdot z + G_k \cdot z^2 \right) \cdot z^k \cdot \frac{d^k u}{dz^k} = 0 \quad (11.3)$$

wobei die neuen Konstanten die folgenden Lineartransformationen der alten sind:

$$E_k = \sum_{m=k}^s d_{km}(s) \cdot e_m \quad (11.4)$$

$$F_k = \sum_{m=k}^s d_{km}(s) \cdot f_m$$

$$G_k = \sum_{m=k}^s d_{km}(s) \cdot g_m$$

Daraus folgt zum Beispiel:

$$\begin{aligned} E_S &= e_S \\ F_S &= f_S \\ G_S &= g_S \end{aligned} \quad (11.5)$$

Löst man die Differentialgleichung (11.3) nach der höchsten Ableitung auf, so werden die Koeffizienten rationale Funktionen von Z . Nach der klassischen Theorie der linearen Differentialgleichungen [A - 1, 10 und 13] kann eine Lösung von (11,3) nur dort singulär werden, wo diese Koeffizienten Pole haben, d.h. eventuell an folgenden vier Stellen:

$$\begin{aligned} Z &= 0 \\ Z &= \infty \\ Z &= Z_1 = -\frac{e_S}{2g_S} \left(1 - \sqrt{1 - 4\varphi} \right) \\ Z &= Z_2 = -\frac{e_S}{2g_S} \left(1 + \sqrt{1 - 4\varphi} \right) \end{aligned} \quad (11.6)$$

mit

$$\varphi = \frac{f_S \cdot g_S}{e_S^2} \quad (11.7)$$

Daraus ergibt sich eine Verwandtschaft der Gleichung (11.3) mit den Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse [C - 2, 3 und 4]. Durch die Ungleichung

$$|Z_1| \leq |Z_2| \quad (11.8)$$

wird die Bezeichnung dieser singulären Stellen bis auf Modulgleichheit eindeutig bestimmt.

b) Diskussion der Singularitäten

Ist $Z = 0$ eine isolierte Singularität einer Differentialgleichung, so spricht man bekanntlich von einer ausserwesentlichen Singularität (Stelle der Bestimmtheit), wenn ein ganzer, positiver Exponent N existiert, sodass für jede Lösung $u(Z)$ gilt:

$$\lim_{Z \rightarrow 0} Z^N \cdot u(Z) = 0 \quad (11.9)$$

Das Fuchs'sche Theorem betrifft gerade diesen Fall [C - 1, 5 und 6]:

Satz 1:

Bei der folgenden Differentialgleichung

$$\frac{d^s u}{dZ^s} + P_1(Z) \cdot \frac{d^{s-1} u}{dZ^{s-1}} + \dots + P_s(Z) \cdot u = 0 \quad (11.10)$$

ist eine Singularität $Z = Z_0$ eine Stelle der Bestimmtheit, wenn die Koeffizienten P_k an dieser Stelle einen Pol von höchstens k -ter Ordnung haben.

Satz 2:

Jede der vier Stellen (11.6) ist eine Stelle der Bestimmtheit der Differentialgleichung (11.3), falls sie nicht mit einer der drei anderen zusammenfällt.

Beweis des Satzes 2:

Die Koeffizienten $P_k(Z)$ der Gleichung (11.3) lauten:

$$P_k = \frac{F_{s-k} + E_{s-k} \cdot Z + G_{s-k} Z^2}{F_s + E_s \cdot Z + G_s \cdot Z^2} \cdot Z^{-k} \quad (11.11)$$

Der Nullpunkt ist eine Stelle der Bestimmtheit, wenn der erste Faktor dort regulär bleibt, d. h. wenn $F_s = f_s$ nicht verschwindet. Verschwindet jedoch F_s , dann sollen alle F_k und damit alle f_k verschwinden. Durch Umbezeichnung der Konstanten kann man diesen Fall vermeiden. Die einzige Konsequenz ist, dass Z_2 nicht mehr vorhanden ist.

Die gleichen Überlegungen sind beim Punkt im Unendlichen, Z_2 und bei den Konstanten g_k und g_k auch gültig.

Bei den beiden Singularitäten Z_1 und Z_2 sind die Pole durch den ersten Faktor gegeben. Sie sind nur von erster Ordnung, wenn Z_1 nicht mit Z_2 zusammenfällt. Im anderen Fall ist der einzige Pol von zweiter Ordnung. Diese Stelle ist nur eine Stelle der Bestimmtheit, wenn der Zähler von $P_1(Z)$ verschwindet:

$$F_{s-1} + E_{s-1} Z + G_{s-1} Z^2 = 0 \quad (11.12)$$

c) Die Form der Lösung und die drei Gebiete

Ein jetzt klassischer Satz von Floquet [A -4] sowie die Theorie der Differentialgleichungen in der Umgebung einer Stelle der Bestimmtheit führt zu folgendem Satz über die Form der Lösungen:

Satz 3:

Eine lineare Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten weist immer mindestens eine quasiperiodische Lösung von der Form:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{i(\mu + n)x} \quad (11.13)$$

mit den Fourierkoeffizienten D_n und dem charakteristischen Exponent μ auf. Wenn der Nullpunkt eine Stelle der Bestimmtheit ist, so gilt

$$D_n = 0 \quad \text{für } n \leq 0 \quad (11.14)$$

in dem Gebiet um den Nullpunkt. Andererseits gilt im Gebiet des Unendlichen, wenn dieser Punkt eine Stelle der Bestimmtheit ist:

$$D_n = 0 \quad \text{für } n \geq 0 \quad . \quad (11.15)$$

Die klassische Theorie zeigt, dass die Konvergenzgrenzen dieser Reihen durch die folgenden Gleichungen bestimmt sind:

$$\text{und} \quad \begin{aligned} |Z| &= |e^{ix}| = |Z_1| \\ |Z| &= |e^{-ix}| = |Z_2| . \end{aligned} \quad (11.16)$$

Die ganze Ebene kann deshalb in drei Gebiete aufgeteilt werden:

$$\begin{aligned} |Z| < |Z_1| & \quad \text{Gebiet I} \\ |Z| > |Z_2| & \quad \text{Gebiet II} \\ |Z_1| < |Z| < |Z_2| & \quad \text{Gebiet III.} \end{aligned} \quad (11.17)$$

In den beiden Randgebieten I und II sind die Reihen (11.13) einseitig beschränkt.

Die Lösungen können nach der analytischen Methode des Abschnittes 12 berechnet werden. Die Berechnung der Lösungen in dem mittleren Gebiet III stösst auf grosse Schwierigkeiten, die besonders besprochen werden.

d) Die besonderen Schwierigkeiten des Gebietes III und der Satz von Poincaré

Die Lösung nach (11.13), die im Gebiet III gültig sein soll, hat die folgenden Eigenschaften aufzuweisen:

1. Die Reihe ist in beiden Richtungen unendlich.
2. Die Teilreihe mit positivem Index n muss in dem Gebiet $|Z| < |Z_2|$ konvergieren, d.h. weiter als $|Z| = |Z_1|$.
3. Die Teilreihe mit negativem Index n muss ebenfalls weiter als $|Z| = |Z_2|$ und zwar bis exklusiv $|Z| = |Z_1|$ konvergieren.

Die Konvergenz der Teilreihen ist jedoch prinzipiell durch die Rekursionsformel gegeben, die man aus (11.1) und 11.13) erhält:

$$A(\mu + n)D_{n-1} + B(\mu + n)D_n + C(\mu + n)D_{n+1} = 0 \quad (11.18)$$

mit den Definitionen:

$$A(\mu + n) = \sum_{k=0}^s i^k (\mu + n - 1)^k g_k \quad (11.19)$$

$$B(\mu + n) = \sum_{k=0}^s i^k (\mu + n)^k e_k$$

$$C(\mu + n) = \sum_{k=0}^s i^k (\mu + n + 1)^k f_k .$$

Satz 4:

Es sei die Differenzengleichung in der Form:

$$u(s + n) + \sum_{i=0}^{n-1} q_i(s) \cdot u(s + i) = 0 \quad (11.20)$$

und die Grenzwerte

$$c_i = \lim_{|s| \rightarrow \infty} q_i(s) \tag{11.21}$$

gegeben.

Wenn die Wurzeln a_i der Gleichung

$$f(t) = t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_0 = 0 \tag{11.22}$$

dem Betrag nach alle verschieden sind und nach abnehmendem Betrag geordnet sind, strebt für eine Lösung der Gleichung (11.20) das Verhältnis $u(s+1)/u(s)$ bei zunehmendem s einem bestimmten Grenzwert zu, der gleich einer jener Wurzel ist. Wenn weiter in der Differenzengleichung der Koeffizient $q_0(s)$ für $s = 0, 1, 2 \dots$ von Null verschieden ist, so besitzt sie n linear unabhängige Particulärlösungen $u_1(s) \dots u_n(s)$ derart, dass die Beziehungen

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{u_i(s+1)}{u_i(s)} = a_i \tag{11.23}$$

gelten.

Dieser Satz ist bekannt als Theorem von Poincaré [A - 7 und 11]. Für $n = 2$ folgt daraus:

Satz 5:

Die Differenzengleichung (11.18) (in dieser Arbeit als Rekursionsformel oder algebraisches Grundsystem bezeichnet) weist nur eine bestimmte Lösung auf, für welche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \frac{1}{Z_2} \tag{11.24}$$

ist.

Alle anderen Lösungen führen zu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \frac{1}{Z_1} \tag{11.25}$$

Die Konsequenzen des Satzes 5 sind die folgenden. Um eine im Gebiet III gültige Lösung zu erhalten, ist es erforderlich und auch hinreichend, die erwähnte besondere Lösung der Rekursionsformel sowohl bei positiven wie bei negativen Indicen n zu berücksichtigen. Dadurch muss eine Hilfsgrösse (eventuell μ) einen charakteristischen

Wert aufweisen. Der Bestimmung dieses Wertes sind die Hill'sche und die numerische Methode gewidmet.

12. Die Lösungen in den Randgebieten

a) Die Lösungen erster Art im Gebiet I

Der Nullpunkt $Z = 0$ ist eine Stelle der Bestimmtheit, wenn das Gebiet I eine nicht verschwindende Fläche aufweist. Der Satz 3 gibt die Form mindestens einer der Lösungen an. In Anlehnung an die Theorie der Bessel'schen und ähnlichen Funktionen wird in diesem Falle von einer Lösung erster Art gesprochen.

Die Fourierkoeffizienten D_n lassen sich aus dem algebraischen Grundsystem (11.18) rekursiv bestimmen, wenn der Wert von D_1 gewählt wurde:

$$D_2 = - \frac{B(\mu + 1)}{C(\mu + 1)} D_1 \quad (12.1)$$

$$D_3 = - \frac{B(\mu + 2)}{C(\mu + 2)} D_2 - \frac{A(\mu + 2)}{C(\mu + 2)} D_1$$

$$D_4 = - \frac{B(\mu + 3)}{C(\mu + 3)} D_3 - \frac{A(\mu + 3)}{C(\mu + 3)} D_2$$

usw.

Der Wert des charakteristischen Exponenten μ folgt aus dem Satz 6:

Satz 6:

Die charakteristische Gleichung

$$C(\mu) = 0 \quad (12.2)$$

weist immer s Lösungen auf und führt deshalb zu den s linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (11.1).

Beweis des Satzes 6:

Es muss zuerst bewiesen werden, dass (12.2) die richtige charakteristische

Gleichung ist. Vom Grundsystem (11.18) betrachtet man die Gleichung mit $n = 0$.

$$A(\mu) D_{-1} + B(\mu) D_0 + C(\mu) D_1 = 0. \quad (12.3)$$

Wegen Satz 3, Gleichung (11.14) sind die beiden ersten Glieder Null. Damit D_1 von Null verschieden werden kann, muss deshalb $C(\mu)$ selbst verschwinden.

Es muss dann noch bewiesen werden, dass $C(\mu)$ ein Polynom s -ten Grades ist. Aus dem Satz 2 folgt, dass f_s nicht verschwindet. Die Definition (11.19) von $C(\mu)$ zeigt dann, dass $C(\mu)$ ein Glied $f_s \cdot \mu^s \cdot i^s$ aufweist und deshalb s Lösungen ergibt. Die Rekursionsformeln (12.1) zeigen, dass sie nicht alle zu quasiperiodischen Lösungen nach (11.13) führen. Die anderen sind von einer geänderten Form und werden mit Lösungen zweiter, dritter Art bezeichnet.

b) Die Lösungen höherer Art im Gebiet I

Die Form der Lösungen höherer Art im Gebiet I sind auch durch die allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen angegeben [A - 2] :

Satz 7:

Ein kanonisches Fundamentalsystem kann stets aus einer Anzahl von Lösungsblocks der folgenden Art zusammengesetzt werden:

$$u_1 = Z^\mu \cdot \phi_1(Z) \quad (12.4)$$

$$u_2 = Z^\mu \cdot \phi_2(Z) + Z^\mu \phi_1(Z) \cdot \ln Z$$

$$u_3 = Z^\mu \cdot \phi_3(Z) + 2 Z^\mu \phi_2(Z) \cdot \ln Z + Z^\mu \phi_1 \cdot \ln^2 Z$$

$$u_k = Z^\mu \phi_k(Z) + \left(\frac{k-1}{1}\right) Z^\mu \phi_{k-1}(Z) \cdot \ln Z + \dots + Z^\mu \cdot \phi_1 \cdot \ln^{k-1} Z.$$

Dabei ist μ einer der charakteristischen Werte und die $\phi_k(Z)$ sind Potenzreihen von Z .

Der Verfasser schlägt die folgende Bezeichnung vor: Die Lösung u_k ist eine Lösung k -ter Art (auf Französisch, de k -ième rang). Die Bestimmung der Lösungen erster Art wurde am Anfang des Abschnittes besprochen. Diejenige der Lösungen höherer Art stellen einige neue Probleme auf, die hier behandelt werden.

Aus dem Rekursionssystem (12.1) folgt unmittelbar, dass eine Lösung zweiter Art nur dann erforderlich ist, wenn

$$C(\mu) = C(\mu + m) = 0 \quad \text{ist,} \quad (12.5)$$

wobei m eine ganze positive Zahl ist.

Die Lösung erster Art wird auf Grund des charakteristischen Wertes $(\mu + m)$ berechnet:

$$u_1 = \sum_{n=m+1}^{\infty} E_n e^{i(n+\mu)x} \quad . \quad (12.6)$$

Aus (11.2) und (12.4) folgt:

$$u_2 = x \sum_{n=m+1}^{\infty} E_n e^{i(\mu+n)x} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{i(\mu+n)x} \quad . \quad (12.7)$$

Die Einführung von (12.7) in (11.1) ergibt ein lineares, jedoch nicht homogenes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & A(\mu+n)D_{n-1} + B(\mu+n)D_n + C(\mu+n)D_{n+1} = \\ & = A'(\mu+n)E_{n-1} + B'(\mu+n)E_n + C'(\mu+n)E_{n+1} \end{aligned} \quad (12.8)$$

mit den Definitionen:

$$\begin{aligned} A'(\mu+n) &= i \frac{dA(\mu+n)}{d\mu} = - \sum_{k=1}^s k i^{(k-1)} (\mu+n-1)^{(k-1)} g_k \\ B'(\mu+n) &= i \frac{dB(\mu+n)}{d\mu} = - \sum_{k=1}^s k i^{(k-1)} (\mu+n)^{(k-1)} e_k \\ C'(\mu+n) &= i \frac{dC(\mu+n)}{d\mu} = - \sum_{k=1}^s k i^{(k-1)} (\mu+n)^{(k-1)} f_k \quad . \end{aligned} \quad (12.9)$$

Das Gleichungssystem (12.8) kann auch in der Form eines Rekursionssystems geschrieben werden. Das letztere sieht dem homogenen System (12.1) sehr ähnlich:

Es werden nur die Glieder auf der rechten Seite von (12.8) mit dem erforderlichen Faktor $[1/C(\mu + n)]$ hinzugefügt.

Das besondere Problem liegt in der Bestimmung von D_1 in Funktion von E_{m+1} oder umgekehrt. Wir betrachten die Gleichung (12.8) mit $n = m$. Wegen (12.5) und (12.6) erhalten wir

$$A(\mu + m)D_{m-1} + B(\mu + m)D_m + 0 \cdot D_{m+1} = C'(\mu + m)E_{m+1}. \quad (12.10)$$

Daraus können wir E_{m+1} unmittelbar bestimmen. Die Lösung weist zwei unabhängige, frei wählbare Konstanten: D_1 und D_{m+1} auf, die den beiden linear unabhängigen Lösungen entsprechen.

Die Beziehung (12.5) sieht eine Doppellösung der charakteristischen Gleichung nicht vor. In diesem Falle sind die Lösungen zweiter Art auch erforderlich. Die Berechnungsmethode ist die gleiche, so dass die Gleichung (12.10) formal auch besteht. Sie vereinfacht sich jedoch weitgehend, weil in diesem Fall gilt:

$$C'(\mu) = 0. \quad (12.11)$$

Daraus wird:

$$A(\mu) \cdot 0 + B(\mu) \cdot 0 + 0 \cdot D_1 = 0 \cdot E_1. \quad (12.12)$$

Die beiden unabhängigen Konstanten sind D_1 und E_1 .

Die Lösungen dritter Art lassen sich mit Hilfe einer ähnlichen Berechnungsmethode bestimmen.

c) Die Lösungen im Gebiet II

Die gleichen Überlegungen lassen sich für das Gebiet II wie für das Gebiet I anstellen. Die charakteristische Gleichung

$$A(\mu) = 0 \quad (12.13)$$

weist Lösungen, die s charakteristischen Werte auf. Das algebraische Grundsystem (11.18) führt zu einem einfachen dreigliedrigen Rekursionssystem.

Die Lösungen höherer Art haben die Form (12.4). Die Potenzreihen weisen jedoch nur negative Potenzen auf. Für die Lösungen zweiter Art gilt das System (12.8) mit den Definitionen (12.9). Die Bestimmungsgleichung für E_{-m-1} lautet, ähnlich (12.10):

$$0 \cdot D_{-m-1} + B(\mu - m)D_{-m} + C(\mu - m)D_{1-m} = A'(\mu - m)E_{-m-1} \cdot \quad (12.14)$$

Das Problem kann somit als gelöst betrachtet werden.

13. Die Hill'sche Methode für das Gebiet III

a) Die charakteristische Gleichung

Die bekannteste Methode zur Bestimmung des charakteristischen Wertes für das mittlere Gebiet III ist die Methode von Hill - von Koch [F]. Sie stützt sich auf eine Verallgemeinerung der Theorie der linearen homogenen Systeme. Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\Delta(\mu) = 0 = \begin{vmatrix} \text{-----} & & & & \text{-----} \\ \text{---,} & 1 & , & \frac{C(\mu - 1)}{B(\mu - 1)} & , & 0 & , & \text{---} \\ \text{---,} & \frac{A(\mu)}{B(\mu)} & , & 1 & , & \frac{C(\mu)}{B(\mu)} & , & \text{---} \\ \text{---,} & 0 & , & \frac{A(\mu + 1)}{B(\mu + 1)} & , & 1 & , & \text{---} \\ \text{-----} & & & & \text{-----} \end{vmatrix} \cdot \quad (13.1)$$

Diese Gleichung ist für eine Auswertung nicht praktisch. Es ist zweckmässig, die folgenden neuen Grössen einzuführen:

$$\varphi(\mu + n) = \frac{A(\mu + n) C(\mu + n - 1)}{B(\mu + n) B(\mu + n - 1)} \quad , \quad (13.2)$$

wobei der Grenzwert wegen den Definitionen (11.19) gleich φ ist, mit:

$$\lim_{(\mu + n) = \infty} \varphi(\mu + n) = \varphi \quad , \quad (13.3)$$

und den Teildeterminanten:

$$\Delta_+(\mu) = \begin{vmatrix} 1 & , & \frac{C(\mu)}{B(\mu)} & , & 0 & , & \dots \\ \frac{A(\mu+1)}{B(\mu+1)} & , & 1 & , & \frac{C(\mu+1)}{B(\mu+1)} & , & \dots \\ 0 & , & \frac{A(\mu+2)}{B(\mu+2)} & , & 1 & , & \dots \\ \hline \end{vmatrix} \quad (13.4)$$

$$\Delta_-(\mu) = \begin{vmatrix} 1 & , & \frac{A(\mu)}{B(\mu)} & , & 0 & , & \dots \\ \frac{C(\mu-1)}{B(\mu-1)} & , & 1 & , & \frac{A(\mu-1)}{B(\mu-1)} & , & \dots \\ 0 & , & \frac{C(\mu-2)}{B(\mu-2)} & , & 1 & , & \dots \\ \hline \end{vmatrix} \quad \cdot$$

Es gilt der folgende Satz:

Satz 8:

Die charakteristische Gleichung (13.1) kann auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\Delta(\mu) = \Delta_+(\mu) \cdot \Delta_-(\mu-1) - \varphi(\mu) \cdot \Delta_+(\mu+1) \cdot \Delta_-(\mu-2) \quad (13.5)$$

mit

$$\Delta_+(\mu) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\mu+n) \left[1 - \sum_{m=n+2}^{\infty} \varphi(\mu+m) [1 - \dots] \right] \quad (13.6)$$

$$\Delta_-(\mu) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\mu-n) \left[1 - \sum_{m=n+2}^{\infty} \varphi(\mu-m) [1 - \dots] \right]$$

Beweis des Satzes 8:

Die Beziehung (13.5) folgt aus (13.1) über die Entwicklung von $\Delta(\mu)$ in Bezug auf eine Zeile:

$$\begin{aligned} \Delta(\mu) = & \Delta_+(\mu+1) \cdot \Delta_-(\mu-1) - \varphi(\mu) \cdot \Delta_+(\mu+1) \cdot \Delta_-(\mu-2) - \\ & - \varphi(\mu+1) \cdot \Delta_+(\mu+2) \cdot \Delta_-(\mu-1) \quad . \quad (13.7) \end{aligned}$$

Es bestehen auch die folgenden Rekursionsformeln:

$$\Delta_+(\mu) = \Delta_+(\mu+1) - \varphi(\mu+1) \Delta_+(\mu+2) \quad (13.8)$$

$$\Delta_-(\mu) = \Delta_-(\mu-1) - \varphi(\mu) \Delta_-(\mu-2) .$$

Aus (13.7) und dem Wert von $\Delta_+(\mu)$ aus (13.8) erhält man unmittelbar (13.5).

Die Beziehungen (13.6) lassen sich aus (13.8) ableiten, indem die Werte von $\Delta_+(\mu+n)$ bzw. $\Delta_-(\mu-n)$ aus der betreffenden Gleichung (13.8) eingeführt werden. Es gibt zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \Delta_+(\mu) = & \Delta_+(\mu+2) [1 - \varphi(\mu+1)] - \Delta_+(\mu+3) \cdot \varphi(\mu+2) \quad (13.9) \\ = & \Delta_+(\mu+3) [1 - \varphi(\mu+1) - \varphi(\mu+2)] - \\ - & \Delta_+(\mu+4) [1 - \varphi(\mu+1)] \varphi(\mu+3) \quad . \end{aligned}$$

Dieser Satz 8 wurde schon von Wavre [H - 19] angegeben und erleichtert die Untersuchung des Anwendungsgebietes der Hill'schen Methode.

b) Das Anwendungsgebiet der Hill'schen Methode

Die Hill'sche Methode wurde immer auf Differentialgleichungen angewandt, die keine singulären Stellen ausserhalb des Nullpunktes und des Punktes im Unendlichen aufweisen. Es muss noch geprüft werden, ob das Anwendungsgebiet noch breiter ist. Dafür muss die Konvergenz der Reihen in (13.6) bewiesen werden. Diese Konvergenz hängt direkt mit dem asymptotischen Verlauf von $\varphi(\mu)$ für $|\mu| \rightarrow \infty$ zusammen.

Die Funktion $\varphi(\mu)$ ist eine rationale Funktion von μ , die bei $|\mu| \rightarrow \infty$ einen beschränkten Grenzwert aufweist, wenn e_s nicht verschwindet. Es zeigt sich, dass dieser besondere Fall weggelassen werden darf:

$$e_s = 0 \text{ ergibt} \tag{13.10}$$

$$\varphi = \infty$$

$$|z_1| = |z_2| \quad .$$

Es gilt deshalb der Hilfssatz 1:

Hilfssatz 1:

Die Funktion $\varphi(\mu)$ kann im Gebiet $|\mu| > N$ als Mac Laurin'sche Reihe ausgedrückt werden:

$$\varphi(\mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m}{\mu^m} \quad , \quad |\mu| > N \tag{13.11}$$

$$\varphi_0 = \varphi \quad ,$$

wenn N genügend gross ist.

Mit Hilfe dieses Hilfssatzes und der Beziehungen (13.6) wird der Satz 9 bewiesen:

Satz 9:

Die Hill'sche Methode ist dann und nur dann anwendbar, wenn $\varphi(\mu)$ wie $1/\mu^2$ gegen Null strebt, d. h., wenn φ und φ_1 in (13.11) verschwinden. Diese Bedingung kann auch folgendermassen ausgedrückt werden: Um die Konvergenz der Reihen in (13.6) zu gewährleisten, ist es erforderlich und hinreichend eine der drei Beziehungen zu erfüllen:

$$\text{a) } f_s = g_s = 0 \tag{13.12}$$

$$\text{b) } f_s = f_{s-1} = 0$$

$$\text{c) } g_s = g_{s-1} = 0 \quad .$$

Beweis des Satzes 9:

Der zweite Teil des Satzes 9 folgt aus dem ersten durch direkte Berücksichtigung der eingeführten Definitionen. Der Nenner von $\varphi(\mu)$ ist ein Polynom $2s$ -ten Grades. Der Zähler muss vom Grad $(2s-2)$ sein. Im Allgemeinen ist er jedoch von

2s-tem Grade wie der Nenner. Es müssen deshalb die beiden Glieder mit den höchsten Potenzen verschwinden:

$$f_s g_s \mu^{2s} = 0 \quad (13.13)$$

$$(f_{s-1} g_s + f_s g_{s-1}) \mu^{2s-1} = 0 .$$

Der erste Teil des Satzes lässt sich nicht so leicht beweisen. Wir werden zuerst zeigen, dass die angegebene Bedingung erforderlich ist. Im nächsten Teilabschnitt wird der Konvergenzfall untersucht.

Im Falle $\varphi \neq 0$ ist es selbstverständlich, dass die Konvergenz unmöglich ist: Die einzelnen Glieder jeder Reihe bleiben bei einem genügend grossen $|n|$ grösser (absolut betrachtet) als eine feste Zahl, ($|\varphi|/2$) zum Beispiel.

Der Fall $\varphi = 0$, $\varphi_1 \neq 0$ führt auch nicht zu grossen Schwierigkeiten: Aus (13.11) folgt:

$$\operatorname{Re} \left[\varphi(\mu) \cdot e^{-i\varphi} \right] > \frac{M_1}{|\mu|} \quad \text{wenn } |\mu| > N_1 \quad (13.14)$$

mit

$$\varphi_1 = |\varphi_1| \cdot e^{i\varphi} . \quad (13.15)$$

Irgendeine Reihe aus (13.6) ist in diesem Fall divergent:

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\varphi} \sum_{n=N_2}^{\infty} \varphi(\mu+n) \right] > M_1 \sum_{n=N_2}^{\infty} \frac{1}{(\mu+n)} . \quad (13.16)$$

Die rechte Seite ist bekanntlich divergent.

c) Der Beweis des Konvergenzfalles

Es wurde gezeigt, dass die Bedingungen des Satzes 9 erforderlich sind. Es muss noch gezeigt werden, dass sie hinreichend sind. Der Beweis stützt sich auf dem folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 2:

Die folgende Reihe $S_n(\mu)$ ist bei positivem n konvergent und zwar gelten die Schranken:

$$\frac{1}{n \cdot \mu^n} < S_n(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k + \mu} \right)^{n+1} < \frac{1}{n(\mu - 1)^n} \quad \text{bei } n > 0. \quad (13.17)$$

Beweis des Hilfssatzes 2:

Die Funktion

$$R_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}}, \quad n > 0 \quad (13.18)$$

nimmt bei zunehmendem x monoton ab. Es gilt deshalb die Beziehung

$$R_n(y) < R_n(x) < R_n(y - 1) \quad (13.19)$$

mit $y - 1 < x < y$.

Man kann auch $R_n(y)$ integrieren. Die Reihe $S_n(\mu)$ wird von unten angenähert, wenn die Integrationsgrenze gleich μ gesetzt wird, sie wird von oben angenähert, wenn $(\mu - 1)$ gewählt wird.

Wenn n Null oder negativ ist, divergiert bekanntlich die Reihe $S_n(\mu)$.

Die Beziehung (13.17) ermöglicht uns, die Formeln (13.6) bei genügend grossem $|\mu|$ angenähert auszuwerten, wenn die Konvergenzbedingung aus Satz 9 erfüllt ist. Wir schreiben:

$$\left| \varphi(\mu + m) \right| < \frac{M}{m^{n+1}} \quad n > 0, \quad m > 0. \quad (13.20)$$

Aus (13.17) und (13.20) folgt:

$$\sum_{m=k}^{\infty} \left| \varphi(\mu + m) \right| < \frac{M}{n(k-1)^n}. \quad (13.21)$$

Weiter erhalten wir die Ungleichungen

$$\sum_{m=k}^{\infty} |\varphi(\mu + m)| \left[\sum_{l=m+2}^{\infty} |\varphi(\mu + l)| \right] < \sum_{m=k}^{\infty} |\varphi(\mu + m)| \frac{M}{n [m+1]^n} \quad (13.22)$$

$$< \sum_{m=k}^{\infty} \frac{M^2}{n \cdot m^{2n+1}} < \frac{M^2}{n \cdot 2n [m-1]^{2n}} .$$

Schliesslich erhalten wir

$$|\Delta_+(\mu + N)| < 1 + \sum_{m=N+1}^{\infty} |\varphi(\mu + m)| [1 + \dots] < \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M^* m}{m!} = e^{M^*} \quad (13.23)$$

mit $M^* = \frac{M}{n [N-1]^n} .$

Die Konvergenz einer beliebigen Reihe aus (13.6) sowie diejenige der gesamten Formel ist damit bewiesen.

d) Eine Beziehung für die Fourierkoeffizienten D_n

Es genügt nicht, den charakteristischen Wert mit Hilfe der Hill'schen Methode oder einer anderen Gleichung zu bestimmen, die Fourierkoeffizienten der Lösung, die D_n müssen noch berechnet werden.

Satz 10:

Die Lösung der Differentialgleichung (11.1) für das Gebiet III kann folgendermassen aufgeschrieben werden:

$$\begin{array}{c}
 u = Z^\mu \\
 \hline
 \begin{array}{cccccc}
 1 & , & \frac{C(\mu - 2)}{B(\mu - 2)} & , & 0 & , & 0 & , & 0 & , \\
 \frac{A(\mu - 1)}{B(\mu - 1)} & , & 1 & , & \frac{C(\mu - 1)}{B(\mu - 1)} & , & 0 & , & 0 & , \\
 Z^{-2} & , & Z^{-1} & , & 1 & , & Z & , & Z^2 & , \\
 0 & , & 0 & , & \frac{A(\mu + 1)}{B(\mu + 1)} & , & 1 & , & \frac{C(\mu + 1)}{B(\mu + 1)} & , \\
 0 & , & 0 & , & 0 & , & \frac{A(\mu + 2)}{B(\mu + 2)} & , & 1 & , \\
 & & & & & & & & &
 \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \tag{13.24}$$

Dieser Satz wurde von Wavre [H - 19] für die Mathieu'sche Gleichung aufgestellt und wurde hier einfach auf das allgemeine Problem angepasst.

Aus (13.24) folgen unmittelbar die Werte der Fourierkoeffizienten D_n , wenn man die Definitionen von $\Delta_+(\mu)$ und $\Delta_-(\mu)$ berücksichtigt:

$$D_{+n} = (-1)^n \Delta_+(\mu + n + 1) \cdot \Delta_-(\mu - 1) \cdot \prod_{k=1}^n \frac{A(\mu + k)}{B(\mu + k)} \tag{13.25}$$

$$D_{-n} = (-1)^n \Delta_-(\mu - n - 1) \Delta_+(\mu + 1) \prod_{k=1}^n \frac{C(\mu - k)}{B(\mu - k)} .$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen kann man theoretisch alle Differentialgleichungen der Form (11.1) lösen, die die Konvergenzbedingung (13.12) erfüllen. Im nächsten Abschnitt wird eine Lösungsmethode entwickelt, die der Hill'schen sehr verwandt ist, jedoch nicht durch diese Konvergenzbedingung beschränkt wird.

14. Die numerische Lösungsmethode

a) Die Grundgedanken

Der Satz 9 zeigt, dass die Hill'sche Methode nicht in allen Fällen anwendbar ist, bei welchen das Gebiet III vorhanden ist. Auf der anderen Seite folgt aus dem Satz 5, dass die ausserordentlichen Anfangsbedingungen nach Poincaré sowohl für positive wie für negative Werte von n erfüllt sein müssen. Eine analytische Methode kann deshalb nicht zum Ziel führen.

Die Theorie der Kettenbrüche [A - 9] zeigt uns den Weg zur Bestimmung der Lösungen:

Satz 11:

Der Kettenbruch

$$K(\mu) = \frac{\varphi(\mu)}{1 -} \frac{\varphi(\mu+1)}{1 -} \frac{\varphi(\mu+2)}{1 -} \dots \quad (14.1)$$

konvergiert in allen Fällen, bei welchen

$$|\varphi(\mu+n)| \leq \frac{1}{4} \quad n > N \text{ ist.} \quad (14.2)$$

Der Grenzwert von $K(\mu)$ wird

$$\lim_{\operatorname{Re} \mu \rightarrow \infty} K(\mu) = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - 4\varphi} \right] \quad (14.3)$$

$$\varphi = \lim_{|\mu| \rightarrow \infty} \varphi(\mu) \quad .$$

Die Bedingung (14.2) ist viel leichter zu erfüllen als (13.12). Die Anwendung eines Kettenbruchs zeigt sich als sehr vorteilhaft, weil der Grenzwert von $K(\mu)$ auch günstig liegt. Es zeigt sich somit, dass das algebraische Grundsystem nicht von der Mitte ($n = 0$) gegen die Ränder ($|n| \rightarrow \infty$) sondern umgekehrt gelöst werden muss.

b) Die Berechnungsmethode

Die numerische Lösungsmethode wurde zuerst für die Bestimmung der Mathieu'schen Funktionen angewandt [K]. Der Verfasser hat sie nachher bei Gleichungen benützt, die die Bedingungen (13.12) nicht erfüllen, wobei jedoch die Gleichungen selbst nicht explizit aufgestellt wurden [U - 10]. Später hat diese Methode zur Lösung von verschiedenen Gleichungen geführt [L - 3], [M - 4, 6 und 7], [N - 1, 2, 15, 21 und 22], [P - 9, 10, 14 und 16]. Es sind auch mehrere Möglichkeiten, sie aufzustellen. Man kann sie direkt aus den Grundgleichungen ableiten. Es ist jedoch interessant ihre Verwandtschaft mit der Hill'schen Methode dadurch zu unterstreichen, dass die Beziehungen des Abschn. 13 als Grundgleichungen angenommen werden.

Aus den Rekursionsformeln (13.8) erhält man:

$$\frac{\Delta_+(\mu + n + 2)}{\Delta_+(\mu + n + 1)} = \frac{1}{1 - \varphi(\mu + n + 2) \frac{\Delta_+(\mu + n + 3)}{\Delta_+(\mu + n + 2)}} = K(\mu + n + 2), \quad (14.4)$$

$$\frac{\Delta_-(\mu + n - 2)}{\Delta_-(\mu + n - 1)} = \frac{1}{1 - \varphi(\mu + n - 1) \frac{\Delta_-(\mu + n - 3)}{\Delta_-(\mu + n - 2)}} = K'(\mu + n - 1),$$

wenn $K'(\mu)$ der Kettenbruch mit negativen Werten für n darstellt.

Die Bestimmung der Fourierkoeffizienten D_n wird indirekt mit Hilfe der Größen

$$\delta_n = -C(\mu + n) \frac{D_{n+1}}{D_n} \quad (14.5)$$

$$\varepsilon_n = -A(\mu + n) \frac{D_{n-1}}{D_n}$$

durchgeführt. Aus (13.25) erhalten wir

$$\delta_n = \frac{A(\mu + n + 1) C(\mu + n)}{B(\mu + n + 1)} \frac{\Delta_+(\mu + n + 2)}{\Delta_+(\mu + n + 1)} \quad (14.6)$$

$$\varepsilon_n = \frac{A(\mu + n) C(\mu + n - 1)}{B(\mu + n - 1)} \frac{\Delta_-(\mu + n - 2)}{\Delta_-(\mu + n - 1)}$$

Schliesslich gelten die folgenden Rekursionsformeln:

$$\delta_n = \frac{A(\mu + n + 1)C(\mu + n)}{B(\mu + n + 1) - \delta_{n+1}} \quad (14.7)$$

$$\epsilon_n = \frac{A(\mu + n)C(\mu + n - 1)}{B(\mu + n - 1) - \epsilon_{n-1}}$$

Die Berechnung wird folgendermassen durchgeführt. Man bestimmt zuerst eine Näherung für den charakteristischen Wert, dann die Grössen δ_N und ϵ_{-N} aus einer Näherungsformel, die im Abschn. 15 aufgestellt wird. Die Rekursionsformeln (14.7) geben sukzessive alle δ_n und alle ϵ_n an, die benötigt werden. Die charakteristische Gleichung ergibt sich aus (11.18) mit $n=0$ unter Berücksichtigung von (14.5):

$$B(\mu) = \epsilon_0(\mu) + \delta_0(\mu) \quad (14.8)$$

Die letztere wird mit Hilfe der Regula Falsi durch schrittweise Näherung gelöst.

c) Die charakteristische Gleichung und die Regula Falsi

Die Regula Falsi ist eine Lösungsmethode für Gleichungen der Form

$$\mu = \mu'(\mu) \quad (14.9)$$

Sie wird durch das Bild 1 veranschaulicht. Die Punkte M_0 und P_0 stellen die Ergebnisse zweier Rechnungen dar. Aus der Sekante $M_0 P_0$ wird eine dritte Näherung (P_1) von μ bestimmt, die nach einer weiteren Berechnung den Punkt P_1' ergibt. Der gleiche Vorgang wiederholt sich mit P_0 und P_1' einerseits, sowie M_0 und P_1' andererseits. Es zeigt sich, dass die Sekante $P_0 P_2'$ sehr nahe am Schnittpunkt P vorbeiläuft, dass jedoch ein grosser Sprung zu M_1 erforderlich ist, um mit vernünftigem Aufwand zum Ziel zu kommen.

Die charakteristische Gleichung (14.8) kann auf zwei Arten in die erforderliche Form (14.9) gebracht werden. In bestimmten Fällen lässt sich $B(\mu)$ nach der charakteristischen Grösse, die nicht immer μ ist, lösen:

$$c = F [B(\mu, c)] \quad (14.10)$$

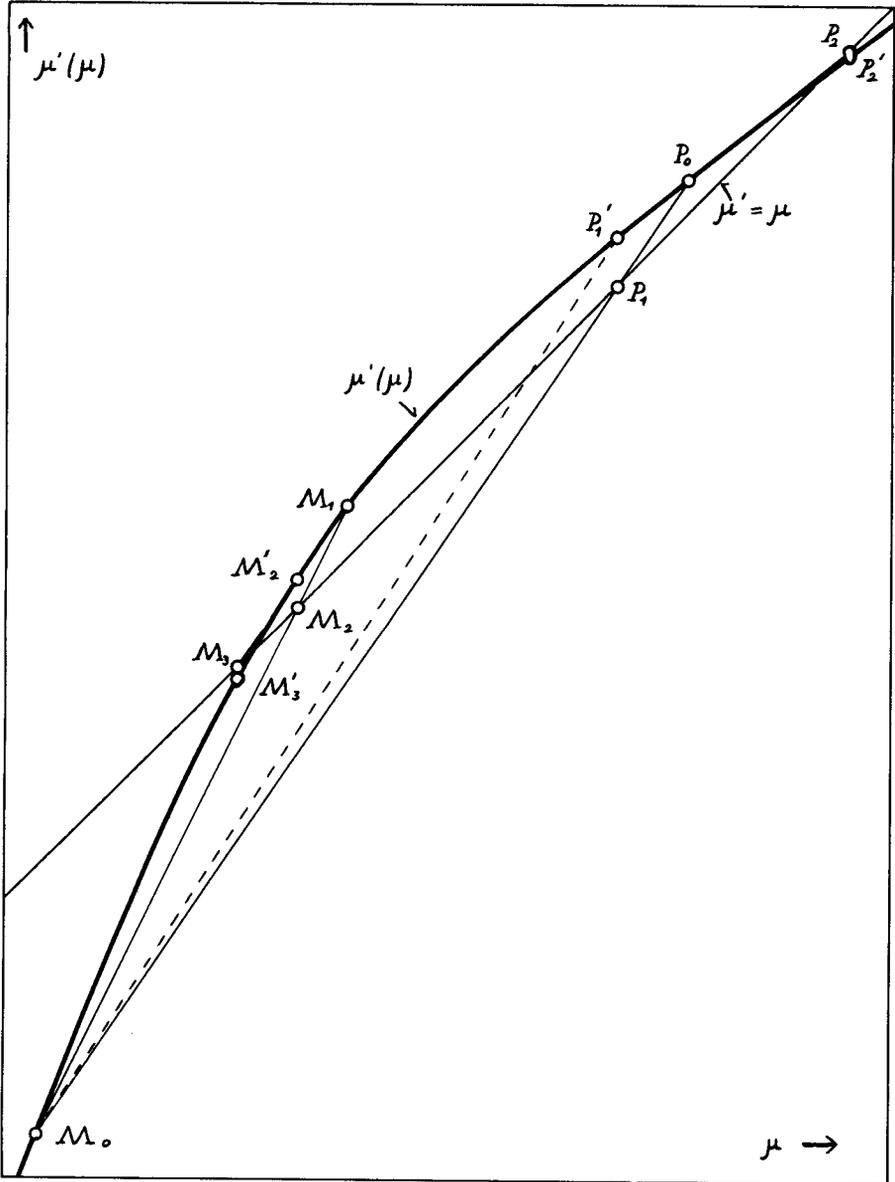


Abb. 1

Die Sekanten-Methode

Aus (14.8) und (14.10) folgt:

$$c'(c) = F \left[\varepsilon_0(\mu, c) + \delta_0(\mu, c) \right] . \quad (14.11)$$

In den anderen Fällen wird ein Glied aus $B(\mu, c)$ ausgenommen:

$$c'(c) = K \left[B'(\mu, c) - \varepsilon_0(\mu, c) - \delta_0(\mu, c) \right] \quad (14.12)$$

$$B(\mu, c) = B'(\mu, c) - \frac{c}{K} .$$

Nur in ganz bestimmten Ausnahmefällen, wenn B von c unabhängig ist, müssen besondere Kunstgriffe angewandt werden. Im Abschn. 26 wird ein Beispiel dafür besprochen.

d) Die Tangenten-Methode

Das Bild 1 zeigt, dass die Sekanten-Methode einige Nachteile aufweist, die durch die Anwendung der Tangente vermieden werden. In besonderen Fällen kann man die Funktion $c' = G(c)$ nach c ableiten. Wenn c_1 eine erste Näherung von c bedeutet, so ist die zweite Näherung c_2 durch die folgende Beziehung zu berechnen:

$$c_2 = c_1 + \frac{G(c_1) - c_1}{1 - G'(c_1)} . \quad (14.13)$$

Die nachfolgenden Näherungen werden mit Hilfe der gleichen Formel bestimmt. Dieser Vorgang ist im Bild 2 graphisch dargestellt. Die zuerst berechneten Punkte M_0 und P_0 (die gleichen wie im Bild 1) werden separat berücksichtigt und führen einerseits über P_1 zu P_1' , andererseits über M_1 zu M_1' und dann zu M_2 und M_2' . Die weiteren Näherungswerte sind nicht eingezeichnet, weil sie alle aufeinanderliegen. Diese Methode ist mindestens am Anfang vorteilhafter als die Sekanten-Methode, weil sie keine Zweideutigkeit aufweist und keine Tastversuche braucht.

Es gibt einen Fall, bei welchem die Tangenten-Methode anwendbar ist [$K - 1, 2, 3$ und 6] :

Satz 12:

Die Tangenten-Methode ist immer anwendbar, wenn die charakteristische Grösse nur im Parameter $B(\mu)$ als additive Konstante vorkommt. In Bezug auf

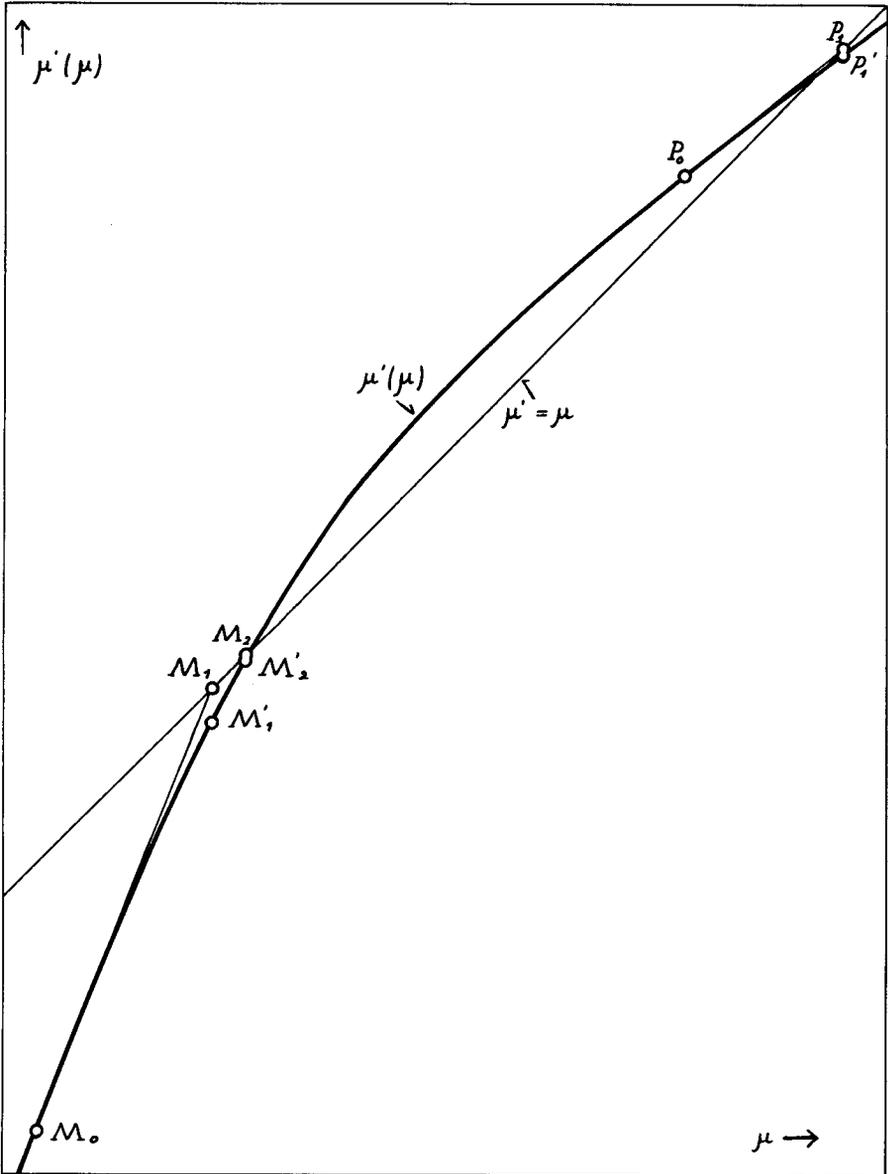


Abb. 2
Die Tangenten-Methode

die Differentialgleichung (11.1) ist dann c eine additive Konstante im Koeffizienten der Funktion u selbst, und erscheint sonst nicht.

Beweis des Satzes 12:

Es sei nach der Annahme:

$$A(\mu, c) = A(\mu) \tag{14.14}$$

$$B(\mu, c) = c + B_1(\mu)$$

$$C(\mu, c) = C(\mu) .$$

Durch Ableiten der Rekursionsformeln (14.7) und sukzessives Einführen erhält man aus (14.13):

$$\begin{aligned}
 G'(c) &= \frac{d \epsilon_0}{dc} + \frac{d \delta_0}{dc} = \tag{14.15} \\
 &= - \frac{\epsilon_0^2}{A(\mu) \cdot C(\mu - 1)} \left\{ 1 + \frac{\epsilon_{-1}^2}{A(\mu - 1) C(\mu - 2)} \left[1 + \frac{\epsilon_{-2}^2}{A(\mu - 2) C(\mu - 3)} (-) \right] \right\} \\
 &\quad - \frac{\delta_0^2}{A(\mu + 1) C(\mu)} \left\{ 1 + \frac{\delta_1^2}{A(\mu + 2) C(\mu + 1)} \left[1 + \frac{\delta_2^2}{A(\mu + 3) C(\mu + 2)} (-) \right] \right\} .
 \end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil des Satzes 12 bewiesen. Der zweite folgt aus der Definition von $B(\mu)$. Die Grösse c muss eine additive konstante in e_0 sein und sonst nirgends erscheinen.

Die Berechnung der Fourierkoeffizienten stellt kein besonderes Problem dar, weil die Verhältnisse D_{n+1}/D_n , bzw. D_{n-1}/D_n aus den ϵ_n und δ_n bestimmt werden können.

15. Die Gültigkeit der numerischen Methode

a) Die Grundbedingungen

Die Konvergenz der Kettenbrüche ist kein hinreichendes Kriterium für die Gültigkeit der numerischen Methode. Das Kriterium (14.2) ist auch noch zu eng für unsere Bedürfnisse, weil es viele Fälle gibt, wo das Gebiet III eine nicht verschwindende Breite aufweist, wo jedoch diese Bedingung (14.2) nicht erfüllt ist. Schliesslich muss noch die Näherungsformel für ϵ_{-N} und δ_N aufgestellt werden.

Die Definitionen (14.5) für ϵ_n und δ_n zeigen, dass diese Grössen bei zunehmendem $|n|$ nicht beschränkt bleiben. Es ist deshalb günstiger, einen neuen Parameter α_n einzuführen:

$$\alpha_n = \frac{\delta_n}{B(\mu + n)} = - \frac{C(\mu + n)}{B(\mu + n)} \frac{D_{n+1}}{D_n} . \quad (15.1)$$

Den entsprechenden Parameter für negative Werte von n brauchen wir nicht, weil die Ergebnisse der nachfolgenden Untersuchung grundsätzlich für beide Reihen die gleichen sind.

Die Gültigkeit der numerischen Methode kann nur dadurch bewiesen werden, dass die einzelnen Kenngrössen der Lösung mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden können. Zur Unterscheidung zwischen den ideal genauen Werten und den angenäherten sind die genauen mit α_n und D_n , die angenäherten mit α'_n und D'_n bezeichnet.

Satz 13:

Die numerische Methode ist dann und nur dann anwendbar, wenn die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$|\alpha'_N - \alpha_N| < M_1 |\alpha'_N| , \quad (15.2)$$

$$|\alpha'_0 - \alpha_0| < M_2 |\alpha_0| , \quad (15.3)$$

und

$$\sum_{n=0}^N |D'_n - D_n| |Z^n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |D_n Z^n| < M_3 , \quad (15.4)$$

wobei die Grössen M_1 , M_2 und M_3 beliebig klein angenommen werden können und N genügend gross gewählt wird.

Beweis des Satzes 13:

Da die Fourierkoeffizienten D'_n für $n > N$ nicht definiert sind und als verschwindend angenommen werden, entspricht die linke Seite von (15.4) dem absoluten Unterschied zwischen der genauen Lösung und der berechneten. Dieser Unterschied muss beliebig klein gehalten werden können. Die Bedingung (15.3) kann auch mit δ_0 oder ϵ_0 an Stelle von α_0 geschrieben werden. Wenn sie dann erfüllt ist, kann man den charakteristischen Wert mit jeder Toleranz bestimmen. Schliesslich entspricht (15.2) einer Vorbedingung für die beiden anderen. Sie sorgt zum Beispiel für eine genügende Approximation für sämtliche Verhältnisse (D_{n+1}/D_n) .

Die Näherungsformel für α'_N lässt sich aus der Rekursionsformel für die α_n ableiten:

$$\alpha_n = \frac{\varphi(\mu + n + 1)}{1 - \alpha_{n+1}} \quad (15.5)$$

Aus dem Satz 5 von Poincaré wissen wir, dass α_n einen Grenzwert bei $n \rightarrow \infty$ aufweist:

$$\alpha_\infty = \varrho_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - 4\varphi} \right] \quad (15.6)$$

oder

$$\alpha_\infty = \varrho_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 - 4\varphi} \right] \quad (15.7)$$

Man könnte diese Grenzwerte als Näherungswerte betrachten. Es ist jedoch günstiger, den festen Wert φ durch $\varphi(\mu + N + 1)$ zu ersetzen:

$$\alpha'_N = \varrho_1(\mu + N) = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - 4\varphi(\mu + N + 1)} \right] \quad (15.8)$$

oder

$$\alpha'_N = \varrho_2(\mu + N) = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 - 4\varphi(\mu + N + 1)} \right] \quad (15.9)$$

Das Vorzeichen vor der Wurzel ist durch die Ungleichung

$$\left| \varrho_2(\mu + N) \right| > \left| \varrho_1(\mu + N) \right| \quad (15.10)$$

bis auf Modulgleichheit definiert.

Der Fall der Modulgleichheit zwischen $\mathfrak{Q}_1(\mu + N)$ und $\mathfrak{Q}_2(\mu + N)$ ist nicht interessant, weil er auch der Modulgleichheit zwischen Z_1 und Z_2 und deshalb der Abwesenheit des Gebietes III entspricht. Er ist nur dann vorhanden, wenn

$$\varphi = |A| \geq \frac{1}{4}, \quad |\mathfrak{Q}_1| = |\mathfrak{Q}_2| \quad \text{ergibt} \quad (15.11)$$

Diese Werte von φ werden deshalb bei den nachfolgenden Betrachtungen nicht berücksichtigt.

b) Der Fall $\alpha'_N = \mathfrak{Q}_2(\mu + N)$

Es wurden zwei Funktionen gefunden, die als Näherungen für α_N dienen können. Wir müssen nun noch unsere Wahl treffen und eine von beiden ausscheiden. Dabei werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 14:

Die Funktion $\mathfrak{Q}_2(\mu + N)$ als Näherungswert für α_N erfüllt keine der drei Bedingungen (15.2), (15.3) und (15.4).

Beweis des Satzes 14:

Der Beweis, dass $\mathfrak{Q}_2(\mu + N)$ die Bedingung (15.4) nicht erfüllt, ist leicht erbracht. Aus der Definition von α_n und aus denjenigen von $C(\mu + n)$ und $B(\mu + n)$ folgt, dass die Reihe bei zunehmendem N divergieren würde. Da die richtige Reihe konvergiert, kann (15.4) nicht erfüllt werden.

Die Bedingung (15.2) ist auch nicht erfüllt, wie die folgende Rechnung beweist: Man definiert die Fehlergrösse

$$\alpha_n = \mathfrak{Q}_2(\mu + n) + \eta_n \quad (15.12)$$

Die Rekursionsformel für die η_n bestimmt sich aus

$$\alpha_{n-1} = \frac{\varphi(\mu + n)}{1 - [\mathfrak{Q}_2(\mu + n) + \eta_n]} \quad (15.13)$$

Wenn η_n viel kleiner als $\mathfrak{Q}_1(\mu + n) = 1 - \mathfrak{Q}_2(\mu + n)$ ist, kann man schreiben:

$$\alpha_{n-1} = \frac{\varphi(\mu+n)}{1 - \mathfrak{S}_2(\mu+n)} \left[1 + \frac{\eta_n}{\mathfrak{S}_1(\mu+n)} \right] \quad (15.14)$$

und dann

$$\alpha_{n-1} - \mathfrak{S}_2(\mu+n) = \frac{\mathfrak{S}_2(\mu+n)}{\mathfrak{S}_1(\mu+n)} \eta_n \quad (15.15)$$

Schliesslich wird

$$\eta_{n-1} = r_n \eta_n - \left[\mathfrak{S}_2(\mu+n-1) - \mathfrak{S}_2(\mu+n) \right] \quad (15.16)$$

mit

$$|r_n| = \left| \frac{\mathfrak{S}_2(\mu+n)}{\mathfrak{S}_1(\mu+n)} \right| > r > 1 \quad (15.17)$$

Durch sukzessives Einsetzen erhalten wir

$$\eta_{n-1} = - \sum_{m=0}^{\infty} \left[\mathfrak{S}_2(\mu+n+m-1) - \mathfrak{S}_2(\mu+n+m) \right] \prod_{k=0}^{m-1} r_{k+n} \quad (15.18)$$

Da die Funktion $\varphi(\mu+n)$ in eine Potenzreihe nach (13.11) entwickelt werden kann, ist es auch möglich, $\mathfrak{S}_2(\mu+n)$ in der gleichen Form zu schreiben. Deshalb gilt:

$$\left| \left[\mathfrak{S}_2(\mu+n+m-1) - \mathfrak{S}_2(\mu+n+m) \right] \cdot \prod_{k=0}^{m-1} r_{k+n} \right| > \frac{M' \cdot r^m}{(\mu+n+m)^j + 1} \quad (15.19)$$

wobei M' und j durch die Reihenentwicklung für $\mathfrak{S}_2(\mu+n)$ bestimmt sind. Da r grösser als 1 ist, muss die Reihenentwicklung (15.18) divergieren. Die Bedingung (15.2) ist deshalb nicht erfüllt.

In der Beweisführung wurde angenommen, dass η_n viel kleiner als $\mathfrak{S}_1(\mu+n)$ bleibt. Wenn $\varphi = 0$ ist, könnte es vorkommen, dass η_n und $\mathfrak{S}_1(\mu+n)$ gleichzeitig gegen Null streben. Dieser Fall wird im nächsten Abschnitt 16 untersucht, in welchem gezeigt wird, dass dieser Sonderfall nicht einem Ausnahmefall entspricht.

Der Beweis, dass $\mathfrak{S}_2(\mu+N)$ die Bedingung (15.3) auch nicht erfüllt, ist dann leicht aufzustellen: Aus den Rekursionsformeln für α_{n-1} und α'_{n-1} folgt:

$$\alpha'_{n-1} = \alpha_{n-1} \frac{1 - \alpha_n}{1 - \alpha'_n} \quad (15.20)$$

Daraus wird

$$\delta \alpha_{n-1} = \delta \alpha_n \frac{\alpha_n}{1 - \alpha'_n} \quad (15.21)$$

mit

$$\delta \alpha_n = \frac{\alpha'_n - \alpha_n}{\alpha_n} \quad (15.22)$$

Wenn α_n durch $\varrho_2(\mu + n)$ angenähert werden könnte, hätte man:

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &> |1 - \alpha'_n| \\ |\delta \alpha_{n-1}| &> |\delta \alpha_n| \end{aligned} \quad (15.23)$$

Der relative Fehler einer bestimmten Grösse α_m nimmt deshalb dauernd zu, wenn N gegen ∞ strebt.

c) Der Fall $\alpha'_N = \varrho_1(\mu + N)$

Die Untersuchung des zweiten Falles wird mit Hilfe ähnlicher Ueberlegungen wie beim ersten Fall durchgeführt. Dabei wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 15:

Die Funktion $\varrho_1(\mu + N)$ als Näherungswert für α'_N erfüllt alle Bedingungen des Satzes 13 und kann deshalb immer angewandt werden, wenn $|\varrho_1| < |\varrho_2|$ ist.

Beweis des Satzes 15:

Es sei

$$\alpha_n = \varrho_1(\mu + n) + \eta'_n \quad (15.24)$$

Die Rekursionsformel bestimmt sich in gleicher Weise wie (15.16). Es wird:

$$|\eta'_{n-1}| < r' |\eta'_n| + |\mathfrak{S}_1(\mu+n) - \mathfrak{S}_1(\mu+n-1)| \quad (15.25)$$

mit

$$1 > r' > \left| \frac{\mathfrak{S}_1(\mu+n)}{\mathfrak{S}_2(\mu+n)} \right| . \quad (15.26)$$

Daraus folgt:

$$|\eta'_{n-1}| < \sum_{m=0}^{\infty} r'^m |\mathfrak{S}_1(\mu+m+n) - \mathfrak{S}_1(\mu+m+n-1)| . \quad (15.27)$$

Weiter gilt die Beziehung

$$|\mathfrak{S}_1(\mu+m+n) - \mathfrak{S}_1(\mu+m+n-1)| < M'' |\mathfrak{S}_1(\mu+n)| , \quad (15.28)$$

für beliebige Werte von M'' , wenn n gross genug ist. Wir erhalten schliesslich:

$$|\alpha'_N - \alpha_N| = |\eta'_N| \leq \frac{M''}{1-r'} |\alpha'_N| = M_1 |\alpha'_N| . \quad (15.29)$$

Die Bedingung (15.2) ist damit erfüllt.

Aus (15.21) folgt

$$|\delta\alpha_{n-1}| < |\delta\alpha_n| , \quad (15.30)$$

wenn α_n und α'_n näherungsweise durch $\mathfrak{S}_1(\mu+n)$ gegeben sind, weil man aus (15.10) die folgende Ungleichung erhält

$$|\alpha_n| < |1 - \alpha'_n| . \quad (15.31)$$

Diese Beziehung gilt vielleicht nicht bei kleinen Werten von n . Sie ist jedoch immer erfüllt, wenn n grösser als eine begrenzte Zahl N_1 ist. Der relative Fehler nimmt deshalb bei konstantem N und mit abnehmendem n ab. Daraus folgt:

$$|\alpha_{N_1} - \alpha'_{N_1}| < M_1^i |\alpha_{N_1}| \quad (15.32)$$

mit beliebig kleinem M_1^i . Das Verhältnis $\delta\alpha_o / \delta\alpha_{N_1}$ bestimmt sich aus einer beschränkten Anzahl von N_1 Faktoren, die alle selbst beschränkt bleiben, wenn man den Fall

$$\alpha_n = \infty \quad (15.33)$$

ausschliesst. Das Verhältnis $\delta \alpha_o / \delta \alpha_{N_1}$ ist deshalb auch beschränkt. Die Bedingung (15.3) ist damit erfüllt. Die Ausnahme (15.33) wird im nächsten Abschnitt untersucht.

d) Die letzte Bedingung (15.4)

Die unendliche Reihe in (15.4) lässt sich in drei Teile trennen:

$$\sum_1 = \sum_{n=0}^{N''} |D'_n - D_n| |Z^n| \quad (15.34)$$

$$\sum_2 = \sum_{n=N''+1}^N |D'_n - D_n| |Z^n|$$

$$\sum_3 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |D_n Z^n|$$

Der Wert von N'' bleibt konstant, wenn N gegen Unendlich strebt. Er wird so gewählt, dass die Ungleichung

$$|\delta \alpha_n| < |\delta \alpha_N|, \quad N'' \leq n < N \quad (15.35)$$

erfüllt ist. Es genügt zum Beispiel, den Wert N_1 zu nehmen, um (15.35) zu erfüllen. Weiter wird die Annahme getroffen, dass

$$D'_{N''} = D_{N''} \quad (15.36)$$

sei, was immer möglich ist. Wir werden zeigen, dass alle drei Summen beliebig klein gemacht werden können.

Die Summe \sum_3 strebt gegen Null, weil sie den Rest einer konvergenten Reihe darstellt. Die Summe \sum_1 weist eine konstante Anzahl von Gliedern auf, die alle gegen Null streben, weil der relative Fehler von α_n beliebig klein gemacht werden kann.

Die letzte Summe \sum_2 lässt sich nicht so leicht untersuchen, weil sie nicht eine normale Reihe bildet und weil sie nicht als Summe einer beschränkten Zahl von Gliedern aufgefasst werden kann. Diese Schwierigkeit wird dadurch überwunden, dass die Summe mit Hilfe zusätzlicher Glieder durch eine majorante Reihe ersetzt wird.

Aus (15.36) folgt

$$\frac{D'_n}{D_n} = \prod_{m=N''}^{n-1} \frac{\alpha'_m}{\alpha_m} . \quad (15.37)$$

Eine obere Grenze für den Fehler bezüglich der D'_n bestimmt sich dadurch, dass man immer den absoluten Betrag von $\delta \alpha_m$ und nicht den komplexen Wert berücksichtigt. Aus (15.35) wird in diesem Falle:

$$|D'_n - D_n| \leq |D_n| \left[(1 + |\delta \alpha_N|)^{n-N''} - 1 \right] . \quad (15.38)$$

Wir führen jetzt eine Hilfsgrösse ein:

$$Z' = |Z| \left[1 + |\delta \alpha_N| \right] . \quad (15.39)$$

Es wird

$$|D'_n - D_n| |Z^n| \leq |D_n| \left[|Z|^{N''} \cdot Z^{(n-N'')} - |Z^n| \right] . \quad (15.40)$$

Schliesslich erhalten wir

$$\sum_2 < |Z^{N''}| \left[\sum_{N''+1}^{\infty} |D_n| Z^{(n-N'')} - \sum_{N''+1}^{\infty} |D_n| \cdot |Z^{(n-N'')}| \right] , \quad (15.41)$$

wenn die Glieder für $n > N$ auch nach (15.40) berechnet, und der Summe \sum_2 zugezählt werden. Die beiden Reihen in Klammer stellen die gleiche Funktion für zwei Werte der Unabhängigen dar. Die Reihe sowie ihre Ableitung konvergieren. Die Funktion ist in diesem Gebiet stetig, so dass der Unterschied zwischen $f(|Z|)$ und $f(Z')$ gegen Null strebt, wenn Z' gegen $|Z|$ strebt, d. h. wenn N immer grösser gewählt wird. Da $|Z^{N''}|$ einer Konstanten für das jetzige Problem entspricht, ist damit bewiesen, dass \sum_2 beliebig klein gemacht werden kann.

e) Einige zusätzliche Bemerkungen

Die Ergebnisse dieses Abschnittes zeigen, dass die numerische Methode auch dann angewandt werden kann, wenn die Hill'sche Methode zu divergenten Reihen führt. Die Untersuchung der Kettenbrüche ist in den meisten Fällen ungenügend, weil die Einschränkung (15.11) bei weitem nicht alle Werte von \mathcal{Q} erfasst, die die Bedingung (14.2) nicht erfüllen. Weiter wird die Beziehung (15.2) durch den Näherungswert $\alpha'_N = 0$ (Kettenbrüche) nicht immer erfüllt, so dass die Lösung nicht mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden kann.

Die Methode dieses Abschnittes kann auch in Fällen angewandt werden, bei welchen das mittlere Gebiet III in eine Kurve ausartet. Der Verfasser wird später eine Untersuchung über das Problem der Konvergenz auf der Gebietsgrenze veröffentlichen, wobei dieses enge Problem auch behandelt wird.

16. Die besonderen Fälle

a) Der Fall $\mathcal{Q} = 0$

Im letzten Abschnitt wurden zwei schwierige Ausnahmefälle in der Beweisführung ausser acht gelassen, damit der Gedankengang nicht unnötig unterbrochen wird. Dieser Abschnitt ist einer genauen Prüfung dieser Schwierigkeiten gewidmet.

Beim Beweis des Satzes 14 wurde angenommen, dass η_n viel kleiner als $\mathcal{S}_1(\mu+n)$ ist. Wenn $\mathcal{Q} = 0$ ist, wäre das nicht unbedingt erforderlich, weil $\mathcal{S}_1(\mu+n)$ auch sehr klein bleiben kann.

Satz 16:

Der Satz 14 ist auch dann gültig, wenn $\mathcal{Q} = 0$ ist.

Beweis des Satzes 16:

Aus (15.8) und (15.9) erhält man

$$\mathcal{S}_1(\mu+n) = 1 - \mathcal{S}_2(\mu+n) = (1 + \varepsilon) \mathcal{Q}(\mu+n) \quad (16.1)$$

für $\mathcal{Q} = 0$,

wobei $|\varepsilon|$ beliebig klein gemacht werden kann, sobald $|n|$ gross genug ist. An Stel-

le von (15.13) wird

$$\alpha_{n-1} = \frac{\varphi(\mu+n)}{(1+\varepsilon)\varphi(\mu+n) - \eta_n} \quad (16.2)$$

und an Stelle von (15.16)

$$\eta_{n-1} = \frac{1}{1+\varepsilon - \frac{\eta_n}{\varphi(\mu+n)}} - 1 + (1+\varepsilon)\varphi(\mu+n) \quad (16.3)$$

Das dritte Glied von (16.3) kann beliebig klein gemacht werden, weil $\varphi(\mu+n)$ gegen $\varphi=0$ strebt. Die beiden ersten können kombiniert werden:

$$\eta_{n-1} = (1+\varepsilon)\varphi(\mu+n) - \frac{\varepsilon - \eta_n/\varphi(\mu+n)}{1+\varepsilon - \eta_n/\varphi(\mu+n)} \quad (16.4)$$

Daraus folgt, dass η_{n-1} nur dann beliebig klein bleibt, wenn η_n viel kleiner als $\varphi(\mu+n)$ ist. In diesem Fall ist bei $\varphi=0$ keine Ausnahme des Satzes 14 vorhanden.

b) Der Fall $\alpha_n = \infty$

Die letzte Schwierigkeit des Abschnittes 15 liegt in dem besonderen Wert

$$\alpha_n = \infty, \quad (16.5)$$

der beim Beweis von Satz 15, zweiter Teil, störend wirkt. Man kann beweisen, dass der Satz 15 in allen Teilen auch in diesem Falle gültig ist.

Aus der Rekursionsformel für α_n folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= 1 \\ \alpha_n &= \infty \\ \alpha_{n-1} &= 0 \\ \alpha_{n-2} &= \varphi(\mu+n-1) \end{aligned} \quad (16.6)$$

Die entsprechenden Werte für α'_m sind

$$\alpha'_{n+1} = 1 + \delta \alpha_{n+1} \quad (16.7)$$

$$\alpha'_n = - \frac{\varphi(\mu+n+1)}{\delta \alpha_{n+1}}$$

$$\alpha'_{n-1} = \frac{\varphi(\mu+n)}{1 + \frac{\varphi(\mu+n+1)}{\delta \alpha_{n+1}}} \approx \frac{\varphi(\mu+n)}{\varphi(\mu+n+1)} \delta \alpha_{n+1}$$

$$\alpha'_{n-2} = \frac{\varphi(\mu+n-1)}{1 + \frac{\varphi(\mu+n)}{\varphi(\mu+n+1)} \delta \alpha_{n+1}},$$

wenn $\delta \alpha_{n+1}$ wird kleiner als $\varphi(\mu+n) / \varphi(\mu+n+1)$ bleibt. Schliesslich wird

$$\delta \alpha_{n-2} = \delta \alpha_{n+1} \frac{\varphi(\mu+n)}{\varphi(\mu+n-1)} \quad (16.8)$$

Der Wert $\delta \alpha_{n-2}$ kann auch beliebig klein gemacht werden, wenn $\varphi(\mu+n-1)$ nicht verschwindet. Im anderen Fall haben wir:

$$\alpha'_{n-2} = \alpha_{n-2} = 0 \quad , \quad \varphi(\mu+n-1) = 0 \quad (16.9)$$

In beiden Fällen kann die Bedingung (15.3) erfüllt werden.

Somit sind nur noch die beiden Beziehungen zu beweisen

$$\begin{aligned} |D'_n - D_n| &\rightarrow 0 & \delta \alpha_{n+1} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (16.10)$$

$$|D'_{n-1} - D_{n-1}| \rightarrow 0 \quad .$$

Wegen (16.6) und (15.1) gilt

$$D_n = 0 \quad , \quad (16.11)$$

und wegen (16.7)

$$\begin{aligned} \alpha'_n &\rightarrow \infty & \delta \alpha_{n+1} &\rightarrow 0 \quad . \\ D'_n &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (16.12)$$

Die zweite Bedingung (16.10) folgt aus der Rekursionsformel für die Fourierkoeffizienten:

$$|D'_{n-1} - D_{n-1}| \leq \left| \frac{A(\mu+n)}{C(\mu+n)} \right| |D'_{n+1} - D_{n+1}| + \left| \frac{B(\mu+n)}{C(\mu+n)} \right| |D'_n - D_n|. \quad (16.13)$$

Die beiden Glieder auf der rechten Seite streben gegen Null, wenn n immer grösser wird. Damit ist auch die zweite Bedingung (16.10) und damit der Satz 15 bewiesen.

17. Ein praktisches Beispiel der direkten Methode: Die Grundgleichung der elektrostatischen Fokussierung

a) Die allgemeine Grundgleichung

Die direkte Methode wurde schon bei allen Gleichungen angewandt, bei welchen die Lösung in der Form einer Potenzreihe oder eines Polynoms angegeben wird. In den meisten Fällen weist die Rekursionsformel nur zwei Glieder auf. Es ist deshalb oft möglich die Koeffizienten der Reihe (D_n) analytisch auszudrücken. Als Beispiel kann man die Bessel'sche Gleichung erwähnen.

Es wird hier eine andere Gleichung untersucht, die zu einer dreigliedrigen Rekursionsformel führt und die in der Elektronenoptik als Grundgleichung dient: Die Fokussierungsgleichung [T - 5 und 11] . Sie lautet:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{3}{16} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 R = 0 \quad (17.1)$$

mit der Hilfsgrösse

$$R = \sqrt[4]{\Phi} \cdot r. \quad (17.2)$$

Dabei stellt r den Radius des Elektronenstrahles dar, x die Abzisse längs der Elektronenbahn und Φ , bzw. Φ' das elektrische Potential, bzw. das elektrische Feld am Ort x .

Die Anfangsbedingungen an der Kathode ($x \approx 0$) sind folgendermassen definiert:

$$\begin{aligned}\Phi(x=0) &= 0 & (17.3) \\ \Phi(x=x_0) &= \Phi_0 \text{ [Reduzierte Anfangsenergie]} \\ R(x_0) &= 0\end{aligned}$$

Eine leichte Nullpunkt-Verschiebung ermöglicht auf diese Weise die Anfangsenergie des Elektrons zu berücksichtigen.

b) Das Kathodengebiet

In erster Näherung kann die Potential-Verteilung in der Nähe der Kathode durch eine Gerade dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi'(0) \cdot x & (17.4) \\ \Phi'(x) &= \Phi'(0)\end{aligned}$$

Der Nullpunkt ist deshalb eine singuläre Stelle von (17.1). Eine rein numerische Integration ist deshalb in diesem Gebiet unmöglich. Die übliche Integrationsmethode, die sogenannte Gauss'sche Methode [T - 7 und 11] ersetzt die genaue Potential-Verteilung durch eine Reihe von kleinen Gebieten, in welchen das Feld konstant bleibt. Sie ist deshalb auch im Kathodengebiet anwendbar, hat jedoch den Nachteil, sehr kompliziert und auch ungenau zu sein, wenn die Gebiete relativ gross gewählt werden. Um die Genauigkeit in der Nähe der Kathode zu verbessern, kann man den folgenden Ansatz machen:

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{1}{x} + b \quad (17.5)$$

Aus (17.1) und (17.5) folgt:

$$\frac{d^2 R}{dy^2} + \frac{3}{16} \left[\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y} + 1 \right] R = 0 \quad (17.6)$$

mit $y = bx$.

Die singulären Stellen dieser Differentialgleichung liegen im Nullpunkt und im Unendlichen, wobei der Nullpunkt eine Stelle der Bestimmtheit ist. Das Gebiet I erstreckt sich somit über die ganze komplexe Ebene.

c) Die beiden Lösungen

Zur Lösung der Differentialgleichung (17.6) kann man die direkte Methode anwenden:

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{n+\mu} . \quad (17.7)$$

Es gilt die folgende Rekursionsgleichung:

$$a_n \left[\frac{3}{16} + (\mu + n)(\mu + n - 1) \right] + \frac{6}{16} a_{n-1} + \frac{3}{16} a_{n-2} = 0 . \quad (17.8)$$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\mu (\mu - 1) + \frac{3}{16} = 0 . \quad (17.9)$$

Es wird

$$\mu' = \frac{1}{4} , \quad \mu'' = \frac{3}{4} \quad (17.10)$$

und aus (17.8):

$$a'_n = - \frac{6a'_{n-1} + 3a'_{n-2}}{4n(4n-2)} \quad (17.11)$$
$$a''_n = - \frac{6a''_{n-1} + 3a''_{n-2}}{4n(4n+2)} .$$

Wie zu erwarten war, konvergieren die beiden Reihen für beliebige Werte von y , weil der Nenner von (17.11) mit n^2 zunimmt. Die Werte von a'_n und a''_n , sowie diejenigen von

$$b'_n = (\mu' + n) \cdot a'_n \quad (17.12)$$

$$b''_n = (\mu'' + n) \cdot a''_n$$

sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1

Die Koeffizienten a_n und b_n

n	a'_n	a''_n	b'_n	b''_n
0	1,0000	1,0000	0,2500	0,7500
1	-0,7500	-0,2500	-0,93750	-0,43750
2	0,031250	-0,018750	0,0703125	-0,0515625
3	0,0171875	0,0051339	0,0558594	0,0192522
4	-0,0008789	0,0000884	-0,0037353	0,0004197
5	-0,0001286	-0,0000362	-0,0006750	-0,0002082
6	0,0000065	-0,0000001	0,0000403	-0,0000006
7	0,0000005	0,0000001	0,0000034	0,0000010
8	---	---	-0,0000002	---

Für numerische Anwendungen sind besonders die folgenden vier neuen Funktionen von Bedeutung.

$$g_1(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n y^n = R_{1/4} / y^{1/4} \quad (17.13)$$

$$g_2(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a''_n y^n = R_{3/4} / y^{3/4}$$

$$g_3(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b'_n y^n = R'_{1/4} \cdot y^{3/4}$$

$$g_4(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b''_n y^n = R'_{3/4} \cdot y^{1/4}$$

Diese sechs wichtigen Funktionen sind in den Bildern 3 ($R_{1/4}$ und $R_{3/4}$) und 4 (g_n) graphisch dargestellt. Die Hilfsfunktionen $g_n(y)$ sind weiter in den Tabellen 2 und 3 numerisch angegeben.

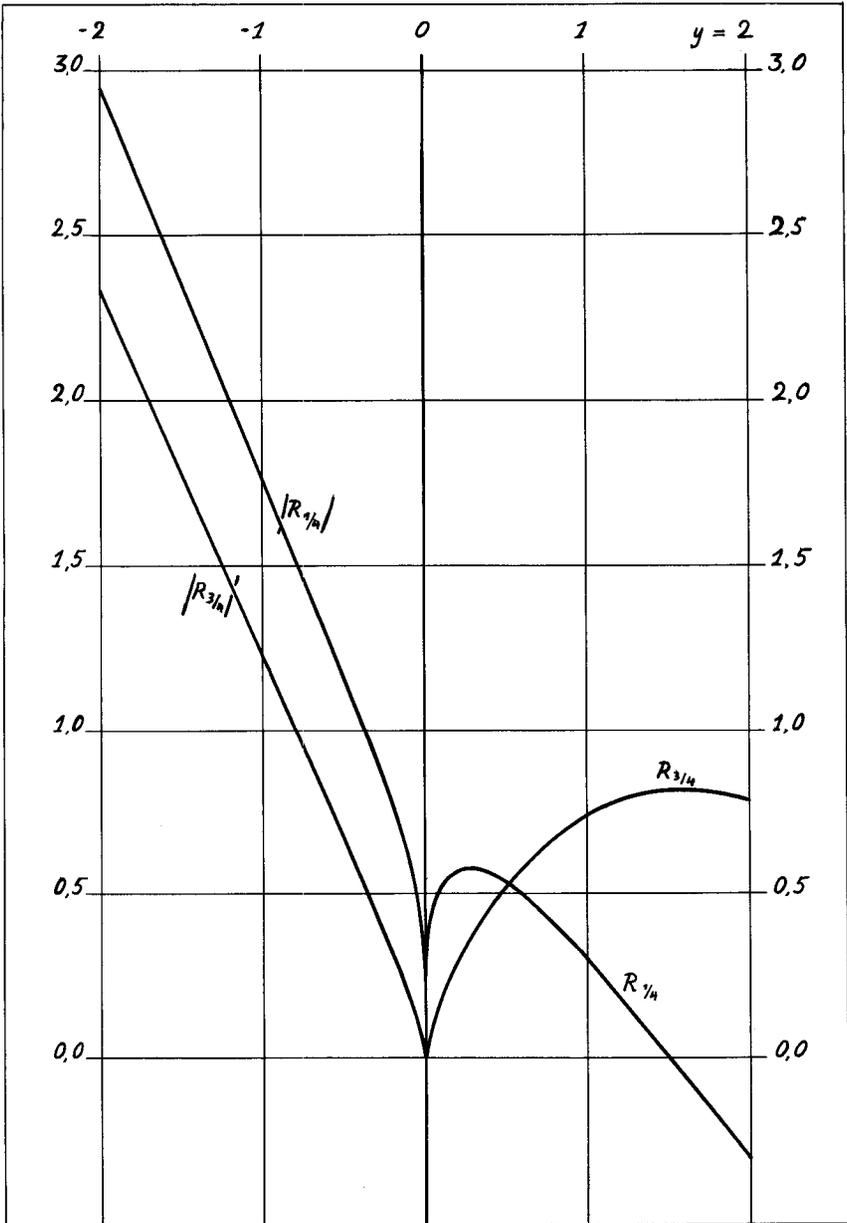


Abb. 3

Die Lösungen von (17.6)

Tabelle 2
Die Hilfsfunktionen $g_n(y)$

y	$g_1(y)$	$g_2(y)$	$g_3(y)$	$g_4(y)$
0,05	0,96258	0,98745	0,20331	0,72800
0,10	0,92533	0,97482	0,15701	0,70575
0,15	0,88826	0,96210	0,11114	0,68328
0,20	0,85139	0,94929	0,06575	0,66059
0,25	0,81472	0,93641	0,02088	0,63770
0,30	0,77827	0,92345	-0,02345	0,61463
0,35	0,74205	0,91042	-0,06718	0,59139
0,40	0,70608	0,89733	-0,11028	0,56799
0,45	0,67036	0,88417	-0,15271	0,54445
0,50	0,63490	0,87096	-0,19444	0,52079
0,55	0,59973	0,85769	-0,23544	0,49701
0,60	0,56484	0,84437	-0,27566	0,47313
0,65	0,53025	0,83100	-0,31507	0,44918
0,70	0,49598	0,81759	-0,35364	0,42515
0,75	0,46202	0,80414	-0,39134	0,40108
0,80	0,42840	0,79065	-0,42814	0,37696
0,85	0,39512	0,77714	-0,46400	0,35282
0,90	0,36219	0,76359	-0,49890	0,32867
0,95	0,32963	0,75002	-0,53281	0,30453
1,00	0,29744	0,73644	-0,56569	0,28040
1,1	0,23421	0,70922	-0,62830	0,23226
1,2	0,17258	0,68196	-0,68652	0,18437
1,3	0,11262	0,65471	-0,74016	0,13684
1,4	0,05440	0,62748	-0,78905	0,08976
1,5	-0,00202	0,60031	-0,83305	0,04326
1,6	-0,05659	0,57323	-0,87200	-0,00256
1,7	-0,10923	0,54626	-0,90579	-0,04760
1,8	-0,15992	0,51944	-0,93433	-0,09177
1,9	-0,20859	0,49279	-0,95751	-0,13496
2,0	-0,25520	0,46633	-0,97528	-0,17709

Tabelle 3

Die Hilfsfunktionen $g_n(y)$

$-y$	$g_1(y)$	$g_2(y)$	$g_3(y)$	$g_4(y)$
0,05	1,03758	1,01245	0,29704	0,77174
0,10	1,07530	1,02481	0,34440	0,79322
0,15	1,11314	1,03706	0,39202	0,81440
0,20	1,15111	1,04921	0,43986	0,83528
0,25	1,18918	1,06125	0,48788	0,85585
0,30	1,22734	1,07317	0,53604	0,87609
0,35	1,26558	1,08498	0,58429	0,89599
0,40	1,30388	1,09667	0,63259	0,91553
0,45	1,34223	1,10824	0,68088	0,93470
0,50	1,38061	1,11968	0,72913	0,95349
0,55	1,41902	1,13098	0,77729	0,97187
0,60	1,45743	1,14216	0,82532	0,98985
0,65	1,49584	1,15319	0,87316	1,00740
0,70	1,53423	1,16408	0,92076	1,02452
0,75	1,57258	1,17482	0,96809	1,04118
0,80	1,61088	1,18542	1,01510	1,05738
0,85	1,64912	1,19586	1,06174	1,07311
0,90	1,68729	1,20615	1,10795	1,08835
0,95	1,72535	1,21628	1,15370	1,10308
1,00	1,76332	1,22624	1,19893	1,11731
1,1	1,83887	1,24567	1,28766	1,14418
1,2	1,91382	1,26440	1,37377	1,16887
1,3	1,98805	1,28242	1,45686	1,19127
1,4	2,06145	1,29970	1,53658	1,21133
1,5	2,13390	1,31621	1,61254	1,22894
1,6	2,20528	1,33193	1,68437	1,24404
1,7	2,27549	1,34684	1,75172	1,25655
1,8	2,34441	1,36091	1,81422	1,26642
1,9	2,41191	1,37416	1,87153	1,27357
2,0	2,47790	1,38648	1,92330	1,27794

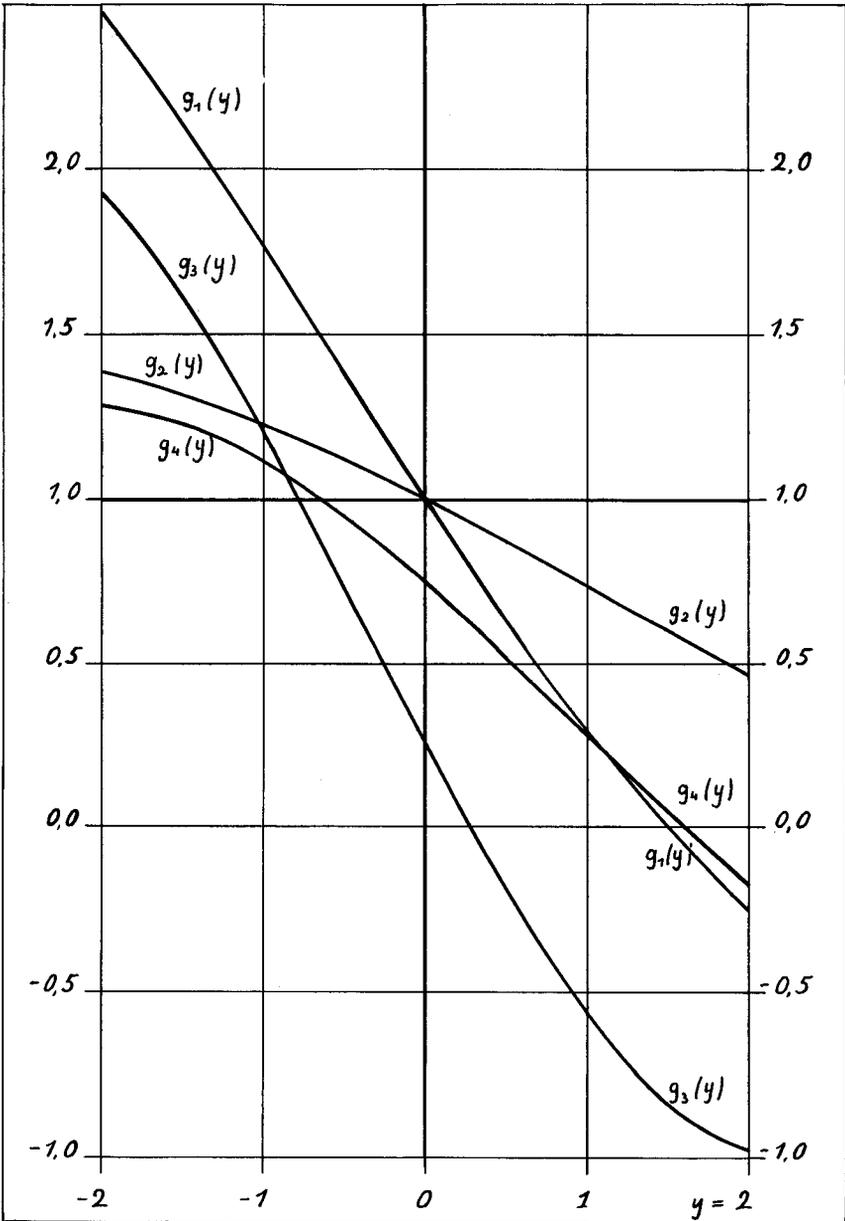


Abb. 4

Die Hilfsfunktionen $g_n(y)$

d) Die Anfangsbedingungen

Die Anfangsbedingungen (17.3) führen dann zur Lösung des Problems.

$$R(y) = R_{3/4} - \sqrt{y_0} R_{1/4} = y^{3/4} \left[g_2(y) - \sqrt{\frac{y_0}{y}} \cdot g_1(y) \right] \quad (17.14)$$

mit dem Parameter

$$y_0 = bx_0 = \frac{b\phi_0}{\phi'(0)} . \quad (17.15)$$

Diese Lösung ist jedoch nur in dem Gebiet gültig, in welchem der Ansatz (17.5) der Wirklichkeit entspricht. Bei grossen Werten von x ist eine numerische Integration erforderlich. Die Gleichung (17.1) ist dafür wenig geeignet, weil sie von zweitem Grade ist. Es ist deshalb zweckmässig, eine der beiden Riccati'schen Gleichungen anzuwenden.

Es sei:

$$U = \frac{R}{R'} \quad , \quad V = \frac{R'}{R} . \quad (17.16)$$

Aus (17.1) und (17.16) folgt:

$$U' = 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{\phi'U}{\phi} \right)^2 \quad (17.17)$$

und

$$V' = -V^2 - \frac{3}{16} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 . \quad (17.18)$$

Die Integration kann mit der Funktion V angefangen und so lange fortgesetzt werden, bis man einen bestimmten Wert für V erreicht. Die Integration wird dann mit U weitergeführt. Die Anfangswerte für die numerische Integration folgen aus (17.14) und (17.16):

$$V\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{b}{R} \cdot \frac{dR}{dy} = \frac{1}{x} \frac{g_4(y) - \sqrt{\frac{y_0}{y}} g_3(y)}{g_2(y) - \sqrt{\frac{y_0}{y}} g_1(y)} . \quad (17.19)$$

In vielen Fällen kann man y so wählen, dass bei jeder Funktion $g_n(y)$ die Reihe nach dem zweiten Glied abgebrochen werden kann. Daraus wird näherungsweise:

$$V(x) = \frac{3}{4x} - \frac{b}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_0}{x^3}} \quad . \quad (17.20)$$

Diese Beziehung ist sehr praktisch, weil sie einfach ist und trotzdem den Einfluss der Krümmung der Potentialkurve sowie denjenigen der Anfangsenergie wiedergibt.

Prinzipiell wäre es auch möglich, den Ansatz (17.5) zu ergänzen. Die gleiche Methode wäre auch anwendbar. Die Rekursionsformel würde jedoch mehr als drei Glieder aufweisen. Dieses Problem wird deshalb nicht weiter untersucht.

II. Kapitel

DIE GLEICHUNGEN MIT SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN

21. Die allgemeine Theorie der Gleichungen mit Symmetrie-Eigenschaften

a) Einleitung

Bei den meisten Anwendungen weist die Differentialgleichung des Problems bestimmte Symmetrie-Eigenschaften auf. Die Koeffizienten der allgemeinen bekannten Typen, wie der Mathieu'schen, der Lamé'schen und der Whittaker'schen Gleichung, sind reell, wenn die unabhängige Variable x reell ist. Weiter werden diese Gleichungen durch eine Substitution x in $(-x)$ nicht geändert. Aus diesen Symmetrie-Eigenschaften wurden in vielen Fällen Vereinfachungen der Rechenarbeit erzielt. Diese Vereinfachungen sind sehr wertvoll und können auch zu weiteren interessanten Eigenschaften führen.

Es werden die folgenden Definitionen eingeführt:

- a') Eine symmetrische Differentialgleichung ändert sich nicht, wenn man x durch $(-x)$ ersetzt.
- a'') Eine antisymmetrische Differentialgleichung ändert nur ihr Vorzeichen, wenn x durch $(-x)$ ersetzt wird.
- b) Eine reelle Differentialgleichung weist bei reellen Werten von x reelle Koeffizienten auf.

Diese drei Klassen von Differentialgleichungen werden im folgenden Kapitel gemeinsam untersucht, wobei die Klassen a' und a'' in vielen Fällen zur gleichen Beziehung führen.

Die bekannten, klassischen Gleichungen entsprechen gleichzeitig dem Fall a') und dem Fall b). Sie gehören grundsätzlich zur symmetrischen Klasse, wobei alle Rechenwerte reell bleiben. Die Gleichungen des optischen Gitters (Abschn. 24) weisen die gleichen Eigenschaften auf. Es werden im Abschn. 26 noch zwei Beispiele von antisymmetrischen, reellen Gleichungen untersucht.

b) Der Einfluss der Symmetrie-Eigenschaften

Die Symmetrie-Eigenschaften der Differentialgleichung spiegeln sich in der Form der Koeffizienten wieder. Daraus folgt:

$$a') \quad e_{2k-1} = 0 \quad ; \quad f_k = g_k (-1)^k \quad (21.1)$$

$$a'') \quad e_{2k} = 0 \quad ; \quad f_k = g_k (-1)^{k-1}$$

$$b) \quad e_k^* = e_k \quad ; \quad f_k^* = g_k^* \quad .$$

Bei den komplexen Zahlen bedeutet der Stern (*) den komplexkonjugierten Wert. Aus den Definitionen (11.19) erhält man den folgenden Satz:

Satz 17:

Die Symmetrie-Eigenschaften spiegeln sich folgendermassen in den Koeffizienten $A(\mu)$, $B(\mu)$ und $C(\mu)$ in der Rekursionsformel wieder:

$$a') \quad B(\mu) = B(-\mu) \quad (21.2)$$

$$A(\mu) = C(-\mu)$$

$$a'') \quad B(\mu) = -B(-\mu)$$

$$A(\mu) = -C(-\mu)$$

$$b) \quad B(\mu) = B^*(-\mu^*)$$

$$A(\mu) = C^*(-\mu^*) \quad .$$

Die Symmetrie-Eigenschaften der Differentialgleichung haben ebenfalls Einfluss auf die Form der Lösungen selbst.

Satz 18:

Eine symmetrische oder eine antisymmetrische Gleichung s-ten Grades weist s linear unabhängige Lösungen auf, die selbst symmetrisch oder antisymmetrisch sind.

Eine "reelle" Differentialgleichung s-ten Grades hat s linear unabhängige Lösungen, die bei reellen Werten von x reell sind.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf die analytische Fortsetzung der Lösung aus dem Nullpunkt. Diese Eigenschaft der Lösung ist für die Berechnung deswegen interessant, weil eine Beziehung zwischen den Fourierkoeffizienten von zwei Lösungen oder auch zwischen verschiedenen Koeffizienten der gleichen Lösung aufgestellt werden kann:

$$a) \quad \mu'' = -\mu' \quad , \quad D''_{-n} = \pm D'_n \quad (21.3)$$

$$b) \quad \mu'' = -\mu'^* \quad , \quad D''_{-n} = \pm D_n'^* \quad .$$

Die Gültigkeit dieser Beziehungen kann direkt mit Hilfe des algebraischen Grundsystems oder auf Grund des Satzes 18 bewiesen werden.

Aus (11.18) und (21.2) folgt:

$$a) \quad A(-\mu - n) D_{n+1} + B(-\mu - n) D_n + C(-\mu - n) D_{n-1} = 0 \quad (21.4)$$

$$b) \quad A^*(-\mu^* - n) D_{n+1} + B^*(-\mu^* - n) D_n + C^*(-\mu^* - n) D_{n-1} = 0 \quad .$$

Die erste Rekursionsformel entspricht einer Lösung der Differentialgleichung mit dem charakteristischen Wert $(-\mu)$ und den Fourierkoeffizienten D_{-n} . Die zweite Rekursionsformel führt zur zweiten Beziehung (21.3), wenn man den konjugiert komplexen Wert nimmt.

Der Satz 18 in Verbindung mit dem Satz von Floquet ergibt:

$$a) \quad u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \cos(\mu + n)x \quad (21.5)$$

oder

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n \sin(\mu + n)x$$

$$b) \quad u = e^{\mu_1 x} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} D'_n \cos(\mu_2 + n)x + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D''_n \sin(\mu_2 + n)x \right] ,$$

wobei μ_1, μ_2 , die D'_n und die D''_n in (21.5b) nur reelle Werte aufweisen. Diese Lösungen können alle in zwei Reihen der Form (11.13) getrennt werden, bei welchen die Beziehungen (21.3) erfüllt werden.

Die Beziehungen (21.3) zeigen, dass man nur die Hälfte der Lösungen zu berechnen braucht, und dass die andere Hälfte sich daraus sofort ergibt. Das gilt grundsätzlich für das mittlere Gebiet III, in welchem die Reihe in beiden Richtungen unendlich ist, gilt aber auch für die Gebiete I und II, wenn man sie als Einheit betrachtet, weil die Gleichungen (21.3) von einer Lösung des Gebietes I in eine des Gebietes II führen und umgekehrt.

c) Die Fälle $\mu = 0$ und $\mu = 1/2$

Die Beziehungen (21.3) können auch die Fourierkoeffizienten innerhalb einer einzigen Lösung verbinden, wenn der Unterschied zwischen μ und $(-\mu)$, bzw. μ und $(-\mu^*)$ einer ganzen Zahl entspricht. Da μ im Gebiet III durch $\mu + m$ ersetzt werden kann, ist es möglich, diese Sonderfälle durch die folgenden Werte zu bezeichnen:

$$\begin{aligned} & \mu = 0 && (21.6) \\ \text{und} & && \\ & \mu = \frac{1}{2} && . \end{aligned}$$

Dabei gilt der Satz 19:

Satz 19:

Bei Differentialgleichungen mit Symmetrie-Eigenschaften kann die Rekursionsformel einseitig abgebrochen werden, wenn $\mu = 0$ oder $1/2$ ist. Eine Gleichung des algebraischen Grundsystems erhält eine neue Form, in welcher nur zwei Fourierkoeffizienten vorkommen.

Beweis des Satzes 19:

Aus (21.3) erhält man für die Fälle (21.6):

$$\begin{aligned} \text{a) } \mu' = \mu'' = 0 & \longrightarrow D_n = \pm D_{-n} && (21.7) \\ \mu' = \mu'' + 1 = \frac{1}{2} & \longrightarrow D_{n-1} = \pm D_{-n} \\ \text{b) } \mu' = \mu'' = 0 & \longrightarrow D_n = D_{-n}^* \\ \mu' = \mu'' + 1 = \frac{1}{2} & \longrightarrow D_{n-1} = D_{-n}^* \end{aligned}$$

Wir führen diese Beziehungen in die Gleichung mit $n = 0$ des algebraischen Grundsystemes ein. Es wird für den Fall $\mu = 0$:

$$a') \quad B(0) \cdot D_0 + 2 C(0) D_1 = 0 \quad (21.8)$$

$$\text{für} \quad D_n = D_{-n} ,$$

$$B(0) \cdot 0 + [C(0) - C(0)] D_1 = 0$$

$$\text{für} \quad D_n = -D_{-n} ,$$

$$a'') \quad C(0) [D_1 - D_{-1}] = 0 ,$$

$$b) \quad B(0) \cdot D_0 + 2 \operatorname{Re} [C(0) D_1] = 0 .$$

Dabei müssen die Beziehungen (21.2) auch berücksichtigt werden.

Im Falle $\mu = 1/2$ gilt:

$$a) \quad [B(1/2) + A(1/2)] D_0 + C(1/2) D_1 = 0 \quad (21.9)$$

$$\text{für} \quad D_{n-1} = D_{-n}$$

$$[B(1/2) - A(1/2)] D_0 + C(1/2) D_1 = 0$$

$$\text{für} \quad D_{n-1} = -D_{-n}$$

$$b) \quad B(1/2) D_0 + A(1/2) D_0^* + C(1/2) D_1 = 0 .$$

Alle Beziehungen (21.8) und (21.9) enthalten nur zwei Fourierkoeffizienten D_0 und D_1 , zwei davon sogar nur D_1 . Die antisymmetrischen Lösungen im Fall a') und $\mu = 0$ werden durch die Gleichung $n = 1$ bestimmt:

$$a') \quad B(1) \cdot D_1 + C(1) \cdot D_2 = 0 \quad (21.10)$$

$$\text{für} \quad D_n = -D_{-n} , \mu = 0 .$$

Die Gleichung (21.8 a'') muss besonders besprochen werden. Bei einer symmetrischen Lösung ist diese Gleichung immer erfüllt. Das algebraische Grundsystem kann immer gelöst werden. Daraus folgt der Satz:

Satz 20:

Eine antisymmetrische Differentialgleichung vom Typus (11.1) weist immer eine symmetrische Lösung der Form (11.13) mit $\mu = 0$ auf.

Eine kurze Ueberlegung zeigt, dass eine antisymmetrische Differentialgleichung vom Typus (11.1) immer eine symmetrische oder antisymmetrische Lösung aufweisen muss: Eine solche Differentialgleichung ist immer ungeraden Grades und muss eine ungerade Zahl von linear unabhängigen Lösungen aufweisen. Sie sind paarweise durch (21.3) gekoppelt. Mindestens eine davon muss jedoch mit sich selbst gekoppelt sein. Der Satz 20 gibt die Form dieser besonderen Lösung an.

d) Die Umformung der Determinanten

Die Beziehungen (21.2) zeigen, dass die unendlichen Determinanten des Abschn. 13 auch Symmetrie-Eigenschaften zeigen. Aus (13.2) und (21.2) folgt:

$$a) \quad \varphi(\mu) = \varphi(1 - \mu) \quad (21.11)$$

$$b) \quad \varphi(\mu) = \varphi^*(1 - \mu^*)$$

Weiter gilt:

$$a) \quad \Delta_+(\mu) = \Delta_-(-\mu) \quad (21.12)$$

$$b) \quad \Delta_+(\mu) = \Delta_-^*(-\mu^*)$$

Satz 21:

Die Grunddeterminante (13.1) kann umgeformt werden, wenn die Differentialgleichung Symmetrie-Eigenschaften aufweist und wenn $\mu = 0$ oder $\mu = 1/2$ ist. Die charakteristische Gleichung besteht aus dem Produkt von zwei einseitig beschränkten Determinanten, das verschwinden muss, wenn die Differentialgleichung symmetrisch oder antisymmetrisch ist. Die eine Determinante entspricht den symmetrischen Lösungen, die andere den antisymmetrischen.

Beweis des Satzes 21:

Die beiden Werte von μ (0 und 1/2) müssen wieder getrennt behandelt werden. Bei $\mu = 0$ wird aus (13.7):

$$a) \quad \Delta(0) = \Delta_+(1) \left[\Delta_+(1) - 2 \varphi(0) \Delta_+(2) \right] \quad (21.13)$$

$$b) \quad \Delta(0) = |\Delta_+(1)|^2 - 2 \operatorname{Re} \left[\varphi(0) \Delta_+(1) \Delta_+^*(2) \right] .$$

Man kann zwei neue Determinante definieren:

$$a) \quad \Delta_a(0) = \begin{vmatrix} 1 & , & \frac{2C(0)}{B(0)} & , & 0 & , & \text{---} \\ \frac{A(1)}{B(1)} & , & 1 & , & \frac{C(1)}{B(1)} & , & \text{---} \\ 0 & , & \frac{A(2)}{B(2)} & , & 1 & , & \text{---} \\ \text{---} & & & & & & \text{---} \end{vmatrix} \quad (21.14a)$$

$$\Delta_b(0) = \begin{vmatrix} 1 & , & \frac{C(1)}{B(1)} & , & 0 & , & \text{---} \\ \frac{A(2)}{B(2)} & , & 1 & , & \frac{C(2)}{B(2)} & , & \text{---} \\ 0 & , & \frac{A(3)}{B(3)} & , & 1 & , & \text{---} \\ \text{---} & & & & & & \text{---} \end{vmatrix} .$$

Die charakteristische Gleichung (21.13 a) wird:

$$\Delta(0) = \Delta_a(0) \cdot \Delta_b(0) = 0 \quad (21.15a)$$

Die Determinante $\Delta_a(0)$ bezieht sich auf die symmetrischen Lösungen, $\Delta_b(0)$ auf die antisymmetrischen. Diese beiden Determinanten können auch direkt aus dem algebraischen Grundsystem unter Berücksichtigung von (21.8a') gewonnen werden. Bei den antisymmetrischen Differentialgleichungen ist $B(0)$ gleich Null, so dass die Ergebnisse aus (21.15a) nicht klar sind. Aus (13.1) folgt jedoch in diesem Fall:

$$B(0) \cdot \Delta(0) = -\frac{A(0) \cdot C(-1)}{B(-1)} \Delta_+(1) - \frac{A(1) \cdot C(0)}{B(1)} \Delta_-(-1) = 0 \quad (21.16a'')$$

Die charakteristische Gleichung ist dann immer erfüllt.

Der Fall $\mu = 1/2$ kann auf gleiche Art untersucht werden. Die neuen Determinanten sind leicht verschieden. Sie können auch aus dem algebraischen Grundsystem unter Berücksichtigung von (21.9a) gewonnen werden.

Die Untersuchung der "reellen" Differentialgleichung wird in dieser Hinsicht durch das Hervortreten der absoluten Werte oder der Realteile einzelner Grössen stark eingengt, so dass sie hier abgebrochen werden muss.

Es muss zum Schluss bemerkt werden, dass die Determinanten $\Delta_a(0)$, $\Delta_b(0)$, $\Delta_a(1/2)$ und $\Delta_b(1/2)$ für die Mathieu'sche Gleichung längst bekannt sind. Es zeigt sich, dass sie von allgemeinem Charakter sind.

22. Das Problem der Doppellösungen

a) Die erforderliche Bedingung

Man nennt ein Paar Doppellösungen zwei Lösungen erster Art, die den gleichen Werten von μ , e_k , f_k und g_k entsprechen. Es ist bekannt [H - 9], dass die Mathieu'sche Differentialgleichung keine Doppellösungen hat. Aus den Arbeiten über die Whittaker'sche [P - 10] oder über die inverse Mathieu'sche Gleichung [L - 3] ist ersichtlich, dass Doppellösungen unter besondere Bedingungen möglich sind. Eine Verallgemeinerung der Untersuchung von Ince [H - 9] führt zu folgendem Satz:

Satz 22:

Doppellösungen können nur dann vorhanden sein, wenn die beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$A(\mu) = 0 \tag{22.1}$$

$$C(\mu + m) = 0 \quad .$$

Diese Bedingungen sind jedoch nicht hinreichend.

Beweis des Satzes 22:

Es seien D'_n die Fourierkoeffizienten der einen Lösung, D''_n diejenigen der anderen. Das Grundsystem ist jedoch für beide Lösungen gleich. Durch Elimination von $B(\mu + n)$ aus den beiden Gleichungen erhält man:

$$A(\mu + n) \begin{vmatrix} D'_{n-1}, D'_n \\ D''_{n-1}, D''_n \end{vmatrix} = C(\mu + n) \begin{vmatrix} D'_n, D'_{n+1} \\ D''_n, D''_{n+1} \end{vmatrix} \quad (22.2)$$

Die Grenzwerte dieser Determinanten für $|n| \rightarrow \infty$ sind Null, wenn man durch eine Achsentransformation die reelle x - Achse in das mittlere Gebiet III legt.

Wenn alle Determinanten verschwinden, sind in den meisten Fällen die beiden Lösungen linear gekoppelt und bilden deshalb nicht ein Paar von Doppellösungen. Wenn jedoch die Bedingungen (22.1) erfüllt sind und m negativ ist, können die Determinanten mit den D'_n und D''_n zwischen D_m und D_0 inklusiv dieser Fourierkoeffizienten, von Null verschieden sein. Die andern verschwinden trotzdem.

Wenn m positiv oder gleich Null ist, kann man aus der direkten Methode ableiten, dass die Fourierreihe einseitig abgebrochen ist:

$$\begin{aligned} D'_n &= 0 & n > m \\ D''_n &= 0 & n < 0 \end{aligned} \quad (22.3)$$

Sämtliche Determinanten verschwinden, weil sie alle eine Zeile mit Nullen aufweisen. Die Lösungen sind jedoch offensichtlich linear unabhängig und bilden deshalb ein Paar von Doppellösungen.

b) Ein besonderer Typus von Differentialgleichungen, die immer Doppellösungen aufweisen

Cambi [L - 3] hat gezeigt, dass die inverse Mathieu'sche Gleichung

$$(1 + 2\theta \cos x) \frac{d^2 u}{dx^2} + c \cdot u = 0 \quad (22.4)$$

für $\mu = 0$ nur Doppellösungen, mit Ausnahme des kleinsten (untersten) charakteristischen Wertes, aufweist. Diese Eigenschaft kann auch verallgemeinert werden.

Satz 23:

Die symmetrischen Differentialgleichungen vom Typus (11.1) weisen für $\mu = 0$ Doppellösungen bei allen charakteristischen Werten mit Ausnahme des ersten

auf, wenn der Koeffizient der Funktion selbst konstant ist, d. h., wenn

$$f_0 = g_0 = 0 \text{ ist.} \quad (22.5)$$

Beweis des Satzes 23:

Die Definitionen (11.19) ergeben unter Berücksichtigung von (22.5):

$$A(\mu + n) = \sum_{k=1}^s i^k (\mu + n - 1)^k g_k \quad (22.6)$$

$$C(\mu + n) = \sum_{k=1}^s i^k (\mu + n + 1)^k f_k \quad .$$

Daraus folgt:

$$A(1) = C(-1) = 0 \quad . \quad (22.7)$$

Aus den Rekursionsformeln

$$0 \cdot D_0 + B(1) \cdot D_1 + C(1) \cdot D_2 = 0 \quad (22.8)$$

$$A(0)D_{-1} + B(0) \cdot D_0 + C(0) \cdot D_1 = 0$$

$$A(-1)D_{-2} + B(-1)D_{-1} + 0 \cdot D_0 = 0$$

kann man eine Lösung

$$D_n = 0 \quad |n| \geq 1 \quad (22.9)$$

$$B(0) = 0$$

ableiten. Diese Lösung kann nicht mit einer anderen ein Paar von Doppellösungen bilden.

Bei allen anderen charakteristischen Werten erhält man:

$$\epsilon_1 = \frac{0 \cdot c(0)}{B(0) - \epsilon_0} = 0 \quad . \quad (22.10)$$

Der Wert von ϵ_1 hängt deshalb nicht von ϵ_0 ab. Weiter gilt

$$\frac{D_0}{D_1} = \frac{0}{0} \quad (22.11)$$

und kann beliebig gewählt werden. Bei einer symmetrischen Lösung gilt

$$\left(\frac{D_0}{D_1}\right)_{\text{sym.}} = - \frac{2 C(0)}{B(0)} \quad (22.12)$$

und bei einer antisymmetrischen

$$\left(\frac{D_0}{D_1}\right)_{\text{ant.}} = 0 \quad (22.13)$$

Es ist somit möglich, eine symmetrische und eine antisymmetrische Lösung für den gleichen charakteristischen Wert zu erhalten. Sie bilden deshalb ein Paar von Doppellösungen.

23. Andere Eigenschaften der Gleichungen mit Doppellösungen

a) Die erforderliche und hinreichende Bedingung

Der Satz 23 zeigt, dass die Bedingungen (22.1) nicht hinreichend sind, um in allen Fällen Doppellösungen zu garantieren. Der Beweis des Satzes 23 gibt uns jedoch einen Hinweis in welcher Richtung die zusätzliche Bedingung zu suchen ist. Da sich das Problem der Doppellösungen meistens bei symmetrischen oder antisymmetrischen Differentialgleichungen und bei $\mu = 0$ oder $1/2$ stellt, nehmen wir diese wichtigsten Fälle als verwirklicht an.

Es wird aus (22.1):

$$A\left(\frac{m}{2}\right) = C\left(-\frac{m}{2}\right) = 0 \quad (23.1)$$

Die Grunddeterminante lässt sich nach (21.14 a) oder nach der entsprechenden Form für $\mu = 1/2$ umformen. Es gilt dann der Satz

Satz 24:

Eine symmetrische oder antisymmetrische Differentialgleichung vom Typus (11.1) führt bei $\mu = m/2$ zu einer Grunddeterminante von der Form

$$\Delta \left(\frac{m'}{2} \right) = \Delta'_a \left(\frac{m'}{2} \right) \cdot \Delta'_b \left(\frac{m'}{2} \right) \cdot \Delta_+^2 \left(\frac{m'}{2} \right) , \quad (23.2)$$

wenn die Bedingung (23.1) erfüllt ist. Die Determinanten $\Delta'_a (m'/2)$ und $\Delta'_b (m'/2)$ sind beidseitig beschränkt und führen zu einer symmetrischen bzw. antisymmetrischen Lösung. Die Determinante $\Delta_+ (m'/2)$ ist einseitig beschränkt und für beide Symmetrie-Eigenschaften der Lösung gleich.

Beweis des Satzes 24:

Aus (13.2) und (23.1) folgt:

$$\varphi \left(\frac{m}{2} \right) = \varphi \left(1 - \frac{m}{2} \right) = 0 \quad . \quad (23.3)$$

Weiter gilt wegen (13.5)

$$\Delta (\mu) = \Delta_+ (\mu) \cdot \Delta_- (\mu - 1) \quad (23.4)$$

wenn

$$\varphi (\mu) = 0 \text{ ist .}$$

Diese Beziehung ist auch dann gültig, wenn $\Delta (\mu)$ durch $\Delta_a (\mu)$, bzw. $\Delta_b (\mu)$ ersetzt wird, sofern die Definition von $\Delta_- (\mu - 1)$ entsprechend geändert wird:

$\Delta_- (\mu - 1)$ ist die Unterdeterminante von $\Delta (\mu)$ die $A(\mu - 1)$ noch erhält. $C(\mu - 1)$ jedoch nicht mehr. Daraus folgt:

$$\Delta_a (\mu) = \Delta'_a (\mu) \cdot \Delta_+ (\mu) \quad (23.5)$$

$$\Delta_b (\mu) = \Delta'_b (\mu) \cdot \Delta_+ (\mu) ,$$

wobei $\Delta'_a (\mu)$ und $\Delta'_b (\mu)$ Determinanten von endlicher Ordnung sind. Wegen (21.15 a) geht (23.5) in (23.2) über. Dabei gilt

$$\mu = \frac{m'}{2} = \frac{m}{2} , \text{ bzw. } 1 - \frac{m}{2} \quad (23.6)$$

je nach dem ob m positiv oder negativ ist.

Satz 25:

Eine symmetrische oder antisymmetrische Differentialgleichung vom Typus (11.1), weist ein Paar Doppellösungen mit symmetrischen Eigenschaften auf, wenn die Bedingung (23.1) erfüllt ist und der charakteristische Wert die Gleichung

$$\Delta_+ \left(\frac{m'}{2} \right) = 0 \quad (23.7)$$

erfüllt, und zwar nur in diesem Fall. Die Grösse m' ist folgendermassen definiert:

$$\begin{aligned} m' &= m > 0 & (23.8) \\ \text{oder} \\ m' &= 2 - m > 0 . \end{aligned}$$

Dieser Satz folgt direkt aus dem Satz 24, weil der charakteristische Wert nicht von den Symmetrie-Eigenschaften der Lösung abhängt. Es ist selbstverständlich, dass die Determinante durch ein oder zwei Kettenbrüche ersetzt werden kann.

b) Die Lösungen ohne Symmetrie

Doppellösungen sind nicht nur bei Differentialgleichungen mit Symmetrie-Eigenschaften und auch dort nicht nur bei symmetrischen und antisymmetrischen Lösungen zu finden.

Satz 26:

Ein Paar von Doppellösungen ist dann und nur dann vorhanden, wenn die Bedingung (22.1) erfüllt ist und weiter wenn die beiden folgenden Determinanten verschwinden:

$$\Delta_+ (\mu') = \Delta_- (\mu' - |m+1| - 1) = 0 \quad (23.9)$$

mit

$$\begin{aligned} \mu' &= \mu \quad , \quad m < 0 & (23.10) \\ \mu' &= \mu + m + 1, \quad m \geq 0 . \end{aligned}$$

Beweis des Satzes 26:

Wenn die Bedingungen (22.1) erfüllt sind, folgt aus (13.2):

$$\varphi(\mu) = \varphi(\mu + m + 1) = 0 \quad (23.11)$$

und aus (13.5)

$$\Delta(\mu) = \Delta_+(\mu) \cdot \Delta_-(\mu - 1) \quad (23.12)$$

Es sind jetzt drei Fälle zu unterscheiden. Wenn $m + 1$ negativ ist, kann die Determinante $\Delta_-(\mu - 1)$ als Produkt zweier Determinanten ausgedrückt werden:

$$\Delta_-(\mu - 1) = \Delta_-(\mu + m) \cdot \Delta(\mu, \mu + m) \quad (23.13)$$

Wenn $\Delta_+(\mu)$ und $\Delta_-(\mu + m)$ gleichzeitig verschwinden, erhalten wir eine Lösung, die im Gebiet III konvergiert und deren beide Reihen mit positiven, bzw. negativen Werten von n unabhängig voneinander bleiben können. In diesem Falle konvergieren die Lösungen des Gebietes I und die des Gebietes II gleichzeitig im Gebiet III.

Wenn $m + 1$ positiv ist, kann $\Delta_+(\mu)$ in zwei Faktoren getrennt werden:

$$\Delta_+(\mu) = \Delta_+(\mu + m + 1) \cdot \Delta(\mu + m + 1, \mu + 1) \quad (23.14)$$

Die Konsequenzen für die Lösungen sind die gleichen wie im ersten Fall.

Wenn schliesslich $m + 1$ gleich Null ist, gilt:

$$A(\mu) = C(\mu - 1) = 0 \quad (23.15)$$

Die beiden Rekursionsformeln für $n = -1$ und $n = 0$ lauten:

$$A(\mu - 1) D_{-2} + B(\mu - 1) D_{-1} + 0 \cdot D_0 = 0 \quad (23.16)$$

$$0 \cdot D_{-1} + B(\mu) \cdot D_0 + C(\mu) D_1 = 0 \quad .$$

Wenn die Determinanten $\Delta_+(\mu)$ und $\Delta_-(\mu - 1)$ beide verschwinden, konvergieren die beiden Lösungen des Gebietes I, bzw. II mit

$$D_n = 0 \quad n < 0 \quad (23.17)$$

und

$$D_n = 0 \quad n \geq 0$$

auch im mittleren Gebiet III und bilden deshalb ein Paar von Doppellösungen.

c) Die Form der Lösungen

Der Beweis des Satzes 23 zeigt, dass die charakteristische Gleichung auch algebraisch bleiben kann und dass die Lösungen auch eine polynomiale Form aufweisen können, wenn besondere Bedingungen erfüllt sind.

Satz 27:

Die charakteristische Gleichung für das Gebiet III bleibt nur dann algebraisch, wenn die Bedingungen (22.1) erfüllt sind und wenn trotzdem keine Doppellösungen vorhanden sind.

Beweis des Satzes 27:

Wenn (22.1) erfüllt ist, folgt aus (23.11):

$$\Delta(\mu) = \Delta_+(\mu) \cdot \Delta_-(\mu + m) \cdot \Delta(\mu, \mu + m) \quad (23.18)$$

oder

$$\Delta(\mu) = \Delta_+(\mu + m + 1) \cdot \Delta_-(\mu - 1) \cdot \Delta(\mu + m + 1, \mu + 1) .$$

Die Determinanten $\Delta(\mu, \mu + m)$ und $\Delta(\mu + m + 1, \mu + 1)$ sind beidseitig beschränkt und führen zu einer algebraischen charakteristischen Gleichung. Die Doppellösungen dagegen sind nur dann vorhanden, wenn die beiden einseitig beschränkten Determinanten gleichzeitig verschwinden.

Satz 28:

Die Bedingungen des Satzes 27 sind für symmetrische und antisymmetrische Differentialgleichungen mit $\mu = 0$ oder $1/2$ hinreichend.

Beweis des Satzes 28:

Die beiden einseitig beschränkten Determinanten sind in diesem Fall gleich und verschwinden gleichzeitig. Wenn keine Doppellösungen vorhanden sind, muss deshalb die zentrale, beidseitig beschränkte Determinante Null sein.

Die Form der Lösungen selbst lässt sich aus dem folgenden Satz ermitteln:

Satz 29:

Wenn die Bedingungen (22.1) erfüllt sind, müssen drei Fälle unterschieden werden.

a) Die Zahl m ist gleich -1 .

Aus (23.17) folgt, dass die Lösungen durch einseitig beschränkte Reihen dargestellt werden. Das Doppellösungspaar besteht aus einer Lösung mit negativen Werten von n und einer mit positiven oder verschwindenden Werten von n . Sie weisen kein gemeinsames Glied auf und es fehlt auch keines zwischen ihnen. Die charakteristische Gleichung ist nie algebraisch und die polynomiale Form tritt nicht auf.

b) Die Zahl m ist positiv oder Null.

Die Lösungen können durch einseitig beschränkte Reihen dargestellt werden. Die Werte mit $n = 0, 1, \dots, m$ fehlen in allen Reihen. Die beiden Lösungen eines Paares sind vollständig getrennt, und lassen in der Gliederreihe den erwähnten Zwischenraum offen.

Wenn die zentrale Determinante gleich Null gesetzt wird, ist die charakteristische Gleichung algebraisch. Die Form der Lösung ist ganz normal mit einer beidseitig unendlichen Reihe.

c) Die Zahl m ist kleiner als -1 .

Die zentrale Determinante führt zu einer algebraischen charakteristischen Gleichung und einer Lösung in Polynomform mit $(|m| - 1)$ Gliedern.

Die Doppellösungen weisen alle die Glieder mit n zwischen m und 0 auf. Die kleinen Determinanten der Gleichung (22.2) sind in diesem Bereich von Null verschieden.

Die einzige Ausnahme dieses Satzes ist durch die antisymmetrischen Differentialgleichungen für $\mu = 0$ gegeben. Wie schon erwähnt, führt die "zentrale" Gleichung (21.8a'') zu besonderen Ergebnissen, die hier nicht behandelt werden können.

Der Beweis dieses Satzes folgt aus den Ergebnissen des Abschnittes 12, wo die einseitig begrenzten Reihen untersucht wurden, sowie aus dem Satz 27.

24. Ein praktisches Beispiel der numerischen Methode :
Die Differentialgleichungen des optischen Gitters

a) Einleitung

Das Problem des durchsichtigen optischen Gitters [U - 10] hat den Verfasser seinerzeit zur Untersuchung der allgemeinen Differentialgleichung von der Form (11.1) veranlasst. Es steht in enger Beziehung zu demjenigen der Lichtbrechung durch Ultraschall-Schwingungen. Bei besonderen Annahmen erhält man auch als Grundgleichung die Mathieu'sche Differentialgleichung.

Wenn man jedoch einen Vergleich zwischen den beiden Polarisationen ziehen will, muss man die elektrische Verschiebung \vec{D} an Stelle des Feldes \vec{E} einführen:

$$\Delta(\psi \vec{D}) - \text{grad div}(\psi \vec{D}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 \quad (24.1)$$

mit

$$\psi(x) = \frac{1}{\epsilon(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \cos n x \quad . \quad (24.2)$$

Um eine Gleichung der Form (11.1) zu erhalten, muss man die Reihe in (24.2) nach dem zweiten Glied abbrechen:

$$\psi(x) = \psi_0 + \psi_1 \cos x \quad . \quad (24.3)$$

Aus (24.2) und (24.3) ist ersichtlich, dass die (0 x)-Achse senkrecht zu den Schichtungsebenen steht. Die beiden anderen Koordinatenachsen sind so gewählt, dass die (x 0y)-Ebene die Fortpflanzungsrichtung der Licht-Welle enthält. Die Koordinate z ist dann senkrecht zu dieser Ebene gerichtet. Der ganze Vorgang ist deshalb von z unabhängig.

Die elektrische Verschiebung kann folgendermassen ausgedrückt werden.

$$\vec{D} = \vec{D}(x) \cdot e^{i(ly - kct)} \quad , \quad (24.4)$$

wobei die beiden üblichen Polarisationen eingeführt werden können.

$$\vec{D}_{\perp} = D_z \cdot \vec{z}_0 \quad (24.5)$$

$$\vec{D}_{\parallel} = D_x \cdot \vec{x}_0 + D_y \cdot \vec{y}_0$$

mit den Einheitsvektoren \vec{x}_0 , \vec{y}_0 und \vec{z}_0 .

b) Die ordentliche Polarisation

Die Komponente \vec{D}_{\perp} entspricht der ordentlichen oder senkrechten Polarisation. Die Wellengleichung (24.1) vereinfacht sich, weil das zweite Glied wegfällt. Mit den neuen Parametern,

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = 2\theta \quad \text{und} \quad \frac{k^2}{\varphi_0} = k'^2 \quad (24.6)$$

wird aus (24.1)

$$(1 + 2\theta \cos x) \frac{d^2 D_{\perp}}{dx^2} - 4\theta \sin x \frac{d D_{\perp}}{dx} + \quad (24.7)$$

$$+ [k'^2 - l^2 (1 + 2\theta \cos x) - 2\theta \cos x] D_{\perp} = 0 .$$

Die Differentialgleichung ist symmetrisch und reell. Die besonderen Beziehungen des Abschnittes 21 sind deshalb hier anwendbar. Der Koeffizient $(1 + 2\theta \cos x)$ der zweiten Ableitung verschwindet nie auf der reellen Achse, weil die dielektrische Konstante $\epsilon(x)$ begrenzt bleiben muss. Die numerische Methode ist deshalb in allen praktischen Fällen anzuwenden.

Das algebraische Grundsystem lautet:

$$\theta [c + (\mu + n)^2] (D'_{n-1} + D'_{n+1}) + [c - k'^2 + (\mu + n)^2] D'_n = 0 . \quad (24.8)$$

Der charakteristische Parameter ist die Grösse l^2 und wird mit c bezeichnet. Die Berechnungsgleichungen werden später zusammen mit den anderen aufgestellt.

c) Die ausserordentliche Polarisation

Wenn $D_z = 0$ ist, kann das Glied $\text{grad div} (\varphi \vec{D})$ nicht verschwinden. Es gilt jedoch

$$\text{grad} (\text{div} \varphi \vec{D}) = \text{grad} (\vec{D}, \text{grad} \varphi) \quad , \quad (24.9)$$

weil

$$\text{div} \vec{D} = 0 \quad . \quad (24.10)$$

Man kann sich auf die x-Komponente der Wellengleichung beschränken. Aus (24.1), (24.3) und (24.9) folgt:

$$\begin{aligned} (1 + 2\theta \cos x) \frac{d^2 D_x}{dx^2} - 2\theta \sin x \frac{d D_x}{dx} + \\ + [k'^2 - l^2(1 + 2\theta \cos x)] D_x = 0 \quad . \end{aligned} \quad (24.11)$$

Diese Differentialgleichung ist nicht die gleiche wie diejenige der ordentlichen Polarisation. Sie weist jedoch prinzipiell die gleichen Eigenschaften in Bezug auf die singulären Punkte und die Symmetrie auf. Die Grundgleichungen werden später aufgestellt.

d) Die erweiterte inverse Mathieu'sche Gleichung

Das Problem der ordentlichen Polarisation kann auch mit Hilfe des elektrischen Feldes gelöst werden:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + [k^2 \cdot \epsilon(x) - l^2] E = 0 \quad . \quad (24.12)$$

Aus (24.3) und (24.12) wird:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \left[\frac{k^2}{\varphi + \psi_1 \cos x} - l^2 \right] E = 0 \quad , \quad (24.13)$$

was einer Erweiterung der inversen Mathieu'schen Differentialgleichung (22.4) entspricht:

$$(1 + 2 \theta \cos x) \frac{d^2 E}{dx^2} + [k'^2 - c (1 + 2 \theta \cos x)] E = 0 . \quad (24.14)$$

Diese Differentialgleichung muss bestimmte Beziehungen zu (24.7) aufweisen, weil sie den gleichen Vorgang darstellt und weil die Beziehung

$$E = D [\Psi_0 + \Psi_1 \cos x] \quad (24.15)$$

besteht. Sie weist auf alle Fälle die gleichen Symmetrie-Eigenschaften und die gleichen singulären Stellen auf.

e) Die Grundgleichungen der numerischen Methode

Die Verwandtschaft der Gleichungen (24.7) und (24.14) ergibt sich aus folgendem Satz.

Satz 30:

Die Differentialgleichungen (24.7) und (24.14) weisen die gleichen charakteristischen Werte auf, trotzdem die Fourierkoeffizienten nicht gleich sind.

Beweis des Satzes 30:

Der Beweis folgt direkt aus den Grundgleichungen. Deshalb werden alle diese Beziehungen für die drei aufgestellten Differentialgleichungen gemeinsam angegeben. Die Gleichungen (a) beziehen sich auf (24.7), die Gleichungen (b) auf (24.11), (c) auf (24.14).

Das algebraische Grundsystem lautet:

$$(a) \quad \theta [c + (\mu + n)^2] [D'_{n-1} + D'_{n+1}] + [c - k'^2 + (\mu + n)^2] D'_n = 0. \quad (24.16)$$

$$(b) \quad \theta [c + (\mu + n)(\mu + n - 1)] D''_{n-1} + \theta [c + (\mu + n)(\mu + n + 1)] D''_{n+1} + [c - k'^2 + (\mu + n)^2] D''_n = 0 .$$

$$(c) \quad \theta [c + (\mu + n - 1)^2] E_{n-1} + \theta [c + (\mu + n + 1)^2] E_{n+1} + [c - k'^2 + (\mu + n)^2] E_n = 0 .$$

Die charakteristische Gleichung ist für die drei Fälle die gleiche.

$$c' = k'^2 - \mu^2 + \varepsilon_0(c) + \delta_0(c) . \quad (24.17)$$

Die Definitionen der ε_n und der δ_n sind jedoch verschieden:

$$(a) \quad \varepsilon_n = -\theta [c + (\mu+n)^2] \frac{D'_n - 1}{D'_n} \quad (24.18)$$

$$\delta_n = -\theta [c + (\mu+n)^2] \frac{D'_n + 1}{D'_n}$$

$$(b) \quad \varepsilon_n = -\theta [c + (\mu+n)(\mu+n-1)] \frac{D''_n - 1}{D''_n}$$

$$\delta_n = -\theta [c + (\mu+n)(\mu+n+1)] \frac{D''_n + 1}{D''_n}$$

$$(c) \quad \varepsilon_n = -\theta [c + (\mu+n-1)^2] \frac{E_n - 1}{E_n}$$

$$\delta_n = -\theta [c + (\mu+n+1)^2] \frac{E_n + 1}{E_n} .$$

Die Rekursionsformeln sehen auch auf den ersten Blick verschieden aus:

$$(a) \quad \varepsilon_n = \frac{\theta^2 [c + (\mu+n)^2] [c + (\mu+n-1)^2]}{c - k'^2 + (\mu+n-1)^2 - \varepsilon_{n-1}} \quad (24.19)$$

$$\delta_n = \frac{\theta^2 [c + (\mu+n)^2] [c + (\mu+n+1)^2]}{c - k'^2 + (\mu+n+1)^2 - \delta_{n+1}}$$

$$(b) \quad \epsilon_n = \frac{\theta^2 [c + (\mu+n)(\mu+n-1)]^2}{c - k'^2 + (\mu+n-1)^2 - \epsilon_{n-1}} \quad (24.19)$$

$$\delta_n = \frac{\theta^2 [c + (\mu+n)(\mu+n+1)]^2}{c - k'^2 + (\mu+n+1)^2 - \delta_{n+1}}$$

$$(c) \quad \epsilon_n = \frac{\theta^2 [c + (\mu+n-1)^2] [c + (\mu+n)^2]}{c - k'^2 + (\mu+n-1)^2 - \epsilon_{n-1}}$$

$$\delta_n = \frac{\theta^2 [c + (\mu+n+1)^2] [c + (\mu+n)^2]}{c - k'^2 + (\mu+n+1)^2 - \delta_{n+1}}$$

Es zeigt sich jedoch bei einer genaueren Betrachtung, dass die Gleichungen (24.19 a) und (24.19 c) identisch sind. Daraus folgt der Satz 30 und

$$\epsilon_n (a) = \epsilon_n (c) \quad (24.20)$$

$$\delta_n (a) = \delta_n (c) \quad .$$

Es besteht deshalb eine Beziehung zwischen den D'_n und den E_n :

$$E_n = \frac{c + \mu^2}{c + (\mu+n)^2} D_n \quad (24.21)$$

$$\text{für} \quad E_0 = D_0 \quad .$$

Diese Beziehung ergibt sich auch aus (24.15) und aus (24.16 a).

f) Ein Vergleich mit den Mathieu'schen Funktionen

Die Gleichung (24.13) ist eine Hill'sche Gleichung, deren periodischer Koeffizient eine besondere Form aufweist. Sie unterscheidet sich von der Mathieu'schen Gleichung nur durch diesen Koeffizienten. Es könnte deshalb interessant sein, einen Vergleich zwischen diesen beiden Gleichungen aufzustellen.

Aus den Definitionen

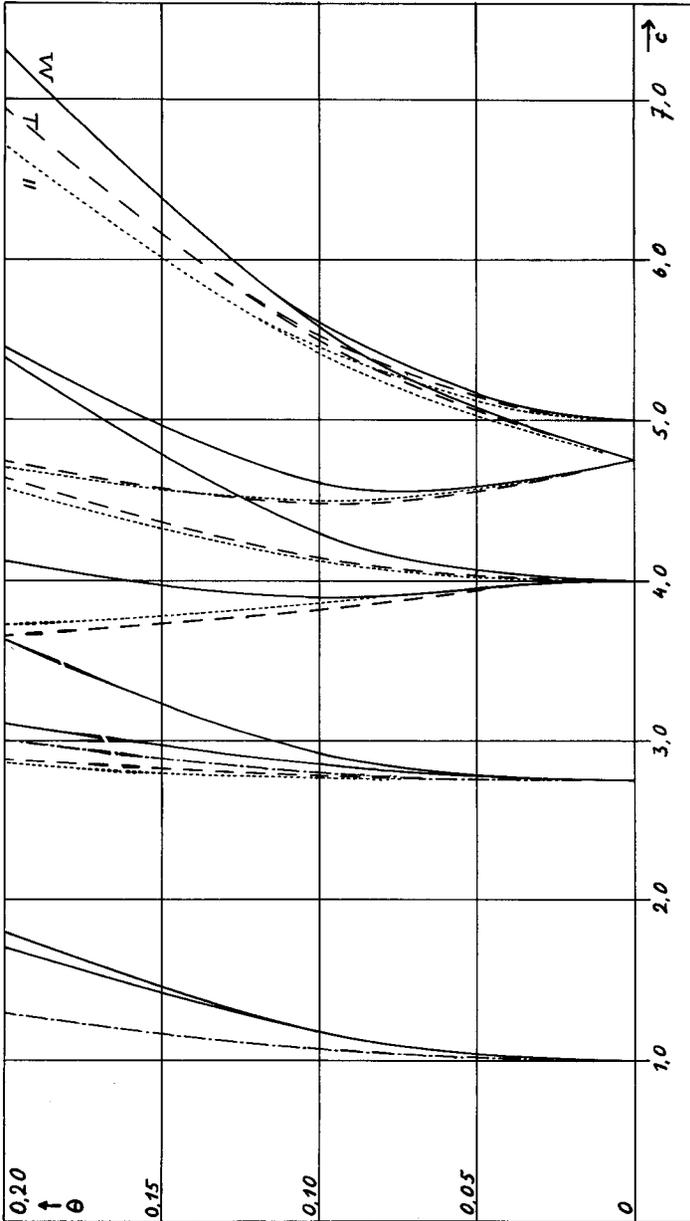


Abb. 5
Die charakteristischen Werte

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + 2 \varepsilon_1 \cos x \quad (24.22)$$

$$c' = k^2 \varepsilon_0 - l^2$$

$$\nu = k^2 \varepsilon_1$$

wird aus (24.12)

$$\frac{d^2 E''}{dx^2} + (c' + 2 \nu \cos x) E'' = 0 \quad (24.23)$$

Die charakteristischen Werte von c' sind mehrmals numerisch berechnet und veröffentlicht worden, sodass ein Vergleich mühelos durchgeführt werden kann.

g) Die numerischen Ergebnisse

Die charakteristischen Werte ($c = l^2$) dieser vier Differentialgleichungen wurden für die folgenden Parameterwerte berechnet:

$$k'^2 = 5 \quad (24.24)$$

$$\theta = 0,05, 0,10, 0,20 \quad .$$

Der Vergleich mit den Mathieu'schen Funktionen erfolgt in dem Sinne, dass die Extremwerte der Dielektrizitätskonstanten gleich gross angenommen werden.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 + 2 \varepsilon_1 &= 1,1111 \\ \varepsilon_0 - 2 \varepsilon_1 &= 0,9091 \end{aligned} \right\} \theta = 0,05 \quad (24.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 + 2 \varepsilon_1 &= 1,2500 \\ \varepsilon_0 - 2 \varepsilon_1 &= 0,8333 \end{aligned} \right\} \theta = 0,10$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 + 2 \varepsilon_1 &= 1,6667 \\ \varepsilon_0 - 2 \varepsilon_1 &= 0,7143 \end{aligned} \right\} \theta = 0,20 \quad .$$

Aus Tabelle 4 und Bild 5 ist zu entnehmen, dass die beiden Polarisierungen (I) und (II) fast die gleichen charakteristischen Werte aufweisen. Die Unterschiede zwi-

Tabelle 4
Die charakteristischen Werte

θ	Gl.	a_0	$a_{1/2}$	$b_{1/2}$	b_1	a_1
0,05	24.7	5,143	5,058	4,556	4,034	3,942
	24.11	5,120	5,026	4,573	4,030	3,955
	24.23	5,167	5,081	4,585	4,072	3,956
0,10	24.7	5,522	5,495	4,476	4,139	3,826
	24.11	5,450	5,417	4,495	4,125	3,863
	24.23	5,613	5,585	4,611	4,298	3,897
0,20	24.7	6,936	6,934	4,740	4,641	3,660
	24.11	6,708	6,704	4,701	4,575	3,727
	24.23	7,311	7,308	5,457	5,387	4,124
θ	Gl.	$a_{3/2}$	$b_{3/2}$	a_2	b_2	
0,05	24.7	2,760	2,758	1,017	1,017	
	24.11	2,762	2,760	1,017	1,017	
	24.23	2,789	2,781	1,042	1,042	
0,10	24.7	2,799	2,776	1,068	1,068	
	24.11	2,802	2,786	1,069	1,069	
	24.23	2,921	2,856	1,174	1,170	
0,20	24.7	2,998	2,881	1,288	1,284	
	24.11	3,002	2,863	1,295	1,292	
	24.23	3,641	3,119	1,802	1,707	

schen den beiden Kurvenformen der Dielektrizitätskonstanten (\perp) und (M) sind wesentlich ausgeprägter. Dieses Ergebnis scheint im Widerspruch mit den Schlussfolgerungen der ersten Untersuchung [U - 10] zu stehen. Der Einfluss der Polarisation wird jedoch nicht durch die l^2 -Werte allein, sondern auch durch die Grenzbedingungen selbst hervorgerufen, die die reflektierten Wellen beeinflussen. Es ist zu bemerken, dass der Polarisierungseinfluss auch bei normalen Spiegeln beobachtet wird.

25. Eine Differentialgleichung mit Doppellösungen :

Die Whittaker'sche Gleichung

a) Einleitung

Die Whittaker'sche Gleichung [P - 1, 2, 4, 9, 10, 12, 15 und 16] weist bekanntlich alle Eigenschaften auf, die in den Abschnitten 22 und 23 untersucht wurden. Wegen der Einfachheit ihrer Form kann sie mit Vorteil als Beispiel dienen, um diese Eigenschaften praktisch zu erläutern.

Diese Gleichung weist noch einen Vorteil auf. Die dreigliedrige Mathieu'sche Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + [c + 2\psi \cos x + 2\varphi \cos 2x] u = 0 \quad (25.1)$$

kann mit Hilfe der Substitution

$$u = v \cdot \exp [-2\sqrt{\varphi} \cos x] \quad (25.2)$$

in die folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} + 4\sqrt{\varphi} \sin x \frac{dv}{dx} + \\ + [(c + 2\varphi) + 2(\psi + \sqrt{\varphi}) \cos x] v = 0 \end{aligned} \quad (25.3)$$

Diese letzte Gleichung ist eine etwas ungewöhnliche Form der Whittaker'schen Gleichung. Diese Verwandtschaft wurde auch von Whittaker selbst erwähnt [P - 16] .

Es muss noch erwähnt werden, dass (25.1) zur Lösung des Problems des optischen Gitters führt, wenn die Dielektrizitätskonstante folgendermassen definiert wird:

$$\epsilon(x) = \epsilon_0 + 2\epsilon_1 \cos x + 2\epsilon_2 \cos 2x \quad (25.4)$$

Der Einfluss der Kurvenform auf die charakteristischen Werte lässt sich damit noch besser beurteilen.

Schliesslich gilt der folgende Satz:

Satz 31:

Die dreigliedrige Mathieu'sche Gleichung (25.1) führt in den beiden Grenzfällen zur zweigliedrigen Mathieu'schen Gleichung.

Beweis des Satzes 31:

Im ersten Grenzfall $\varphi = 0$ bleibt aus (25.1) nur die Mathieu'sche Gleichung in der etwas ungewöhnlichen Form (24.23) übrig. Die Periode beträgt 2π . Im anderen Grenzfall gilt $\nu = 0$. Man erhält dadurch die Mathieu'sche Gleichung in ihrer normalen Form mit der Periode π .

Wir werden den Uebergang von einer Form zur anderen bei der Besprechung der numerischen Ergebnisse erläutern.

b) Die Grundgleichungen

Die beiden Funktionen u aus (25.1) und v aus (25.3) müssen durch verschiedene Fourierkoeffizienten unterschieden werden.

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n e^{i(\mu+n)x} \quad (25.5)$$

$$v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{i(\mu+n)x}$$

Aus (25.2) folgt weiter

$$E_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m i^{|n-m|} J_{|n-m|}(2i\sqrt{\varphi}) \quad (25.6)$$

Damit lassen sich die Lösungen von (25.1) aus denjenigen von (25.3) berechnen.

Das algebraische Grundsystem lautet

$$\begin{aligned} & \left[\nu + (2\mu + 2n - 1) \sqrt{\varphi} \right] D_{n-1} + \left[\nu - (2\mu + 2n + 1) \sqrt{\varphi} \right] D_{n+1} + \\ & + \left[c + 2\varphi - (\mu + n)^2 \right] D_n = 0 \quad (25.7) \end{aligned}$$

Daraus folgen die charakteristische Gleichung

$$c = \mu^2 - 2\varphi + \epsilon_0 + \delta_0, \quad (25.8)$$

und die Definitionen von ϵ_n und δ_n :

$$\epsilon_n = - \left[\psi + (2\mu + 2n - 1) \sqrt{\varphi} \right] \frac{D_{n-1}}{D_n} \quad (25.9)$$

$$\delta_n = - \left[\psi - (2\mu + 2n + 1) \sqrt{\varphi} \right] \frac{D_{n+1}}{D_n} .$$

Die Rekursionsformeln für diese Größen sind die folgenden:

$$\epsilon_n = \frac{\psi^2 - \varphi (2\mu + 2n - 1)^2}{c + 2\varphi - (\mu + n - 1)^2 - \epsilon_{n-1}} \quad (25.10)$$

$$\delta_n = \frac{\psi^2 - \varphi (2\mu + 2n + 1)^2}{c + 2\varphi - (\mu + n + 1)^2 - \delta_{n+1}} .$$

Aus (25.7) ergeben sich noch die Bedingungen für das Auftreten der Sondereigenschaften nach den Abschnitten 22 und 23:

$$r_0 = - \frac{1}{2} \left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}} - 1 \right), \quad A(r_0) = 0 \quad (25.11)$$

$$r_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\psi}{\sqrt{\varphi}} - 1 \right), \quad C(r_0) = 0 .$$

Satz 32:

Wenn r_0 die Hälfte einer ganzen Zahl beträgt, sind Doppellösungen möglich. Diese Lösungen weisen kein zentrales Glied auf, wenn $(\psi / \sqrt{\varphi})$ positiv ist. Wenn dagegen $(\psi / \sqrt{\varphi})$ negativ ist, sind alle Glieder vorhanden.

c) Die numerischen Ergebnisse

Die numerische Auswertung wurde für eine Anzahl von Werten für ψ und φ durchgeführt. Die charakteristischen Werte sind in den Tabellen 5 und 6 zusammengestellt. Im Bild 6 sind weiter die beiden Fälle

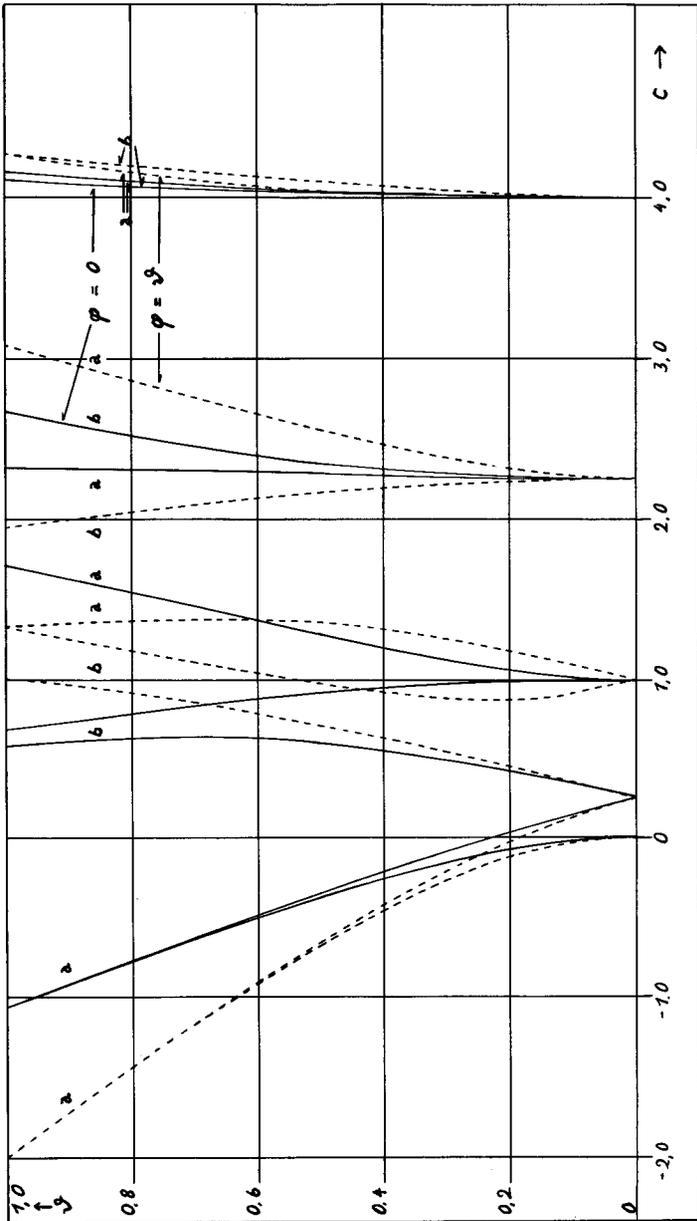


Abb. 6

Die charakteristischen Werte

Tabelle 5
Die charakteristischen Werte

$\nu = 0,1.$

φ $r_0 + 1$	0 ∞	0,01 1,0000	0,02 0,853	0,05 0,724	0,10 0,688
a_0	-0,0197	-0,0200	-0,0204	-0,0224	-0,0277
$a_{1/2}$	0,1453	0,1442	0,1431	0,1388	0,1292
$b_{1/2}$	0,3447	0,3457	0,3465	0,3482	0,3482
b_1	0,9967	1,0066	1,0166	1,0463	1,0952
a_1	1,0163	1,0066	0,9969	0,9677	0,9185
$a_{3/2}$	2,2523	2,2533	2,2544	2,2581	2,2658
$b_{3/2}$	2,2528	2,2518	2,2509	2,2486	2,2465
b_4	4,0013	4,0013	4,0013	4,0012	4,0007
a_4	4,0013	4,0013	4,0014	4,0022	4,0052

$\nu = 0,2.$

φ $r_0 + 1$	0 ∞	0,02 1,202	0,05 0,947	0,10 0,816	0,20 0,724
a_0	-0,0751	-0,0733	-0,0815	-0,0906	-0,1171
$a_{1/2}$	0,0319	0,0280	0,0211	0,0073	-0,0292
$b_{1/2}$	0,4280	0,4319	0,4368	0,4423	0,4431
b_1	0,9867	1,0065	1,0360	1,0846	1,1799
a_1	1,0617	1,0440	1,0173	0,9725	0,8818
$a_{3/2}$	2,2581	2,2620	2,2683	2,2804	2,3096
$b_{3/2}$	2,2620	2,2580	2,2525	2,2450	2,2357
b_2	4,0053	4,0054	4,0055	4,0053	4,0038
a_2	4,0054	4,0053	4,0058	4,0082	4,0193

Tabelle 6
Die charakteristischen Werte

$\nu = 0,5.$

φ $r_0 + 1$	0 ∞	0,05	0,10	0,20	0,50
		1,618	1,290	1,059	0,853
a_0	-0,3785	-0,3978	-0,4197	-0,4709	-0,6765
$a_{1/2}$	-0,3477	-0,3692	-0,3933	-0,4485	-0,6636
$b_{1/2}$	0,5948	0,6193	0,6411	0,6763	0,7051
b_1	0,9181	0,9654	1,0120	1,1030	1,3571
a_1	1,2932	1,2654	1,2369	1,1780	0,9792
$a_{3/2}$	2,2852	2,3064	2,3290	2,3983	2,5493
$b_{3/2}$	2,3426	2,3179	2,2943	2,2506	2,1600
b_2	4,0319	4,0343	4,0362	4,0395	4,0418
a_2	4,0353	4,0321	4,0310	4,0353	4,0980

$\nu = 1,0.$

φ $r_0 + 1$	0 ∞	0,1	0,2	0,5	1,0
		2,081	1,618	1,206	1,000
a_0	-1,0701	-1,1382	-1,2134	-1,4747	-2,0000
$a_{1/2}$	-1,0648	-1,1338	-1,2097	-1,4727	-1,9993
$b_{1/2}$	0,5795	0,6524	0,7099	0,8857	1,0006
b_1	0,6867	0,7689	0,8474	1,0605	1,3336
a_1	1,7073	1,7026	1,6925	1,6193	1,3336
$a_{3/2}$	2,3154	2,3827	2,4537	2,6811	3,0834
$b_{3/2}$	2,6677	2,5988	2,5270	2,3001	1,9432
b_2	4,1130	4,1304	4,1473	4,1962	4,2747
a_2	4,1625	4,1348	4,1153	4,1094	4,2747

$$\varphi = 0 \quad (\text{Mathieu}) \quad (25.12)$$

$$\varphi = \psi$$

graphisch dargestellt.

Die Unterscheidung zwischen den symmetrischen und den antisymmetrischen Lösungen ist nach Extermann [K - 6] durch die beiden Buchstaben a (sym.) und b (antisym.) angegeben. Diese Unterscheidung muss sehr sorgfältig gemacht werden, weil die normale Reihenfolge in vielen Fällen gestört ist. Das hängt mit den Doppelösungen zusammen, wie die angegebenen Werte von $(r_0 + 1)$ zeigen. Um diesen Einfluss anschaulich darzustellen, wurden im Bild 7 die charakteristischen Werte für ein bestimmtes Wertepaar

$$\psi = 0,2 \quad (25.13)$$

$$\varphi = 0,2$$

$$r_0 + 1 = 0,724$$

in einer anderen Form gezeichnet. Die Kurven $c(\mu)$ sind näherungsweise angegeben (nur die Punkte $\mu = 0$ und $\mu = \frac{1}{2}$ sind genau berechnet worden). Die Lösungen mit symmetrischem Charakter sind durch ausgezogene Kurventeile, diejenigen mit antisymmetrischem Charakter durch gestrichelte Linien bezeichnet. Bei der Mathieu'schen Gleichung sind die einzelnen Kurvenstücke immer von einer einzigen Art. Im Bild 7 zeigt es sich, dass die Symmetrie-Eigenschaften der Lösung an den Stellen

$$\mu = \pm (r_0 + |n|) \quad (25.14)$$

wechseln. Damit lassen sich die erwähnten Umkehrungen erklären. Schliesslich ist noch zu bemerken, dass diese normale Reihenordnung nur für positives ψ gilt. Bei einem negativen Wert für ψ gehen die symmetrischen in die antisymmetrischen Lösungen über, sobald $\mu = \pm 1/2$ ist. Dies gilt jedoch auch für die Whittaker'sche Gleichung.

In den Tabellen 7 bis 10 sind die Fourierkoeffizienten D_n für einzelne Lösungen von (25.3) zusammengestellt. Bei zunehmendem φ wird die Konvergenz der Reihe immer schlechter, ohne dass der Konvergenzbereich enger wird. Dieses Ergebnis ist durch das Vorhandensein von Gliedern mit $(\mu + n)$ als Faktor in den Grössen $A(\mu + n)$ und $C(\mu + n)$ hervorgerufen. Eine Verdoppelung von φ zeigt zum Beispiel einen grösseren Einfluss als eine Verdoppelung von ψ .

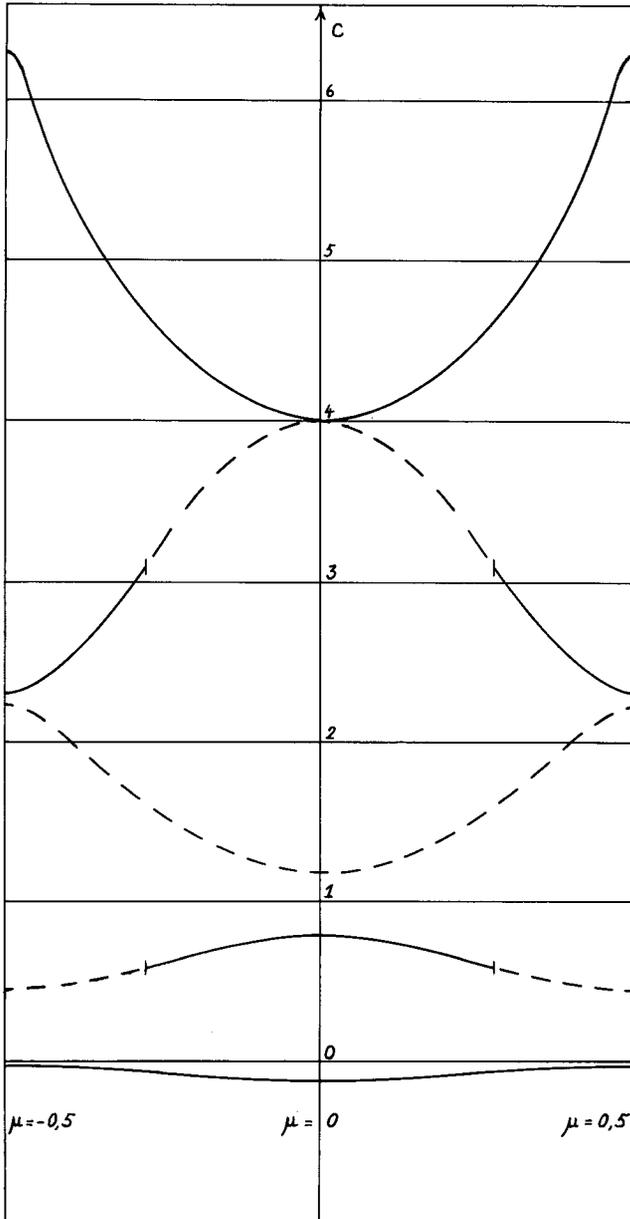


Abb. 7

Die Dispersionsflächen für $\nu = \varphi = 0,2$

Tabelle 7
Die Fourierkoeffizienten

$\psi = 0,5$, $\varphi = 0,05$.

	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
a_0	1,0000	0,5287	0,1406	0,0241	0,0030	0,0003
$a_{1/2}$	1,0000	0,3640	0,0764	0,0111	0,0012	0,0001
$b_{1/2}$	1,0000	0,5820	0,1433	0,0226	0,0026	0,0002
b_1	---	1,0000	0,3829	0,0767	0,0105	0,0011
a_1	-0,4049	1,0000	0,4237	0,0881	0,0123	0,0013
$a_{3/2}$	-0,0376	1,0000	0,3487	0,0642	0,0082	0,0008
$b_{3/2}$	-0,0600	1,0000	0,3497	0,0644	0,0082	0,0008
b_2	---	0,0545	1,0000	0,3205	0,0549	0,0066
a_2	-0,0075	0,0563	1,0000	0,3204	0,0549	0,0066

$\psi = 0,5$, $\varphi = 0,10$.

	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
a_0	1,0000	0,5977	0,1943	0,0426	0,0070	0,0009
$a_{1/2}$	1,0000	0,4282	0,1127	0,0212	0,0031	0,0004
$b_{1/2}$	1,0000	0,6881	0,2132	0,0436	0,0067	0,0008
b_1	---	1,0000	0,4725	0,1215	0,0218	0,0030
a_1	-0,2558	1,0000	0,5085	0,1344	0,0245	0,0034
$a_{3/2}$	0,1040	1,0000	0,4354	0,1038	0,0174	0,0023
$b_{3/2}$	0,1720	1,0000	0,4318	0,1026	0,0172	0,0022
b_2	---	0,1386	1,0000	0,4043	0,0904	0,0143
a_2	-0,0123	0,1420	1,0000	0,4039	0,0903	0,0143

Tabelle 8
Die Fourierkoeffizienten

$\psi = 0,5, \varphi = 0,2.$

	D ₀	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅
a ₀	1,0000	0,6714	0,2710	0,0769	0,0167	0,0029
a _{1/2}	1,0000	0,5108	0,1710	0,0422	0,0082	0,0013
b _{1/2}	1,0000	0,8272	0,3286	0,0886	0,0182	0,0030
b ₁	---	1,0000	0,5977	0,2012	0,0482	0,0090
a ₁	-0,0669	1,0000	0,6115	0,2077	0,0500	0,0094
a _{3/2}	0,3632	1,0000	0,5508	0,1725	0,0387	0,0068
b _{3/2}	0,5788	1,0000	0,5354	0,1657	0,0369	0,0065
b ₂	---	0,2447	1,0000	0,5127	0,1512	0,0321
a ₂	-0,0059	0,2466	1,0000	0,5124	0,1511	0,0321

$\psi = 0,5, \varphi = 0,5.$

	D ₀	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅
a ₀	1,0000	0,7311	0,3918	0,1568	0,0497	0,0130
a _{1/2}	1,0000	0,6414	0,2949	0,1044	0,0299	0,0071
b _{1/2}	1,0000	1,0426	0,5773	0,2259	0,0689	0,0171
b ₁	---	1,0000	0,8370	0,4105	0,1463	0,0413
a ₁	0,2093	1,0000	0,7598	0,3578	0,1246	0,0348
a _{3/2}	0,9212	1,0000	0,7558	0,3439	0,1149	0,0303
b _{3/2}	1,4523	1,0000	0,7027	0,3092	0,1013	0,0264
b ₂	---	0,4011	1,0000	0,6896	0,2935	0,0925
a ₂	0,0314	0,3864	1,0000	0,6954	0,2971	0,0938

Tabelle 9
Die Fourierkoeffizienten

$\psi = 1,0$, $\varphi = 0,1$.

	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
a_0	1,0000	0,6860	0,2608	0,0660	0,0123	0,0018
$a_{1/2}$	1,0000	0,4999	0,1535	0,0331	0,0054	0,0007
$b_{1/2}$	1,0000	1,0817	0,4355	0,1080	0,0193	0,0027
b_1	---	1,0000	0,6067	0,1890	0,0396	0,0063
a_1	-0,7187	1,0000	0,8470	0,2967	0,0662	0,0109
$a_{3/2}$	-0,1800	1,0000	0,5766	0,1676	0,0329	0,0049
$b_{3/2}$	-0,3874	1,0000	0,6092	0,1809	0,0359	0,0054
b_2	---	-0,0154	1,0000	0,5168	0,1383	0,0253
a_2	0,0073	-0,0176	1,0000	0,5171	0,1384	0,0253

$\psi = 1,0$, $\varphi = 0,2$.

	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
a_0	1,0000	0,7357	0,3312	0,1039	0,0247	0,0047
$a_{1/2}$	1,0000	0,5630	0,2096	0,0567	0,0120	0,0021
$b_{1/2}$	1,0000	1,2321	0,6051	0,1898	0,0439	0,0080
b_1	---	1,0000	0,7243	0,2815	0,0756	0,0156
a_1	-0,5284	1,0000	0,9597	0,4134	0,1173	0,0250
$a_{3/2}$	-0,0555	1,0000	0,6949	0,2547	0,0645	0,0125
$b_{3/2}$	-0,1193	1,0000	0,7071	0,2610	0,0664	0,0129
b_2	---	0,0963	1,0000	0,6252	0,2122	0,0504
a_0	-0,0265	0,1081	1,0000	0,6012	0,2104	0,0499

Tabelle 10
Die Fourierkoeffizienten

$\psi = 1,0, \varphi = 0,5.$

	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
a_0	1,0000	0,8105	0,4566	0,1920	0,0637	0,0174
$a_{1/2}$	1,0000	0,6694	0,3237	0,1193	0,0357	0,0088
$b_{1/2}$	1,0000	1,5349	1,0147	0,4465	0,1488	0,0396
b_1	---	1,0000	0,9458	0,5076	0,1943	0,0582
a_1	-0,2236	1,0000	1,1037	0,6301	0,2496	0,0764
$a_{3/2}$	0,2257	1,0000	0,9061	0,4628	0,1685	0,0476
$b_{3/2}$	0,4878	1,0000	0,8411	0,4155	0,1484	0,0414
b_2	---	0,2672	1,0000	0,8007	0,3771	0,1284
a_2	-0,0328	0,2865	1,0000	0,7902	0,3699	0,1255

$\psi = 1,0, \varphi = 1,0.$

	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
a_0	1,0000	0,8635	0,5682	0,2953	0,1253	0,0447
$a_{1/2}$	1,0000	0,7507	0,4371	0,2043	0,0795	0,0255
$b_{1/2}$	1,0000	1,7506	1,4379	0,8160	0,3597	0,1266
b_1	---	1,0000	1,1668	0,8056	0,4060	0,1628
a_1	---	1,0000	1,1668	0,8056	0,4060	0,1628
$a_{3/2}$	0,5143	1,0000	1,1159	0,7396	0,3586	0,1352
$b_{3/2}$	1,1138	1,0000	0,9357	0,5683	0,2613	0,0949
b_2	---	0,3792	1,0000	0,9478	0,5695	0,2556
a_2	---	0,3792	1,0000	0,9478	0,5695	0,2556

In der Tabelle 10 ist auch ein Fall angegeben, in welchem Doppellösungen vorkommen ($\nu = \varrho = r_0 + 1 = 1$). Da die Grösse $\nu / \sqrt{\varrho}$ positiv angenommen wurde, fehlen hier die zentralen Glieder. Die Fourierkoeffizienten sind dann paarweise gleich, wenn n positiv ist.

d) Die Uebergänge zur Mathieu'schen Gleichung

Wie schon erwähnt, gibt es zwei Wege, aus Gleichung (25.1) zur Mathieu'schen Gleichung überzugehen. Es ergibt sich daraus die Möglichkeit, den Uebergang von einer Form ($\varrho = 0$, Periode 2π) zur anderen ($\nu = 0$, Periode π) zu verfolgen. Die Tabelle 11 enthält eine Reihe von charakteristischen Werten, die diesen Uebergang darstellen. Die Grösse ($r_0 + 1$) ist ebenfalls angegeben, weil sie eine wichtige Rolle spielt.

Satz 33:

Die Reihenordnung der charakteristischen Werte ist grundsätzlich durch den Parameter ($r_0 + 1$) bestimmt: Wenn die Ordnungszahl des charakteristischen Wertes kleiner als ($r_0 + 1$) ist, ist die Reihenordnung der Mathieu'schen Gleichung verwirklicht. Für die anderen charakteristischen Werte muss man unterscheiden, ob ($r_0 + 1$) gleich einer ganzen Zahl, gleich der Hälfte einer ungeraden Zahl oder gleich einer anderen Zahl ist. Wenn ($r_0 + 1$) eine ganze Zahl ist, sind die charakteristischen Werte a_n und b_n mit ganzzahligem n einander gleich (Doppellösungen), diejenigen mit $(n + 1/2)$ zeigen abwechselungsweise die Reihenordnung $a_{n+1/2} < b_{n+1/2}$ und $a_{n+1/2} > b_{n+1/2}$, wobei die zweite bei $n = r_0 + 1$ vorhanden ist.

Wenn ($r_0 + 1$) gleich der Hälfte einer ungeraden Zahl ist, sind die Doppellösungen bei $a_{n+1/2}$ anzutreffen. Die Reihenordnung der charakteristischen Werte mit ganzzahliger Ordnung ist abwechselungsweise normal ($a > b$) und abnormal ($a < b$).

Schliesslich ist die Reihenordnung der charakteristischen Werte, wenn ($r_0 + 1$) nicht gleich der Hälfte einer ganzen Zahl ist, zuerst zweimal abnormal und dann zweimal wieder normal, usw.

Dieser Satz folgt aus den Regeln über die Doppellösungen, die immer dem Uebergang von einer normalen zu einer abnormalen Reihenordnung entsprechen. Er wird auch durch die numerischen Werte der Tabelle 11 veranschaulicht, wo die erste sichtbare Umkehrung diejenige von a_2 und b_2 bei $(r_0 + 1) = 1,618$ ist. In dieser Tabelle sind die Umkehrungen durch einen ausgezogenen senkrechten Strich, die Doppellösungen durch einen punktierten, bezeichnet.

Der Grenzfall $\nu = 0$ ist durch den Wert $(r_0 + 1) = 0,5$ gekennzeichnet. Alle

Tabelle 11

Die Uebergänge zur Mathieu'schen Gleichung

ν	1,0	1,0	1,0	1,0
φ	0,0	0,1	0,2	0,5
$r_0 + 1$	∞	2,081	1,618	1,206
a_0	-1,0701	-1,1382	-1,2134	-1,4747
$a_{1/2}$	-1,0648	-1,1338	-1,2097	-1,4727
$b_{1/2}$	0,5795	0,6524	0,7099	0,8857
b_1	0,6867	0,7689	0,8474	1,0605
a_1	1,7073	1,7026	1,6925	1,6193
$a_{3/2}$	2,3154	2,3827	2,4537	2,6811
$b_{3/2}$	2,6677	2,5988	2,5270	2,3001
b_2	4,1130	4,1304	4,1473	4,1962
a_2	4,1625	4,1348	4,1153	4,1094
ν	1,0	0,5	0,2	0,0
φ	1,0	0,5	0,2	0,1
$r_0 + 1$	1,000	0,853	0,724	0,500
a_0	-2,0000	-0,6765	-0,1171	-0,0050
$a_{1/2}$	-1,9993	-0,6636	-0,0292	0,2433
$b_{1/2}$	1,0006	0,7051	0,4431	0,2433
b_1	1,3336	1,3571	1,1799	1,0987
a_1	1,3336	0,9792	0,8818	0,8988
$a_{3/2}$	3,0834	2,5493	2,3096	2,2539
$b_{3/2}$	1,9432	2,1600	2,2357	2,2539
b_2	4,2747	4,0418	4,0038	3,9992
a_2	4,2747	4,0980	4,0193	4,0042

charakteristischen Werte für $\mu = 1/2$ führen zu Doppellösungen, weil der entsprechende Wert μ' bei $X = 2x - 1/4$ beträgt. Für $\mu = 0$ ist die normale Reihenordnung bei a_{2n+1} und b_{2n+1} gestört, weil diese charakteristischen Werte bei X an Stelle $2x$ den Werten $a'_{n+1/2}$ und $b'_{n+1/2}$ entsprechen.

e) Die Polynomlösungen

Das Problem der Polynomlösungen bei der Whittaker'schen Gleichung ist schon mehrfach untersucht worden [P - 4, 10 und 16]. Eine direkte Anwendung der Theorie aus Abschnitt 23 führt zu folgenden Ergebnissen:

Satz 34:

Die Polynomlösungen sind unter der Bedingung anzutreffen:

$$\lambda = - \frac{\nu}{\sqrt{\varphi}} > 0 \text{ ist eine ganze Zahl.} \quad (25.15)$$

Die Anzahl der Polynomlösungen ist gleich λ . Wenn $\lambda = 2m + 1$ ist, weisen die Lösungen entweder m Glieder in $\sin nx$ oder ein konstantes Glied und m Glieder in $\cos nx$ auf. Dagegen erhält man für $\lambda = 2m$ Lösungen mit m Gliedern in $\cos(n + 0,5)x$ oder m Gliedern in $\sin(n + 0,5)x$.

Die einfachste Lösung dieser Art ist :

$$\lambda = 1, \quad (25.16)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + 4\sqrt{\varphi} \sin x \frac{dv}{dx} + (a + 2\varphi)v = 0,$$

$$a_0 = -2\varphi,$$

$$v = 1.$$

Wegen (25.2) erhält man

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \left[2\nu^2 + 2\nu \cos x - 2\nu^2 \cos 2x \right] u = 0 \quad (25.17)$$

und

$$u = e^{-2\nu} \cos x. \quad (25.18)$$

Ähnliche Beziehungen können für die anderen ganzzahligen Werte von λ aufgestellt werden.

26. Zwei praktische Beispiele von antisymmetrischen Differentialgleichungen

a) Die Gleichung ersten Grades

Als Abschluss dieser praktischen Auswertung der aufgestellten Beziehungen werden wir zwei antisymmetrische Differentialgleichungen im gleichen Sinne untersuchen. Die erste ist die einfachste dieser Art:

$$\frac{du}{dx} + 2a \sin x \cdot u = 0 \quad . \quad (26.1)$$

Die Lösung kann analytisch ausgedrückt werden

$$u = u_0 \exp \{ 2a \cos x \} \quad . \quad (26.2)$$

Diese ist symmetrisch und weist eine Periode von 2π ($\mu = 0$) auf. Es sind keine charakteristischen Werte für a vorhanden, was man auf Grund des Abschnittes 21 erwarten konnte. Es gibt auch keine Lösung mit einem von Null verschiedenen charakteristischen Wert für μ , weil nur eine Lösung möglich ist.

Satz 35:

Die Theorie des ersten Kapitels und besonders das Grundsystem

$$\frac{a}{i} D_{n-1} + i n D_n - \frac{a}{i} D_{n+1} = 0 \quad (26.3)$$

stellt eine direkte Verbindung zwischen zwei bekannten Beziehungen der Bessel'schen Funktionen her.

Beweis des Satzes 35:

Die Fourierzersetzung von u ergibt

$$\frac{u}{u_0} = J_0 \left(\frac{2a}{i} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n \left(\frac{2a}{i} \right) \cos nx \quad (26.4)$$

und deshalb

$$D_n = i^n \cdot u_0 \cdot J_n \left(\frac{2a}{i} \right) \quad . \quad (26.5)$$

Aus (26.3) und (26.5) folgt

$$\frac{2a}{i} \left[J_{n-1} + J_{n+1} \right] = 2n J_n . \quad (26.6)$$

Diese letzte Beziehung ist ebenfalls eine bekannte Gleichung aus der Theorie der Bessel'schen Funktionen.

b) Die Gleichung dritten Grades

Das zweite Beispiel einer antisymmetrischen Differentialgleichung ist die einfachste Gleichung dritten Grades:

$$\frac{d^3 u}{dx^3} + 2a \sin x u = 0 . \quad (26.7)$$

Da der Koeffizient der Ableitung höchster Ordnung konstant ist, sind die Randgebiete I und II, wie bei der Mathieu'schen und der Whittakerschen Gleichung, gar nicht vorhanden. Die numerische Methode führt zu Lösungen, die in der ganzen komplexen Ebene konvergieren.

Das Grundsystem lautet:

$$- a D_{n-1} + (\mu + n)^3 D_n + a D_{n+1} = 0 . \quad (26.8)$$

Daraus folgt die charakteristische Gleichung

$$\mu^3 = a^2 (\epsilon_0 + \delta_0) \quad (26.9)$$

mit den Beziehungen

$$\epsilon_n = \frac{1}{a} \frac{D_{n-1}}{D_n} = - \frac{1}{(\mu + n - 1)^3 - a^2 \epsilon_{n-1}} \quad (26.10)$$

$$\delta_n = \frac{-1}{a} \frac{D_{n+1}}{D_n} = - \frac{1}{(\mu + n + 1)^3 - a^2 \delta_{n+1}} .$$

Diese Gleichungen entsprechen nicht genau der angegebenen Theorie, weil die Grösse a in der charakteristischen Gleichung explizit vorkommt.

Der Fall $\mu = 0$ ist besonders interessant, weil aus (26.10) folgt

$$\varepsilon_n + \delta_n = 0 \quad . \quad (26.11)$$

Die charakteristische Gleichung ist deshalb immer erfüllt. Die Lösung ist symmetrisch. Der Tabelle 12 sind die Werte der Fourierkoeffizienten D_n für einzelne Werte von a zu entnehmen. Die Konvergenz ist besonders rapid, weil der Nenner von (26.10) die dritte Potenz von n aufweist.

c) Die Lösungen für $\mu \neq 0$

Die Differentialgleichung (26.7) muss drei linear unabhängige Lösungen aufweisen. Deshalb sind für jeden Wert von a zwei Lösungen vorhanden, bei welchen μ im allgemeinen von Null verschieden sein muss.

Tabelle 12

Die Fourierkoeffizienten bei $\mu = 0$

a	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
0,5	0,48487	0,03027	0,00056	---	---
1,0	0,81697	0,10165	0,00376	0,00006	---
1,5	1,17334	0,21774	0,01208	0,00028	---
2,0	1,34147	0,32928	0,02400	0,00075	0,00001
2,5	1,42094	0,43160	0,03982	0,00155	0,00003
3,0	1,44217	0,51928	0,05742	0,00269	0,00006
3,5	1,42881	0,59178	0,07617	0,00416	0,00012
4,0	1,39704	0,65076	0,09555	0,00596	0,00019
5	1,31420	0,73715	0,13477	0,01050	0,00042
6	1,23244	0,79459	0,17299	0,01615	0,00077
8	1,10776	0,86139	0,24618	0,03053	0,00195
10	1,03167	0,89683	0,31420	0,04849	0,00386

Durch eine Reihenentwicklung der Hauptdeterminanten erhält man in erster Näherung:

$$\mu^3 = a^2 \left[\frac{1}{(1-\mu)^3} - \frac{1}{(1+\mu)^3} \right] \quad (26.12)$$

Daraus folgt der erste charakteristische Wert:

$$(a_1)^2 = \mu^2 \frac{(1-\mu^2)^3}{6+2\mu^2} \quad (26.13)$$

Leider ist diese Methode für die anderen charakteristischen Werte nicht anwendbar. Man kann jedoch diese Schwierigkeit überwinden. Die Funktion von a

$$f\left(\frac{1}{2}, a\right) = a^2 \left[\xi_0\left(\frac{1}{2}, a\right) + \delta_0\left(\frac{1}{2}, a\right) \right] \quad (26.14)$$

gibt die charakteristischen Werte für $\mu = 1/2$, zunächst in erster Näherung, an.

Im Bild 8 ist diese Funktion für symmetrische Lösungen graphisch dargestellt, in der Tabelle 13 sind die numerischen Werte angegeben. Die erste Näherung für $a(1/2)$ ist ebenfalls aus Tabelle 13 zu entnehmen. Die numerische Methode führt dann zu den entsprechenden Kurven $a(\mu)$.

Die drei ersten Lösungen für jeden Wert von μ wurden auf diese Weise berechnet. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 14 und 15 zusammengestellt. Es sind dabei vier Tatsachen zu bemerken:

1°. Es wurden nur Lösungen mit symmetrischem Charakter und positivem charakteristischem Wert angegeben. Die Lösungen mit antisymmetrischem Charakter weisen charakteristische Werte auf, die zwischen den angegebenen Werten liegen.

2°. Wenn a negativ ist, erhält man die gleichen absoluten Werte für a_n und D_n . Das Vorzeichen muss jedoch für alle Fourierkoeffizienten ungerader Ordnung gewechselt werden.

3°. Wenn a zunimmt, konvergiert die Reihe immer schlechter. Die Zahl der wesentlichen Glieder nimmt deshalb zu. Die Konvergenzbedingung ist jedoch immer erfüllt.

4°. Der Unterschied zwischen $a(0,05)$ und $a(0,5)$ ist sehr klein. Daraus folgt, dass in vielen Fällen der charakteristische Wert von $\mu(a)$ komplex ist. Die Differentialgleichung (26.7) entspricht sehr oft einem labilen Vorgang.

Die letzte Bemerkung kann auch bei der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \nu \cos x u = 0 \quad (26.15)$$

Tabelle 13
Die Werte von $f(1/2, a)$

a	$f(\frac{1}{2}, a)$	a	$f(\frac{1}{2}, a)$	a	$f(\frac{1}{2}, a)$
0,05	0,04926	2,1	0,8934	20	-0,033
0,10	0,09703	2,2	0,8855	21	0,089
<u>0,13</u>	<u>0,12500</u>	2,3	0,8745	<u>21,3</u>	<u>0,125</u>
0,15	0,14333	2,4	0,8604	22	0,203
0,20	0,18817	2,5	0,8427	23	0,307
0,25	0,23151	3,0	0,718	24	0,399
0,30	0,27331	3,5	0,545	25	0,482
0,35	0,31377	4,0	0,343	26	0,554
0,40	0,35275	4,5	0,129	27	0,616
0,45	0,39015	<u>4,51</u>	<u>0,125</u>	28	0,666
0,50	0,4263	5,0	-0,084	29	0,709
0,55	0,4608	5,5	-0,286	30	0,742
0,60	0,4941	6,0	-0,472	32	0,785
0,65	0,5259	6,5	-0,637	35	0,796
0,70	0,5562	7,0	-0,778	40	0,716
0,80	0,6126	7,5	-0,896	45	0,568
0,90	0,6633	8,0	-0,990	50	0,396
1,00	0,7092	9,0	-1,110	<u>59</u>	<u>0,125</u>
1,10	0,7492	10,0	-1,159	60	0,094
1,20	0,7850	11,0	-1,142	70	-0,072
1,30	0,8149	12,0	-1,081	80	-0,143
1,40	0,8400	13,0	-0,985	90	-0,119
1,50	0,8607	14,0	-0,867	100	-0,053
1,60	0,8764	15,0	-0,732	120	0,094
1,70	0,8872	16,0	-0,590	<u>134</u>	<u>0,125</u>
1,80	0,8950	17,0	-0,445	140	0,186
1,90	0,8988	18,0	-0,303	160	0,203
2,00	0,8978	19,0	-0,164	180	0,196

Tabelle 14

Die Lösungen mit $\mu \neq 0$

μ	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
a_1	0,0203	0,0403	0,0765	0,1031	0,1237	0,1300
D_2	---	0,0001	0,0003	0,0004	0,0004	0,0003
D_1	0,0176	0,0302	0,0443	0,0479	0,0450	0,0386
D_{-1}	0,0237	0,0553	0,1494	0,3053	0,5627	1,0000
D_{-2}	0,0001	0,0003	0,0020	0,0065	0,0170	0,0386
D_{-3}	---	---	---	---	0,0001	0,0003
a_2	4,512	4,512	4,512	4,510	4,510	4,510
D_5	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	---
D_4	0,0070	0,0059	0,0042	0,0030	0,0021	0,0014
D_3	0,1028	0,0909	0,0698	0,0525	0,0389	0,0285
D_2	0,6535	0,6061	0,5113	0,4211	0,3407	0,2724
D_1	1,3505	1,3351	1,2763	1,1884	1,0834	0,9723
D_{-1}	1,3505	1,3353	1,2779	1,1945	1,0977	1,0000
D_{-2}	0,7432	0,7842	0,8549	0,9091	0,9474	0,9723
D_{-3}	0,1289	0,1430	0,1728	0,2042	0,2372	0,2724
D_{-4}	0,0094	0,0108	0,0142	0,0181	0,0228	0,0285
D_{-5}	0,0003	0,0004	0,0006	0,0008	0,0011	0,0014

gemacht werden. Die Stabilitätsbereiche dieser letzten Gleichung sind die folgenden (aus der numerischen Tabelle von Ince [K-9]):

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \psi \leq 0,228 & (26.16) \\
 1,880 &\leq \psi \leq 1,898 \\
 4,837 &\leq \psi \leq 4,837
 \end{aligned}$$

Sie sind auch sehr schmal im Vergleich zu den labilen.

Zum Schluss ist noch zu erwähnen, dass die erweiterte Differentialgleichung

$$\frac{d^3 u}{dx^3} + 2c \frac{du}{dx} + 2\psi \sin x u = 0 \quad (26.17)$$

Tabelle 15

Die Lösungen mit $\mu \neq 0$

μ	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
a_3	21,30	21,30	21,30	21,30	21,30	21,30
D_6	0,0027	0,0024	0,0019	0,0014	0,0011	0,0008
D_5	0,0287	0,0259	0,0210	0,0168	0,0135	0,0109
D_4	0,1764	0,1635	0,1400	0,1193	0,1012	0,0861
D_3	0,5790	0,5550	0,5079	0,4623	0,4183	0,3794
D_2	0,9477	0,9398	0,9214	0,8993	0,8731	0,8425
D_1	0,9623	0,9636	0,9686	0,9760	0,9850	0,9941
D_{-1}	0,9623	0,9637	0,9690	0,9772	0,9880	1,0000
D_{-2}	0,9612	0,9671	0,9768	0,9841	0,9900	0,9941
D_{-3}	0,6277	0,6523	0,7015	0,7502	0,7976	0,8425
D_{-4}	0,2048	0,2202	0,2537	0,2909	0,3318	0,3794
D_{-5}	0,0353	0,0392	0,0479	0,0583	0,0707	0,0861
D_{-6}	0,0035	0,0040	0,0052	0,0066	0,0085	0,0109

mit der ungeänderten numerischen Methode in der gleichen Weise wie die Mathieu'sche Differentialgleichung untersucht werden kann. Es kommt nur noch die unvermeidliche symmetrische Lösung mit $\mu = 0$ hinzu.

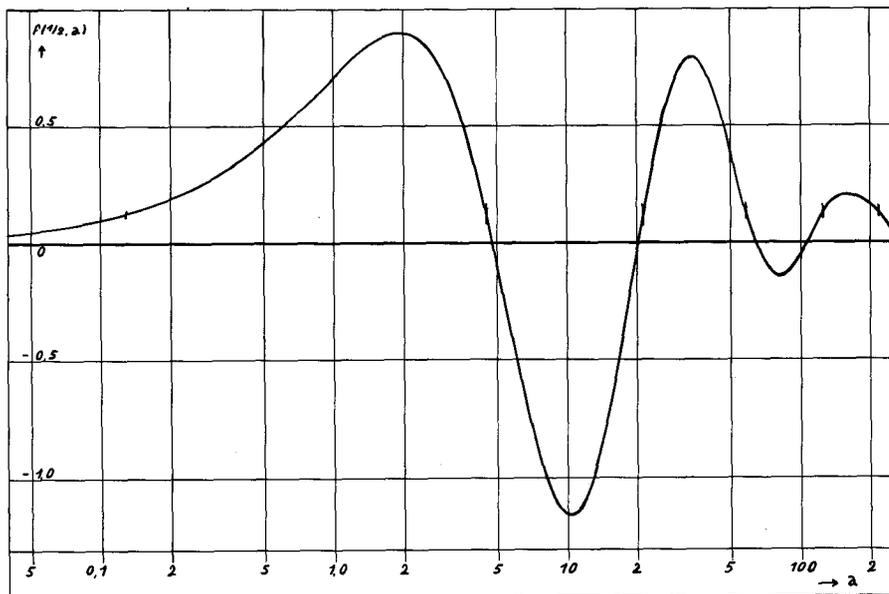


Abb. 8

Die Funktion $f(1/2, a)$ nach (26.14)

III. Kapitel

DIE INHOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

31. Die direkte Methode

a) Einleitung

Die Lösungen zweiter Art, die in den Randgebieten konvergieren, werden nach der direkten Methode mit Hilfe eines inhomogenen Grundsystems berechnet. Diese direkte Methode ist deshalb auch dann anwendbar, wenn die rechte Seite eine besondere Bedingung erfüllt.

Satz 36:

Die direkte Methode lässt sich bei Differentialgleichungen vom Typus (11.1) mit rechter Seite anwenden, wenn diese rechte Seite die folgende Form aufweist

$$g_I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{i(\mu + n)x} \quad \text{Gebiet I} \quad (31.1)$$

$$g_{II}(x) = \sum_{n=0}^{-\infty} E_n e^{i(\mu + n)x} \quad \text{Gebiet II .}$$

Die Konvergenzgrenze der Lösung ist diejenige der rechten Seite oder die Grenze des Gebietes, wobei die engere der beiden zu berücksichtigen ist.

Der Beweis dieses Satzes wird im nächsten Unterabschnitt durch die Aufstellung des Berechnungsvorganges gebracht. Die erste Konsequenz des Satzes 36 ist der folgende Satz:

Satz 37:

Wenn die rechte Seite einer Differentialgleichung vom Typus (11.1) durch ein Polynom

$$g(x) = \sum_{n=0}^m E_n e^{i(\mu + n)x} \quad (31.2)$$

dargestellt wird, kann die Lösung für das Gebiet I und diejenige des Gebietes II nach der direkten Methode berechnet werden. Die Konvergenzgrenze ist mit der Gebietsgrenze identisch.

Beweis des Satzes 37:

Die rechte Seite $g(x)$ nach (31.2) entspricht gleichzeitig den beiden Formen $g_I(x)$ und $g_{II}(x)$. Die direkte Methode ist deshalb in beiden Gebieten anwendbar. Da $g(x)$ keine Konvergenzgrenze aufweist, muss die Konvergenz der Lösung im ganzen Gebiet gewährleistet sein.

Wenn die rechte Seite durch eine Reihe dargestellt wird, die die Bedingung (31.1) nicht erfüllt, muss die Berechnungsmethode entsprechend angepasst werden, da der charakteristische Exponent μ nur bis auf eine ganze Zahl definiert ist.

Satz 38:

Eine abgeänderte direkte Methode führt zu den Lösungen in den Gebieten I und II, wenn die rechte Seite einer Reihe von der Form (31.1) entspricht, in welcher die Werte von n von $-\infty$ bis $+\infty$ vorhanden sind, oder wenn diese rechte Seite die Form $g_{II}(x)$ im Gebiet I, bzw. $g_I(x)$ im Gebiet II aufweist. Die Konvergenzgrenze der Lösung ist durch diejenige der rechten Seite gegeben.

Der Beweis dieses Satzes wird am Schluss dieses Abschnittes 31 aufgestellt, weil die abgeänderte direkte Methode zuerst noch erläutert werden muss.

b) Die Berechnungsmethode im einfachen Falle

Die direkte Methode führt über den Ansatz (11.13) zum neuen Grundsystem

$$A(\mu + n) D_{n-1} + B(\mu + n) D_n + C(\mu + n) D_{n+1} = E_n, \quad (31.3)$$

das für beide Gebiete gültig ist.

Die Fourierkoeffizienten lassen sich einer nach dem anderen ausrechnen. Für das Gebiet I wird:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{E_0}{C(\mu)} \\ D_2 &= \frac{E_1}{C(\mu + 1)} - \frac{B(\mu + 1)}{C(\mu + 1)} D_1 \\ D_3 &= \frac{E_2}{C(\mu + 2)} - \frac{B(\mu + 2)}{C(\mu + 2)} D_2 - \frac{A(\mu + 2)}{C(\mu + 2)} D_1 \end{aligned} \quad (31.4)$$

$$D_4 = \frac{E_3}{C(\mu + 3)} - \frac{B(\mu + 3)}{C(\mu + 3)} D_3 - \frac{A(\mu + 3)}{C(\mu + 3)} D_2 \quad (31.4)$$

usw.

und für das Gebiet II:

$$D_{-1} = \frac{E_0}{A(\mu)} \quad (31.5)$$

$$D_{-2} = \frac{E_{-1}}{A(\mu - 1)} - \frac{B(\mu - 1)}{A(\mu - 1)} D_{-1}$$

$$D_{-3} = \frac{E_{-2}}{A(\mu - 2)} - \frac{B(\mu - 2)}{A(\mu - 2)} D_{-2} - \frac{C(\mu - 2)}{A(\mu - 2)} D_{-1}$$

$$D_{-4} = \frac{E_{-3}}{A(\mu - 3)} - \frac{B(\mu - 3)}{A(\mu - 3)} D_{-3} - \frac{C(\mu - 3)}{A(\mu - 3)} D_{-2}$$

usw.

Das erste Glied in diesen Rekursionsformeln nimmt im Vergleich zu den anderen bei zunehmendem $|n|$ ab, wenn $g_I(x)$, bzw. $g_{II}(x)$ im ganzen Gebiet I, bzw. II konvergieren. Im anderen Falle bleibt das erste Glied von der gleichen Größenordnung wie die anderen. Die Konvergenzgrenze der Lösung entspricht derjenigen von $g_I(x)$, bzw. $g_{II}(x)$:

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} \longrightarrow \left(\frac{\mu + n}{\mu + n + 1} \right)^s \frac{E_{n+1}}{E_n}, \quad (31.6)$$

da $C(\mu + n)$, bzw. $A(\mu + n)$ polynome s -ten Grades in $(\mu + n)$ sind (siehe Satz 2. Abschnitt 11).

c) Die Lösungen zweiter Art

Aus den Rekursionsformeln (31.3) und (31.4) ist ersichtlich, dass die Lösungen zweiter Art eingeführt werden müssen, wenn $C(\mu + m)$, bzw. $A(\mu - m)$ gleich Null sind, vorausgesetzt, dass m eine positive ganze Zahl ist. In diesem Falle existiert eine Lösung der homogenen Gleichung:

$$u_1 = \sum_{n=m+1}^{\infty} D'_n e^{i(\mu + n)x} \quad \text{im Gebiet I} \quad (31.7)$$

Aus dem Ansatz

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (D_n + x D'_n) e^{i(\mu + n)x} \quad (31.8)$$

ergibt sich das Grundsystem

$$\begin{aligned} A(\mu + n) D_{n-1} + B(\mu + n) D_n + C(\mu + n) D_{n+1} &= \\ = E_n + A'(\mu + n) D'_{n-1} + B'(\mu + n) D'_n + C'(\mu + n) D'_{n+1} \end{aligned} \quad (31.9)$$

mit den Grössen $A'(\mu + n)$, $B'(\mu + n)$ und $C'(\mu + n)$, die in (12.9) definiert wurden. Die Lösung des neuen Grundsystems kann mit Hilfe des gleichen Verfahrens wie in Abschnitt 12 bestimmt werden, so dass auch in diesem Falle keine Schwierigkeiten hervortreten.

d) Der Beweis des Satzes 38

Die direkte Methode kann nur dann angewandt werden, wenn die Reihe auf der betreffenden Seite abgebrochen ist. Anderenfalls treten besondere Konvergenzschwierigkeiten auf.

Wir betrachten jetzt die rechte Seite $g'(x)$:

$$g'(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n e^{i(\mu + n)x} \quad (31.10)$$

Die direkte Methode kann zur Lösung führen, wenn zunächst alle E_n mit $n < -N$ (im Gebiet I) vernachlässigt werden. Die letzten müssen dann einzeln berücksichtigt werden:

$$D_{1-N-m}^{(m)} = \frac{E_{-n-m}}{C(\mu - n - m)} \quad (31.11)$$

Die anderen Fourierkoeffizienten werden durch das homogene Grundsystem bestimmt. Wenn $N + m$ gegen ∞ strebt, folgt aus Satz 4:

$$\frac{D_{n+1}^{(m)}}{D_n^{(m)}} \rightarrow \frac{1}{Z_1} \quad \begin{array}{l} \text{für } N+m-n \rightarrow \infty \\ \text{und } n \rightarrow \infty \end{array} \quad (31.12)$$

Aus(31.11) und (31.12) folgt schliesslich :

$$\left| D_n^{(m)} \right| \leq K \left| \frac{Z_1^{-m-N-n} \cdot E_{-N-m}}{f_S(\mu - N - m)^S} \right| \quad (31.13)$$

K ist eine Grösse, die als Konstante angenommen werden kann. Aus der allgemeinen Beziehung

$$\sum_{n=0}^{N+m} |a|^n = \frac{1 - |a|^{N+m+1}}{1 - |a|} \leq \frac{|a|^{N+m+1}}{|a| - 1}, \quad (31.14)$$

wenn

$$|a| = \left| \frac{Z_1}{Z} \right| > 1 \quad (31.15)$$

ist, ergibt sich für die erste Summation:

$$\sum_{n=0}^{-N-m} \left| D_n^{(m)} Z^n \right| \leq \left| \frac{K Z_1}{f_S(|Z_1| - |Z|)} \right| \left| \frac{E_{-N-m} \cdot Z^{-n-m}}{(\mu - N - m)^S} \right| \quad (31.16)$$

Die Summation über m führt zu einer Reihe, die die gleiche Konvergenzgrenze wie g(x) aufweist. Damit ist der Satz 38 bewiesen.

32. Ein praktisches Beispiel: Die Steuerungs-Schaltung

a) Die Grundgleichungen

Die Regelung des Magnetfeldes in den grossen Cyclotronanlagen stellt ein schwieriges Problem dar, weil die eigene Zeitkonstante des elektrischen Kreises sehr gross ist [T - 2] . Der Einfluss einer Aenderung der Steuergrösse ist zu träge. Diesem Nachteil kann begegnet werden, indem die Steuergrösse zunächst soweit vorverschoben wird, damit sie nachher exponentiell auf ihren richtigen Wert gebracht werden kann.

Baumgartner und seine Mitarbeiter haben den Fall untersucht, bei welchem die Spannung als Steuergrösse aufgefasst wird. Die Kreisgleichung ist dann eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und einem veränderlichen inhomogenen Glied. Wenn jedoch der Widerstand als Steuergrösse betrachtet wird, so lautet die Kreisgleichung:

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + (R_0 + R_1 e^{-kt}) I = E \quad , \quad (32.1)$$

mit dem Strom I, der Induktivität L, der konstanten Spannung E und dem veränderlichen Widerstand $R_0 + R_1 \exp \{ -kt \}$.

Bei Einführung einer rein imaginären Zeit erhält man aus (32.1) eine Differentialgleichung vom Typus (11.1) mit einer konstanten rechten Seite. Um die Schreibweise zu vereinfachen, kann man die folgenden neuen Parameter einführen:

$$y = \frac{I R_0}{E} \quad , \quad A = \frac{R_0}{k L} \quad , \quad v = kt - \ln \left(\frac{R_1}{k L} \right) \quad . \quad (32.2)$$

Daraus folgt:

$$\frac{dy}{dv} + (A + e^{-v}) y = A \quad . \quad (32.3)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$y_1 = B \exp \{ - A v + e^{-v} \} \quad . \quad (32.4)$$

Die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung lässt sich mit der direkten Methode berechnen, da die Gebiete II und III verschwinden. Die Lösung des Gebietes I ist dann in der ganzen Ebene gültig. Die rechte Seite ist eine Konstante, so dass die Bedingung des Satzes 36 auch erfüllt ist.

b) Die Partikulärlösung

Wir führen den Lösungsansatz

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cdot e^{-nv} \quad (32.5)$$

in (32.3) ein und erhalten das Grundsystem

$$\begin{aligned} (A - n) D_n + D_{n-1} &= 0 & n \neq 0 \\ &= A & n = 0 \end{aligned} \quad (32.6)$$

Daraus folgen die Fourierkoeffizienten D_n :

$$D_0 = 1 \quad (32.7)$$

$$D_n = \frac{\Gamma(1-A)}{\Gamma(1+n-A)} \quad .$$

Die Lösung lautet

$$y_2 = \Gamma(1-A) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nv}}{\Gamma(1+n-A)} \quad (32.8)$$

c) Das normale Problem

Die Lösung y_1 nach (32.4) kann als Produkt zweier Faktoren betrachtet werden, deren erster mit der normalen Zeitkonstante des elektrischen Kreises abnimmt, während der zweite eine leichte Abnahme sowie den Grenzwert 1 aufweist. Um den Vorteil der Schaltung voll ausnützen zu können, müssen wir die Anfangsbedingungen so wählen, dass diese Lösung y_1 eliminiert wird.

Wir bezeichnen mit I_0 den idealen Nennwert des Stromes und I_1 dessen Grenzwert, bei welchem die Korrekturschaltung wirksam wird. Die Bedingung lautet in diesem Falle

$$y_2(t=0) = y_2(v = -\ln \frac{R_1}{kL}) = \frac{I_1}{I_0} \quad (32.9)$$

Daraus lassen sich die Werte von R_1 und k ohne weiteres berechnen.

d) Die Korrektur in der anderen Richtung

Die Gleichung (32.1) entspricht dem Fall, in welchem der Strom zu gross geworden ist und der Widerstand erhöht werden musste. Im anderen Falle erhält man:

$$\frac{dz}{dv} + (A - e^{-v})z = A \quad . \quad (32.10)$$

Die direkte Methode führt zu den beiden Lösungen

$$z_1 = C \cdot \exp\{-A v - e^{-v}\} \quad (32.11)$$

für die homogene Differentialgleichung und

$$z_2 = \Gamma(1-A) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nv}}{\Gamma(1+n-A)} \quad . \quad (32.12)$$

Das normale Problem kann ebenfalls mit der Bedingung (32.9) gelöst werden.

e) Allgemeine Bemerkungen

Aus (32.10) kann man entnehmen, dass e^{-v} kleiner als A bleiben muss, weil der Widerstand nicht negativ sein kann. Weiter ist A das Verhältnis der neuen zur alten Zeitkonstante. Diese Grösse wird im allgemeinen klein sein. Daraus folgt:

$$y_2 \simeq 1 + \frac{e^{-v}}{1-A} \quad (32.13)$$

$$z_2 \simeq 1 - \frac{e^{-v}}{1-A} \quad ,$$

weil die Reihen nach dem zweiten Glied abgebrochen werden können. In diesem Falle kann die Bedingung (32.9) analytisch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\left| \frac{I_1 - I_0}{I_0} \right| = \frac{\Delta I}{I_0} = \frac{R_1}{kL(1-A)} = \frac{R_1}{kL - R_0} \quad . \quad (32.14)$$

Diese Beziehung deckt sich genau mit derjenigen, die für die Spannungssteuerung erhalten wurde [T - 2] .

Zum Schluss müssen wir noch die Tatsache unterstreichen, dass die Gleichungen (32.1), (32.3) und (32.10) eine imaginäre Periode aufweisen. Damit ist bewiesen, dass die erwähnten Methoden nicht nur für sinusförmige Koeffizienten, sondern auch für polynomiale (siehe Abschnitt 17) oder exponentielle Koeffizienten angewandt werden können.

33. Die numerische Methode

a) Die Grundbedingung

Die inhomogenen Differentialgleichungen, deren linke Seite vom Typus (11.1) ist, wurden schon mit Hilfe der numerischen Methode gelöst [H - 2, 6, 11 und 17 sowie P - 14] . Die erforderliche Bedingung für die rechte Seite ist jedoch schärfer als bei der direkten Methode:

Satz 39:

Die numerische Methode kann immer zur Bestimmung der Lösungen von inhomogenen Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten angewandt werden, wenn die rechte Seite ein Polynom in e^{ix} ist:

$$g(x) = \sum_{n=0}^m E_n e^{i(\mu + n)x} \quad , \quad (33.1)$$

und wenn μ kein charakteristischer Wert der linken Seite ist. Die berechneten Lösungen konvergieren im ganzen Gebiet III.

Der Beweis dieses Satzes wird durch die Aufstellung des Rechenverfahrens gebracht, das im nächsten Unterabschnitt erläutert wird. Im Abschnitt 34 wird eine neue Methode besprochen, die zur Lösung der anderen Differentialgleichungen angewandt werden kann.

b) Das Rechenverfahren

Das algebraische Grundsystem ist das gleiche wie bei der direkten Methode:

$$A(\mu + n) D_{n-1} + B(\mu + n) D_n + C(\mu + n) D_{n+1} = E_n . \quad (33.2)$$

Für diejenigen Werte von n , bei welchen E_n Null ist, treten keine Schwierigkeiten auf. Die numerische Methode wird ganz normal mit dem, durch die rechte Seite angegebenen Wert von μ angewandt. Damit lassen sich ϵ_0 und δ_m berechnen.

Für die übrigen Fourierkoeffizienten müssen wir zwei Ausdrücke vorsehen:

$$D_n = D'_n + E_0 D''_n . \quad (33.3)$$

Die D'_n lassen sich gleich wie bei einer homogenen Differentialgleichung über die ϵ_n und die δ_n berechnen. Sie sind jedoch alle bis auf einen konstanten Faktor definiert.

Die D''_n werden durch das folgende System definiert:

$$A(\mu + n) D''_{n-1} + B(\mu + n) D''_n + C(\mu + n) D''_{n+1} = \frac{E_n}{E_0} \quad \text{für } n > 1, \quad (33.4)$$

mit

$$D''_n = 0 \quad \text{für } n \leq 0 \text{ und } n \geq m .$$

Damit lassen sich alle Fourierkoeffizienten D''_n bestimmen. Die Gleichungen (33.2) mit $n = 0$ und $n = 1$ sind noch nicht berücksichtigt worden und dienen jetzt zur Bestimmung von D'_0 und D'_1 :

$$\left[B(\mu) - \epsilon_0 \right] D'_0 + C(\mu) D'_1 = E_0 \left[1 - A(\mu) D''_{-1} - B(\mu) D''_0 - C(\mu) D''_1 \right] \quad (33.5)$$

und

$$\begin{aligned} A(\mu + 1) D'_0 + \left[B(\mu + 1) - \delta_1 \right] D'_1 &= \\ = E_1 - E_0 \left[A(\mu + 1) D''_0 + B(\mu + 1) D''_1 + C(\mu + 1) D''_2 \right] . \end{aligned} \quad (33.6)$$

Damit erhalten wir die Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung. Um die allgemeine Lösung zu bekommen, müssten wir noch die homogene Gleichung mit der numerischen Methode lösen, was die grösste Rechenarbeit beanspruchen würde.

Satz 40:

Wie bei der direkten Methode muss im allgemeinen die Lösung zweiter Art eingeführt werden, wenn der besondere Wert von μ aus der rechten Seite ein

charakteristischer Wert der linken Seite ist. Die Lösungsmethode wird im nächsten Abschnitt angegeben.

Beweis des Satzes 40:

Wenn μ ein charakteristischer Wert der linken Seite ist, muss die Hauptdeterminante des Systems (33.5) und (33.6) verschwinden. Durch Einführung der Lösung zweiter Art wird das Grundsystem geändert, so dass diese Schwierigkeit nicht mehr vorhanden ist.

c) Der Fall $m = 0$

Die eben dargestellte Methode vereinfacht sich, wenn m gleich Null oder 1 ist. Alle D'_n sind dann gleich Null. Das System (33.5) und (33.6) weist auf der rechten Seite nur noch E_0 , bzw. E_1 , auf. Bei

$$m = 1 \tag{33.7}$$

sind die beiden Gleichungen inhomogen. Das System lässt sich jedoch leicht lösen. Im anderen Fall

$$m = 0 \tag{33.8}$$

ist die Gleichung (33.6) homogen, so dass δ_0 mit der normalen Methode bestimmt werden kann. An Stelle von (33.5) erhält man:

$$\left[B(\mu) - \xi_0 - \delta_0 \right] D_0 = E_0 \tag{33.9}$$

Wenn μ kein charakteristischer Wert ist, lässt sich D_0 daraus berechnen.

Der besondere Fall (33.8) kann auch bei Differentialgleichungen angewandt werden, deren rechte Seite eine allgemeinere Form aufweist. Diese angeänderte Methode wurde schon von Goldstein [H - 6] zur Bestimmung der Mathieu'schen Funktionen zweiter Art benützt. Jedes Glied der rechten Seite wird für sich behandelt und alle, auf diese Weise berechneten Teillösungen werden zusammengezählt:

$$u = \sum_{n=0}^m E_n \sum_{-\infty}^{+\infty} D_1^{(n)} e^{i(\mu + 1)x} \tag{33.10}$$

mit

$$\left[B(\mu + n) - \varepsilon_n - \delta_n \right] D_n^{(n)} = 1 . \quad (33.11)$$

Die Gültigkeit dieser Methode, wenn die Anzahl Glieder gegen Unendlich strebt, hat der Verfasser nicht untersucht, weil er ein anderes Verfahren im nächsten Abschnitt vorschlägt.

34. Die Lösungen zweiter Art im Gebiet III

a) Die Grundgedanken

Die Lösungen zweiter Art müssen mit Hilfe des Grundsystems (12.8) bestimmt werden. Es entspricht einer inhomogenen Differentialgleichung, deren rechte Seite im Gebiet III durch eine beidseitig unbeschränkte Reihe dargestellt wird. Diese Reihe konvergiert jedoch im ganzen Gebiet III. Der Satz 39 zeigt, dass die allgemeine numerische Methode unbrauchbar ist. Goldstein [H - 2 und 6] hat das Verfahren der Teillösungen auf die Mathieu'sche Gleichung angewandt. Es ist jedoch leider ein Ausnahmefall, wie die auftretenden Schwierigkeiten beweisen. Es ist deshalb erforderlich, eine neue und einfachere Methode zu finden.

Wir werden zuerst den einfachsten Fall untersuchen, bei welchem die Lösungen zweiter Art erforderlich sind.

Satz 41:

Eine Lösung zweiter Art ist mindestens in den beiden folgenden Fällen erforderlich:

- a) Die Differentialgleichung ist symmetrisch, μ ist gleich 0 oder 1/2 und Doppellösungen sind nicht möglich.
- b) Die Differentialgleichung ist antisymmetrisch, μ ist gleich 1/2 und Doppellösungen sind nicht möglich.

Beweis des Satzes 41:

Man muss zuallererst bemerken, dass eine Lösung zweiter Art bei Differentialgleichungen erster Ordnung nicht auftreten kann. Eine symmetrische Differentialgleichung ist von gerader Ordnung, d. h. mindestens von zweiter. Weiter weist eine antisymmetrische Gleichung erster Ordnung nur den charakteristischen Wert $\mu = 0$ auf. Sie ist vom Fall b ausgeschlossen.

Bei einer symmetrischen oder antisymmetrischen Differentialgleichung sind die Lösungen paarweise gekoppelt, wenn man von der besonderen Lösung $\mu = 0$ der antisymmetrischen Gleichung absieht. Wenn jedoch $\mu = 0$ oder $\mu = 1/2$ ist, sind die beiden gekoppelten Lösungen identisch, so dass eine andere Lösung gefunden werden muss (unter Berücksichtigung der erwähnten Ausnahme). Diese neue Lösung muss die Form der zweiten Art aufweisen, wenn Doppellösungen nicht möglich sind.

Aus dem Grundsystem (18.8) und den Symmetrie-Eigenschaften (21.2 a) folgen die neuen "zentralen" Gleichungen. Für $\mu = 0$ gilt:

$$B(0) D_0 + 2 C(0) D_1 = 2 C'(0) E_1 \quad (34.1)$$

$$\text{für } D_n = D_{-n} \quad , \quad E_n = -E_{-n}$$

$$B(1) D_1 + C(1) D_2 = A'(1) E_0 + B'(1) E_1 + C'(1) E_2$$

$$\text{für } D_n = -D_{-n} \quad , \quad E_n = E_{-n} \quad ,$$

und für $\mu = 1/2$:

$$\left[B(1/2) \pm A(1/2) \right] D_0 + C(1/2) D_1 = \left[B'(1/2) \mp A'(1/2) \right] E_0 + C'(1/2) E_1 \quad (34.2)$$

$$\text{für } D_{n-1} = \pm D_{-n} \quad , \quad E_{n-1} = \mp E_{-n} \quad .$$

Diese Gleichungen weisen nur zwei Fourierkoeffizienten auf. Man kann deshalb den einen in Funktion des anderen berechnen. Durch Anwendung des Grundsystems (12.8) können auch alle anderen D_n in Funktion von D_0 , bzw. D_1 bestimmt werden.

Satz 42:

Die Koeffizienten D_n sind von D_0 , bzw. D_1 linear abhängig.

Beweis des Satzes 42:

Das Grundsystem (12.8) ist in den D_n linear. D_1 ist deshalb linear von D_0 abhängig und D_{n+1} von D_n und D_{n-1} . Da die Linearität bei einer linearen Substitution nicht verloren geht, ist sie für alle Beziehungen zwischen den D_n vorhanden.

Es besteht weiter der Satz:

Satz 43:

An der Grenze $|n| \rightarrow \infty$ ist das Verhältnis D_{n+1}/D_n konstant:

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} \rightarrow \frac{e_s}{2f_s} \left[1 + \sqrt{1 - 4\varphi} \right] , \quad (34.3)$$

wenn D_0 , bzw. D_1 einen kritischen Wert nicht aufweist und

$$\left| \frac{D_{n+1}}{D_n} \right| \rightarrow \left| \frac{e_s}{2f_s} \left[1 - \sqrt{1 - 4\varphi} \right] \right| , \quad (34.4)$$

wenn dieser kritische Wert erreicht ist.

Beweis des Satzes 43:

Der Satz von Poincaré (Satz 5, Abschnitt 11) und die Ergebnisse des Abschnittes 15 zeigen, dass die Reihe der D_n im allgemeinen stark divergiert. Die rechte Seite von (12.8) wird bei zunehmendem n rasch vernachlässigbar klein. Der erwähnte Satz von Poincaré führt zum Grenzwert (34.3). Es gibt jedoch einen kritischen Wert von D_0 , bzw. D_1 , der zur Konvergenz der Reihe führt. Die rechte Seite wird recht vernachlässigbar klein, so dass nur der Modul angegeben werden kann.

b) Das Lösungsverfahren

Das Lösungsverfahren stützt sich auf den folgenden Satz:

Satz 44:

Bei einer idealen Rechengenauigkeit kann man aus zwei Werten $D_N (D'_0)$ und $D_N (D''_0)$ mit $N \rightarrow \infty$ den kritischen Wert für D_0 bestimmen.

Beweis des Satzes 44:

Wegen Satz 43 strebt das Verhältnis D'_N/D''_N gegen einen Wert, der mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden kann. Wegen der Linearität des Grundsystems ist es deshalb möglich, den Wert D'''_0 zu berechnen, der zu einer Konvergenz der Reihe führt:

$$D'''_0 = \frac{D'_N D''_0 - D''_N D'_0}{D'_N - D''_N} . \quad (34.5)$$

Wenn N gegen Unendlich strebt, strebt D_0''' gegen einen Grenzwert, weil diese Grösse von D_0' , D_0'' und weiter nur von D_N'/D_N'' abhängt.

Das Lösungsverfahren muss jedoch die unvermeidlichen Ungenauigkeiten des numerischen Rechnens (endliche Stellenzahl) berücksichtigen. Die Werte von D_N' und D_N'' werden für einen grossen jedoch beschränkten Wert von N ausgerechnet. Aus (34.5) folgt die Grösse D_0''' , die zu den Koeffizienten D_n''' führt. Die Konvergenz der Reihe scheint am Anfang gewährleistet. Bei grossen n -Werten ergibt sich dann trotzdem eine Divergenz, weil die Rechnung nicht mit idealer Genauigkeit durchgeführt werden konnte. Das Verfahren wird deshalb mit D_0''' und $(D_0''' + \delta)$ wiederholt. In vielen Fällen genügt dann eine lineare Interpolation zwischen den so berechneten Werten.

c) Die asymmetrischen Differentialgleichungen

Das Lösungsverfahren, das für die symmetrischen oder antisymmetrischen Differentialgleichungen aufgestellt wurde, lässt sich auch für die Bestimmung der Lösungen asymmetrischer Differentialgleichungen anpassen. Damit lassen sich alle inhomogenen Differentialgleichungen lösen, deren rechte Seite die gleiche Quasiperiodizität nach Floquet wie die linke Seite aufweisen.

Bei asymmetrischen Differentialgleichungen muss man alle Fourierkoeffizienten D_n berücksichtigen, d. h., die Konvergenz der beiden Reihen erhalten. Auf der anderen Seite kann man zwei Grössen, z. B. D_0 und D_1 frei wählen.

Satz 45:

Der Grenzwert von D_n bei $|n| \rightarrow \infty$ ergibt sich aus

$$D_n \rightarrow a_n [b_1 D_0 + b_2 D_1 + b_3] \quad n > 0 \quad (34.6)$$

$$D_n \rightarrow a_n [c_1 D_0 + c_2 D_1 + c_3] \quad n < 0 .$$

Beweis des Satzes 45:

Der Beweis des Satzes 45 ist praktisch identisch mit demjenigen des Satzes 44. Der Satz 43 und die Linearität des Grundsystems führen zu den Beziehungen (34.6).

Die Berechnungsmethode sieht zuerst die Bestimmung der b_n und c_n vor, wenn a_N und a_{-N} gewählt wurden:

$$a_N = a_{-N} = 1 \quad . \quad (34.7)$$

Dazu werden drei verschiedene D_n - Reihen berechnet:

$$D'_n = D_n (D'_0, D'_1) \quad (34.8)$$

$$D''_n = D_n (D''_0, D''_1)$$

$$D'''_n = D_n (D'_0, D''_1)$$

Aus (34.6) , (34.7) und (34.8) folgt näherungsweise:

$$b_1 = \frac{D'_N - D''_N}{D'_0 - D''_0} \quad (34.9)$$

$$b_2 = \frac{D'_N - D'''_N}{D'_1 - D''_1}$$

$$b_3 = D'_N - b_1 D'_0 - b_2 D'_1 \quad .$$

In gleicher Weise lassen sich die c_n berechnen. Zur Bestimmung von D'''_0 und D'''_1 braucht man nur das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$D'''_0 b_1 + D'''_1 b_2 + b_3 = 0 \quad (34.10)$$

$$D'''_0 c_1 + D'''_1 c_2 + c_3 = 0 \quad .$$

Zur Verbesserung der Genauigkeit lässt sich dieses Verfahren so oft wie erforderlich wiederholen. Diese Methode ist etwas komplizierter als bei symmetrischen oder antisymmetrischen Differentialgleichungen. Sie führt aber trotzdem sehr rasch zum Ziel.

35. Die Lösungen zweiter Art der Mathieu'schen Differentialgleichung

a) Die Grundgleichungen

Die Mathieu'sche Differentialgleichung wird für das praktische Beispiel gewählt, weil die Anwendung der Berechnungsmethode sehr einfach bleibt und weil die Lösungen erster Art mit der erforderlichen Genauigkeit bekannt sind [K - 9] .

Aus der Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + [c + 2 \mathcal{V} \cos x] u = 0 \quad (35.1)$$

und dem Lösungsansatz

$$u = i x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n e^{i(\mu + n)x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} D_n e^{i(\mu + n)x} \quad (35.2)$$

erhalten wir das Grundsystem

$$\mathcal{V} \cdot D_{n-1} + [c - (\mu + n)^2] D_n + \mathcal{V} D_{n+1} = 2(\mu + n) E_n \quad (35.3)$$

Nach Einführung der Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} K(\mu + n) &= \frac{2(\mu + n) E_n}{\mathcal{V}} \\ L(\mu + n) &= \frac{(\mu + n)^2 - c}{\mathcal{V}} \end{aligned} \quad (35.4)$$

die zum voraus berechnet werden können, kann man die Rekursionsformel folgendermassen aufschreiben:

$$D_{n+1} = K(\mu + n) + L(\mu + n) D_n - D_{n-1} \quad (35.5)$$

Diese Form ist beim Gebrauch von normalen Rechenmaschinen besonders günstig.

b) Die numerischen Ergebnisse

Die Rechenergebnisse sind aus den Tabellen 16 bis 18 ersichtlich, in welchen nur die konvergenten Reihen angegeben sind. Die Fourierkoeffizienten E_n der Lösungen erster Art sowie die charakteristischen Werte a_n und b_n sind ebenfalls zusammengestellt, so dass diese Tabellen alle Angaben über die betreffenden Mathieu'schen Funktionen enthalten.

Die Berechnungsmethode selbst ist in den Tabellen 19 und 20 dargestellt, die alle Zwischenstufen der numerischen Rechenarbeit für zwei Einzelfälle enthalten. Bei D_0 gleich 0 und 1 (Spalte 4 und 5) ist die Divergenz der Reihe so ausgeprägt, dass die D_{10} den Wert 10^{11} überschreiten. (Die Zahlen in Klammern bedeuten die Anzahl Nullen, die rechts noch angehängt werden müssen).

Aus den Ergebnissen der Spalten 4 und 5 wird die nächste Näherung für D_0 berechnet. Wegen der unvermeidlichen Rechenungenauigkeit divergiert die entsprechende Reihe (Spalt 6). Eine neue Rechnung mit $D_0 \pm 0,00001$ führt zur Reihe der Spalte 7. Eine lineare Interpolation ergibt schliesslich die konvergente Reihe in Spalte 8. Die Konvergenz der Näherungsmethode ist dann grundsätzlich durch die Rechengenauigkeit bestimmt.

Tabelle 16

Die Mathieu'schen Funktionen

ν	0,5		1,0		2,0	
a_0	- 0,37849		- 1,07013		- 2,65168	
n	E_n	D_n	E_n	D_n	E_n	D_n
0	0,31125	---	0,27986	---	0,25188	---
1	0,23561	-0,36616	0,29949	-0,34683	0,33396	-0,26807
2	0,02702	-0,06706	0,06026	-0,11900	0,10599	-0,15548
3	0,00145	-0,00451	0,00602	-0,01551	0,01854	-0,03707
4	0,00004	-0,00016	0,00035	-0,00108	0,00200	-0,00488
5	---	---	0,00001	-0,00005	0,00015	-0,00041
6	---	---	---	---	0,00001	-0,00002
$a_{1/2}$	- 0,34767		- 1,06480		- 2,65134	
0	0,49067	-0,54738	0,47652	-0,31136	0,45376	-0,18891
1	0,09585	-0,22034	0,15000	-0,24422	0,20449	-0,23607
2	0,00729	-0,02230	0,02072	-0,04816	0,04739	-0,08289
3	0,00029	-0,00105	0,00156	-0,00446	0,00644	-0,01435
4	0,00001	-0,00003	0,00007	-0,00024	0,00057	-0,00148
5	---	---	---	-0,00001	0,00003	-0,00010
$b_{1/2}$	0,59480		0,57950		- 0,10899	
0	0,47736	0,61715	0,41322	0,50032	0,31321	0,46732
1	0,14817	-0,08802	0,27707	-0,25196	0,36943	-0,22684
2	0,01315	-0,01951	0,04961	-0,09000	0,12253	-0,18073
3	0,00056	-0,00118	0,00427	-0,01033	0,02015	-0,04147
4	0,00001	-0,00003	0,00022	-0,00063	0,00199	-0,00499
5	---	---	0,00001	-0,00003	0,00013	-0,00038
6	---	---	---	---	0,00001	-0,00002

Tabelle 17
Die Mathieu'schen Funktionen

ν	0,5		1,0		2,0	
b_1	0,91806		0,68672		-0,09734	
n	E_n	D_n	E_n	D_n	E_n	D_n
0	---	2,0803	---	1,14498	---	0,71863
1	0,49339	-1,9098	0,47682	-0,39314	0,43574	0,01748
2	0,08086	-0,4196	0,14938	-0,31450	0,23908	-0,27330
3	0,00501	-0,0298	0,01811	-0,05138	0,05405	-0,09922
4	0,00017	-0,0011	0,00119	-0,00399	0,00678	-0,01588
5	---	---	0,00005	-0,00018	0,00054	-0,00149
6	---	---	---	---	0,00003	-0,00009
a_1	1,29317		1,70727		2,02881	
0	-0,16738	---	-0,21214	---	-0,21489	---
1	0,43289	2,3967	0,36219	0,89254	0,21798	0,64474
2	0,08093	0,3263	0,16812	0,09310	0,31764	-0,11417
3	0,00526	0,0171	0,02328	-0,00657	0,09509	-0,12198
4	0,00018	0,0005	0,00163	-0,00138	0,01378	-0,02575
5	---	---	0,00007	-0,00009	0,00121	-0,00279
6	---	---	---	---	0,00007	-0,00019
7	---	---	---	---	---	-0,00001
$a_{3/2}$	2,28516		2,31536		2,17748	
0	-0,09601	7,6996	-0,15047	2,4401	-0,20325	0,94729
1	0,48678	-23,8322	0,46123	-2,7501	0,39913	-0,06728
2	0,06178	-3,1033	0,12032	-0,8766	0,21772	-0,35103
3	0,00310	-0,1581	0,01218	-0,0974	0,04421	-0,10321
4	0,00009	-0,0048	0,00068	-0,0058	0,00493	-0,01400
5	---	-0,0001	0,00002	-0,0003	0,00035	-0,00114
6	---	---	---	---	0,00002	-0,00006

Tabelle 18

Die Mathieu'schen Funktionen

ν	0,5		1,0		2,0	
$b_{3/2}$	2,34258		2,66776		3,54547	
n	E_n	D_n	E_n	D_n	E_n	D_n
0	-0,14865	-4,7984	-0,28047	-1,1042	-0,37523	-0,76499
1	0,47347	24,5834	0,39764	3,4934	0,24305	1,07288
2	0,06098	3,0874	0,11435	0,8377	0,21780	0,43461
3	0,00308	0,1539	0,01201	0,0791	0,05147	0,05933
4	0,00009	0,0043	0,00068	0,0042	0,00622	0,00377
5	---	0,0001	0,00002	0,0002	0,00047	0,00009
6	---	---	---	---	0,00002	---
b_2	4,03192		4,11301		4,29563	
0	---	-24,490	---	-6,4957	---	-1,9802
1	-0,08095	98,741	-0,14998	13,3584	-0,24098	2,1266
2	0,49090	-574,586	0,46669	-35,3891	0,39710	-1,7650
3	0,04961	-58,132	0,09722	-7,4915	0,18229	-1,0715
4	0,00207	-2,432	0,00821	-0,6383	0,03167	-0,2085
5	0,00005	-0,058	0,00039	-0,0307	0,00308	-0,0218
6	---	-0,001	0,00001	-0,0010	0,00019	-0,0021
7	---	---	---	---	0,00001	-0,0001
a_2	4,03530		4,16245		4,81318	
0	0,01043	---	0,04089	---	0,12352	---
1	-0,08418	-94,948	-0,17021	-11,585	-0,29725	-1,5390
2	0,49014	576,054	0,45650	36,298	0,31971	2,6370
3	0,04957	58,200	0,09605	7,515	0,16727	1,1062
4	0,00207	2,430	0,00815	0,632	0,03045	0,1789
5	0,00005	0,058	0,00039	0,030	0,00304	0,0163
6	---	0,001	0,00001	0,001	0,00020	0,0010
7	---	---	---	---	0,00001	---

Tabelle 19

Ein Berechnungsbeispiel: $a_0, \psi = 1$

n	E_n [1]	K(n) [2]	L(n) [3]	[4]
1	0,29949	0,59897	2,07013	---
2	0,06026	0,24102	5,07013	0,59897
3	0,00602	0,03611	10,07013	3,2779
4	0,00035	0,00283	17,07013	32,446
5	0,00001	0,00014	26,07013	550,58
6	---	---	37,07013	14321,0
7	---	---	50,07013	53033 (1)
8	---	---	65,07013	26539 (3)
9	---	---	82,07013	17264 (5)
10	---	---	101,07013	14166 (7)
n	[5]	[6]	[7]	[8]
1	1,00000	-0,34682	-0,34683	-0,34683
2	2,66910	-0,11899	-0,11901	-0,11900
3	12,774	-0,01545	-0,01555	-0,01551
4	126,00	-0,00048	-0,00147	-0,00108
5	2138,1	0,01009	-0,00671	-0,00005
6	55614,0	0,26366	-0,17332	---
7	20595 (2)	9,7638	-6,4183	---
8	10306 (4)	488,61	-321,19	---
9	67041 (5)	31784,0	-20893	---
10	55010 (7)	26080 (2)	-17144 (2)	---

Tabelle 20

Ein Berechnungsbeispiel: b_1 , $\nu = 1$

n	E_n [1]	K(n) [2]	L(n) [3]	[4]
0	---	---	-0,68672	---
1	0,47682	0,95364	0,31328	---
2	0,14938	0,59751	3,31328	0,95364
3	0,01811	0,10867	8,31328	3,7572
4	0,00119	0,00949	15,31328	30,390
5	0,00005	0,00049	24,31328	461,62
6	---	0,00002	35,31328	11193,0
7	---	---	48,31328	39480 (1)
8	---	---	63,31328	19063 (3)
9	---	---	80,31328	12065 (5)
10	---	---	99,31328	96879 (6)
n	[5]	[6]	[7]	[8]
0	1,00000	1,14499	1,14498	1,14498
1	-0,34336	-0,39314	-0,39314	-0,39314
2	-0,15393	-0,31451	-0,31450	-0,31450
3	0,43086	-0,05141	-0,05136	-0,05138
4	3,8445	-0,00421	-0,00380	-0,00399
5	58,451	-0,00357	0,00266	-0,00018
6	1417,3	-0,08210	0,06896	---
7	49991,0	-2,8956	2,4336	---
8	24138 (2)	-139,81	117,506	---
9	15278 (4)	-8848,9	7437,26	---
10	12268 (6)	-710540	597193	---

Allgemeine Bemerkungen

Die vorliegende Untersuchung wurde von Herrn Prof. J. Weigle und von dem leider verstorbenen Herrn Prof. R. Wavre, beide früher in Genf, angeregt und gefördert. Der Verfasser möchte ihnen an dieser Stelle für alle guten Ratschläge, die sie ihm erteilt haben, aufs herzlichste danken. Auch die jetzigen Professoren an der Universität Genf, Herr Prof. R. Extermann und Herr Prof. G. Wannier, sind mir mit gutem Rat zur Seite gestanden.

Ebenso möchte ich Herrn Prof. M. J. O. Strutt und Herrn Prof. E. Stiefel für ihre zahlreichen und wertvollen Ratschläge und für ihre tatkräftige Unterstützung aufs beste danken.

Schliesslich bin ich Herrn Dr. G. Müller und Herrn von Willisen zu Dank verpflichtet, weil sie mir freundlicherweise bei der deutschen Bearbeitung des Textes geholfen haben.

LITERATUR-VERZEICHNIS

A . Allgemeine Grundlagen

- 1) L. Bieberbach: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Berlin 1953, Seite 21.
Singularstellen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.
- 2) L. Bieberbach: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Berlin 1953, Seite 139.
Die Form der kanonischen Lösungen.
- 3) A. Broman: Proc. Nat. Acad. Sci. 34 (1948), 505.
Conformal mapping and convergence of a power series.
- 4) G. Floquet: Ann. de l'Ecole Nouvelle Supérieure, 12 (1883), 47.
Sur les équations différentielles linéaires.
- 5) E. Goursat: Cours d'analyse mathématique, Tome II, page 433.
Equations différentielles linéaires.
- 6) J. Meixner und F.W. Schäfke: Mathieu'sche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin 1954, Seite 89.
Ueber dreigliedrige lineare Rekursionen.
- 7) N.E. Nörlund: Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924, Seite 300.
Der Satz von Poincaré.
- 8) N.E. Nörlund: Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924, Seite 438.
Auflösung homogener linearer Differenzen- und Differentialgleichungen.
- 9) O. Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1929, Seite 288.
Konvergenz der Kettenbrüchen.
- 10) E. Picard: Traité d'analyse mathématique: Tome III, page 273.
Généralités sur les points singuliers des équations différentielles linéaires.
- 11) E. Picard: Traité d'analyse mathématique: Tome III, page 419.
Realtions de récurrence à la limite.
- 12) W. Schmeidler: Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik, Berlin 1949, Seite 119.

- 13) E. T. H. Whittaker and G. N. Watson: A course of modern analysis, chap. X
page 194.
Linear Differential equation.

B. Das numerische Rechnen

- 1) L. Collatz: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1949.
- 2) L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin 1951.
Besonders ab Seite 156.
- 3) L. Collatz: Zeitschr. für angew. Math. und Physik, 3 (1952), 193.
Zur numerischen Bestimmung periodischer Lösungen bei nicht
linearen Schwingungen.
- 4) R. Hartree: Numerical analysis, Oxford 1952, page 241.
Use of the Euler-Maclaurin integration formula in the summation
of series.
- 5) N. J. Lehmann: Zeitschr. für angew. Math. und Mech. 29 (1949), 341 und 30
(1950), 1.
Beiträge zur numerischen Lösung linearer Eigenwertprobleme.

C. Die Eigenschaften der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten

- 1) L. Bieberbach: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Berlin 1953,
Seite 146.
Das Fuchs'sche Theorem.
- 2) L. Bieberbach: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Berlin 1953,
Seite 182.
Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse.
- 3) L. Bieberbach: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Berlin 1953,
Seite 289.
Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse mit vier singu-
lären Punkten.
- 4) A. Erdélyi: Higher transcendental Functions, New York, Vol. III, page 57.
Heun's equation.

- 5) L. Fuchs: Journal für Mathematik, 66 (1866), 121.
Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten.
- 6) E. Goursat: Cours d'analyse mathématique, Tome II, page 476.
Théorème de Fuchs.
- 7) G. Mittag-Leffler: Acta Mathematica, 15 (1891), 1.
Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène.
- 8) E. Picard: Traité d'analyse mathématique, Tome III, page 283.
Equations dont toutes les intégrales sont régulières au point singulier.
- 9) W. Schmeidler: Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik, Berlin 1949, Seite 137.
- 10) Ta Li: Commentarii Math. Helv. 12 (1939), 1.
Ueber die allgemeine lineare Differentialgleichung.

D. Die Eigenschaften der Differentialgleichungen mit
periodischen Koeffizienten

- 1) L. Bieberbach: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Berlin 1953, Seite 302.
Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.
- 2) E. Cambi: R.C. mat. Roma, Seria 5, 7 (1948), 103.
Sulla integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici.
- 3) R.H. Gervay: Annales Soc. Sci. Bruxelles, Serie I, 67 (1953), 69.
Sur les intégrales régulières au sens de Fuchs de certains systèmes d'équations différentielles.
- 4) E. Goursat: Cours d'analyse mathématique, Tome II, page 492.
Equations à coefficients périodiques.
- 5) J. Haag: Bulletin des Sciences Mathématiques, 70 (1946), 155.
Sur certains systèmes d'équations différentielles à coefficients périodiques.
- 6) J. Haag: Bulletin des Sciences Mathématiques, 71 (1947), 205.

Sur certains systèmes d'équations différentielles définies par des fonctions périodiques et discontinues.

- 7) J. Haag: Bulletin des Sciences Mathématiques, 72 (1948), 69.
Sur l'approximation des solutions associées d'un système différentiel à coefficients périodiques.
- 8) E. Kamke: Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Leipzig 1942, Seite 87.
Lineardifferentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.
- 9) J. Patry: C. R. Soc. Phys. Hist. Nat. 59 (1942), 118.
Le Théorème de Fuchs et les équations à coefficients périodiques.
- 10) J. Patry: C. R. Soc. Phys. Hist. Nat. 59 (1942), 122.
Une méthode numérique pour résoudre les équations à coefficients périodiques.
- 11) J. Patry: C. R. Soc. Phys. Hist. Nat. 59 (1942), 225.
Sur la résolution des équations linéaires à coefficients périodiques.

E. Die charakteristischen Werte und die Lösungen der Hill'schen Gleichung

- 1) C. Blanc: Bull. techn. Suisse romande, 74 (1948), 185 et 209.
Sur les équations différentielles linéaires à coefficients lentement variables.
- 2) L. Brillouin: Quart. Applied Math. 6 (1948), 167.
A practical method for solving Hills equation.
- 3) L. Brillouin: Quart. Applied Math. 7 (1950), 363.
The B. K. W. approximation and the Hills equation.
- 4) A. Erdélyi: Arch. für Elektrotechnik, 29 (1935), 473.
Ueber die rechnerische Ermittlung von Schwingungsvorgängen in Kreisen mit periodisch schwankenden Parametern.
- 5) M. J. O. Strutt: Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen Afd. Natuurkunde, 52 (1943), 488.
Characteristic functions of Hill problems I: Completeness of the set of periodic and almost periodic characteristic functions.

- 6) M. J. O. Strutt: *Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen Afd. Natuurkunde*, 52 (1943), 584.
Characteristic functions of Hill problems II: Expansion formulas in series of periodic and almost periodic characteristic functions.
- 7) M. J. O. Strutt: *Math. Zeitschrift*, 49 (1944), 593.
Reelle Eigenwerte verallgemeinerter Hill'scher Eigenwertaufgaben 2. Ordnung.
- 8) M. J. O. Strutt: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 62 (1946), 278.
On Hill's problem with complex parameters and a real periodic function.
- 9) E. C. Titmarsh: *Proc. Roy. Soc. London, Serie A*, 203 (1950), 501.
Eigenfunction problems with periodic potentials.

F. Die Methode der unendlichen Determinanten

- 1) H. T. Davis: *Theory of linear operators*, chap. IX, page 433.
- 2) A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions: Vol. III*, New York, 1955, page 100.
- 3) J. O. Fleckenstein: *Commentarii Math. Helv.*, 16 (1943), 367.
Ueber eine verallgemeinerte Hill'sche Determinante.
- 4) G. W. Hill: *Acta Mathematica*, 8 (1886), 1.
On the part of the motion of the lunar perigee.
- 5) H. von Koch: *Acta Mathematica*, 15 (1891), 53.
Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires.
- 6) H. von Koch: *Acta Mathematica*, 16 (1892), 217.
Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires.
- 7) G. Lemaitre et O. Godart: *Bull. Acad. royale de Belgique, cinquième série*, 24 (1938), 19.
Généralisation de la méthode de Hill.
- 8) H. Poincaré: *Bull. Soc. Math. France*, 14 (1886), 77.
Sur les déterminants infinis.
- 9) M. Riesz: *Les systèmes d'équations à une infinité d'inconnues*.

- 10) D.E. Rutherford: Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A., 62 (1947), 229 and 63 (1949), 232.
Some continuant determinants arising in physics and chemistry.

G. Das Stabilitätsproblem bei den Hill'schen Differentialgleichungen

- 1) L. Bieberbach: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Berlin 1953, Seite 310.
Stabilität und Unstabilität.
- 2) W. Haacke: Math. Zeitschrift, 56 (1952), 65 und 57 (1952), 34.
Ueber die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen.
- 3) M.J.O. Strutt: Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde, 52 (1943), 83.
Bounds for the characteristics values of Hill problems: I. Characteristics with smallest moduli.
- 4) M.J.O. Strutt: Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen, Afd. Natuurkunde, 52 (1943), 97.
Bounds for the characteristic values of Hill problems: II. Characteristic values of arbitrary order.
- 5) M.J.O. Strutt: Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen Afd. Natuurkunde, 52 (1943), 153.
Characteristic curves of Hill problems I: General shape of the curves.
- 6) M.J.O. Strutt: Nederl. Akad. Wetensch. Verslagen Afd. Natuurkunde, 52 (1943), 212.
Characteristic curves of Hill problems II: The asymptotic form of the curves.

H. Allgemeine Angaben über die Mathieu'sche Gleichung

- 1) R. Campbell: Théorie générale de l'équation de Mathieu, Paris 1955.

- 2) R. Campbell: Théorie générale de l'équation de Mathieu, Paris 1955, page 129.
Fonctions de Mathieu de seconde espèce.
- 3) J. Dörr: Zeitschr. für angew. Math. und Phys., 3 (1952), 427.
Zwei Integralgleichungen erster Art, die sich mit Hilfe Mathieu'scher Funktionen lösen lassen.
- 4) A. Erdélyi: Higher Transcendental Functions, Vol. III, New York 1955, page 97.
Mathieu functions.
- 5) S. Goldstein: Trans. Camb. Phil. Soc., 23 (1927), 303.
Mathieu functions.
- 6) S. Goldstein: Proc. Camb. Phil. Soc., 24 (1928), 223.
Second solution of Mathieu's equation.
- 7) J. Haag: C. R. Acad. Sciences Paris, 232 (1951), 661.
A propos de l'équation de Mathieu.
- 8) P. Humbert: Fonctions de Lamé et Fonctions de Mathieu, Paris 1926, page 26.
Fonctions de Mathieu.
- 9) E. L. Ince: Proc. Camb. Phil. Soc., 21 (1922), 117.
A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions.
- 10) E. Kamke: Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Leipzig 1942, Seite 404.
Mathieusche Differentialgleichungen.
- 11) G. Kotowski: Zeitschrift für angew. Math. und Mech. 23 (1943), 213.
Lösungen der inhomogenen Mathieu'schen Differentialgleichung mit periodischer Störfunktion (mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzlösungen).
- 12) N.W. Mc Lachlan: J. Math. and Phys., 25 (1946), 209.
Mathieu functions and their classification.
- 13) N.W. Mc Lachlan: Theory and Application of Mathieu functions, Oxford 1947.
- 14) N.W. Mc Lachlan: J. Math. and Phys., 26 (1947), 28.
Mathieu functions of fractional order.
- 15) J. Meixner: Math. Nachr., 5 (1951), 371.
Integralbeziehungen zwischen Mathieu'schen Funktionen.
- 16) J. Meixner und F.W. Schäfke: Mathieu'sche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin 1954, Seite 98.
Mathieu'sche Funktionen.

- 17) J. Meixner und F. W. Schäfke: Mathieu'sche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin 1954, Seite 219.
Eine spezielle inhomogene Mathieu'sche Differentialgleichung.
- 18) M. J. O. Strutt: Lamé'sche, Mathieu'sche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Berlin 1932, Seite 23.
Mathieu'sche Differentialgleichung.
- 19) R. Wavre: C.R. Soc. Phys. Hist. Nat., 62 (1945), 54.
Sur l'équation de Mathieu.
- 20) E. T. Whittaker and G. N. Watson: A Course of modern Analysis, chap. IXX, page 404.
Mathieu functions.

I. Besondere Lösungsmethoden für die Mathieu'sche Gleichung

- 1) W. G. Bickley: Math. Tables and other aid to Computation, 1 (1945), 409.
The Tabulation of Mathieu functions.
- 2) W. G. Bickley and N. W. Mc Lachlan: Math. Tables and other aid to Computation, 2 (1946), 1.
Mathieu functions of integral order and their tabulation.
- 3) R. Campbell: Théorie générale de l'équation de Mathieu, Paris 1955, page 34.
Compléments: La méthode de Mathieu.
- 4) A. Erdélyi: Higher Transcendental Funktionen, Vol. III, New York 1955, page 125,
Approximations and asymptotic forms.
- 5) J. Dougall: Proc. Edinburgh Math. Soc., 41 (1923), 26.
On the solution of Mathieu's differential equation and their asymptotic expansions.
- 6) H. Jeffreys: Proc. London Math. Soc. 23 (1924), 437.
On certain approximate solution of Mathieu equation.
- 7) W. Marschall: Proc. Edinburgh Math. Soc. 40 (1921), 2.
Determination of the arbitrary constants.
- 8) J. Meixner: Zeitsch. für angew. Math. und Mech., 28 (1948), 304.
Asymptotische Entwicklung der Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichungen der Sphäroid-Funktionen und der Mathieu'schen Funktionen.

- 9) H. Neusinger: *Akustische Zeitschrift*, 5 (1940), 11.
Experimentelle Untersuchung eines quasiharmonischen Schwin-
gers.
- 10) F.W. Schäfke: *Math. Nachr.* 4 (1951), 175.
Ueber die Stabilitätskarte der Mathieu'schen Differentialglei-
chung.
- 11) R. Sips: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 66 (1949), 93.
Représentation asymptotique des fonctions de Mathieu et des
fonctions d'ondes sphéroïdales.
- 12) J.A. Stratton, P.M. Morse, L.J. Chu and R.A. Hutner: *Elliptic cylinder and
spheroidal wave functions*, New York 1941.
- 13) M.J.O. Strutt: *Math. Annalen*, 101 (1929), 539.
Der charakteristische Exponent der Hill'schen Differentialglei-
chung.
- 14) D.H. Wettstein: *Philosophical Magazine*, A (7), 20 (1935), 288.
Characteristic values of the Mathieu equation.
- 15) E.T. Whittaker: *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 32 (1913), 75.
On a general solution of Mathieu's equation.

K. Die numerische Lösungsmethode für die Mathieu'sche
Gleichung

- 1) G. Blanch: *J. Math. and Phys. of the MIT*, 25 (1946), 1.
On the computation of Mathieu functions.
- 2) C.J. Bouwkamp: *Theoretische en numeericke Behandeling van de buiging door
en ronde opening*, Groningen 1941, Seite 32.
Methode van successive approximatie der eigenwaarden voor
willkeurige waarden van K.
- 3) C.J. Bouwkamp: *J. Math. and Phys. of the MIT*, 26 (1947), 79.
On spheroidal wave functions of order zero.
- 4) R. Campbell: *Théorie générale de l'équation de Mathieu*, Paris 1955, page 15.
Méthode de Ince.
- 5) A. Erdélyi: *Higher Transcendental Functions*, Vol. III, New York 1955, page 101.

- 6) R. Extermann: *Helv. Phys. Acta* 10 (1937), 185.
Théorie de la diffraction de la lumière par les ultrasons (Besonders Seite 207).
- 7) E. L. Ince: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 46 (1926), 20 and 316, and 47 (1927), 294.
Researches into the characteristics numbers of the Mathieu functions.
- 8) E. L. Ince: *Philosophical Magazine*, A (7), 6 (1928), 547.
Mathieu functions of stable type.
- 9) E. L. Ince: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 52 (1932), 355.
Tables of the elliptic-cylinder functions.
- 10) N. W. Mc Lachlan: *Philosophical Magazine*, A (7), 36 (1945), 403.
Computation of the solution of Mathieu equation.
- 11) N. W. Mc Lachlan: *J. Math. and Phys.* 26 (1947), 29.
Mathieu functions of fractional order.
- 12) E. G. C. Poole: *Proc. London Math. Soc.* 20 (1921), 374.
On certain class of Mathieu functions.
- 13) F. und W. Stäblein: *Archiv für E Elektrotechnik*, 18 (1927), 175.
Stationäre erzwungene Schwingungen in Schwingungskreisen mit periodischen Koeffizienten.

L. Die inverse Mathieu'sche Gleichung

- 1) E. Cambi: *Proc. I.R.E.* 36 (1948), 42.
Trigonometric components of a FM wave.
- 2) E. Cambi: *R.C. mat. Roma*, 7 (1948), 103.
Sulla integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici.
- 3) E. Cambi: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 63 (1950), 27.
The simplest form of second order linear differential equation with periodic coefficient having finite singularities.
- 4) N. W. Mc Lachlan: *J. applied Phys.* 18 (1947), 723.
Computation of the solution of $(1 + 2 \epsilon \cos 2z)y'' + \theta y = 0$.

M. Die Lamé'sche Gleichung

- 1) R. Campbell: C.R. Acad. Sci. Paris, 234 (1952), 2515 et 235 (1952), 8.
Nouvelles équations intégrales pour les fonctions de Lamé.
- 2) R. Campbell: Théorie générale de l'équation de Mathieu, Paris 1955.
- 3) A. Erdélyi: Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 62 (1946), 247.
Expansions of Lamé Funktionen into series of Legendre Functions.
- 4) A. Erdélyi: Higher transcendental functions, Vol. III, New York 1955, page 44.
Lamé Functions.
- 5) P. Humbert: Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu, Paris 1926, page 3.
Equation et fonctions de Lamé.
- 6) E.L. Ince: Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 60 (1940), 47.
The periodic Lamé function.
- 7) E.L. Ince: Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 60 (1940), 83.
Further investigations into the periodic Lamé function.
- 8) M.J.O. Strutt: Lamé'sche, Mathieu'sche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Berlin 1932, Seite 51.
Lamé'sche Differentialgleichung.

N. Die Sphäroidfunktionen

- 1) C.J. Bouwkamp: J. Math. Phys. 26 (1947), 79.
On spheroidal wave functions of order zero.
- 2) C.J. Bouwkamp: Phil. Res. Rep. 5 (1950), 87.
On the characteristic value of spheroidal wave functions.
- 3) R. Campbell: C. R. Acad. Sci. Paris, 222 (1946), 269.
Sur une généralisation des fonctions de Mathieu normées.
- 4) R. Campbell: C. R. Acad. Sci. Paris, 222 (1946), 1069.
Recherche d'équations intégrales et de la valeur asymptotique des fonctions de Mathieu associées.
- 5) R. Campbell: C. R. Acad. Sci. Paris, 223 (1946), 123.
Sur les solutions de période $2s\pi$ de l'équation de Mathieu associée.

- 6) R. Campbell: C. R. Acad. Sci. Paris, 224 (1947), 1322.
Sur une forme des fonctions de Mathieu associées de période $2s\pi$.
- 7) R. Campbell: C. R. Acad. Sci. Paris, 225 (1947), 371.
Comportement asymptotique des fonctions de Mathieu associées pour des paramètres infiniment grands.
- 8) R. Campbell: C. R. Acad. Sci. Paris, 226 (1948), 300.
Sur les développements en séries de Bessel des fonctions de Mathieu associées de période $2s\pi$.
- 9) R. Campbell: C. R. Acad. Sci. Paris, 226 (1948), 2114.
Sur une catégorie remarquable de solutions de l'équation de Mathieu associées.
- 10) R. Campbell: Bull. Soc. Math. France, 77 (1949), 1.
Sur une expression remarquable des solutions de période $2s\pi$ de l'équation de Mathieu associée.
- 11) R. Campbell: Bull. Soc. Math. France, 78 (1950), 185.
Contribution à l'étude des solutions de l'équation de Mathieu associée.
- 12) R. Campbell: Bull. Soc. Math. France, 78 (1950), 219.
Equations intégrales des fonctions de Mathieu associées et applications.
- 13) R. Campbell: C. R. Acad. Sci. Paris, 234 (1952), 695.
Sur un cas de confluence des fonctions de Mathieu associées.
- 14) R. Campbell: Théorie générale de l'équation de Mathieu, Paris 1955.
- 15) A. Erdélyi: Higher transcendental Functions, Vol. III, New York 1955, page 134.
Spheroidal wave functions.
- 16) A. Leitner and R.D. Spence: J. Franklin Inst. 249 (1950), 299.
The oblate spheroidal wave functions.
- 17) J. Meixner: Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 27 (1947), 137.
Neuere Ergebnisse über Sphäroid-Funktionen.
- 18) J. Meixner: Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 28 (1948), 304.
Asymptotische Entwicklung der Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichungen der Sphäroid-Funktionen und der Mathieu'schen Funktionen.

- 19) J. Meixner: Arch. Math., 1 (1948), 432.
Reihenentwicklung von Sieger'schen Typus für die Sphäroid-Funktionen.
- 20) J. Meixner: Math. Nachr. 5 (1951), 1.
Klassifikation, Bezeichnung und Eigenschaften der Sphäroid-Funktionen.
- 21) J. Meixner und F.W. Schäfke: Mathieu'sche Funktionen und Sphäroid-Funktionen, Berlin 1954, Seite 221.
Sphäroidfunktionen.
- 22) R. Sips: Trans. Amer. Math. Soc., 66 (1949), 93.
Représentation asymptotique des fonctions de Mathieu et des fonctions d'onde sphéroïdales.
- 23) J.A. Stratton, P.M. Morse, L.J. Chu and R.A. Hutner: Elliptic cylinder and spheroidal wave functions, New York 1941.

P. Ueber andere Differentialgleichungen mit periodischen
Koeffizienten

- 1) H. Buchholz: Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 30 (1950), 133.
Die asymptotischen Entwicklungen für die beiden parabolischen Funktionen $M_{x, \mu/2}(z)$ und $W_{x, \mu/2}(z)$ bei grossen Werten von x und z für $-\infty < z/4x < +\infty$.
- 2) H. Buchholz: Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 30 (1950), 287.
Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen des Drehparabols.
- 3) R. Campbell: C.R. Acad. Sciences Paris, 228 (1949), 970.
Sur la vibration d'un haut-parleur elliptique.
- 4) R. Campbell: Bull. Sci. Math. (2), 74 (1950), 145.
Sur quelques équations de la physique mathématique.
- 5) R. Campbell: Théorie générale de l'équation de Mathieu, Paris 1955.
- 6) K. Emden: Zeitschr. für angew. Math. und Phys., 2 (1951), 289.
Eine Lösung für $\int \exp [b(x + a \cos x)] dx$.
- 7) P. Henrici: Zeitschr. für angew. Math. und Phys., 3 (1952), 466.
Weitere Bemerkungen zu $\int \exp [b(x + a \cos x)] dx$.

- 8) G. Horway: *Quart. Appl. Math.*, 4 (1947), 385.
Unstable solution of a class of Hill differential equations.
- 9) E. L. Ince: *Proc. London, Math. Soc.*, 23 (1940), 56.
Linear differential equation with periodic coefficients.
- 10) K. Klotter und G. Kotowski: *Zeitschr. für angew. Math. und Mech.* 23 (1943), 149.
Ueber die Stabilität der Lösungen Hill'scher Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Parametern. I Ueber die Gleichung $y'' + (\lambda + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x)y = 0$.
- 11) N. E. Nörlind: *C. R. Acad. Sciences Paris*, 237 (1953), 1371.
Sur les fonctions hypergéométriques.
- 12) E. Pinney: *J. Math. and Phys.*, 25 (1946), 49.
Laguerre functions in the mathematical foundations of the electromagnetic theory of the paraboloidal reflector.
- 13) E. Pinney: *J. Math. and Phys.*, 26 (1947), 42.
Electromagnetic fields in a paraboloidal reflector.
- 14) H. Rutishauser: *Zeitschr. für angew. Math. und Phys.*, 2 (1951), 292.
Bemerkungen zur Arbeit von K. Emden: Eine Lösung für $\int \exp [b(x + a \cos x)] dx$.
- 15) M. J. O. Strutt: *Lamé'sche, Mathieu'sche und verwandte Funktionen in Physik und Technik*, Michigan 1944.
- 16) E. T. Whittaker: *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 33 (1914), 22.
On a class of differential equations whose solution satisfy integral equations.

Q. Die Stabilität von nicht linearen Systemen

- 1) Ch. Blanc: *Bull. techn. Suisse romande*, 74 (1948), 185 et 209.
Sur les équations différentielles linéaires à coefficients lentement variables.
- 2) H. Cohen: *Quart. Applied Math.* 10 (1952), 266.
The stability equation with periodic coefficients.
- 3) N. W. Mc Lachlan: *Math. Gaz.*, 35 (1951), 105.
Application of Mathieu's equation to stability of non linear oscillator.

- 4) A. Liapounoff: Annales of Math. Studies Nr. 17, Princeton 1947.
Problème général de la stabilité du mouvement.
- 5) W. Taeger: Archiv für Elektrotechnik, 32 (1938), 233.
Stromkreise mit eisenhaltiger Induktivität.
- 6) W. Taeger: Archiv für Elektrotechnik, 35 (1941), 193.
Die Entdämpfung von Schwingkreisen durch Eisendrosseln.
- 7) H. Winter-Günter: Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie, 34 (1929), 41.
Ueber die selbsterregten Schwingungen in Kreisen mit Eisenkernspulen.
- 8) V.A. Yakubovic: Siehe Math. Rev., 13 (1952) 237.
Criteria of stability for systems of two canonical equations with periodic coefficients.

R. Anwendungen auf die elektrische Schwingungslehre

- 1) A. Erdélyi: Annalen der Physik, 23 (1935), 21.
Ueber Schwingungskreise mit langsam pulsierender Dämpfung.
- 2) A. Erdélyi: Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, 46 (1935), 73.
Ueber die freien Schwingungen in Schwingungskreisen mit periodisch veränderlicher Selbstinduktivität.
- 3) B.R. Gloor: Studien über einkreisige Schwingungssysteme mit zeitlichen veränderlichen Elementen, zur Theorie und Anwendung des Pendelrückkopplungsempfängers, Zürich 1955.
- 4) W. Haacke: Arch. für elektr. Uebertragung, 6 (1952), 114.
Ueber die freien Schwingungen in n-fachen Netzwerken mit pulsierenden Parametern.
- 5) W. Haacke: Arch. für elektr. Uebertragung, 6 (1952), 515.
Ein Stabilitätskriterium für Schwingungen in n-fachen Netzen mit pulsierenden Parametern.
- 6) C.L. Kober: Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, 46 (1935), 23.
Zur Theorie der nicht linearen Verzerrungen und Kippschwingungen.

- 7) C.L. Kober: Archiv für Elektrotechnik, 32 (1938), 581.
Die Selbsterregung von Schwingungen. Mathematische Theorie der Rückkopplung und der Mitnahme von Schwingungskreisen.
- 8) N. Minorsky: J. Franklin Institut, 240 (1945), 25.
On parametric excitation.
- 9) H. Winter-Günter: Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie, 37 (1931), 172.
Selbsterregungen von Systemen mit periodischen veränderlichen Induktivitäten.
- 10) H. Ziegler: Archiv für Elektrotechnik, 32 (1938), 405.
Stromkreise mit zeitlich veränderlicher Kapazität.

S. Anwendungen auf die Theorie der Frequenz-Modulation

- 1) W.L. Barrow: Proc. of the IRE, 21 (1933), 1181.
Frequency modulation and the effects of a periodic capacity variation in a nondissipative oscillator circuit.
- 2) J.G. Brainerd: Proc. of the IRE, 28 (1940), 136.
Note on Modulation.
- 3) J.G. Brainerd: J. Franklin Instiut, 233 (1942), 135.
Stability of oscillations in systems obeying Mathieu's equation.
- 4) E. Cambi: Proc. of the IRE, 36 (1948), 42.
Trigonometric components of a FM wave.
- 5) A. Erdélyi: Annalen der Physik, 19 (1934), 585.
Ueber die freien Schwingungen in Kondensatorkreisen mit periodisch veränderlicher Kapazität.
- 6) N.W. Mc Lachlan: J. applied Physics, 18 (1947), 723.
Computation of the solution of $(1+2 \epsilon \cos x) y'' + \nu y = 0$.

T. Verschiedene Anwendungen in der Elektrotechnik

- 1) F. Abelès: Recherches sur la propagation des ondes électromagnétiques sinus-soidales dans les milieux stratifiés, Paris 1950.

- 2) H. Baumgartner, C.R. Extermann, P.C. Gugelot, P. Preiswerk et P. Scherrer, *Helv. Phys. Acta*, 15 (1942), 330.
Stabilisation du champs magnétique du cyclotron.
- 3) U.T. Bödewadt: *Zeitschr. für angew. Math. und Mech.*, 19 (1939), 146.
Elektrische Schwingungen im Falle eines periodisch veränderlichen ohmschen Widerstandes.
- 4) R. Campbell: *C. R. Acad. Sciences Paris*, 228 (1949), 970.
Sur la vibration d'un haut-parleur ellyptique.
- 5) W. Glaser: *Grundlagen der Elektronenoptik*, Wien 1952, Seite 142.
Einige allgemeine Eigenschaften der achsennahen Elektronenbahnen im überlagerten elektrisch-magnetischen Feld.
- 6) W. Glaser: *Grundlagen der Elektronenoptik*, Wien 1952, Seite 186.
Strenge Berechnung der Elektronenbahnen im einfachen Glockenfeld.
- 7) W. Glaser: *Grundlagen der Elektronenoptik*, Wien 1952, Seite 212.
Integration durch Teilstücke.
- 8) H. Rosenhamer: *Archiv für Elektrotechnik*, 18 (1927), 375.
Ueber die Erregung eines Schwingungskreises durch einen asynchronen Einphasengenerator.
- 9) A. Septier: *Annales de Radioélectricité*, 9 (1954), 374.
Quelques types d'objectifs électrostatiques à fort grossissement.
- 10) F. und W. Stäblein: *Archiv für Elektrotechnik*, 18 (1927), 175.
Stationäre erzwungene Schwingungen in Schwingungskreisen mit periodischen Koeffizienten.
- 11) V.K. Zworykin and G.A. Morton: *Television, the electronics of image transmission*, New York und London 1946, page 106.
Solution of the ray equation.

U. Verschiedene Anwendungen

- 1) C.J. Bouwkamp: *Theoretische en numeericke Behandeling van de Buiging door een ronde opening*, Groningen 1941.
- 2) B.L. Crawford: *Journal of Chem. Physics*, 8 (1940), 273.
The partition functions and energy levels of molecules with internal torsional motions.

- 3) J. Dörr: Zeitschr. für angew. Math. und Phys., 3 (1952), 427.
Zwei Integralgleichungen erster Art, die sich mit Hilfe Mathieu'scher Funktionen lösen lassen.
- 4) C.R. Extermann: Helv. Phys. Acta, 10 (1937), 185.
Théorie de la diffraction de la lumière par les ultrasons.
- 5) E. Meissner: Schw. Bauzeitung, 72 (1918), 95.
Ueber Schüttelschwingungen in Systemen mit periodischer veränderlicher Elastizität.
- 6) J. Meixner und F.W. Schäfke: Mathieu'sche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin 1954, Seite 324.
Anwendungen der Mathieu'schen Funktionen und der Sphäroidfunktionen.
- 7) J. Meixner und F.W. Schäfke: Mathieu'sche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin 1954, Seite 331.
Die schwingende unrunde Welle.
- 8) K. Klotter und G. Kotowsky: Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 19 (1939), 289.
Ueber die Stabilität der Bewegungen des Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt.
- 9) H.H. Nielsen: Physical Review, 40 (1932), 445.
The torsion oscillator rotator in the quantum mechanics.
- 10) J. Patry: Helv. Phys. Acta, 11 (1938), 189.
Sur la théorie du réseau optique.
- 11) K.S. Pitzer: Journal of Chem. Physics, 5 (1937), 469.
Thermodynamic functions for molecules having restricted internal rotations.
- 12) R. de Vogelaere: Canadian Journal of Math., 2 (1950), 440.
Equation de Hill et problème de Störmer.
- 13) G. Wannier et C.R. Extermann: Helv. Phys. Acta, 9 (1936), 520.
Théorie de la diffraction de la lumière par les ultrasons.
- 14) J. Weigle: Helv. Phys. Acta, 11 (1938), 159.
Théorie de la propagation de la lumière dans un milieu atomiquement stratifié.
- 15) J. Weigle et J. Patry: Helv. Phys. Acta, 11 (1938), 181.
Théorie de la propagation de la lumière dans un milieu atomiquement stratifié II.

Lebenslauf

In Genf am 10. Februar 1916 geboren, habe ich die Primarschule und das Gymnasium in dieser Stadt besucht (klassische Matura mit Griechisch und Latein am "Collège de Genève" 1934).

An der Genfer Universität habe ich Physik (Licence 1937 und Dokortitel 1940) sowie Mathematik (Licence 1936) studiert.

Von 1936 bis 1939 war ich Assistent für die praktischen Uebungen der Experimentalphysik (Direktor: Prof. J. Weigle) und während des Jahres 1938-1939 Assistent für theoretische Physik (Prof: E. C. G. Stueckelberg). Während des gleichen Jahres habe ich meine Dissertation: "Théorie classique des forces d'échange" unter der Leitung von Herrn Prof. Stueckelberg vorbereitet.

Nach einer langen Dienstperiode bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter beim Institut für Aerodynamik (Direktor: Prof. Ackeret) in den Dienst der Eidgenössischen Technischen Hochschule eingetreten. Während zwei Jahren habe ich mich mit theoretischen Untersuchungen auf dem Gebiet der Aerodynamik beschäftigt.

Seit 1. April 1943 bin ich Angestellter der Albiswerk Zürich A. -G., Fabrik für Fernmeldeanlagen, für welche ich auch theoretische Untersuchungen durchführen musste.