

Bruchwiderstand von Kastenträgern aus Stahlbeton unter Torsion, Biegung und Querkraft

Working Paper

Author(s):

Lüchinger, Paul

Publication date:

1977

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000111712>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

Originally published in:

Bericht / Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich 69

**Bruchwiderstand von Kastenträgern
aus Stahlbeton unter Torsion, Biegung
und Querkraft**

Paul Lüchinger

Mai 1977
Bericht Nr. 69

**Bruchwiderstand von Kastenträgern aus Stahlbeton
unter Torsion, Biegung und Querkraft**

von

Dr. sc. techn. Paul Lüchinger

**Institut für Baustatik und Konstruktion
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich**

**Zürich
Mai 1977**

Vorwort

Ueblicherweise wird bei der Torsion von Kastenträgern aus Stahl oder aus Stahlbeton sowohl im elastischen wie im plastischen Bereich nur die sogenannte Umlauftorsion (konstanter Schubfluss) beachtet. In der vorliegenden Arbeit, welche als Dissertation ausgearbeitet wurde, untersucht Herr Lüchinger den Einfluss der Wölb torsion (veränderlicher Schubfluss) auf den Bruchwiderstand von Stahlbeton-Kastenträgern. Neben rein theoretischem Interesse hat der Fall auch praktische Bedeutung bei solchen Querschnitten etwa, die eine schwach ausgebildete Wand aufweisen. In einem zweiten Teil wird der Bruchwiderstand unter den kombinierten Schnittkräften Torsion, Biegung und Querkraft hergeleitet.

Mit dieser Arbeit hat das Forschungsprojekt "Stahlbetonträger unter Torsion, Biegung und Querkraft" seinen Abschluss gefunden. Neben einer Reihe von Versuchsberichten und Veröffentlichungen, sind aus ihm auch drei Doktor-Dissertationen hervorgegangen. Die Ergebnisse haben in den schweizerischen Normen (SIA 162, Richtlinie 34) wie auch im Model Code des CEB (1976) ihren Niederschlag gefunden. Mit Genugtuung dürfen wir damit feststellen, dass das Forschungsprojekt neben wissenschaftlichen Erkenntnissen auch unmittelbar praktische Resultate geliefert hat.

Zürich, März 1977

Prof. Dr. B. Thürlimann

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. EINLEITUNG	1
1.1 Zielsetzung	1
1.2 Problemstellung	1
1.3 Grundlegende Annahmen	2
1.4 Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie	4
2. SPANNUNGSANSATZ AM STABELEMEN	7
2.1 Aeussere Lasten und Schnittkräfte	7
2.2 Gleichgewichtsbeziehungen	9
3. VERFORMUNGSANSATZ AM STABELEMEN	15
3.1 Verformungsparameter	15
3.2 Verträglichkeitsbeziehungen	16
4. TRAGLAST VON TRAEGERN MIT IDEALISIERTEM FLIESSGESETZ	22
4.1 Träger und Fliessgesetz	22
4.2 Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen	25
4.3 Verträglichkeits- und Leistungsbedingungen	30
4.4 Lösung für zentrische Einzellast	34
4.5 Lösung für reine Torsion	39
4.6 Interaktion Torsion - Querkraft	43
4.7 Profilverformung und Krafteinleitung	44
5. SCHUBWANDELEMENT AUS STAHLBETON	48
5.1 Bruchmodell	48
5.2 Umlagerung der Diagonalenneigung	49
5.3 Gleichgewichtsbeziehungen, Plastizitätsbedingungen	52
5.4 Verträglichkeitsbedingungen, Berechnung der Leistung	54
5.5 Lösung mit dem statischen Grenzwertsatz	56
5.6 Lösung mit dem kinematischen Grenzwertsatz	60
5.7 Grenzen der Anwendbarkeit des Fachwerkmodelles	63
6. BEDINGUNGEN BEI STAHLBETONTRAEGERN IM BRUCHZUSTAND	65
6.1 Querschnitt und Bruchmodell	65
6.2 Statische Methode	66
6.3 Kinematische Methode	71
6.4 Mögliche Lösungswege	76
6.5 Unterteilung der Optimierungsaufgabe	77

	Seite
7. BRUCHWIDERSTAND VON STAHLBETONTRAEGERN MIT TRAPEZQUERSCHNITT	80
7.1 Einfluss der Wölb torsion	80
7.2 Interaktion Torsion - Biegung - Querkraft am einfach symmetrischen Trapezquerschnitt	85
7.3 Bemessung	94
ZUSAMMENFASSUNG	96
RESUME	98
SUMMARY	100
LITERATURVERZEICHNIS	102
BEZEICHNUNGEN	104

1. EINLEITUNG

1.1 Zielsetzung

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, das Tragverhalten von Kastenträgern aus Stahlbeton unter Torsion, Biegung und Querkraft theoretisch abzuklären. Insbesondere soll der Bruchwiderstand solcher Träger analytisch mit Hilfe eines physikalischen Modelles und unter Anwendung der Plastizitätstheorie bestimmt werden. Die Schnittkraftkombinationen, die im Bruchzustand zulässig sind, sollen in einer Interaktionsfigur dargestellt werden.

Die Arbeit stellt somit eine Fortsetzung von [1] dar. Dort wurde der Bruchwiderstand unter der Lastkombination Torsion und Biegung ermittelt. Die Arbeit steht auch in Verbindung zu [2]. Jene Arbeit behandelt das Tragverhalten bei kombinierter Beanspruchung von Trägern mit offenem Querschnitt.

1.2 Problemstellung

Wird ein Kastenträger auf Torsion und Querkraft beansprucht, so zeigt sich, dass durch die Gleichgewichtsbedingungen allein die Spannungsverteilung im Querschnitt nicht bestimmt ist. Im speziellen setzt sich das Torsionsmoment aus einem Anteil infolge eines über den Umfang konstanten Schubflusses und einem Anteil infolge eines veränderlichen Schubflusses zusammen. Das Torsionsmoment aus dem konstanten Schubfluss (Bredt'scher Schubfluss) wird im folgenden Umlauftorsion genannt. Das Torsionsmoment als Resultierende des veränderlichen Schubflusses wird in der Literatur allgemein mit Wölb-torsion bezeichnet.

Im Hinblick auf eine einfache Darstellung drängt sich eine Unterteilung der Aufgabe auf. In einem ersten Schritt wird der Einfluss der Wölb-torsion auf das Tragverhalten untersucht. Das allgemeine Verhalten im Bruchzustand unter Berücksichtigung der Wölb-torsion lässt sich schon an einem Träger mit vereinfachten Fließbedingungen aufzeigen. Das Verhalten von Stahlbeton-trägern im besonderen wird mit einem Fachwerkmodell beschrieben. Damit können mengenmässige Schlüsse über die Aufteilung in Umlauftorsion und Wölb-torsion gezogen werden. Sobald die Aufteilung bekannt ist, kann auch der Querschnittswiderstand gegenüber Torsion, Biegung und Querkraft bestimmt werden.

1.3 Grundlegende Annahmen

Bild 1.1 zeigt die geometrischen Bezeichnungen des zu untersuchenden Trägers. Der zylindrische Träger hat zumindest stückweise konstanten Querschnitt. Das kartesische Koordinatensystem ist rechtsdrehend und die positive x-Axe zeigt

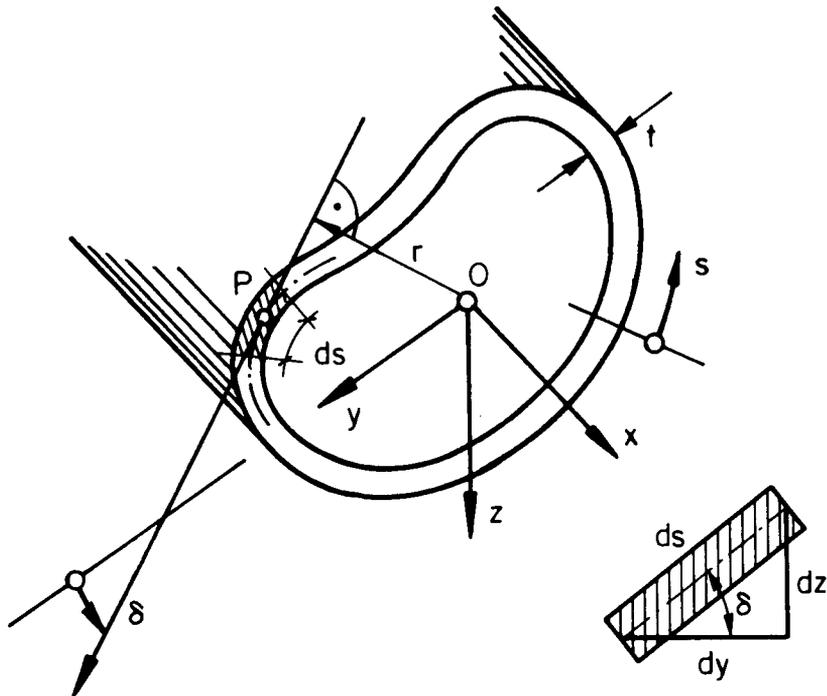


Bild 1.1 : Geometrische Bezeichnungen

in Balkenlängsrichtung. Mit s wird die Umlaufkoordinate des Querschnittes und mit t dessen Wandstärke bezeichnet. Der Abstand r wird positiv definiert, wenn der Bezugspunkt O links der Tangente liegt. Die Richtung der Tangente wird mit dem Winkel δ zwischen der positiven y -Achse und der Tangente festgehalten. Daraus ergeben sich die folgenden geometrischen Beziehungen:

$$\frac{dy}{ds} = \cos\delta \quad ; \quad \frac{dz}{ds} = \sin\delta \quad (1.1)$$

Das Umlaufintegral über den ganzen Umfang muss bei geschlossenem Querschnitt verschwinden:

$$\oint \cos\delta \cdot ds = \oint \sin\delta \cdot ds = 0 \quad (1.2)$$

Im Interesse einer einfachen Darstellung der Tragwirkung der zu untersuchenden Bauwerke müssen Voraussetzungen getroffen werden, die oft überhaupt erst

eine übersichtliche rechnerische Behandlung erlauben.

Ein Kastenträger ist ein Schalentragwerk. Es ist aber üblich, dass Tragwerke für die rechnerische Erfassung als Stab idealisiert werden, wenn die Querabmessungen im Vergleich zur Länge klein sind. Bei einem solchen Stabtragwerk werden die statischen und kinematischen Eigenschaften auf die Stabaxe bezogen. Die über den Querschnitt verteilten Spannungen werden zu Schnittkräften zusammengefasst, und die lokalen Verformungen werden mit integralen für den Gesamtquerschnitt gültigen Verformungsgrößen beschrieben. Die Idealisierung als Stab hat zur Folge, dass die Querbeanspruchung nicht erfasst wird. Die Darstellung als Stab enthält aber auch implizit die Annahme, dass die Querschnittsform unter Last erhalten bleibt. Natürlich verlangt die Annahme der Querschnittserhaltung eine entsprechende konstruktive Ausbildung des Querschnittes. Bei örtlicher Einleitung der Kräfte ist im Extremfall der Einbau von Querschotten vorzusehen.

Die Arbeit beschränkt sich auf dünnwandige Stäbe. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass die Schalendicke klein ist im Vergleich zur Querschnittsabmessung. Die Beschränkung auf dünnwandige Querschnitte bedeutet, dass nur die Membranspannungen (Bild 1.2(a)) in Betracht gezogen werden. Diese Spannungen sind über die Wanddicke konstant. Die Biegespannungen (Bild 1.2(b)) werden vernachlässigt. Insbesondere wird die aus der Drillung der Wandelemente resultierende Schubspannung ausser acht gelassen. Es sei hier festgehalten, dass diese Vereinfachung genau der allgemein üblichen Annahme entspricht, wenn bei dünnwandigen offenen Profilen die St. Venant'sche Torsion vernachlässigt wird.

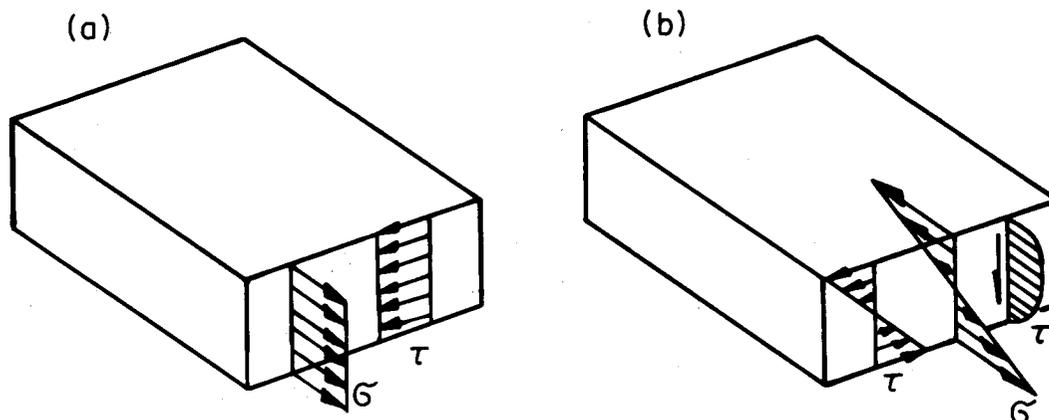


Bild 1.2 : (a) Membranspannungen ; (b) Biegespannungen

Im weiteren wird angenommen, dass die Verformungen unter Belastung klein sind oder, mit anderen Worten, dass mit genügender Genauigkeit die äusseren Lasten am unverformt gedachten Tragsystem wirkend angenommen werden dürfen (Theorie 1. Ordnung).

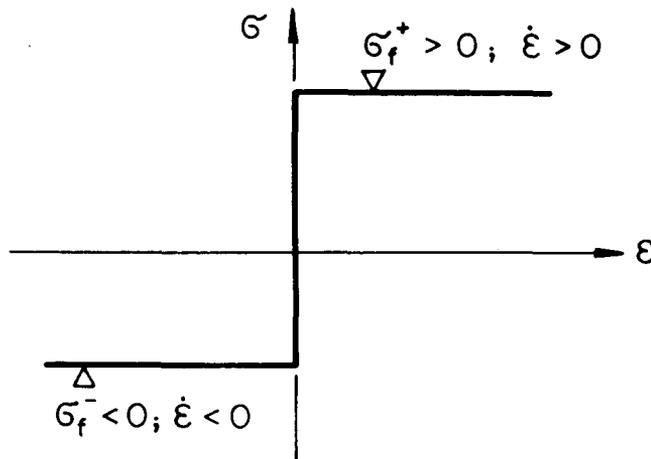


Bild 1.3: Starrplastisches Material: Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Zuletzt wird vorausgesetzt, dass das Material weitgehend plastisch verformbar ist. Unter dieser Bedingung sind Kräfteumlagerungen innerhalb des Tragwerkes möglich. Zudem werden die elastischen Verformungen vernachlässigt, weil diese gegenüber den plastischen Verformungen klein sind. Das idealisierte Material verhält sich starr-plastisch (Bild 1.3).

1.4 Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie

In dieser Arbeit soll das Tragverhalten im Bruchzustand von Stäben unter kombinierter Beanspruchung untersucht werden. Vornehmlich soll die Bruchlast solcher Stabtragwerke bestimmt werden. Dazu eignen sich aber die Methoden der Plastizitätstheorie, insbesondere die zwei fundamentalen Sätze: der statische und der kinematische Grenzwertsatz. Sie erlauben, die Bruchlast von zwei Seiten her einzugabeln. Zur Erinnerung seien hier diese beiden Grenzwertsätze wiederholt (vgl. z.B. [3], [4]):

Statischer Grenzwertsatz:

Jede Last, für welche ein stabiler, statisch zulässiger Spannungszustand angegeben werden kann, stellt eine untere Grenze der Traglast eines starr-plastischen Tragwerkes dar.

Kinematischer Grenzwertsatz:

Jede Last, für welche ein instabiler, kinematisch zulässiger Bewegungszustand (Mechanismus) angegeben werden kann, stellt eine obere Grenze der Traglast eines starr-plastischen Tragwerkes dar.

Ein Spannungszustand wird als statisch zulässig bezeichnet, wenn er mit den äusseren Lasten im Gleichgewicht steht. Ein solcher Spannungszustand ist stabil, wenn im gesamten Tragwerk die Spannungen unterhalb der Fliess- bzw. Bruchgrenze bleiben.

Ein Bewegungszustand wird kinematisch zulässig genannt, wenn er den Verträglichkeitsbedingungen genügt, die dem Tragwerk auferlegt sind. Er ist instabil, wenn die Leistung der äusseren Lasten grösser ausfällt als die gesamte Dissipationsleistung im Tragwerk.

Als Dissipationsleistung wird diejenige Leistung bezeichnet, die infolge der plastischen Verformung dem Tragwerk entzogen wird (z.B. in Form von Wärme). Da bei starr-plastischem Materialverhalten nur plastische Verformungen auftreten, ist die Dissipationsleistung L_d aber gleich der negativen Leistung der inneren Kräfte L_i :

$$L_d = -L_i \quad (1.3)$$

Mathematisch wird die Dissipationsleistung als skalares Produkt der Spannungen und der Verformungsgeschwindigkeiten formuliert. Schon aus dem einfachen Beispiel in Bild 1.3 kann herausgelesen werden, dass die Dissipationsleistung eine nichtnegative Grösse ist.

Obige Grenzwertsätze machen Aussagen über die Traglast von Tragwerken aus starr-plastischem Material. Starr-plastisches Materialverhalten gemäss Bild 1.3 stellt in jedem Fall eine Idealisierung des wirklichen Sachverhaltes dar. Die Traglast starr-plastischer Tragwerke stimmt dann mit der Traglast elastisch-plastischer Tragwerke überein, wenn die Gleichgewichtsbedingungen am unverformt gedachten Tragwerk formuliert werden dürfen. Diese Annahme wurde aber in Abschnitt 1.3 als gültig vorausgesetzt.

Weiterhin beziehen sich die beiden Grenzwertsätze in obiger Formulierung auf allgemeine Tragwerke. Die Grenzwertsätze finden aber auch Anwendung bei der Behandlung von Stabtragwerken, wie die folgende Ueberlegung zeigt: Stabtragwerke sind räumliche Gebilde. Versagen tritt in Wirklichkeit immer über eine bestimmte Länge auf. Querschnittsmechanismen sind räumliche Mechanis-

men. Entsprechend sind die statischen und kinematischen Bedingungen für die einzelnen Elemente des räumlichen Tragwerkes zu formulieren. Die Angabe eines Querschnittswiderstandes ist aber möglich, wenn es gelingt, die Fließbedingungen der einzelnen Elemente in Fließbedingungen für die Schnittkräfte umzuformen.

Sind die Querschnittswiderstände bekannt, dann kann die Traglast eines Stabtragwerkes mit Hilfe der Grenzwertsätze berechnet werden. Ist das Tragwerk äusserlich statisch bestimmt, so ist die Tragfähigkeit nach dem Versagen eines Einzelquerschnittes erschöpft. Die Traglast statisch unbestimmter Tragwerke ist hingegen eine Funktion mehrerer Querschnittswiderstände.

2. SPANNUNGSANSATZ AM STABELEMEN

2.1 Aeussere Lasten und Schnittkräfte

Die äussere Querbelastung in der y - z -Ebene kann aus beliebig vielen Kräftegruppen bestehen, die in verschiedenen Punkten der Profillinie angreifen. Die Reduktion dieser Kräfte soll anhand eines Beispiels erläutert werden. Ein Rechteckquerschnitt wird durch eine exzentrische Linienlast p beansprucht (Bild 2.1).

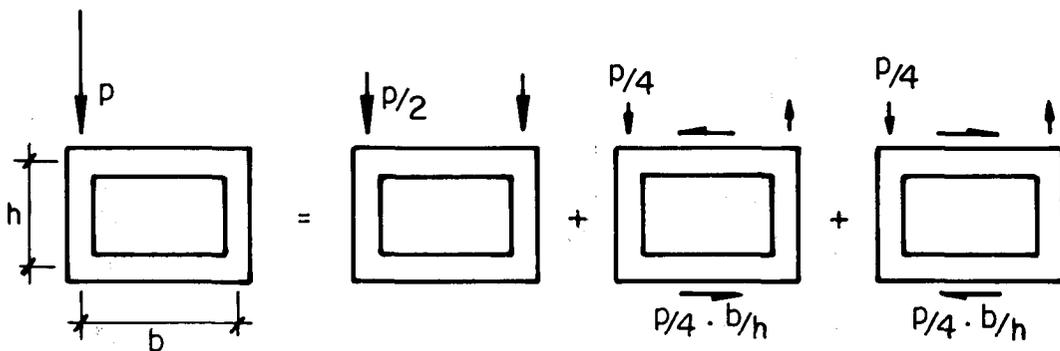


Bild 2.1 : Zerlegung einer exzentrischen Linienlast

Diese Last lässt sich in eine symmetrische und eine antimetrische Last zerlegen, wobei die antimetrische Last wiederum in eine drehende und in eine profilverformende Lastgruppe aufgeteilt wird. Die zweite Lastgruppe steht in sich im Gleichgewicht und wird vom starren Querschnitt aufgenommen. Unter dieser Annahme kann analog der elementaren Stabstatik jede beliebige Querbelastung in der y - z -Ebene durch eine äquivalente Einzelkraft in derselben Ebene ersetzt werden. Die auf das kartesische Koordinatensystem bezogene Querbelastung ist in Bild 2.2 dargestellt.

Da ein allgemeiner, nicht-ebener Spannungsansatz untersucht wird, bleibt eine Reduktion der Belastung in Stablängsrichtung (\bar{p}_x) auf eine Resultierende offen. Diese Längslast wird vorerst als Flächenlast entlang der Wandmittellinie eingeführt.

Die Verteilung der Spannungen über den Querschnitt ist a priori unbekannt. Dagegen kann man, sobald die äusseren Kräfte bestimmt sind, die Schnittkräfte teilweise angeben. Diese Schnittkräfte gehen als Resultierende der Spannungen hervor und stehen im Gleichgewicht zu den äusseren Lasten. Entsprechend den sechs Gleichgewichtsbeziehungen des Raumes werden je drei Kraft-

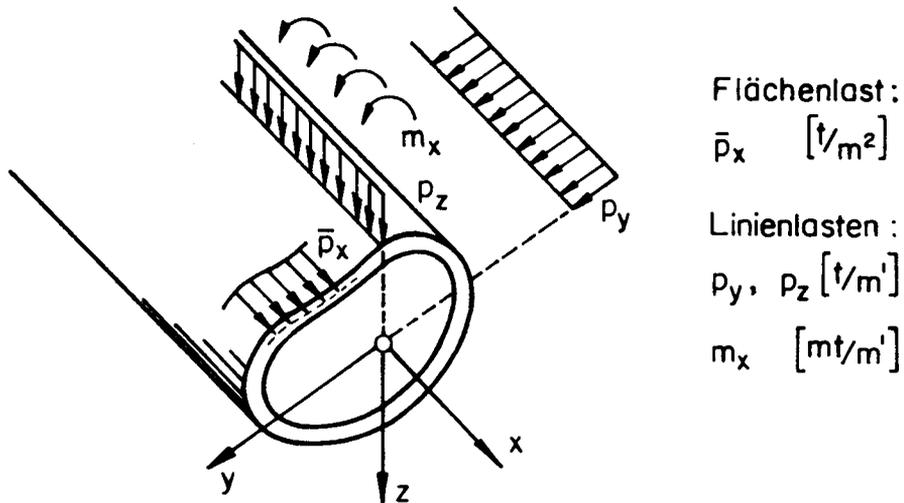


Bild 2.2 : Äussere Belastung

und Momentenvektoren in Richtung der Koordinatenachsen eingeführt und auf den Koordinatenursprung O bezogen (Bild 2.3). Diese Schnittkräfte sind aus der klassischen Stabstatik bekannt. Sie ermöglichen aber noch nicht die Beschreibung eines beliebigen Spannungsansatzes. Deshalb müssen im nächsten Abschnitt zusätzliche Schnittkräfte definiert werden.

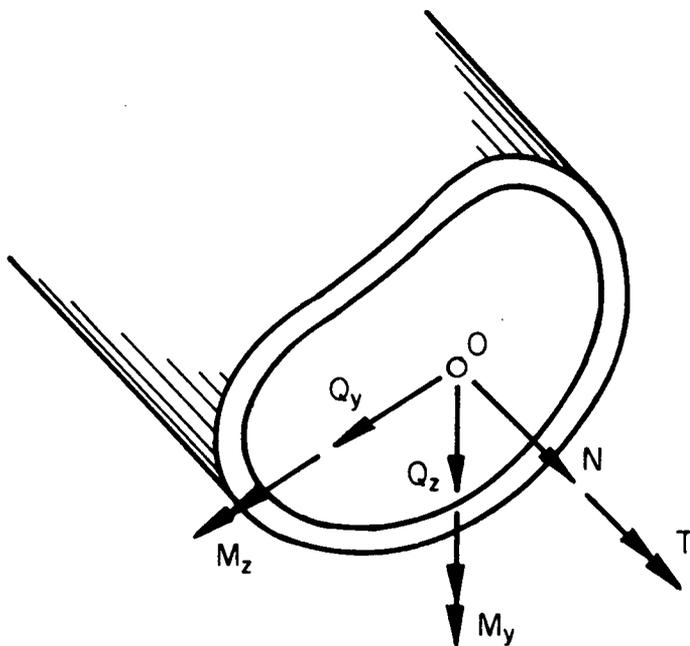


Bild 2.3 : Schnittkräfte der klassischen Stabstatik

2.2 Gleichgewichtsbeziehungen

In Abschnitt 1.3 wurde die grundlegende Annahme getroffen, dass für den dünnwandigen Kastenträger nur die Membranspannungen in Rechnung gestellt werden. Dabei ist zu beachten, dass nur die Normalspannungen in Längsrichtung und die dazugehörigen Schubspannungen erfasst werden. Die Normalspannungen in Querrichtung werden bei der Idealisierung als Stab vernachlässigt.

Die Beziehung zwischen der Normalspannung in x-Richtung $\sigma_x = \sigma$ und der Schubspannung längs des Umfanges $\tau_{xs} = \tau$ wird mit Hilfe des Gleichgewichts an einem differentiellen Wandelement (Bild 2.4) hergeleitet. Unter Berücksichtigung der Flächenlast \bar{p}_x lautet das Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

$$\frac{\partial(\sigma \cdot t)}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} + \bar{p}_x = 0 \quad (2.1)$$

Bei konstantem Querschnitt ist die Wanddicke t unabhängig von x . Gl. (2.1) geht somit über in:

$$-\frac{dS}{ds} = \frac{d\sigma}{dx} \cdot t + \bar{p}_x \quad (2.2)$$

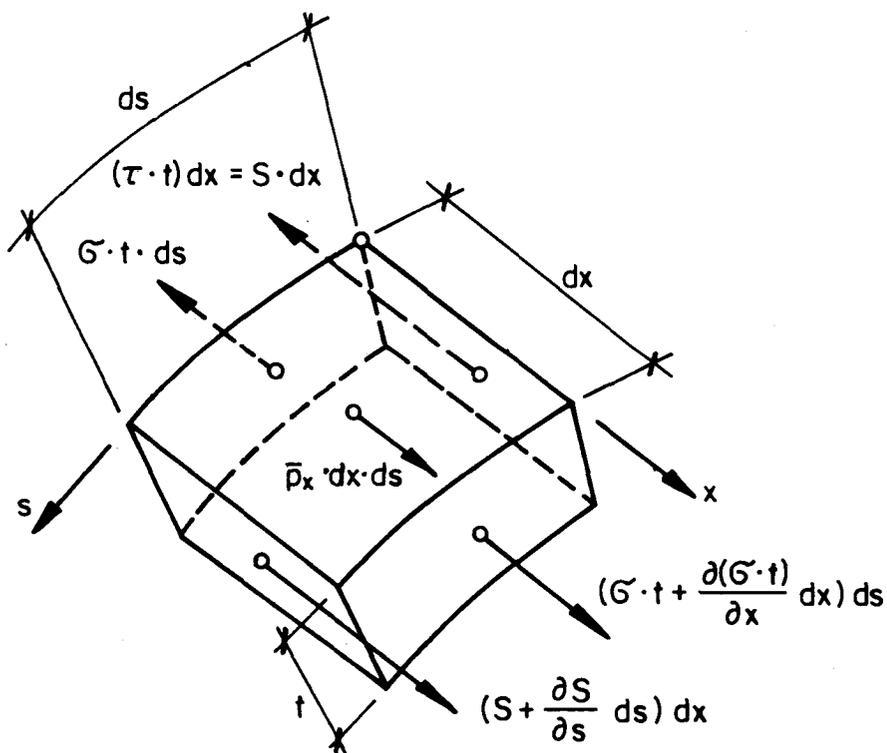


Bild 2.4: Kräfte in x-Richtung am Wandelement

Die Schnittkräfte werden als Resultierende der Spannungen definiert. Die Schubspannungen lassen sich deshalb wie folgt zusammenfassen:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= \oint S \cdot \cos \delta \cdot ds \\ Q_z &= \oint S \cdot \sin \delta \cdot ds \\ T &= \oint S \cdot r \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Eine Vereinfachung der Integrale in Gl. (2.3) ist durch die Aufteilung des Schubflusses in einen konstanten Anteil und einen variablen Anteil möglich:

$$S = S_0 + \int^s \frac{dS}{ds} \cdot ds \quad (2.4)$$

Das Integral über einen ganzen Umlauf muss bei geschlossenem Querschnitt natürlich wegen der Stetigkeit des Schubflusses verschwinden:

$$\oint \frac{dS}{ds} \cdot ds = 0 \quad (2.5)$$

Nach Einsetzen der Gl. (2.4) in Gl. (2.3) folgt:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= S_0 \oint \cos \delta \cdot ds + \oint \left(\int^s \frac{dS}{ds} \cdot ds \right) \cdot \cos \delta \cdot ds \\ Q_z &= S_0 \oint \sin \delta \cdot ds + \oint \left(\int^s \frac{dS}{ds} \cdot ds \right) \cdot \sin \delta \cdot ds \\ T &= S_0 \oint r \cdot ds + \oint \left(\int^s \frac{dS}{ds} \cdot ds \right) \cdot r \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Im geschlossenen Querschnitt gilt:

$$\oint r \cdot ds = 2F_0 \quad (2.7)$$

Darin bedeutet F_0 die von der Wandmittellinie umschriebene Fläche. Das Integral ist also unabhängig von der Lage des Bezugspunktes O . Unter Beachtung der Gl. (1.2) und Gl. (2.7) heissen die Schnittkräfte schliesslich:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= \oint \left(\int^s dS \right) \cdot \cos \delta \cdot ds \\ Q_z &= \oint \left(\int^s dS \right) \cdot \sin \delta \cdot ds \\ T &= 2F_0 \cdot S_0 + \oint \left(\int^s dS \right) \cdot r \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Die Normalspannungen werden zu den folgenden Schnittkräften zusammengefasst:

$$\left. \begin{aligned} N &= \oint \sigma \cdot t \cdot ds \\ M_y &= - \oint \sigma \cdot t \cdot y \cdot ds \\ M_z &= \oint \sigma \cdot t \cdot z \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Mit diesen drei Schnittkräften kann aber erst ein ebener Normalspannungszustand beschrieben werden. Es muss deshalb zusätzlich eine neue Schnittkraft eingeführt werden:

$$M_\omega = \oint \sigma \cdot t \cdot \omega \cdot ds \quad (2.10)$$

Diese Schnittkraft wird in der Literatur als Wölbmoment bezeichnet, die entsprechende Koordinate ω als Wölbkoordinate. Auf die physikalische Bedeutung des Wölbmomentes wird später näher eingetreten.

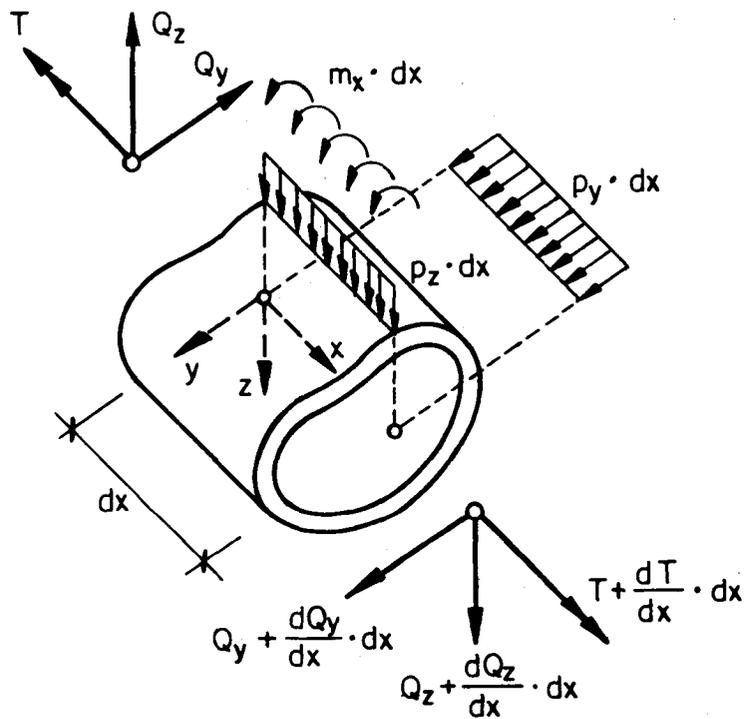


Bild 2.5 : Differentielles Stabelement

Die hier definierten Schnittkräfte stehen im Gleichgewicht zu den äusseren Lasten. Gl. (2.2) eingesetzt in die Gl. (2.5) ergibt:

$$\frac{d}{dx} \oint \sigma \cdot t \cdot ds + \oint \bar{p}_x \cdot ds = 0 \quad (2.11)$$

und damit die Differentialgleichung zwischen der Normalkraft und der äusseren Belastung in Stablängsrichtung:

$$\frac{dN}{dx} + \oint \bar{p}_x = 0 \quad (2.12)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen am Stabelement (Bild 2.5) liefern:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_y}{dx} + p_y &= 0 \\ \frac{dQ_z}{dx} + p_z &= 0 \\ \frac{dT}{dx} + m_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Die Beziehungen zwischen den Schnittkräften nach Gl. (2.8) und den restlichen Schnittkräften als Resultierende der Normalspannungen Gl. (2.9), bzw. Gl. (2.10) wird nach partieller Integration erreicht. Das Integral der Querkraft Q_y , bzw. Q_z wird zerlegt in:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= \oint \frac{dS}{ds} \cdot ds \oint \cos \delta \cdot ds - \oint \frac{dS}{ds} \left(\int^s \cos \delta \cdot ds \right) \cdot ds \\ Q_z &= \oint \frac{dS}{ds} \cdot ds \oint \sin \delta \cdot ds - \oint \frac{dS}{ds} \left(\int^s \sin \delta \cdot ds \right) \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Nach Gl. (1.2) bzw. Gl. (2.5) entfallen die beiden ersten Terme der Gl. (2.14). Unter Berücksichtigung von Gl. (1.1) und mit:

$$\int^s dy = y(s) \quad \text{bzw.} \quad \int^s dz = z(s) \quad (2.15)$$

lauten die Querkräfte:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= - \oint \frac{dS}{ds} \cdot y \cdot ds \\ Q_z &= - \oint \frac{dS}{ds} \cdot z \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Wird schliesslich noch Gl. (2.2) beigezogen und beachtet, dass die Koordinaten y und z bei konstantem Querschnitt von x unabhängig sind, gehen Gl. (2.16) über in:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= + \frac{d}{dx} \oint \sigma \cdot t \cdot y \cdot ds + \oint \bar{p}_x \cdot y \cdot ds \\ Q_z &= + \frac{d}{dx} \oint \sigma \cdot t \cdot z \cdot ds + \oint \bar{p}_x \cdot z \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Ein Vergleich mit Gl. (2.9) führt zu der aus der Stabstatik bekannten Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= -\frac{dM_y}{dx} + \oint \bar{p}_x \cdot y \cdot ds \\ Q_z &= +\frac{dM_z}{dx} + \oint \bar{p}_x \cdot z \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Aus der partiellen Integration des Torsionsmomentes folgt:

$$T = 2F_0 \cdot S_0 + \oint \frac{dS}{ds} \cdot ds \oint r \cdot ds - \oint \frac{dS}{ds} \left(\int r \cdot ds \right) \cdot ds \quad (2.19)$$

Nach Gl. (2.5) fällt bei geschlossenem Querschnitt der zweite Term weg. Zusätzlich wird mit:

$$\int r \cdot ds = \omega \quad (2.20)$$

die Wölbkoordinate definiert. Nach Anwendung von Gl. (2.2) und Gl. (2.20) vereinfacht sich Gl. (2.19) für konstanten Querschnitt ($\omega = \omega(s)$) zu:

$$T = 2F_0 \cdot S_0 + \frac{d}{dx} \oint \sigma \cdot t \cdot \omega \cdot ds + \oint \bar{p}_x \cdot \omega \cdot ds \quad (2.21)$$

oder unter Beachtung von Gl. (2.10):

$$T = 2F_0 \cdot S_0 + \frac{dM_\omega}{dx} + \oint \bar{p}_x \cdot \omega \cdot ds \quad (2.22)$$

Aus dieser Gleichung geht auch die physikalische Bedeutung des Wölbmomentes M_ω hervor. Eine Gleichgewichtsgruppe in Stablängsrichtung erzeugt einen nicht-ebenen Spannungszustand, der wiederum einen über den Umfang variablen Schubfluss zur Folge hat. Als Resultierende dieses veränderlichen Schubflusses wird das Wölb-torsionsmoment eingeführt. Das Torsionsmoment setzt sich also zusammen aus einem Anteil infolge des konstanten Schubflusses (Umlauf-torsion):

$$T_0 = 2F_0 \cdot S_0 \quad (2.23)$$

und einem Wölbanteil:

$$T_\omega = \frac{dM_\omega}{dx} \quad (2.24)$$

Das Differentialsystem lautet für die Schnittkräfte:

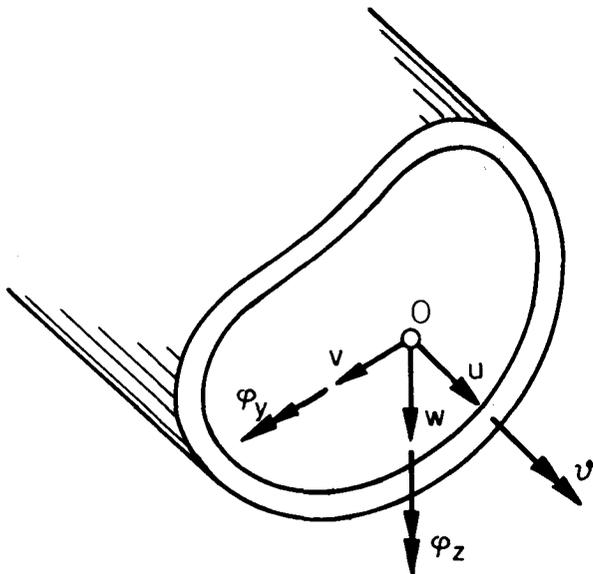
$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dN}{dx} + \bar{\phi}_{p_x} \cdot ds &= 0 \\
 \frac{dQ_y}{dx} + p_y &= 0 \\
 \frac{dQ_z}{dx} + p_z &= 0 \\
 \frac{dT}{dx} + m_x &= 0 \\
 Q_y + \frac{dM_y}{dx} - \bar{\phi}_{p_x} \cdot y \cdot ds &= 0 \\
 Q_z - \frac{dM_z}{dx} - \bar{\phi}_{p_x} \cdot z \cdot ds &= 0 \\
 T - 2F_0 \cdot S_0 - \frac{dM_\omega}{dx} - \bar{\phi}_{p_x} \cdot \omega \cdot ds &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Den sieben Gleichungen stehen die Schnittkräfte N , Q_y , Q_z , T , M_y , M_z und M_ω und der Schubfluss S_0 gegenüber. Die Gleichgewichtsbedingungen allein genügen also nicht, die Schnittkräfte geschlossener Querschnitte aus den äusseren Lasten zu ermitteln. Insbesondere geht die Aufteilung des Torsionsmomentes in Umlauftorsion und Wölbtorsion aus den Gleichgewichtsbedingungen allein nicht hervor. Die elastische Analyse zieht zur Aufteilung Verträglichkeitsbedingungen im Querschnitt und über die Längsrichtung bei. Ebenso darf in der plastischen Analyse im allgemeinen nicht der Bruchwiderstand eines Einzelquerschnittes betrachtet werden. Vielmehr muss die Tragfähigkeit des gesamten Trägers untersucht werden.

3. VERFORMUNGSANSATZ AM STABELEMEN

3.1 Verformungsparameter

Im Abschnitt 1.3 wurde die grundlegende Annahme getroffen, dass die Querschnittsform auch nach der Belastung erhalten bleibe. Unter dieser Voraussetzung wird der Freiheitsgrad der Verformbarkeit wesentlich eingeschränkt. Die Verschiebung jedes beliebigen Punktes der Querschnittswand lässt sich mit integralen, auf die Stabaxe bezogenen Verformungsgrößen beschreiben. Bild 3.1 führt die sechs üblichen Verformungsparameter der Balkentheorie auf.



Verschiebungen in Richtung der Axen: u, v, w

Verdrehung um x -Axe: ψ

Verdrehungen um y - bzw. z -Axe: φ_y, φ_z

Bild 3.1: Verformungsparameter

Verschiebungen und Verdrehungsvektoren in Richtung der Koordinatenaxe werden positiv definiert. Nach der Balkentheorie sind die Verschiebungen und die Verdrehungen wie folgt verknüpft:

$$\varphi_y = - \frac{dw}{dx} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_z = + \frac{dv}{dx} \quad (3.1)$$

Das System reduziert sich auf vier unabhängige Verformungsparameter. Neben diesen Verformungsgrößen sind zudem Schiebungen der Querschnittswand möglich. Wenn die Querschnittsform erhalten bleibt, können nur drei unabhängige

Schiebungsgrössen eingeführt werden (Bild 3.2). Es sei auch hervorgehoben, dass diese Schiebungen den Verformungszustand in Längsrichtung in keiner Weise beeinflussen. Bei konstanter Schiebung über den ganzen Querschnitt bleibt der Querschnitt auch nach der Verformung eben. Hingegen bleibt ein Schnitt senkrecht zu Balkenaxe nach der Verformung nicht mehr senkrecht zur Balkenaxe. Mit diesem Verformungsansatz werden im folgenden Abschnitt die Verträglichkeitsbeziehungen formuliert.

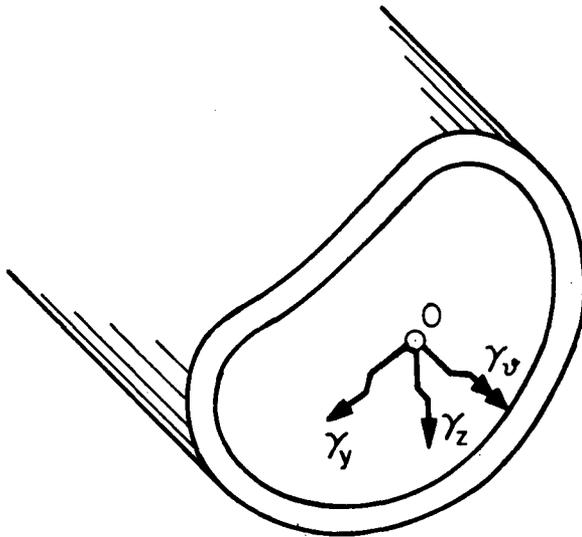


Bild 3.2: Schiebungen des Gesamtquerschnittes

3.2 Verträglichkeitsbeziehungen

Die Beschränkung auf dünnwandige Querschnitte hat beim Spannungsansatz zur Folge, dass nur die Membrankräfte σ_x und τ_{xs} in Betracht gezogen werden. Sinnemäss werden hier in einem beliebigen Punkt P auf dem Umfang nur die Verschiebung in x-Richtung u_p und die tangentielle Verschiebung v_p eingeführt. Aus diesen Grössen lassen sich wiederum die Längsdehnung ϵ_x und die Schiebung γ herleiten. Nach Bild 3.3 setzt sich die Verschiebung u_p zusammen aus:

$$u_p = u + \phi_y \cdot z - \phi_z \cdot y \quad (3.2)$$

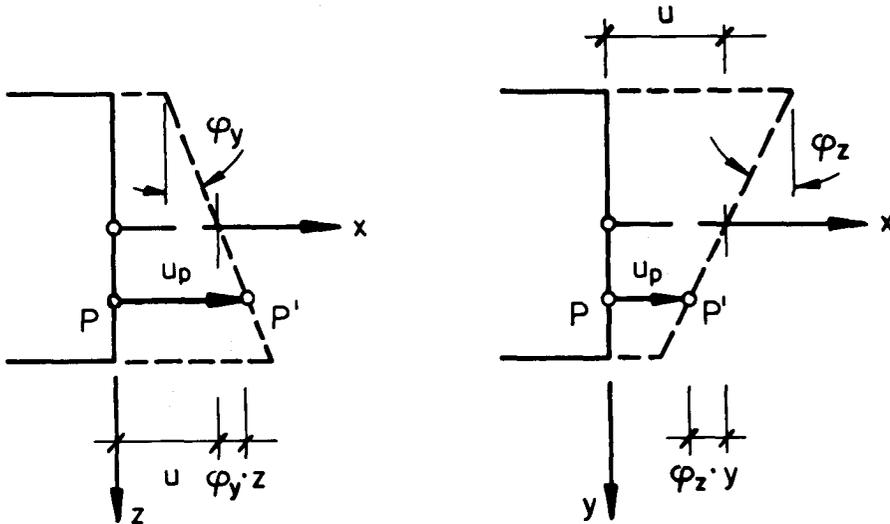


Bild 3.3 : Verschiebung in x-Richtung

Damit wird aber erst ein ebener Verformungszustand des Querschnittes beschrieben. Bild 3.4 macht aber deutlich, dass auch aus dem Verdrehungszuwachs $d\vartheta/dx$ eine Längsverschiebung des Punktes P resultiert. In diesem Bild wird die geometrische Wölbung des aufgeschnittenen Querschnittes hergeleitet:

$$du = - \frac{d\vartheta}{dx} \cdot r \cdot ds \quad (3.3)$$

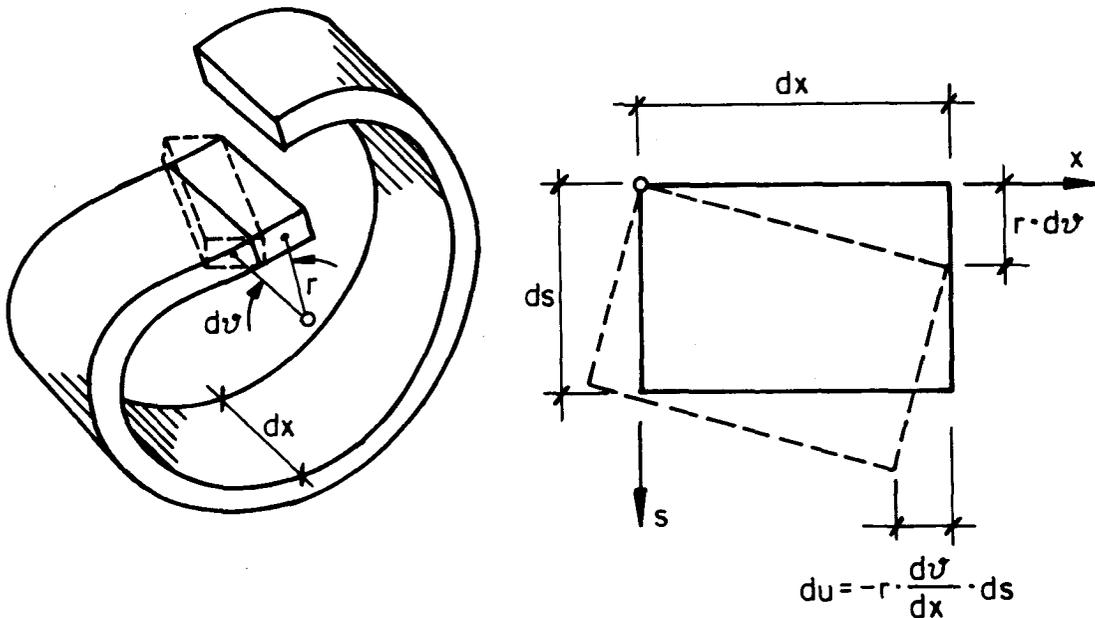


Bild 3.4 : Geometrische Wölbung am offenen Querschnitt

Mit diesem Ansatz kann selbstverständlich die Stetigkeitsbedingung am geschlossenen Querschnitt:

$$\oint du = 0 \quad (3.4)$$

nicht eingehalten werden. Die beiden Schnittufer des aufgeschnittenen Trägers werden durch eine weitere Ansatzfunktion $f(s)$ in der Weise zusammengeführt, dass Gl. (3.4) erfüllt wird. Die physikalische Bedeutung der Funktion $f(s)$ ist aus Bild 3.5 ersichtlich.

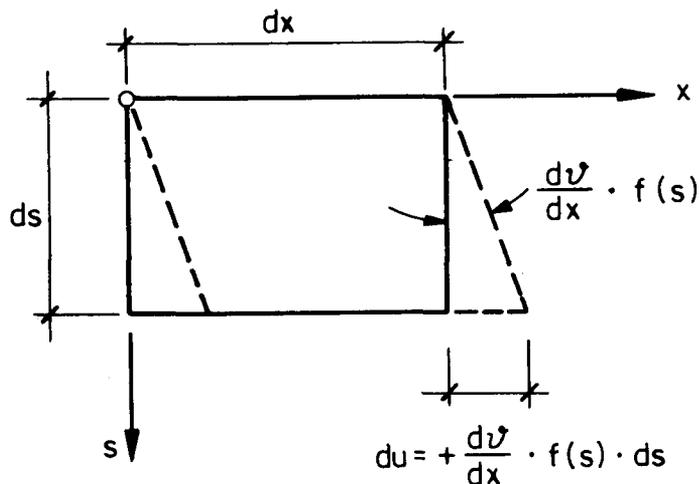


Bild 3.5 : Wölbung am geschlossenen Querschnitt zur Erfüllung der Stetigkeitsbedingung

Der Schnitt wird durch eine Schiebung geschlossen. Der vollständige Ansatz der Wölbung lautet demnach:

$$du = - \frac{d\vartheta}{dx} (r \cdot ds - f(s) \cdot ds) \quad (3.5)$$

Wölben des Kastenträgers ist immer mit einer Schiebung verknüpft. Diese Schiebung ist proportional zum Verdrehungszuwachs $d\vartheta$. Wenn also ein Träger stetig verdreht wird, so ist dazu eine Schiebung über die gesamte Trägerlänge erforderlich. Der Träger mit offenem Querschnitt hingegen kann wölben, ohne dass damit eine Schiebung verbunden ist. Gl. (3.4) muss hier nicht erfüllt sein.

Die gesamte Längsverschiebung eines Punktes auf dem Umfang u_P folgt aus Gl. (3.2) und Gl. (3.5) zu:

$$u_P = u + \varphi_y \cdot z - \varphi_z \cdot y - \frac{d\vartheta}{dx} \left(\int r \cdot ds - \int f(s) \cdot ds \right) \quad (3.6)$$

Für die Bestimmung der tangentiellen Verschiebung v_P müssen folgende Beziehungen neu eingeführt werden:

$$\left. \begin{aligned} v^* &= v + \int \gamma_y \cdot dx \\ w^* &= w + \int \gamma_z \cdot dx \\ \vartheta^* &= \vartheta + \int \gamma_\vartheta \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

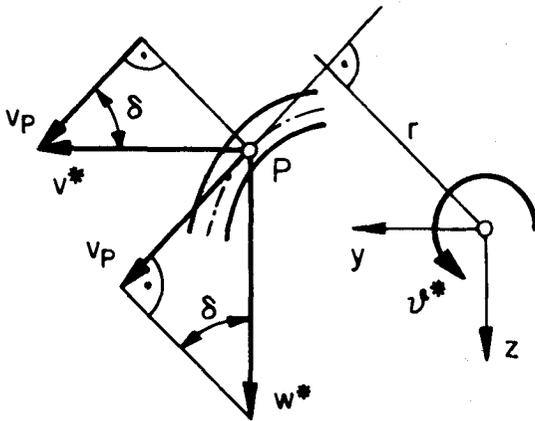


Bild 3.6 : Tangentielle Verschiebung

Nach Bild 3.6 ergibt sich die tangentielle Verschiebung zu:

$$v_P = v^* \cdot \cos \delta + w^* \cdot \sin \delta + \vartheta^* \cdot r \quad (3.8)$$

oder nach Einsetzen von Gl. (3.7):

$$\left. \begin{aligned} v_P &= v \cdot \cos \delta + w \cdot \sin \delta + \vartheta \cdot r + \int \gamma_y \cdot \cos \delta \cdot dx + \\ &+ \int \gamma_z \cdot \sin \delta \cdot dx + \int \gamma_\vartheta \cdot r \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Die Dehnung ϵ_x in x-Richtung und die Schiebung γ lassen sich aus den Verschiebungen u_P und v_P berechnen. In Bild 3.7 ist ein Wandelement vor und nach der Verformung dargestellt. Danach erfüllt ϵ_x die Bedingung:

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u_P}{\partial x} \quad (3.10)$$

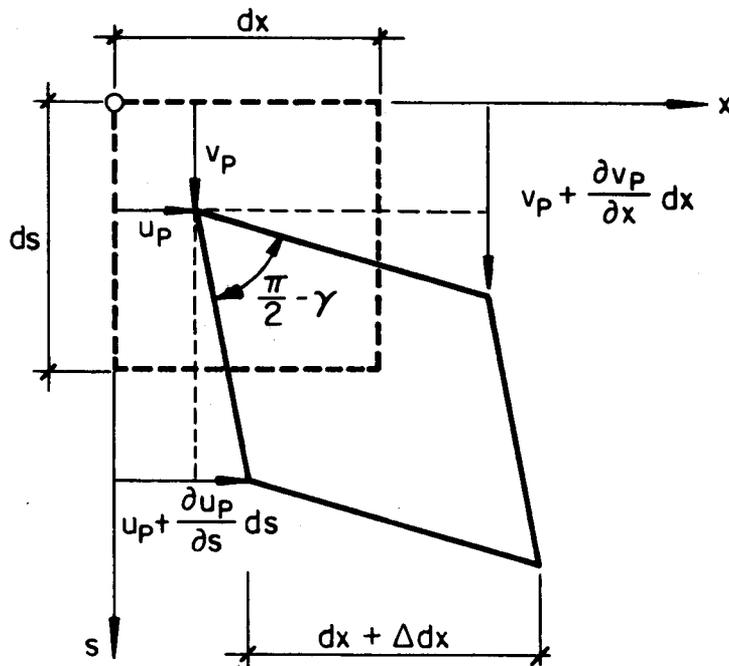


Bild 3.7 : Verformung des Wandelementes

Gl. (3.6) eingesetzt in Gl. (3.10) ergibt:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} \cdot y \cdot z - \frac{d\varphi}{dx} \cdot z \cdot y - \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \left(\int_0^s r \cdot ds - \int_0^s f(s) \cdot ds \right) \quad (3.11)$$

oder unter Berücksichtigung von Gl. (3.1):

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2} \cdot z - \frac{d^2v}{dx^2} \cdot y - \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \left(\int_0^s r \cdot ds - \int_0^s f(s) \cdot ds \right) \quad (3.12)$$

Für kleine Verformungen kann die Schiebung γ aus Bild 3.7 abgelesen werden:

$$\gamma = \frac{\partial u_p}{\partial s} + \frac{\partial v_p}{\partial x} \quad (3.13)$$

Nach Beizug der Gl. (3.6) und Gl. (3.9) geht Gl. (3.13) über in:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{dz}{ds} \cdot \varphi_y - \frac{dy}{ds} \cdot \varphi_z - \frac{d\vartheta}{dx} (r - f(s)) + \frac{dv}{dx} \cdot \cos\delta + \\ &+ \frac{dw}{dx} \cdot \sin\delta + \frac{d\vartheta}{dx} \cdot r + \gamma_y \cdot \cos\delta + \gamma_z \cdot \sin\delta + \gamma_\vartheta \cdot r \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Mit Gl. (1.1) und Gl. (3.1) wird Gl. (3.14) reduziert auf:

$$\gamma = \gamma_y \cdot \cos\delta + \gamma_z \cdot \sin\delta + \gamma_\vartheta \cdot r + \frac{d\vartheta}{dx} \cdot f(s) \quad (3.15)$$

Gl. (3.12) und Gl. (3.15) stellen die Verformungs-Dehnungsbedingungen des Querschnittes dar. Gleichzeitig erlauben die Dehnung ϵ_x und die Schiebung γ in Verbindung mit der Längsspannung σ_x und der Schubspannung τ_{xs} , die Leistung der inneren Kräfte, die Dissipationsleistung, zu ermitteln.

4. TRAGLAST VON TRÄGERN MIT IDEALISIERTEM FLIESSGESETZ

4.1 Träger und Fließgesetz

Für die Bestimmung der Tragfähigkeit nach dem statischen Grenzwertsatz müssen die Gleichgewichtsbedingungen des Kastenträgers mit den Plastizitätsbedingungen der einzelnen Trägerelemente verbunden werden. Bei der Anwendung des kinematischen Grenzwertsatzes müssen die aus dem Verformungsansatz am Stab hervorgehenden Dehnungen und Schiebungen mit den Dehnungen und Schiebungen der Trägerelemente verträglich sein.

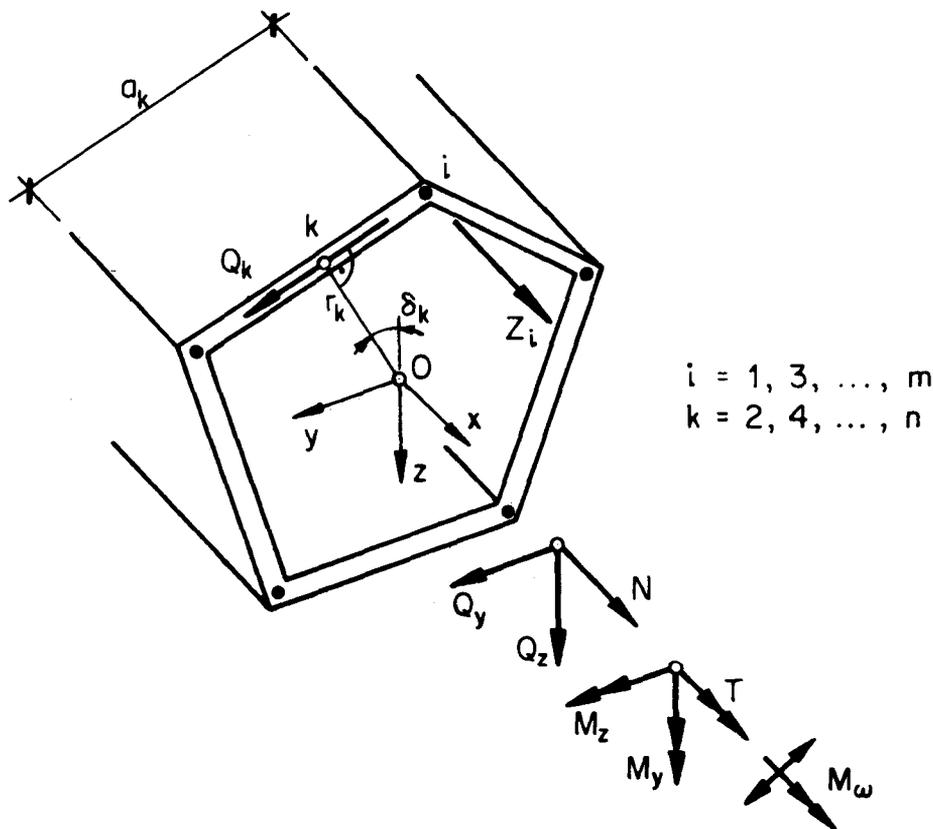


Bild 4.1 : Prismatischer Querschnitt

Aus rechentechnischen Gründen beschränkt sich die Untersuchung auf prismatische Stäbe (Bild 4.1). Zudem wird das homogene Wandelement in Gurtstäbe und dazwischenliegende Schubwände aufgegliedert. Die über den Umfang stetig verteilten Längsspannungen σ werden also zu Gurtkräften Z_i zusammengefasst (Bild 4.1). Dann aber ist der Schubfluss gemäss Gl. (2.1) pro Querschnittswand konstant. Als Resultierende des Schubflusses jeder Querschnittswand wird die Schubkraft Q_k eingeführt:

$$Q_k = S_k \cdot a_k \quad (4.1)$$

Es wird angenommen, dass die Wirkungslinie der Schubkräfte mit der Verbindungslinie der Gurtstäbe zusammenfällt. Wird der zylindrische Querschnitt durch ein Sehnepolygon angenähert, so liegt in Wirklichkeit die Schubkraft ausserhalb der Verbindungslinie der Gurtstäbe. Die Exzentrizität kann zum Beispiel nach [5] bestimmt werden. Bei genügend feiner Linearisierung des zylindrischen Querschnittes kann diese Exzentrizität aber sicher vernachlässigt werden.

Die Beziehung zwischen der Gurtkraft und den Schubkräften der anschliessenden Querschnittswände geht aus dem Kräftegleichgewicht in x-Richtung am Eckelement (Bild 4.2) hervor:

$$\frac{dZ_i}{dx} = (S_{k-2} - S_k) \quad (4.2)$$

Diese Bedingung entspricht Gl. (2.1) für das homogene Wandelement, wenn die Flächenlast \bar{p}_x fehlt.

Für die Untersuchung des Bruchzustandes wird starr-plastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Die Plastizitätsbedingungen werden für die Gurtkräfte Z_i und die Schubkräfte Q_k angeschrieben.

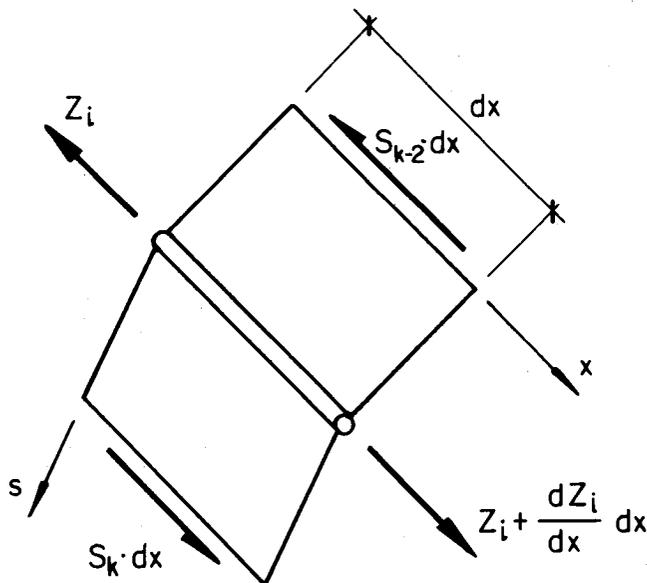


Bild 4.2: ECKELEMENT: Kräfte in x-Richtung

Die Fließbedingungen aller Gurt- und Schubkräfte werden mit einer $(n+m)$ -dimensionalen Fließfigur dargestellt. Dabei wird angenommen, dass die Tragfähigkeit der Gurtstäbe nicht durch die Schubkräfte beeinflusst wird und umgekehrt. Es wird also eine Fließfigur vorgeschrieben, wie sie in Bild 4.3 für die beiden Kräfte Z_i und Q_k im Sektor der positiven Kräfte aufgezeichnet ist. Nach dem Theorem des plastischen Potentials erlaubt die Annahme der vereinfachten Fließfigur in der Querschnittswand nur eine Schiebung.

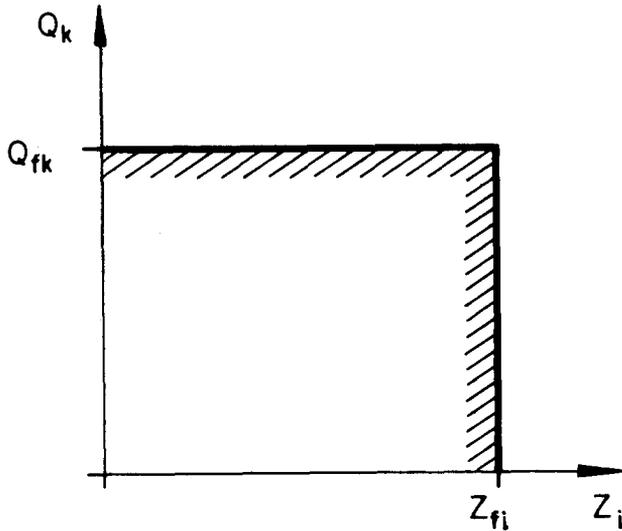


Bild 4.3 : Idealisierte Fließfigur

Die Wiedergabe der Spannungen mit konzentrierten Kräften wird vorzugsweise für die Untersuchung von Stahlbetonträgern beigezogen, wenn die Längsbewehrung in den Eckpunkten konzentriert wird. Wie später gezeigt wird, beeinflussen jedoch die Schubkräfte die Tragfähigkeit der Gurtstäbe. Die Annahme einer idealisierten Fließfigur erleichtert aber die Abklärung grundsätzlicher Fragen.

Die Darstellung der inneren Kräfte mit einzelnen Gurt- und Schubkräften und die idealisierte Fließfigur gibt auch das statische Verhalten eckverstärkter Stahlträger wirklichkeitsnah wieder, wenn keine Stabilitätsprobleme massgebend werden. Die Wandbleche helfen bei der Uebertragung der Längskräfte kaum mit. Hingegen werden kinematische Bindungen verletzt, weil das Fließgesetz in den Querschnittswänden nur Schiebungen zulässt. Die Wandbleche, die an die fließenden Gurtstäbe anschliessen, werden aber auch gedehnt.

Im folgenden wird die Traglast eines Kragträgers untersucht. Um die Rechnung zu vereinfachen, wird ein quadratischer Querschnitt gewählt. Die Aussagekraft der Untersuchung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

4.2 Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen

Nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie stellt jeder Spannungszustand, der weder die Gleichgewichts- noch die Fließbedingungen verletzt, einen unteren Grenzwert der Traglast dar. Dabei wird angenommen, dass alle angreifenden Lasten unter gleichbleibendem Verhältnis gesteigert werden. Diese Lasten und die Schnittkräfte werden demzufolge mit einem einzigen Lastfaktor λ gemessen.

Der zu untersuchende Kragträger ist in Bild 4.4 aufgezeichnet.

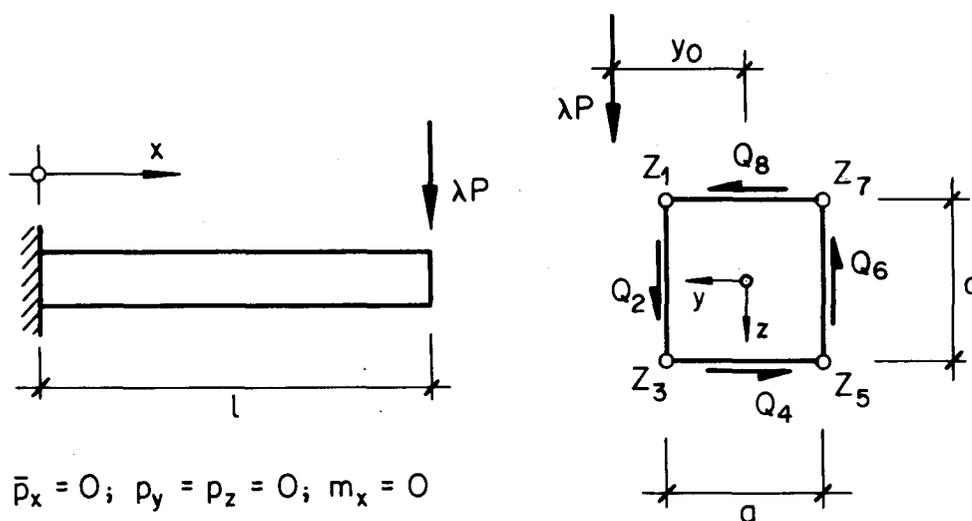


Bild 4.4 : Kragträger mit quadratischem Querschnitt

Die Schnittkräfte sind über Gl. (2.25) mit den äusseren Lasten verbunden:

$$\left. \begin{array}{ll} N(x) = 0 & T(x) = T = \lambda P \cdot y_0 \\ Q_y(x) = 0 & M_y(x) = 0 \\ Q_z(x) = Q = \lambda P & M_z(x) = \lambda P \cdot (1-x) \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

Unbekannt bleibt vorläufig das Wölbmoment M_ω und damit die Aufteilung in Umlauf-torsion und Wölb-torsion.

Zur Prüfung der Fließbedingungen müssen zusätzlich die Beziehungen zwischen den Schnittkräften und den Spannungen formuliert werden. Die Schnittkräfte Q und T sind über die Stablänge konstant. Damit gilt nach Gl. (2.3) für jeden beliebigen Schnitt:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= 0 = -Q_4 + Q_8 \\ Q_z &= \lambda P = Q_2 - Q_6 \\ T &= \lambda P \cdot y_0 = (Q_2 + Q_4 + Q_6 + Q_8) \cdot \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Die Gurtstäbe sind im Einspannquerschnitt ($x = 0$) am stärksten beansprucht. Das Gleichungssystem Gl. (2.9) heisst also:

$$\left. \begin{aligned} N &= 0 = Z_1 + Z_3 + Z_5 + Z_7 \\ M_y &= 0 = (-Z_1 - Z_3 + Z_5 + Z_7) \cdot \frac{a}{2} \\ M_z &= \lambda P \cdot l = (-Z_1 + Z_3 + Z_5 - Z_7) \cdot \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Neben diesen Gleichungen muss aber auch die Bedingung für M_ω (Gl. (2.10)) eingehalten werden. Wohl ist die Wölbkoordinate ω nach Gl. (2.20) definiert. Es fehlt aber eine Angabe über den Anfangswert von ω . Beim Rechteckquerschnitt kann diese Schwierigkeit überwunden werden (und deshalb wurde dieses Beispiel gewählt), wenn für die vier Gurtkräfte Gl. (4.2) ausgeschrieben wird. Auf diese Weise werden die vier integralen Gleichgewichtsbedingungen für die Längskräfte ersetzt. Kenntnisse über die Wölbkoordinate erübrigen sich. Mit über die Länge konstanten Schubkräften Q_k lautet Gl. (4.2) für die vier Gurtkräfte:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 - \frac{1}{a} \cdot (Q_2 - Q_8) &= 0 \\ Z_3 - \frac{1}{a} \cdot (-Q_2 + Q_4) &= 0 \\ Z_5 - \frac{1}{a} \cdot (-Q_4 + Q_6) &= 0 \\ Z_7 - \frac{1}{a} \cdot (-Q_6 + Q_8) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Die Plastizitätsbedingungen verlangen, dass die effektive Beanspruchung der Gurtstäbe und Schubwände unter dem maximalen Widerstand bleibt. Beim Stahlbetonträger werden die Zugkräfte über die Bewehrung und die Druckkräfte über den Beton übertragen. Es wird angenommen, dass der Beton für das Versagen des Trägers nicht massgebend wird. Der Beton soll unbeschränkt Kräfte aufnehmen können. Die Gurtkräfte werden somit nur im Zugbereich begrenzt:

$$Z_i \leq Z_{fi}$$

Nach Einführung von positiv definiten Schlupfvariablen p_i heissen die Plastizitätsbedingungen neu:

$$p_i = Z_{fi} - Z_i \geq 0 \quad (4.7)$$

Der Schubfluss in einer Schubwand kann sowohl in positiver (rechtsdrehend) als auch in negativer (linksdrehend) Richtung verlaufen. Entsprechend muss die Schubkraft Q_k begrenzt werden:

$$Q_{fk}^- \leq Q_k \leq Q_{fk}^+ \quad (4.8)$$

oder bei gleich grossem plastischem Widerstand in positiver und negativer Richtung:

$$- Q_{fk} \leq Q_k \leq Q_{fk} \quad (4.9)$$

Die Theorie der mathematischen Optimierung verlangt, dass nur positiv definite Schlupfvariablen eingeführt werden. Die Plastizitätsbedingungen (4.9) müssen somit wie folgt getrennt werden:

$$\left. \begin{aligned} p_k^+ &= Q_{fk} - Q_k \geq 0 \quad \text{für } Q_k \geq 0 \\ p_k^- &= Q_{fk} + Q_k \geq 0 \quad \text{für } Q_k \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Der Tragfähigkeit am nächsten kommt die maximale Last, für die ein Spannungszustand gefunden werden kann, der sowohl die Gleichgewichts- als auch die Plastizitätsbedingungen nicht verletzt. Diese Optimierungsaufgabe wird mit Hilfe des Tableau gemäss Bild 4.5 dargestellt. In der Zielfunktion ist der Traglastfaktor zu maximieren. Als Nebenbedingungen erscheinen die Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen. Da diese Nebenbedingungen alle linear sind, kann die Lösung der Optimierungsaufgabe mit den Methoden der linearen Programmierung gefunden werden (vgl. z.B. [6], [7]).

	1	λ	Z_1	Z_3	Z_5	Z_7	Q_2	Q_4	Q_6	Q_8	
$\lambda =$	0	1	... 0 0 ...				Max \rightarrow
$0 =$			1				$-\frac{l}{a}$			$\frac{l}{a}$	
$0 =$	\vdots	\vdots		1			$\frac{l}{a}$	$-\frac{l}{a}$			
$0 =$	0	0			1			$\frac{l}{a}$	$-\frac{l}{a}$		
$0 =$	\vdots	\vdots				1			$\frac{l}{a}$	$-\frac{l}{a}$	
$0 =$	\vdots	0						-1		1	
$0 =$	0	-P		\dots	0	\dots	1		-1		
$0 =$	\vdots	$-P \cdot y_0$					$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	
$p_1 =$	Z_{f1}	\vdots	-1								
$p_3 =$	Z_{f3}	\vdots		-1				\dots	0	\dots	
$p_5 =$	Z_{f5}	0			-1						
$p_7 =$	Z_{f7}	\vdots				-1					
$p_2^+ =$	Q_{f2}						-1				
$p_2^- =$							1				
$p_4^+ =$	Q_{f4}	\vdots		\dots				-1			
$p_4^- =$		\vdots			0	\dots		1			
$p_6^+ =$	Q_{f6}	0							-1		
$p_6^- =$		\vdots							1		
$p_8^+ =$	Q_{f8}									-1	
$p_8^- =$										1	

Bild 4.5 : Tableau der Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen

Eine abweichende Darstellung der Aufgabe ist möglich, wenn die Gurtkräfte nach Gl. (4.6) explizit in Funktion der Schubkräfte angeschrieben werden. Die Gurtkräfte entfallen als unabhängige Variablen. Gleichzeitig werden die Gurtkräfte aus Gl. (4.6) in die Plastizitätsbedingungen (4.7) eingesetzt. Der Ersatz der Gurtkräfte kann auch im Tableau des Bildes 4.5 durch entsprechende Austauschschritte nachvollzogen werden. Für die weitere Lösung der Optimierungsaufgabe sind die Gurtkräfte nicht mehr nötig und können weggelassen werden. Die gekürzte Schreibweise ist in Bild 4.6 dargestellt.

	1	λ	Q_2	Q_4	Q_6	Q_8	
$\lambda =$	0	1	... 0 ...				→ Max
$0 =$	\vdots	0	-1			1	
$0 =$	0	-P	1		-1		
$0 =$	\vdots	$-P \cdot y_0$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	
$p_1 =$	Z_{f1}	\vdots	$-\frac{l}{a}$			$\frac{l}{a}$	
$p_3 =$	Z_{f3}	0	$\frac{l}{a}$	$-\frac{l}{a}$			
$p_5 =$	Z_{f5}	\vdots		$\frac{l}{a}$	$-\frac{l}{a}$		
$p_7 =$	Z_{f7}	\vdots			$\frac{l}{a}$	$-\frac{l}{a}$	
$p_2^+ =$	Q_{f2}		-1				
$p_2^- =$			1				
$p_4^+ =$	Q_{f4}	\vdots		-1			
$p_4^- =$		\vdots		1			
$p_6^+ =$	Q_{f6}	0			-1		
$p_6^- =$		\vdots			1		
$p_8^+ =$	Q_{f8}					-1	
$p_8^- =$						1	

Bild 4.6 : Reduziertes Tableau der Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen

4.3 Verträglichkeits- und Leistungsbedingungen.

Nach dem kinematischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie stellt jede Belastung, die einen kinematisch verträglichen Mechanismus hervorruft, einen oberen Grenzwert des Bruchwiderstandes dar.

In diesem Abschnitt wird ein Kragträger mit einer Einzellast am freien Ende ($x = 1$) belastet. In der Ebene senkrecht zur Balkenaxe (y - z -Ebene) interessieren deshalb die Gesamtdurchbiegungen $v^*(1)$, $w^*(1)$ und die Verdrehung $\vartheta^*(1)$ in diesem Schnitt. Wenn vorausgesetzt wird, dass diese Verformungsgrößen linear mit x anwachsen, so sind die Querverschiebungen der Querschnittswände nach Gl. (3.8) gegeben:

$$\left. \begin{aligned} v_2(x) &= \{w^*(1) + \frac{a}{2} \cdot \vartheta^*(1)\} \cdot \frac{x}{1} \\ v_4(x) &= \{-v^*(1) + \frac{a}{2} \cdot \vartheta^*(1)\} \cdot \frac{x}{1} \\ v_6(x) &= \{-w^*(1) + \frac{a}{2} \cdot \vartheta^*(1)\} \cdot \frac{x}{1} \\ v_8(x) &= \{v^*(1) + \frac{a}{2} \cdot \vartheta^*(1)\} \cdot \frac{x}{1} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Die Längsverschiebung eines Punktes u_p wurde in Kapitel 3 mit integralen Verformungsgrößen (Bild 3.1) beschrieben.

Diese Darstellung des Verformungszustandes bringt aber Schwierigkeiten mit sich, weil der Verformungszustand in einen ebenen Anteil und in einen Anteil aus dieser Ebene heraus (Wölbung) aufgeteilt wird. Der ebene Verformungszustand wird durch die Längsverschiebung dreier beliebiger Punkte fixiert. Es muss nun jedesmal festgehalten werden, auf welche drei Punkte die Parameter normiert sind. Zudem wurden im vorangehenden Abschnitt die integralen Gleichgewichtsbedingungen der Längskräfte durch solche der Ekelemente ersetzt. Es drängt sich deshalb auf, analog dazu die Verschiebung in Längsrichtung mit lokalen Verformungsparametern zu umschreiben. Als Variablen werden die Längsverschiebungen u_i der Kanten eingeführt. Die Verschiebung der Kante 1 ist in Bild 4.7(a) dargestellt. Wenn die Verschiebung über die Balkenlänge nicht ändert, so heisst das physikalisch, dass der Gurtstab nur im Einspannquerschnitt plastisch gedehnt wird. Die Wahl dieser neuen Bezugsgrößen hat den Vorteil, dass die Wölbung mathematisch einfach erfasst werden kann. Der Verformungszustand in Längsrichtung ist durch diese Parameter eindeutig bestimmt.

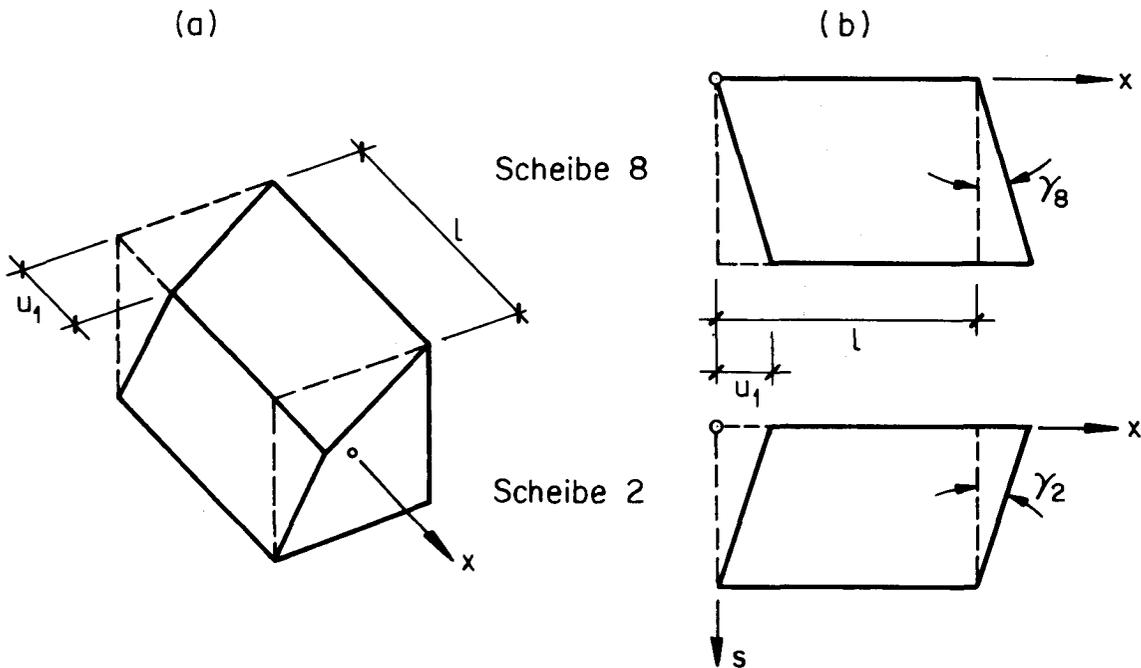


Bild 4.7 : (a) Verschiebung u_1 der Kante 1
(b) Schiebungen der Nachbarscheiben

Die Schiebungen der Querschnittswände setzen sich nach Gl. (3.13) aus einem Anteil infolge der Längsverschiebungen und einem Anteil aus der Querverschiebung zusammen. Die Koppelung zwischen Längsverschiebung und Schiebung ist aus Bild 4.7(b) ersichtlich. Mit Gl. (3.13) und unter Bezug von Gl. (4.11) heissen die Schiebungen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= \left\{ w^*(1) + \frac{a}{2} \cdot \vartheta^*(1) \right\} \cdot \frac{1}{l} - (u_1 - u_3) \cdot \frac{1}{a} \\ \gamma_4 &= \left\{ -v^*(1) + \frac{a}{2} \cdot \vartheta^*(1) \right\} \cdot \frac{1}{l} - (u_3 - u_5) \cdot \frac{1}{a} \\ \gamma_6 &= \left\{ -w^*(1) + \frac{a}{2} \cdot \vartheta^*(1) \right\} \cdot \frac{1}{l} - (u_5 - u_7) \cdot \frac{1}{a} \\ \gamma_8 &= \left\{ v^*(1) + \frac{a}{2} \cdot \vartheta^*(1) \right\} \cdot \frac{1}{l} - (u_7 - u_1) \cdot \frac{1}{a} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Die Schiebungen sind über die Balkenlänge konstant.

Ein Tragwerk wird dann instabil, wenn die Leistung der äusseren Kräfte L_a grösser ist als die Dissipationsleistung L_d der inneren Kräfte:

$$L_a - L_d \geq 0 \quad (4.13)$$

Als äussere Kraft greift nur die exzentrische Einzellast am freien Ende des Trägers an. Die Leistung dieser Kraft bei Beginn der plastischen Verformung lautet somit:

$$L_a = \lambda P \cdot \{\dot{w}^*(1) + y_0 \cdot \dot{\vartheta}^*(1)\} \quad (4.14)$$

Die Dissipationsleistung ist in Abschnitt 1.4 definiert:

$$L_d = \int_V \sigma \cdot \dot{\epsilon} \cdot dV + \int_V \tau \cdot \dot{\gamma} \cdot dV \quad (4.15)$$

Die Längsspannungen sind zu Gurtkräften konzentriert. Damit geht das erste Volumenintegral für die Gurtstäbe in folgenden Ausdruck über:

$$L_d = \sum_1^m \int_0^l Z_i \cdot \dot{\epsilon}_i \cdot dx \quad (4.16)$$

Zudem sind die plastischen Dehnungen auf den Einspannquerschnitt begrenzt. Das Integral wird durch das Produkt aus Gurtkraft und Zuwachs der Kantenverschiebung ersetzt:

$$L_d = \sum_1^m Z_i \cdot \dot{u}_i \quad (4.17)$$

Einerseits ist die Dissipationsleistung bei starr-plastischem Materialverhalten eine nicht-negative Grösse. Andererseits sollen im Hinblick auf die Lösung der Optimierungsaufgabe nur positiv-definite Variablen eingeführt werden. Der Zuwachs der Kantenverschiebungen \dot{u}_i ist immer positiv. Wenn die Gurtkräfte nur im Zugbereich beschränkt werden, ist obige Bedingung für die Dissipationsleistung der Gurtkräfte erfüllt. Hingegen sind bei positiv und negativ fliessendem Schub positive und negative Schiebungsinkremente $\dot{\gamma}$ möglich. Aus diesem Grunde ist für die Bestimmung der Dissipationsleistung der Schubkräfte eine Aufteilung zweckmässig. Bei über die Balkenlänge konstanter Schiebung und bei gleichem Widerstand gegenüber positiven und negativen Schubkräften wird das zweite Integral in Gl. (4.15) erfasst durch die Summation:

$$L_d = \sum_2^n Q_{fk} \cdot \dot{\gamma}_k^+ \cdot l + \sum_2^n Q_{fk} \cdot \dot{\gamma}_k^- \cdot l \quad (4.18)$$

Eine physikalische Deutung dieser Aufteilung lässt sich anhand der linearen Fließfigur für die Schubwand gemäss Bild 4.8 herleiten. Die Verformungsgeschwindigkeiten werden in dieser Fließfigur als Vektoren eingetragen. Nach dem Theorem des plastischen Potentials stehen diese Vektoren senkrecht auf der Begrenzung der möglichen Spannungszustände. Für positive Schubfließkräfte zeigt der Vektor der Schiebungsgeschwindigkeit in positiver Richtung, für negative Schubfließkräfte in negativer Richtung. Die Dissipationsleistung wird als skalares Produkt der Vektoren der Schubfließkraft und der Schiebungsgeschwindigkeit definiert. Die Dissipationsleistung ist sicher positiv. In Gl. (4.18) werden also lediglich die Absolutwerte der Vektoren

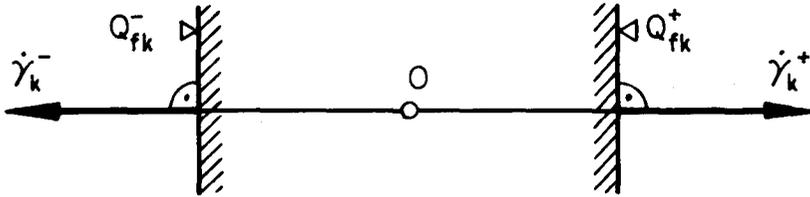


Bild 4.8 : Lineare Fließfigur der k-ten Querschnittswand

in Betracht gezogen, während die Vorzeichen als Kopfzeiger die Richtung der Vektoren andeuten.

Mit dem kinematischen Grenzwertsatz wird eine obere Schranke der Traglast festgelegt. Es wird also der kleinste der möglichen Werte des Traglastfaktors λ gesucht. Nach Einsetzen der Gl. (4.14), Gl. (4.17) und Gl. (4.18) in Gl. (4.13) kann der Traglastfaktor explizit angeschrieben werden:

$$\lambda = \frac{\sum_1^m f_i \cdot \dot{u}_i + \sum_2^n Q_{fk} \cdot \dot{\gamma}_k^+ \cdot 1 + \sum_2^n Q_{fk} \cdot \dot{\gamma}_k^- \cdot 1}{P \cdot \dot{w}^*(1) + P \cdot y_o \cdot \dot{\delta}^*(1)} \rightarrow \text{Min.} \quad (4.19)$$

Weil die absolute Grösse der Verformungsgeschwindigkeiten irrelevant ist, wird der Nenner in Gl. (4.19) normiert:

$$P \cdot \dot{w}^*(1) + P \cdot y_o \cdot \dot{\delta}^*(1) = 1 \quad (4.20)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (4.20) geht Gl. (4.19) über in:

$$\sum_1^m f_i \cdot \dot{u}_i + \sum_2^n Q_{fk} \cdot \dot{\gamma}_k^+ \cdot 1 + \sum_2^n Q_{fk} \cdot \dot{\gamma}_k^- \cdot 1 \rightarrow \text{Min.} \quad (4.21)$$

In dieser Form wird die Zielfunktion in die Optimierungsaufgabe aufgenommen.

Die Optimierungsaufgabe ist in Tableauform in Bild 4.9 zusammengestellt. Als Nebenbedingungen erscheinen die Normierung nach Gl. (4.20) und die Bedingungen nach Gl. (4.12). Dieses Tableau entspricht der transponierten Schreibweise des reduzierten statischen Programmes gemäss Bild 4.6. Unter dieser Bedingung ist die Minimaufgabe der kinematischen Methode dual zur Maximumaufgabe des statischen Grenzwertsatzes. Die Dualitätsregeln der linearen Programmierung sagen für solche Fälle aus, dass beide Aufgaben als Lösung denselben Extremalwert einnehmen. Physikalisch bedeutet diese Aussage, dass die beiden Grenzen der Traglast zusammenfallen und die gefundene Lösung identisch mit der Traglast ist.

	\dot{v}^*	\dot{w}^*	\dot{v}^*	\dot{u}_1	\dot{u}_3	\dot{u}_5	\dot{u}_7	$\dot{\gamma}_2^+ l$	$\dot{\gamma}_2^- l$	$\dot{\gamma}_4^+ l$	$\dot{\gamma}_4^- l$	$\dot{\gamma}_6^+ l$	$\dot{\gamma}_6^- l$	$\dot{\gamma}_8^+ l$	$\dot{\gamma}_8^- l$	
λ	0	... 0 ...		Z_{f1}	Z_{f3}	Z_{f5}	Z_{f7}	Q_{f2}	Q_{f4}	Q_{f6}	Q_{f8}					Min
0 =	1	0	$-P$	$-P \cdot y_0$... 0 0 ...								
0 =	.	1	$\frac{a}{2}$	$-\frac{l}{a}$	$\frac{l}{a}$			-1	1							
0 =	⋮	-1	$\frac{a}{2}$	$-\frac{l}{a}$	$\frac{l}{a}$					-1	1					
0 =	0	-1	$\frac{a}{2}$			$-\frac{l}{a}$	$\frac{l}{a}$					-1	1			
0 =	⋮	1	$\frac{a}{2}$	$\frac{l}{a}$			$-\frac{l}{a}$							-1	1	

Bild 4.9 : Tableau der Leistungs- und Verträglichkeitsbedingungen

4.4 Lösung für zentrische Einzellast

Die bisherige Formulierung der Optimierungsaufgaben nach dem statischen bzw. kinematischen Grenzwertsatz gilt für allgemeine Gurtfließkräfte Z_{fi} und für allgemeine Schubwiderstände Q_{fk} der Querschnittswände. Hier soll jedoch ein Beispiel mit folgender Einschränkung:

$$\left. \begin{aligned} Z_{f1} &= Z_{f3} = Z_{f5} = Z_{f7} = Z_f \\ Q_{f2} &= \frac{Q_f}{v} ; Q_{f4} = Q_{f6} = Q_{f8} = Q_f \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

für die zentrische Einzellast am Ende des Kragträgers:

$$\left. \begin{aligned} Q_z &= P \\ T &= P \cdot y_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

durchgerechnet werden.

Die Optimierungsaufgabe, wie sie in Bild 4.6 für die Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen zusammengestellt ist, enthält neben dem Traglastfaktor λ vier eigentliche Variablen Q_k . Zu diesen freien Variablen sind die zwölf beschränkten Schlupfvariablen p_i bzw. p_k hinzuzuzählen. Diesen siebzehn Unbekannten stehen fünfzehn Gleichungen gegenüber. Für diesen Fall sagt

das Simplex-Theorem aus, dass die Zielfunktion einen Maximalwert einnimmt, wenn zwei Variablen null sind. Eine solche Lösung wird Basislösung genannt. Die Traglast wird sicher maximal, wenn möglichst viele Elemente im Träger die Fließgrenze erreichen. Es werden also zwei Schlupfvariablen zu null vorausbestimmt. Im Bruchzustand fließen zwei Elemente.

Am Kopf des Tableau der kinematischen Aufgabe (Bild 4.9) stehen fünfzehn Variablen. Diese sind in fünf Gleichungen miteinander verknüpft. In der Basislösung sind nach dem Simplex-Theorem zehn Variablen null. Die Zielfunktion wird sicher minimal, wenn möglichst viele Elemente starr bleiben. Von den zwölf \dot{u}_i bzw. $\dot{\gamma}_k$ werden somit zehn zum voraus null gesetzt. Im Bruchzustand fließen zwei Elemente. Diese Schlussfolgerung stimmt mit der aus der statischen Methode gefundenen überein.

In einem ersten Rechengang wird angenommen, dass zwei Querschnittswände schieben. Im vorliegenden Beispiel erreicht zuerst die schwächste Scheibe 2 die Fließgrenze ($p_2^+ = 0$). In diesem Zustand ist aber kein Mechanismus möglich. Die Last kann weiter gesteigert werden, bis auch Scheibe 6 fließt ($p_6^- = 0$). Die Traglast heisst dann:

$$\frac{P}{Q_f} = \left(1 + \frac{1}{v}\right) \quad (4.24)$$

Die Lösung nach Gl. (4.24) ist in Bild 4.11 dargestellt. Die Schubkräfte nehmen die Werte:

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= \frac{1}{v} \cdot Q_f \\ Q_6 &= -Q_f \\ Q_4 &= Q_8 = \frac{1}{2} \cdot Q_f \left(1 - \frac{1}{v}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

ein und die Gurtkräfte steigen an bis:

$$\left. \begin{aligned} Z_3 &= -Z_1 = \frac{1}{2} \cdot Q_f \cdot \frac{1}{a} \left(1 + \frac{3}{v}\right) \\ Z_7 &= -Z_5 = \frac{1}{2} \cdot Q_f \cdot \frac{1}{a} \left(3 - \frac{1}{v}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Die Gurt- und Schubkräfte sind im Bruchzustand wohl definiert. Unbestimmt bleiben aber die Schnittkräfte T_w und M_w . Wie schon erwähnt, hängt deren Grösse von den Integrationskonstanten in Gl. (2.8) bzw. Gl. (2.10) ab. Mit Sicherheit kann nur gesagt werden, dass ein Wölb-torsionsmoment und ein Wölbmoment vorhanden sind. Fehlt wie hier eine äussere Torsionsbelastung, so wird das Wölb-torsionsmoment durch das Torsionsmoment infolge des konstanten Schubflusses aufgehoben.

Die vollständige Lösung der kinematischen Aufgabe ist nicht notwendig. Sie wird nur soweit vorangetrieben, wie sie für die Zusammenhänge der Verformungsgrößen im Bruchzustand von Interesse ist. Beim betrachteten Schubmechanismus ($\dot{\gamma}_2^+ > 0; \dot{\gamma}_6^- > 0$) lautet die plastische Zunahme der Querverschiebung im Endquerschnitt:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}^* &= \frac{1}{2} \cdot (\dot{\gamma}_2^+ - \dot{\gamma}_6^-) \\ \dot{w}^* &= \frac{1}{2} \cdot (\dot{\gamma}_2^+ + \dot{\gamma}_6^-) \\ \dot{\delta}^* &= \frac{1}{2} \cdot (\dot{\gamma}_2^+ - \dot{\gamma}_6^-) \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

oder nach Einsetzen von $\dot{\gamma}_2^+ = \dot{\gamma}_6^-$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}^* &= 0 \\ \dot{w}^* &= 1 \cdot \dot{\gamma}_2^+ \\ \dot{\delta}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Die gefundene Querverschiebung ist in Bild 4.10(a) dargestellt.

Schubmechanismus

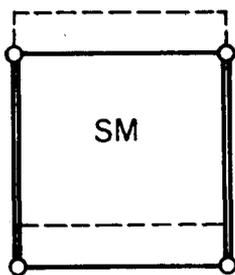
$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_2^+ > 0 \\ \dot{\gamma}_6^- > 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{v}^* &= 0 \\ \dot{w}^* &> 0 \\ \dot{\delta}^* &= 0 \end{aligned}$$

Wölbmechanismus

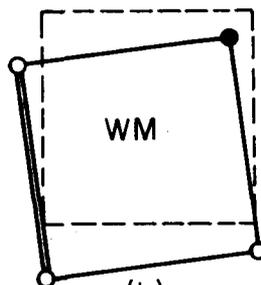
$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_2^+ > 0 \\ \dot{\gamma}_7^- > 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{v}^* &> 0 \\ \dot{w}^* &> 0 \\ \dot{\delta}^* &> 0 \end{aligned}$$

Biegemechanismus

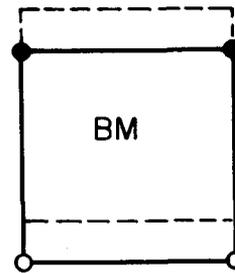
$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 > 0 \\ \dot{u}_7 > 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{v}^* &= 0 \\ \dot{w}^* &> 0 \\ \dot{\delta}^* &= 0 \end{aligned}$$



(a)



(b)



(c)

- fließende
- starre

Gurtstäbe

- == fließende
- starre

Scheiben

Bild 4.10: Querverschiebung am freien Ende bei zentrischer Belastung

Das Gleichungssystem nach Gl. (4.26) zeigt, dass mit zunehmender Länge des Trägers die Gurtkräfte wachsen. Am stärksten beansprucht wird der Gurtstab 7. Die Gurtkraft Z_7 kann aber niedrig gehalten werden, wenn die Schubkraft Q_6 herabgesetzt wird. In der neuen Basislösung werden deshalb die Schlupfvariablen p_2^+ und p_7 zu null vorausbestimmt. Die Lösung der Optimierungsaufgabe heisst in diesem Fall:

$$\text{Traglast: } \frac{P}{Q_f} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{v} + \frac{Z_f \cdot a}{Q_f \cdot l} \right) \quad (4.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Schubkräfte: } Q_2 &= \frac{Q_f}{v} \\ Q_6 &= -\frac{1}{3} \left(\frac{Q_f}{v} + 2Z_f \cdot \frac{a}{l} \right) \\ Q_4 = Q_8 &= \frac{1}{3} \left(\frac{Q_f}{v} - Z_f \cdot \frac{a}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Gurtkräfte: } Z_3 = -Z_1 &= \frac{1}{3} \left(Z_f - 4 \cdot \frac{Q_f}{v} \cdot \frac{1}{a} \right) \\ Z_7 = -Z_5 &= Z_f \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Die auf die Schubfliesskraft bezogene Traglast nach Gl. (4.24) und Gl. (4.29) ist in Bild 4.11 für verschiedene v in Funktion der Länge des Trägers aufgetragen. Die Traglast nimmt erwartungsgemäss mit zunehmender Länge ab.

Der plastische Zuwachs der Querverschiebung steht mit der Kantenverschiebung \dot{u}_7 und der Schiebung $\dot{\gamma}_2^+$ in folgender Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}^* &= -\frac{1}{2a} \cdot \dot{u}_7 + \frac{1}{2} \cdot \dot{\gamma}_2^+ \\ \dot{w}^* &= \frac{1}{2a} \cdot \dot{u}_7 + \frac{1}{2} \cdot \dot{\gamma}_2^+ \\ \dot{\delta} &= -\frac{1}{a^2} \cdot \dot{u}_7 + \frac{1}{a} \cdot \dot{\gamma}_2^+ \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Es gilt aber auch:

$$\dot{\gamma}_2^+ = \frac{2\dot{u}_7}{a} \quad (4.33)$$

Mit dieser Bedingung gehen Gl. (4.32) über in:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}^* &= \frac{1}{2a} \cdot \dot{u}_7 \\ \dot{w}^* &= \frac{31}{2a} \cdot \dot{u}_7 \\ \dot{\delta}^* &= \frac{1}{a^2} \cdot \dot{u}_7 \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

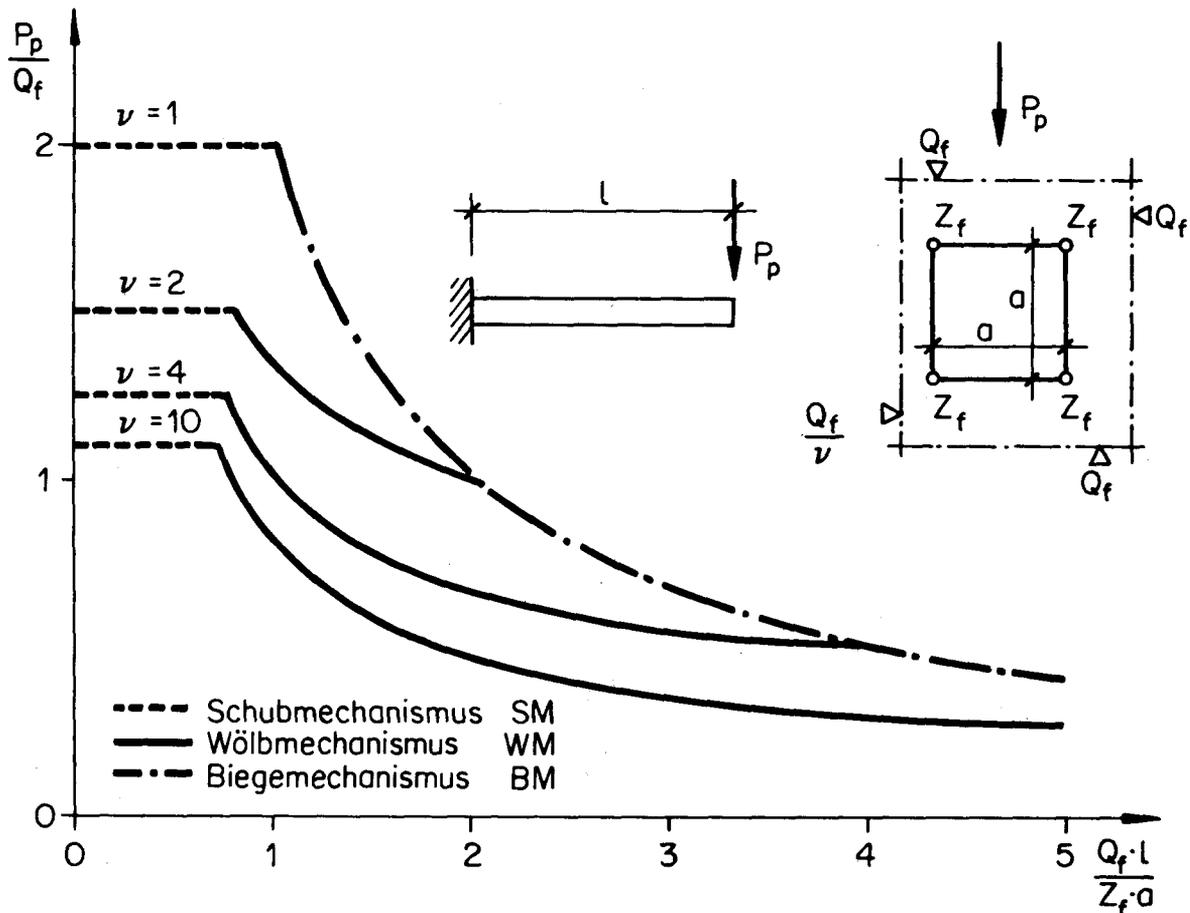


Bild 4.11 : Traglast eines Kragträgers mit zentraler Einzellast

Da der Querschnitt im Bruchzustand nicht eben bleibt, wird dieser Mechanismus als Wölbmechanismus bezeichnet. Die zugehörige Querverschiebung ist in Bild 4.10(b) wiedergegeben. Wichtig ist beim Wölbmechanismus, dass der Träger trotz zentraler Belastung verdreht wird.

Zuletzt wird die Möglichkeit untersucht, dass bei langen Trägern die Querschnittswände nicht bis zum plastischen Widerstand beansprucht werden können, weil vorher die beiden Gurtstäbe auf der Biegezugseite fließen ($p_1 = p_7 = 0$). Die Traglast kann sofort angeschrieben werden zu:

$$\frac{P_p}{Q_f} = 2 \frac{Z_f \cdot a}{Q_f \cdot l} \quad (4.35)$$

Sie ist in Bild 4.11 den beiden übrigen Lösungen gegenübergestellt. Die beiden vertikalen Wände sind gleich beansprucht. Die Schubkräfte Q_4 und Q_8 verschwinden. In diesem Falle ist das Wölbmoment null. Die Längsverschiebungen der Gurtstäbe bilden eine Ebene. Die Durchbiegung dieses Biegemechanismus ist in Bild 4.10(c) aufgezeichnet.

4.5 Lösung für reine Torsion

In diesem Abschnitt wird ein Träger mit denselben Fließbedingungen wie für die zentrische Einzellast (Gl. (4.22)) untersucht. Als äussere Last wird aber nur ein Torsionsmoment:

$$\left. \begin{aligned} Q_z &= P = 0 \\ T &= P \cdot y_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

eingeführt.

In einem ersten Schritt wird wiederum Schieben zweier Querschnittswände als Versagensursache angenommen. Sicher erreicht die schwächste Scheibe 2 zuerst die Fließgrenze ($p_2^+ = 0$) und erst anschliessend eine zweite. Die beiden übrigen Querschnittswände bleiben auch im Bruchzustand starr. Der Drehpunkt des Querschnittes im Bruchzustand muss im Schnittpunkt der starren Scheiben liegen. Fließen kann also nur eine der beiden benachbarten von Scheibe 2. Bei absoluter Gleichheit der Schubwiderstände kommen offensichtlich beide Querschnittswände 4 und 8 ins Fließen. Dass drei Schlupfvariablen null werden, steht jedoch im Widerspruch zur Aussage des Simplex-Theorems. Diese Erscheinung wird in der linearen Programmierung Degeneration genannt. Unter diesen Umständen besitzt das duale kinematische Programm eine Mehrfachlösung. Die physikalische Bedeutung soll am vorhandenen Beispiel erklärt werden. Zuerst seien p_2^+ und p_4^+ gleich null. Die Schlupfvariable p_8^+ nehme einen kleinen positiven Wert an (weil z.B. der Schubwiderstand Q_{f8} wenig grösser als Q_{f4} ist). Aus der statischen und kinematischen Aufgabe geht eine erste Lösung der Traglast hervor. Der Verformungsvektor (\dot{v}^* , \dot{w}^* , $\dot{\vartheta}^*$) ist eine Funktion von $\dot{\gamma}_2^+$ und $\dot{\gamma}_4^+$. In einem zweiten Rechengang werden p_2^+ und p_8^+ zu null vorausbestimmt. Das statische Programm und damit auch das kinematische Programm führen zu derselben Lösung der Traglast. Der Verformungsvektor setzt sich jetzt aber zusammen aus $\dot{\gamma}_2^+$ und $\dot{\gamma}_8^+$. Sind nun alle Schlupfvariablen p_2^+ , p_4^+ und p_8^+ gleichzeitig null, so sind unendlich viele Lösungen für den Verformungsvektor möglich. Jeder Vektor wird aus einer Linearkombination der beiden erstgenannten gebildet. Im Zuge der Lösung der Optimierungsaufgabe wird aus Rechengründen Fließen der Scheiben 2 und 4 angenommen. Die Umkehrung des statischen Programmes bringt als Lösung für die Traglast:

$$\frac{T}{Q_f \cdot a} = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \quad (4.37)$$

Die Lösung nach Gl. (4.37) ist in Bild 4.13 dargestellt. Die Schubkräfte sind offenbar und werden nicht angeschrieben. Die Gurtkräfte heissen:

$$Z_3 = Z_7 = -Z_1 = -Z_5 = Q_f \cdot \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) \quad (4.38)$$

Die teilweise Auflösung des kinematischen Programmes zeigt die Verknüpfung der Verformungsgrössen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}^* &= \frac{1}{2} \cdot (\dot{\gamma}_2^+ - 2\dot{\gamma}_4^+) \\ \dot{w}^* &= \frac{1}{2} \cdot \dot{\gamma}_2^+ \\ \dot{\vartheta}^* &= \frac{1}{a} \cdot \dot{\gamma}_2^+ \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Mit $\dot{\gamma}_2^+ = \dot{\gamma}_4^+$ geht dieses Gleichungssystem über in:

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}^* &= -v^* = \frac{1}{a} \cdot \dot{\gamma}_2^+ \\ \dot{\vartheta}^* &= \frac{1}{a} \cdot \dot{\gamma}_2^+ \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

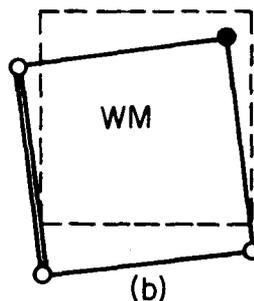
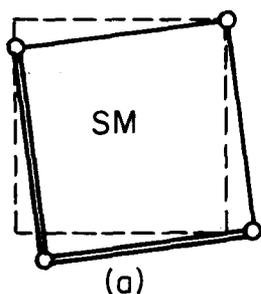
Die Querverschiebung nach Gl. (4.40) ist in Bild 4.12(a) dargestellt. Der Drehpunkt liegt dort im Eckpunkt 7. Eine andere mögliche Lage des Drehpunktes ist der Eckpunkt 5. Es kommt aber auch jeder Punkt auf der Querschnittswand 6 als Drehpunkt in Frage, weil eben das kinematische Programm eine Mehr-

Schubmechanismus

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_2^+ > 0 \\ \dot{\gamma}_4^+ > 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{v}^* < 0 \\ \dot{w}^* > 0 \\ \dot{\vartheta}^* < 0 \end{aligned}$$

Wölbmechanismus

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_2^+ > 0 \\ \dot{u}_7 > 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{v}^* > 0 \\ \dot{w}^* > 0 \\ \dot{\vartheta}^* > 0 \end{aligned}$$



- fließende Gurtstäbe
- starre Gurtstäbe
- ≡ fließende Scheiben
- starre Scheiben

Bild 4.12 : Querverschiebung am freien Ende bei reiner Torsion

fachlösung besitzt.

Gl. (4.38) macht klar, dass je länger der Träger ist, die Gurtstäbe stärker beansprucht werden. Eine Zunahme der Gurtkräfte ist solange möglich, bis die Gurtstäbe 3 und 7 fließen. Es liegt also wiederum das Problem der Degeneration vor. Im Hinblick auf die Interaktion Torsion - Querkraft wird vorausgesetzt, dass neben der Scheibe 2 nur der Gurtstab 7 fließt ($p_2^+ = 0$; $p_7 = 0$). Die Traglast folgt zu:

$$\frac{T_p}{Q_f \cdot a} = \frac{2}{\nu} + \frac{Z_f \cdot a}{Q_f \cdot l} \quad (4.41)$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in Bild 4.13 für verschiedene Werte von ν eingezeichnet. Die Schubkräfte erreichen die Werte:

$$\left. \begin{aligned} Q_2 = Q_6 &= \frac{Q_f}{\nu} \\ Q_4 = Q_8 &= \frac{Q_f}{\nu} + Z_f \cdot \frac{a}{l} \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Während die Gurtkräfte mit $\pm Z_f$ gegeben sind.

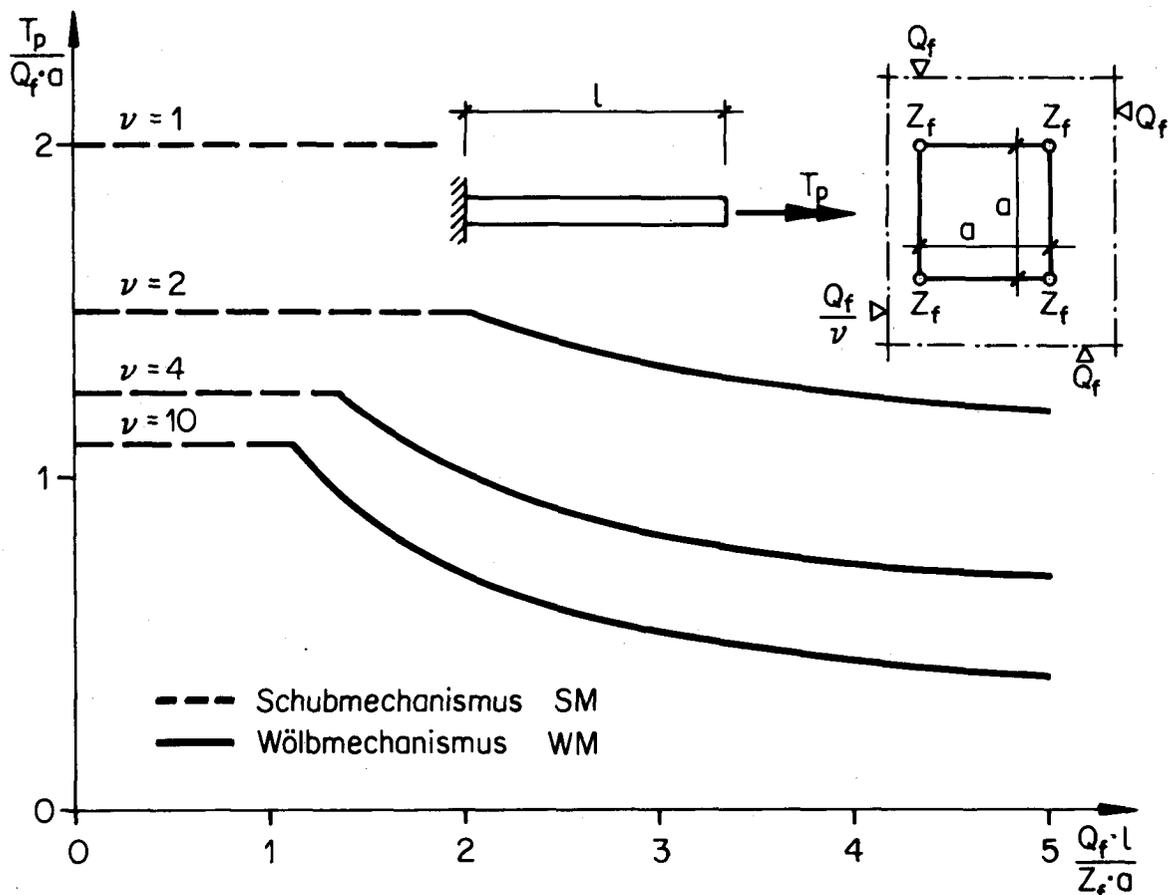


Bild 4.13: Tragfähigkeit eines Kragträgers bei Torsion

Im Bruchzustand wölbt der Querschnitt. Der plastische Zuwachs der Querverschiebung des Endquerschnittes ist an folgende Bedingungen gebunden:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}^* &= -\frac{1}{2a} \cdot \dot{u}_7 + \frac{1}{2} \cdot \dot{\gamma}_2^+ \\ \dot{w}^* &= \frac{1}{2a} \cdot \dot{u}_7 + \frac{1}{2} \cdot \dot{\gamma}_2^+ \\ \dot{\delta}^* &= -\frac{1}{a^2} \cdot \dot{u}_7 + \frac{1}{a} \cdot \dot{\gamma}_2^+ \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

oder aufgelöst nach \dot{u}_7 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}^* &= \frac{1}{2a} \cdot \dot{u}_7 \\ \dot{w}^* &= \frac{3l}{2a} \cdot \dot{u}_7 \\ \dot{\delta}^* &= \frac{1}{a^2} \cdot \dot{u}_7 \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

Die Querverschiebung infolge des Wölbmechanismus ist in Bild 4.12(b) aufgezeichnet. Aus Gl. (4.41) geht hervor, dass die Traglast für lange Träger dem Grenzwert:

$$T_p = 2 \cdot \frac{Q_f}{v} \cdot a \quad (4.45)$$

zustrebt. Der Schubfluss ist dann über den Umfang konstant. Das Wölb-torsionsmoment verschwindet. Trotzdem wölbt der Querschnitt sehr langer Träger. Hin-gegen kann kein Wölbwiderstand aufgebaut werden.

Im Stahlbetonbau ist üblicherweise die Längsbewehrung wesentlich stärker als die Bügelbewehrung. Zudem ist für die Ausbildung eines räumlichen Mechanismus eine gewisse Balkenlänge notwendig. Für die Abschätzung des Wölbwiderstandes sind somit für $Q_f \cdot l / Z_f \cdot a$ grössere Werte in Rechnung zu stellen. Für solche Werte lässt aber Gl. (4.41) erkennen, dass die Traglast nahe an den Grenzwert nach Gl. (4.45) herankommt.

4.6 Interaktion Torsion - Querkraft

Das Zusammenwirken von Torsion und Querkraft kann mit Hilfe eines Interaktionsdiagrammes dargestellt werden. In Bild 4.14 ist ein solches für den Kragträger mit konstantem Schubwiderstand über den Umfang ($\nu = 1$) aufgezeichnet.

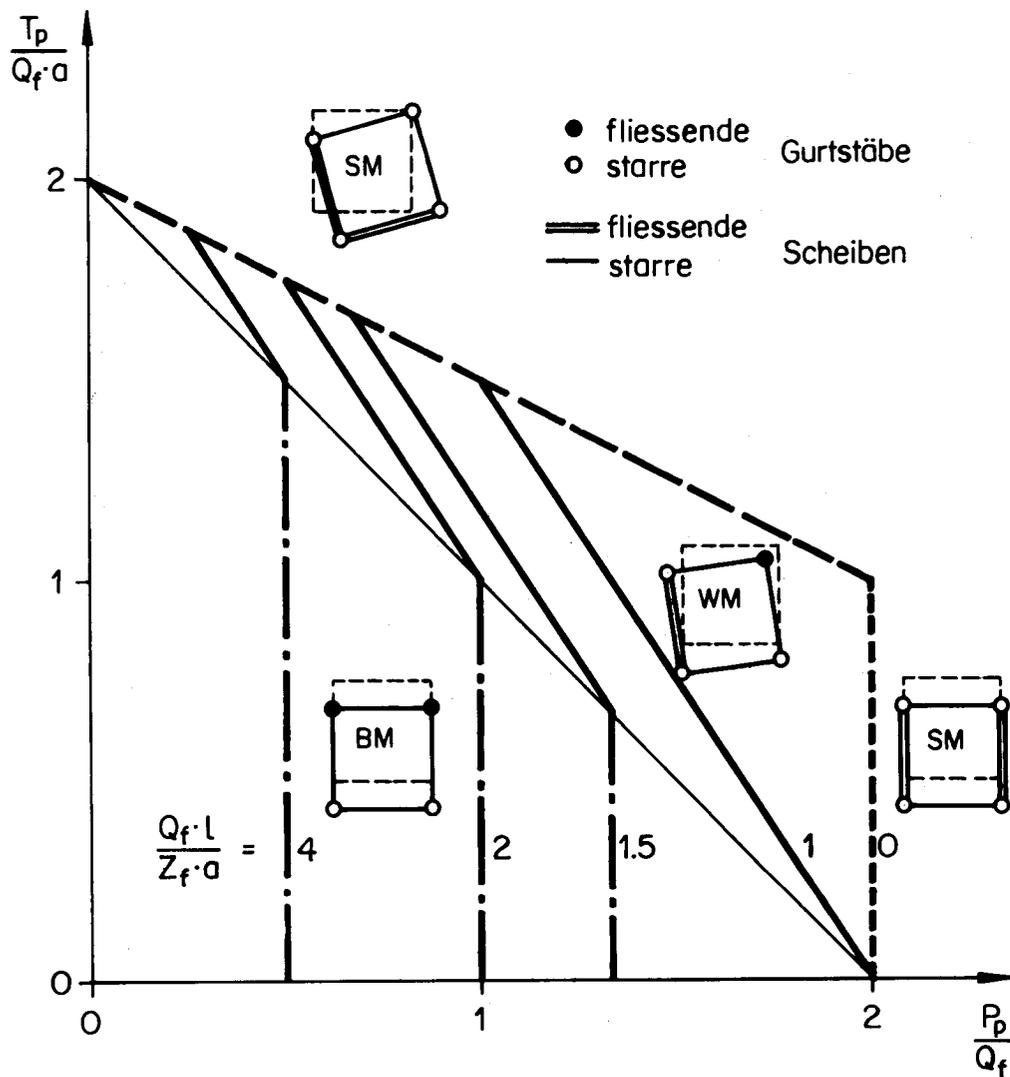


Bild 4.14: Interaktion Torsion- Querkraft für doppelsymmetrischen Querschnitt ($\nu = 1$)

Kurze Träger versagen aufgrund eines Schubmechanismus. Bei kleinem Torsionsmoment schieben die Querschnittswände 2 und 6. Die Verdrehung $\dot{\vartheta}^*$ ist nach Gl. (4.28) null. Da der Vektor der Verformungsgeschwindigkeiten senkrecht auf der Fließfigur steht, ist die Traglast bei diesem Mechanismus unabhängig von der Torsionsbelastung. Oder anders gesagt: bei einer Verschiebung in Richtung der z-Axe leistet das Torsionsmoment keine Arbeit. Dieses beeinflusst somit die Schubtragfähigkeit nicht. Bei überwiegender Torsion bleibt die Scheibe 6 starr, hingegen kommt die Querschnittswand 4 ins Fließen. Der Träger wird verdreht. Die Traglast ändert mit variablem Verhältnis Torsion zu Querkraft. Mit zunehmender Länge des Trägers erreicht die Gurtkraft Z_7 die Fließgrenze. Der Träger wölbt. Ueberschreitet die Länge einen vom Verhältnis Torsion zu Querkraft abhängigen Wert, dann wächst die Biegebeanspruchung so weit an, dass auch der Gurtstab 1 fließt. Der Träger versagt infolge eines Biegemechanismus.

Vom Bruchwiderstand eines Einzelquerschnittes auf die Tragfähigkeit des Gesamttragwerkes kann auch bei statisch bestimmten Tragwerken nur geschlossen werden, wenn der Querschnitt eben bleibt. Also wenn ein Schub- oder Biegemechanismus das Versagen einleitet. Im Falle eines Schubmechanismus tritt wohl ein Wölbmoment auf, dieses wird aber für das Versagen nicht massgebend. Die Plastizitätsbedingung wird immer erfüllt und kann weggelassen werden. Beim Biegemechanismus verschwindet das Wölbmoment. Die entsprechende Gleichgewichtsbedingung ist trivial. Wölbt der Träger jedoch, so muss unbedingt das Gesamttragwerk betrachtet werden.

4.7 Profilverformung und Krafteinleitung

Im Abschnitt über das statische Verhalten eines Kragträgers mit quadratischem Querschnitt wurde die grundlegende Annahme aufgestellt, dass die Schubkräfte Q_k in Längsrichtung nicht ändern. Diese Annahme soll im folgenden überprüft werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Träger am freien Ende nur mit einem Torsionsmoment belastet ist.

Das Torsionsmoment erzeugt Schubkräfte, z.B. solche nach Bild 4.15(a). Die einzelnen Schubkräfte können durchaus von einem Schnitt zum andern zu- oder abnehmen. Dadurch wird aber das Stabelement durch eine Kräftegruppe beansprucht, die ohne äussere Torsionsbelastung auf das Stabelement in sich im Gleichgewicht steht (Bild 4.15(b)). Diese profilverformende Kräftegruppe muss entweder mit dem Plattenwiderstand der Querschnittswände oder aber mit Queraussteifungen aufgenommen werden.

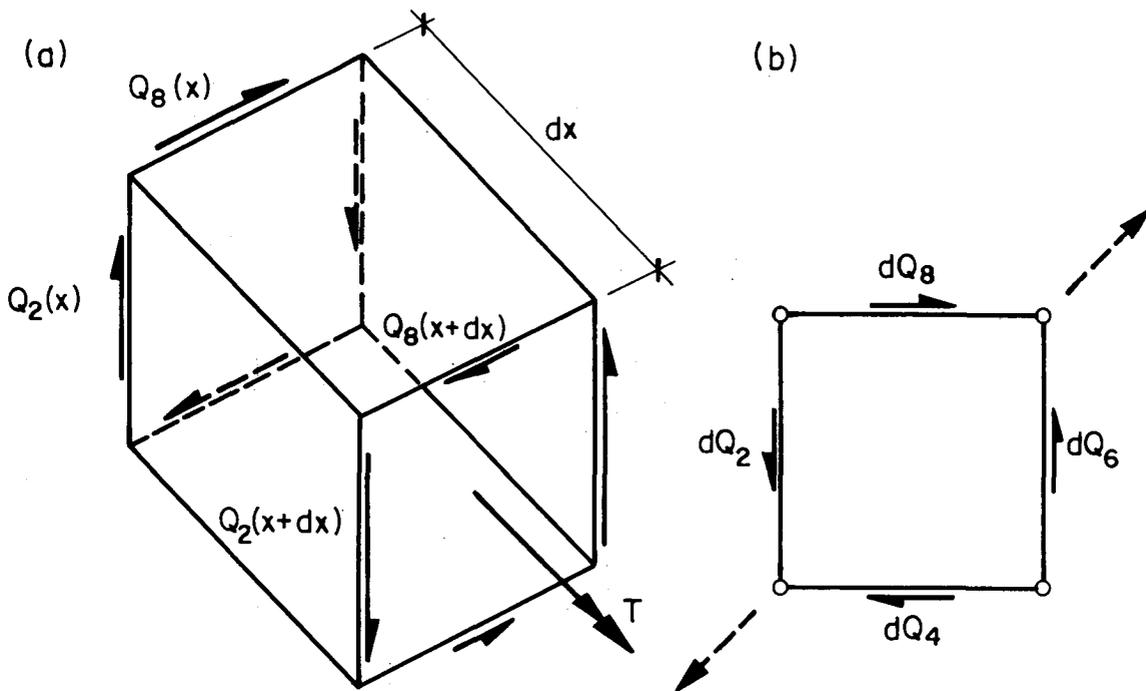


Bild 4.15: (a) In Längsrichtung veränderlicher Schubfluss
(b) Profilverformende Kräftegruppe

Ob überhaupt eine profilverformende Kräftegruppe zwischen Einspannquerschnitt und freiem Ende auf den Träger wirkt, wird mit Hilfe kinematischer und statischer Überlegungen untersucht. Wie in Abschnitt 4.5 gezeigt wurde, muss bei Querschnittserhaltung im Bruchzustand mindestens eine Scheibe des quadratischen Querschnittes über die ganze Trägerlänge schieben. Die Schubkraft erreicht dort die Schubfließkraft. Nach dem Fließgesetz in Bild 4.3 wird die Schubfließkraft durch die Beanspruchung der Gurtstäbe nicht beeinflusst. Die Schubkraft in der schiebenden Querschnittswand ist also konstant. Ist eine Schubkraft bekannt, dann können die restlichen drei Schubkräfte mit den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden. Bei konstanten Schnittkräften ändern auch diese Schubkräfte nicht in Längsrichtung. Querbiegemomente werden nicht aufgebaut.

Die bisher untersuchte Lösung setzt voraus, dass das Torsionsmoment über einen solchen Schubfluss eingeleitet wird, wie er im Bruchzustand über den Umfang verteilt auftritt. Dies bedingt eine Queraussteifung im Lastquerschnitt, die im übrigen auch die Querschnittsform erhält. Fehlt diese Queraussteifung, so muss der Träger als Schalentragerwerk betrachtet werden. Eine Untersuchung über das Verhalten im elastischen Zustand ist z.B. in [8] oder [9] beschrieben. Für die Untersuchung im plastischen Bereich wird der Träger als Gelenkfaltwerk idealisiert.

Untersucht wird ein Gelenkfaltwerk mit quadratischem Querschnitt und gleich starken Gurtstäben ($Z_{f1} = Z_{f3} = Z_{f5} = Z_{f7} = Z_f$). Auch ist der Schubwiderstand gleichmässig über den Umfang verteilt ($v = 1$). An diesem Tragwerk wird das Torsionsmoment wie folgt über die Querschnittswände eingeleitet:

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q_6 = (1-\xi) \cdot \frac{T}{a} \\ Q_4 &= Q_8 = \xi \cdot \frac{T}{a} \end{aligned} \quad (4.46)$$

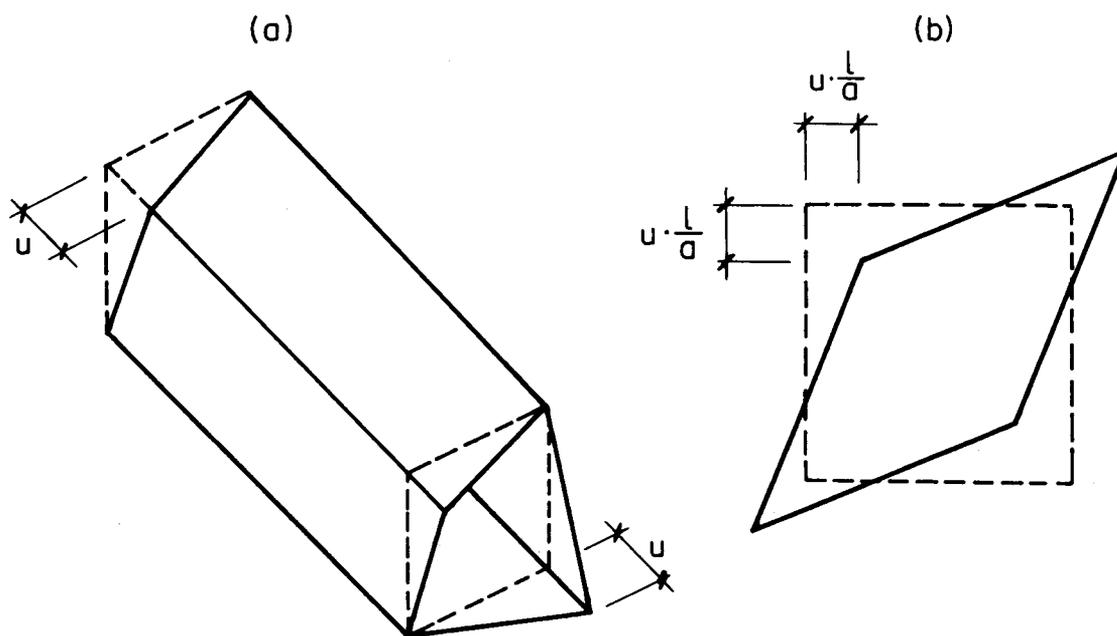


Bild 4.16: (a) Kantenverschiebungen u .
(b) Profilverformung im Schnitt $x = l$

Q_2 sei grösser als Q_4 ; es gilt also:

$$0 < \xi < 0,5 \quad (4.47)$$

Bild 4.16 zeigt einen möglichen Mechanismus bei ungehinderter Profilverformung. Fließen zweier Gurtstäbe führt zum Bruch, ohne dass eine Scheibe schiebt. Das Torsionsbruchmoment wird nach Einsetzen von Gl. (4.46) in Gl. (4.6) errechnet zu:

$$T_p = Z_f \cdot \frac{a^2}{l} \cdot \frac{1}{(1-2\xi)} \quad (4.48)$$

oder in normierter Form:

$$\frac{T_p}{Q_f \cdot a} = \frac{Z_f \cdot a}{Q_f \cdot l} \cdot \frac{1}{(1-2\xi)} \quad (4.49)$$

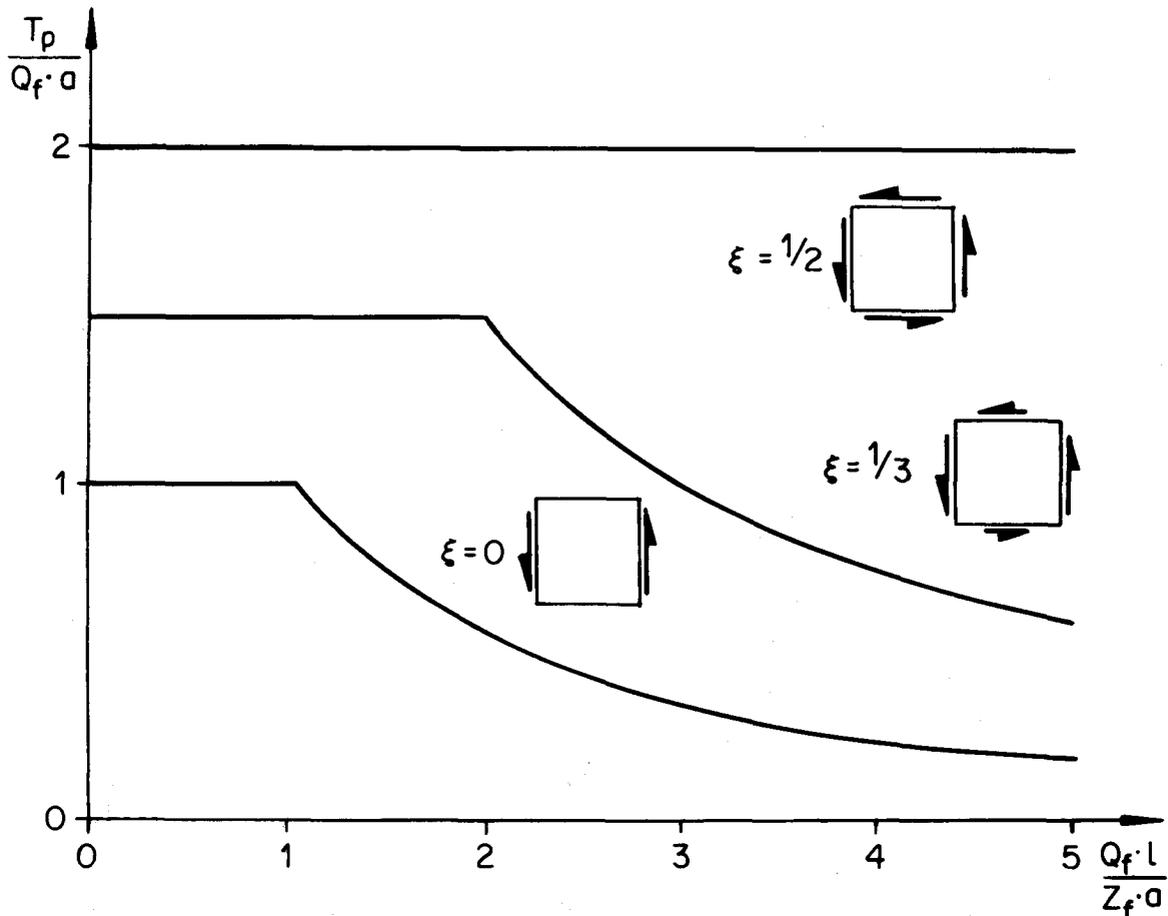


Bild 4.17: Tragfähigkeit eines Kragträgers auf Torsion bei möglicher Profilverformung

In Bild 4.17 ist der Verlauf der Tragfähigkeit nach Gl. (4.49) für verschiedene ξ dargestellt. Daraus geht hervor, dass sehr lange Gelenkfaltwerke bei ungleichmässiger Schubverteilung kein Torsionsmoment übertragen können. Demgegenüber strebt die Tragfähigkeit von Trägern mit verhinderter Profilverformung dem Grenzwert nach Gl. (4.45) zu, weil beim ausgesteiften Tragwerk im Bruchzustand mindestens einer Scheibe eine Schiebung aufgezwungen wird.

Zusätzlich muss die Plastizitätsbedingung für die Querschnittswände erfüllt werden. Demzufolge kann das Torsionsbruchmoment den Wert:

$$\frac{T_p}{Q_f \cdot a} = \frac{1}{(1-\xi)} \quad (4.50)$$

nicht überschreiten. Der Träger versagt infolge eines Schubmechanismus. Die Geraden nach Gl. (4.50) sind in Bild 4.17 ebenfalls eingezeichnet.

Wird das Torsionsmoment als konstanter Schubfluss ($\xi = 0,5$) aufgebracht, so ist nur ein Schubmechanismus möglich. Es schieben alle Querschnittswände. Die Querschnittsform bleibt in diesem Spezialfall erhalten. Die Tragfähigkeit entspricht erwartungsgemäss derjenigen eines Tragwerkes mit verhinderter Profilverformung (vgl. Bild 4.13; $v = 1$).

5. SCHUBWANDELEMENT AUS STAHLBETON

5.1 Bruchmodell

Die Bestimmung der Traglast des polygonalen Querschnittes mit vereinfachter Fließbedingung stellt eine erste Näherung der Traglast prismatischer Stahl- und Spannbetonbalken dar. In Wirklichkeit sind die Längskräfte der Gurtstäbe und die Querkkräfte der Schubwände miteinander verknüpft. Zur Untersuchung dieser gegenseitigen Beeinflussung wird eine einzelne Schubwand des Kasten-trägers herausgeschnitten und näher untersucht. Die Querschnittswand werde durch eine Schubkraft Q und eine zentrische Zugkraft N beansprucht. Während diese Kräfte im homogenen Zustand der Scheibe ein Spannungssystem hervor-rufen, bildet sich nach Rissbildung ein neues Tragsystem aus. Dieses Trag-system wird mit einer Fachwerkscheibe nachgebildet (Bild 5.1). An diesem physikalischen Betrachtungsmodell wird die Traglast der Schubwand theoretisch erfasst (vgl. auch [10]). In dieser Fachwerkscheibe bildet die Längsbewehrung die Gurtung, die Bügel im Abstand s wirken als Pfosten und der Beton überträgt die Strebenkräfte. Die Streben sind unter dem Winkel α gegenüber

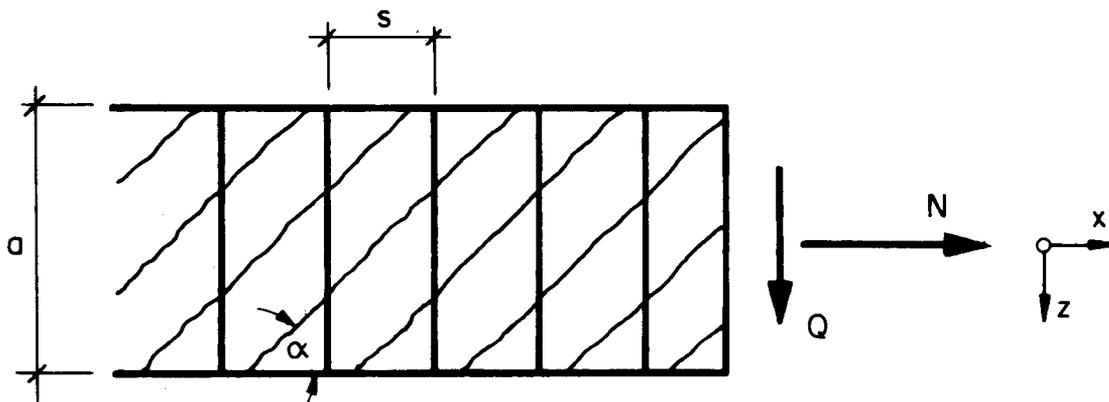


Bild 5.1: Bruchmodell der Schubwand

der Scheibenaxe geneigt. Die Neigung α wird sowohl über die Länge als auch über die Höhe des Schubwandelementes als konstant angenommen. Und zwar stellt sich die Neigung so ein, dass zwischen den Fachwerkgliedern eine Kräfteumlagerung stattfindet und Versagen der Schubwand dann eintritt, wenn zwei der drei Komponenten die Bruch- bzw. Fließgrenze erreichen. Die Bedingungen für diese Kräfteumlagerung werden im nächsten Abschnitt näher untersucht.

Im weiteren werden unterarmierte Schubwände mit starr-plastischem Materialverhalten der Fachwerkglieder vorausgesetzt. Versagen der Schubwand tritt also ein, wenn die Bügel und ein Gurtstab fließen. Der Beton soll nicht mass-

gebend werden. Versagen des Betons wird in der Regel dadurch vermieden, dass eine obere Schubspannungsgrenze beachtet wird. Die Diagonalen können somit unbeschränkt die aus dem Gleichgewicht resultierenden Kräfte aufnehmen und die Betonstauchungen können bei starr-plastischem Materialverhalten vernachlässigt werden.

5.2 Umlagerung der Diagonalenneigung

Nach der Rissbildung werden Zugspannungen und damit Dehnungen der Bewehrung erzeugt. Diese Dehnungen wiederum haben Relativbewegungen senkrecht und entlang der Rissufer zur Folge. Die Verzahnung der Rissufer verhindert jedoch ein widerstandsloses Gleiten der Druckdiagonalen, es werden Schubspannungen induziert (Bild 5.2). Die Ueberlagerung der induzierten Schubspannungen zu den Diagonaldruckkräften führt zu einer Neigungsänderung der Diagonalen, die bei genügender Grösse neue, anders geneigte Risse zur Folge hat. Die Strebenneigung wird sich so einspielen, dass sich die Risse nur senkrecht öffnen. Die Summe der Relativbewegungen entlang der Rissufer infolge der Bügeldehnung und der Längsdehnung muss verschwinden. Bei starr-plastischem Materialverhalten der Bewehrung wird also nur dann ein Mechanismus möglich sein, wenn beide Bewehrungsanteile fließen. Die Relativbewegung entlang der Rissufer δ_{tB} infolge der Bügeldehnung ergibt sich nach Bild 5.3 zu:

$$\delta_{tB} = \delta_B \cdot \sin\alpha = \epsilon_B \cdot d \cdot \tan\alpha \quad (5.1)$$

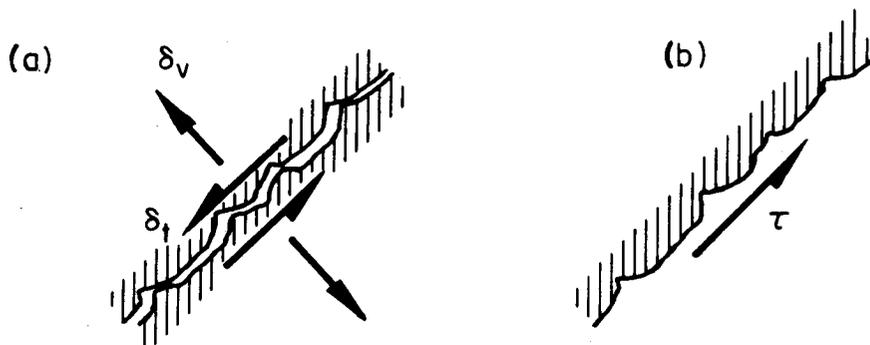
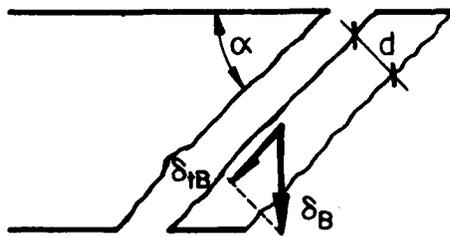


Bild 5.2: (a) Relativbewegung der Rissufer
(b) induzierte Schubspannung



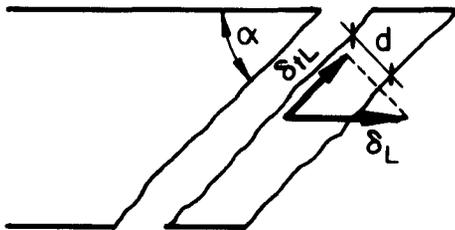
$$\dot{\epsilon}_B > 0 ; \quad \dot{\epsilon}_L = 0$$

$$\delta_B = \epsilon_B \cdot \frac{d}{\cos \alpha}$$

Bild 5.3 : Relativbewegung infolge Bügeldehnung

Analog folgt die Relativbewegung δ_{tL} infolge der Längsdehnung nach Bild 5.4 zu:

$$\delta_{tL} = - \delta_L \cdot \cos \alpha = - \epsilon_L \cdot d \cdot \cot \alpha \quad (5.2)$$



$$\dot{\epsilon}_B = 0 ; \quad \dot{\epsilon}_L > 0$$

$$\delta_L = \epsilon_L \cdot \frac{d}{\sin \alpha}$$

Bild 5.4 : Relativbewegung infolge Längsdehnung

Die Bedingung, dass die Summe der Relativbewegungen entlang der Rissufer verschwinde, führt zu:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\epsilon_L}{\epsilon_B} \quad (5.3)$$

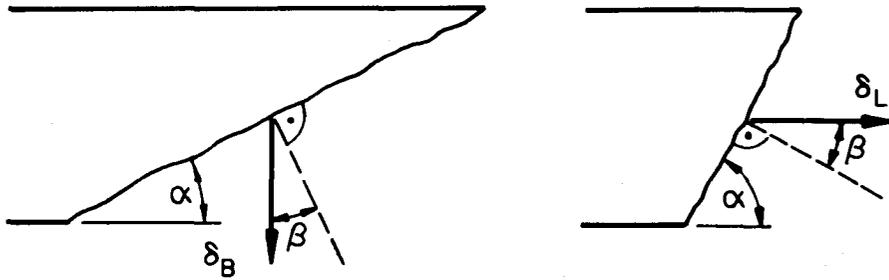
Bis anhin wurde eine unbeschränkte Umlagerung vorausgesetzt. Die Natur der Rissuferverzahnung ermöglicht aber eine begrenzte Längsverschiebung der Rissufer. Wird ein Bewegungsverhältnis (vgl. Bild 5.5):

$$\tan \beta = \pm \frac{\delta_t}{\delta_v} = \pm 0,5 \quad (5.4)$$

zugelassen, so wird dadurch die Diagonalenneigung auf:

$$0,5 \leq \tan \alpha \leq 2,0 \quad (5.5)$$

beschränkt. Innerhalb dieser Grenzen ist eine vollständige Kräfteumlagerung zwischen Bügel- und Längsbewehrung möglich. Im Bruchzustand fließen dann beide Armierungsanteile.



$$\tan \alpha = \tan \beta = 0,5; \dot{\epsilon}_B > 0$$

$$\tan \alpha = \cot \beta = 2,0; \dot{\epsilon}_L > 0$$

Bild 5.5: Begrenzung der Strebenneigung

Ausserhalb dieser Grenzen ist ein Mechanismus möglich, wenn nur ein Bewehrungsanteil die Fließgrenze erreicht. Vergleiche mit verschiedenen Versuchsergebnissen (z.B. [11] bis [14]) bestätigen die getroffenen Annahmen über die Grenzen der Diagonalenneigung.

Die Verformungsberechnung in Abschnitt 5.4 wird zudem zeigen, dass eine vollständige Kräfteumlagerung mit zunehmender Abweichung des Umlagerungswinkels von $\tan \alpha = 1$ eine wachsende Verformung der Schubwand verlangt. Parallel dazu wird die spezifische Risseöffnung vergrössert. Bei weit geöffneten Rissen fällt aber die Wirkung der Risseverzahnung dahin. Eine weitere Umlagerung findet nicht mehr statt.

Dual zu dieser Begründung der Begrenzung des Umlagerungswinkels mit Ueberlegungen über das kinematische Verhalten ist auch eine Deutung mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen möglich. Die Gleichgewichtsbedingungen zeigen, dass mit zunehmender Abweichung der Diagonalenneigung von $\tan \alpha = 1$ die Beanspruchung der Betondiagonalen wächst. Diese Zunahme ist ausserhalb der angegebenen Grenzen sehr gross. Die Tragfähigkeit der Schubwand ist nach dem Versagen der Betondruckdiagonalen erschöpft, bevor beide Armierungsanteile fließen. Eine vollständige Umlagerung der inneren Kräfte ist verhindert.

5.3 Gleichgewichtsbeziehungen, Plastizitätsbedingungen

Im letzten Abschnitt wurde das Bruchmodell mit variabler Strebenneigung α eingeführt. An diesem Bruchmodell werden nun die benötigten Gleichgewichtsbedingungen formuliert. Dabei wird von der Annahme ausgegangen, dass der Schubfluss $S = Q/a$ über die Wandhöhe gleichmässig verteilt sei. Infolgedessen greift die Diagonaldruckkraft in der Mitte der Schubwand an. Die drei nichttrivialen Gleichgewichtsbeziehungen am Schnitt senkrecht zur Schubwandaxe lauten (Bild 5.6):

$$N = Z_u + Z_o - D \cdot \cos\alpha \quad (5.6)$$

$$Q = \quad \quad \quad + D \cdot \sin\alpha \quad (5.7)$$

$$Q = Z_u \cdot \frac{a}{2} - Z_o \cdot \frac{a}{2} \quad (5.8)$$

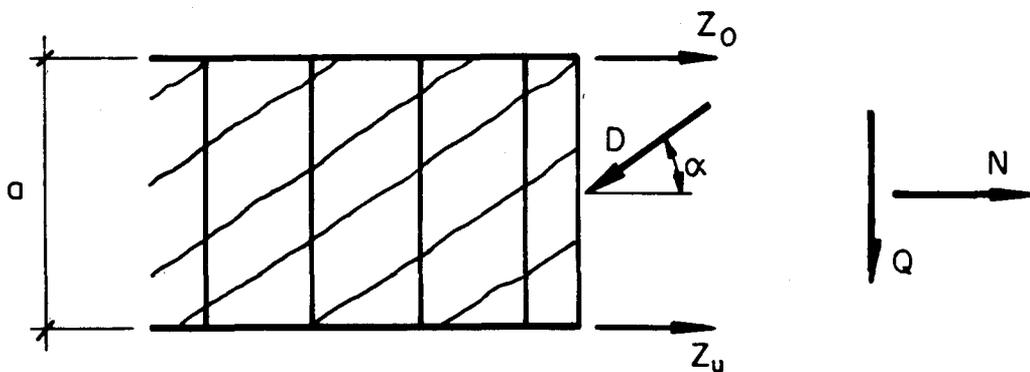


Bild 5.6 : Kräfte am Schnitt senkrecht zur Schubwandaxe

Da nur unterarmierte Schubwände untersucht werden und deshalb der Beton nicht massgebend wird, soll aus Gl. (5.6) und Gl. (5.7) die Diagonaldruckkraft eliminiert werden. Die Bügelkraft B kann an einem unter dem Winkel α geneigten Schnitt (Bild 5.7) gefunden werden:

$$Q = B \cdot \frac{a}{s} \cdot \cot\alpha \quad (5.9)$$

Die Kombination der Gl. (5.7) mit Gl. (5.9) führt zu folgendem Ausdruck der Diagonaldruckkraft:

$$D = B \cdot \frac{a \cdot \cot\alpha}{s \cdot \sin\alpha} \quad (5.10)$$

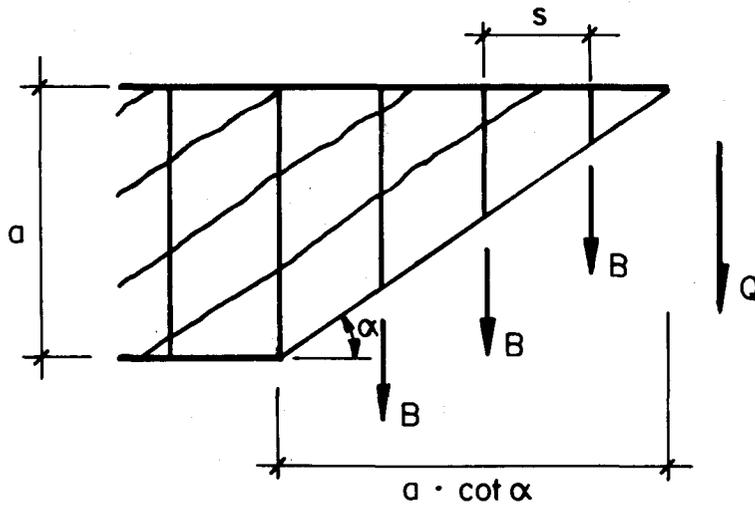


Bild 5.7: Vertikalkräfte am Schrägschnitt

Nach Einsetzen von Gl. (5.10) in Gl. (5.6) kann die zweite Bedingung neu an-
geschrieben werden. Zusammengestellt lauten die nichttrivialen Gleichgewichts-
beziehungen wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -N + Z_U + Z_O - B \cdot \frac{a}{s} \cdot \cot^2 \alpha \\ 0 &= Z_U - Z_O \\ 0 &= -Q + B \cdot \frac{a}{s} \cdot \cot \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

In diesem Gleichungssystem kommen neben den äusseren Schnittkräften nur noch
die Zugkräfte der Bügel bzw. der Gurtkräfte vor. Es ist aber zu beachten,
dass auch der Neigungswinkel α als freie Variable eingeführt wurde.

Die Plastizitätsbedingungen verlangen, dass die effektiven Beanspruchungen
über das ganze Bruchmodell kleiner sind als die maximalen Widerstände der
Gurt- und Bügelkräfte, das heisst:

$$\left. \begin{aligned} Z_U &\leq Z_{fU} \\ Z_O &\leq Z_{fO} \\ B &\leq B_f \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Da der Beton für das Versagen der Schubwand nicht massgebend werden soll und
deshalb die Druckdiagonalen vorläufig unbeschränkte Kräfte aufnehmen sollen,
entfällt eine diesbezügliche Begrenzung. Mit Hilfe der abhängigen Schlupf-
variablen p heissen die Plastizitätsbedingungen nach Gl. (5.12) neu:

$$\left. \begin{aligned}
 p_U &= Z_{fU} - Z_U \geq 0 \\
 p_O &= Z_{fO} - Z_O \geq 0 \\
 p_B &= B_f - B \geq 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Die Schlupfvariablen sind positiv definite Grössen.

5.4 Verträglichkeitsbedingungen, Berechnung der Leistung

Entsprechend den nichttrivialen Gleichgewichtsbedingungen nach Gl. (5.11) werden am Schubwandelement als Verformungsparameter die Gurtverschiebungen u_U bzw. u_O und eine Schiebung γ eingeführt (vgl. Bild 5.8). Wenn im letzten Abschnitt ein konstanter Schubfluss angenommen wurde, so muss hier analog

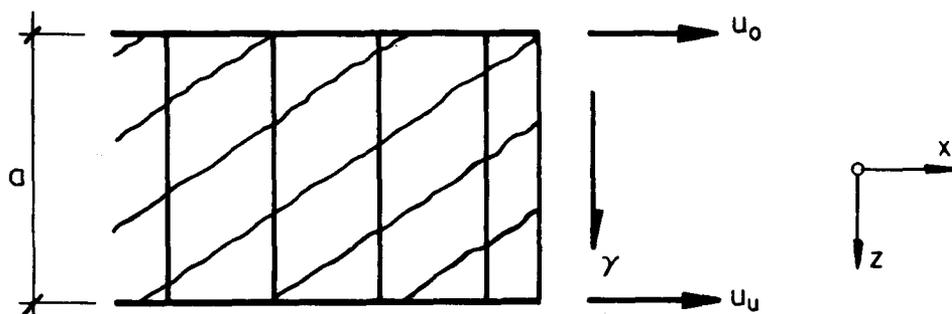


Bild 5.8: Verformungsparameter am Schubwandelement

die Schiebung über die Wandhöhe konstant gehalten werden. Die effektive Schiebung γ in jedem Punkt der Schubwand wird also mit einer mittleren Schiebung angenähert. Die Längsdehnungen der Gurtstäbe lassen sich unter Anwendung der Gl. (3.10) berechnen:

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_O &= \frac{du_O}{dx} \\
 \epsilon_U &= \frac{du_U}{dx}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Bewegt sich die Diagonalenneigung des Schubwandelementes innerhalb der angegebenen Grenzen, so fließen im Bruchzustand sowohl die Bügel als auch mindestens ein Gurtstab. Da starr-plastisches Materialverhalten vorausgesetzt wird und ein Versagen der Betondiagonalen ausgeschlossen wird, werden die Betonstauchungen vernachlässigt. Die Diagonalen werden als starr betrachtet.

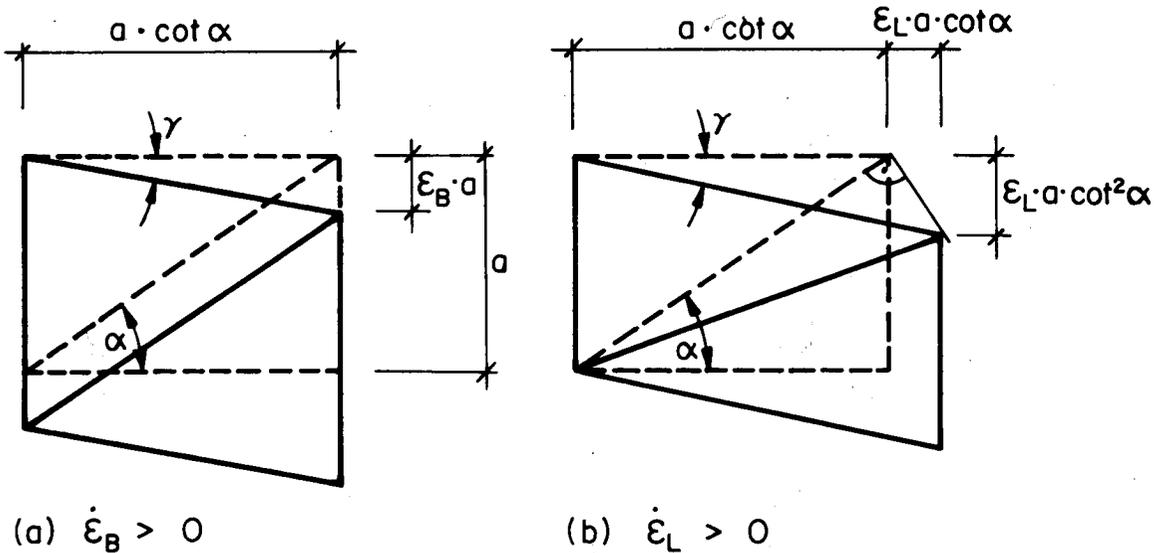


Bild 5.9 : Verschiebungsplan des Schubwandelementes

Die Schiebungsgleichung wird in Bild 5.9 hergeleitet:

$$\gamma = \epsilon_B \cdot \tan \alpha + \epsilon_L \cdot \cot \alpha \quad (5.15)$$

Natürlich ist:

$$\epsilon_L = \frac{1}{2}(\epsilon_u + \epsilon_o) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}(u_u + u_o) = \frac{du}{dx} \quad (5.16)$$

Mit Hilfe von Gl. (5.15) und unter Berücksichtigung von Gl. (5.16) wird die kinematisch zulässige Bügeldehnung ermittelt zu:

$$\epsilon_B = \gamma \cdot \cot \alpha - \frac{du}{dx} \cdot \cot^2 \alpha \quad (5.17)$$

Die Verträglichkeitsbedingungen gemäss Gl. (5.14) und Gl. (5.17) werden durch die in Abschnitt 5.2 gefundene Beziehung nach Gl. (5.3) ergänzt.

Soll sich im Bruchzustand ein Mechanismus ausbilden, so muss die folgende Leistungsbedingung erfüllt sein:

$$L_a - L_d \geq 0 \quad (5.18)$$

Die Leistung der äusseren Kräfte an einem Element der Länge 1 lautet nach dem Uebergang von Verformungen zu Verformungsgeschwindigkeiten für den gewählten Bewegungszustand:

$$L_a = N \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) + Q \cdot \dot{\gamma} \quad (5.19)$$

Die Dissipationsleistung L_d ist bei Vernachlässigung elastischer Verformungen gleich der negativen Leistung der inneren Kräfte:

$$L_d = -L_i = Z_{fu} \cdot \dot{\epsilon}_u + Z_{fo} \cdot \dot{\epsilon}_o + B_f \cdot \frac{a}{s} \cdot \dot{\epsilon}_B \quad (5.20)$$

Dabei müssen die Dehnungsgeschwindigkeiten den Gl. (5.14) und Gl. (5.17) genügen.

5.5 Lösung mit dem statischen Grenzwertsatz

Vorerst wird angenommen, dass die Schnittkräfte N und Q bei jeder Intensität in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Jede Steigerung der Last erfolgt somit proportional. Diese Annahme wird durch die folgende Neuformulierung der Gleichgewichtsbeziehungen gemäss Gl. (5.11) berücksichtigt:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\lambda \cdot N + Z_u + Z_o - B \cdot \frac{a}{s} \cdot \cot^2 \alpha \\ 0 &= Z_u - Z_o \\ 0 &= -\lambda \cdot Q + B \cdot \frac{a}{s} \cdot \cot \alpha \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie ist ein möglichst grosser Traglastfaktor λ zu suchen. Die entsprechenden Schnittkräfte $\lambda \cdot N$ und $\lambda \cdot Q$ müssen mit den Stabkräften der Fachwerkscheibe Z_u , Z_o und B ein Gleichgewichtssystem (Gl. (5.21)) bilden. Zudem dürfen die Stabkräfte die Plastizitätsbedingungen nach Gl. (5.13) nirgends verletzen. Die Zielfunktion und Restriktionen dieser Optimierungsaufgabe werden in Bild 5.10 in Form eines Tableau festgehalten. Da im betrachteten Fachwerkmodell die Streben-

	1	λ	Z_u	Z_o	$B \cdot \frac{a}{s}$	
$\lambda =$	0	1	0	0	0	→ Max.
$0 =$	0	-N	1	-1	$-\cot^2 \alpha$	
$0 =$	0	0	1	-1	0	
$0 =$	0	-Q	0	0	$+\cot \alpha$	
$p_u =$	Z_{fu}	0	-1	0	0	
$p_o =$	Z_{fo}	0	0	-1	0	
$p_B =$	$B_f \cdot \frac{a}{s}$	0	0	0	-1	

Bild 5.10: Tableau der Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen

neigung α ebenfalls als freie Variable eingeführt wurde, ist das entsprechende Tableau in Bild 5.10 nichtlinear. Die nichtlineare Optimierung gehört aber zu den nicht vollständig gelösten Problemen der Mathematik. Es sind nur wenige Algorithmen bekannt, die sich auf Spezialfälle mit konvexen Funktionen beschränken (vgl. [7]). Es wird deshalb versucht, die vorliegende Optimierungsaufgabe zu linearisieren. Wird vorerst die Schubkraft Q auf dem Niveau Q_1 festgehalten, so kann die Strebenneigung mit Hilfe der letzten Gleichgewichtsbeziehung in Gl. (5.11) direkt in Funktion der Bügelkraft ausgedrückt werden:

$$\tan\alpha = \frac{B \cdot a}{Q_1 \cdot s} \quad (5.22)$$

Zudem sei in Erinnerung gerufen, dass im Bruchzustand, sowohl die Bügel als auch mindestens ein Gurtstab fließen. Die Bügelkraft B muss gleich der Bügelfliesskraft B_f gesetzt werden. Damit ist aber die Strebenneigung α fixiert:

$$\tan\alpha = \frac{B_f \cdot a}{Q_1 \cdot s} \quad (5.23)$$

Wird zudem Gl. (5.23) in der ersten Gleichgewichtsbedingung der Gl. (5.11) eingesetzt, so kann das Tableau des Bildes 5.10 in ein lineares Schema übergeführt werden (Bild 5.11). Zur gegebenen Schubkraft Q_1 wird also die maximal mögliche Normalkraft $\lambda \cdot N$ gesucht, ohne dass die Gleichgewichts- oder Plastizitätsbedingungen verletzt werden. Die zweite Zeile in Bild 5.11 zeigt

	1	Z_u	Z_o	
$\lambda \cdot N =$	$-\frac{Q_1^2 \cdot s}{B_f \cdot a}$	+ 1	+ 1	→ Max.
$O =$	0	1	- 1	
$p_u =$	Z_{fu}	- 1	0	
$p_o =$	Z_{fo}	0	- 1	

Bild 5.11 : Tableau der Gleichgewichtsmethode für feste Schubkraft Q_1

erwartungsgemäss, dass ohne Momentenbelastung die beiden Gurtkräfte Z_u und Z_o gleich sind. Das Tableau lässt sich weiter reduzieren (Bild 5.12). Die Zielfunktion in Bild 5.12 wird maximal, wenn Z_o den grösstmöglichen Wert einnimmt. Weil die Plastizitätsbedingungen eingehalten werden müssen und die beiden Gurtkräfte gleich gross sind, kann die Gurtkraft Z_o den kleineren Wert der Gurtfliesskräfte Z_{fu} oder Z_{fo} nicht überschreiten. Wird angenommen, dass $Z_{fo} \leq Z_{fu}$ sei, dann erreicht die Normalkraft $\lambda \cdot N$ im Kollapszustand den Wert:

	1	Z_o	
$\lambda \cdot N =$	$-\frac{Q_1^2 \cdot s}{B_f \cdot a}$	$+ 2$	→ Max.
$Z_u =$	0	$+ 1$	
$p_u =$	Z_{fu}	$- 1$	
$p_o =$	Z_{fo}	$- 1$	

Bild 5.12: Reduziertes Tableau für feste Schubkraft Q_1

$$\lambda \cdot N = -\frac{Q_1^2 \cdot s}{B_f \cdot a} + 2Z_{fo} \quad (5.24)$$

Die Plastizitätsbedingungen der Gurtstäbe werden dabei erfüllt:

$$\left. \begin{aligned} p_u &= Z_{fu} - Z_{fo} \geq 0 \\ p_o &= Z_{fo} - Z_{fo} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Bei Erreichen der Tragfähigkeit der Schubwand wird also neben den Bügeln zusätzlich der schwächere Gurtstab die Fließgrenze erreichen. Gl. (5.24) bringt nach der Variation der festgehaltenen Schubkraft Q_1 jeweils die entsprechende Normalkraft. Die Fließbedingung für eine Schubwand kann deshalb mit Gl. (5.24) formuliert werden:

$$N_p = -\frac{Q_p^2 \cdot s}{B_f \cdot a} + 2Z_{fo} \quad (5.26)$$

Mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} N_{p0} &= 2Z_{fo} \\ Q_{p0} &= \sqrt{\frac{2B_f \cdot Z_{fo} \cdot a}{s}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

lautet die Interaktion zwischen N_p und Q_p in normierter Form:

$$\frac{N_p}{N_{p0}} = 1 - \left(\frac{Q_p}{Q_{p0}}\right)^2 \quad (5.28)$$

Der Verlauf der Fließfigur für ein Schubwandelement ist in Bild 5.13 dargestellt.

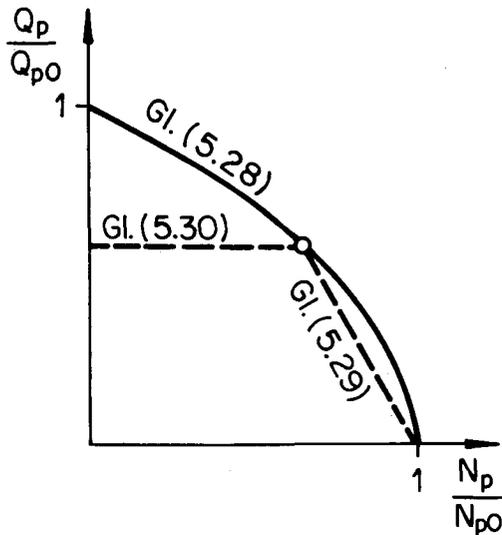


Bild 5.13: Interaktion Normalkraft N_p - Schubkraft Q_p
normiert auf N_{p0} bzw. Q_{p0}

Es ist zu beachten, dass die Diagonalenneigung für jede Schubkraft nach Gl. (5.23) einen speziellen Wert einnimmt. Für jedes Lastverhältnis N/Q wird neben dem Lastfaktor λ zusätzlich die optimale Fachwerkform gesucht. Dadurch wird die Fließbedingung nach Gl. (5.26) der Schubwand nichtlinear. Bei festem Winkel α wird die Fließfigur durch die beiden Geraden:

$$N_p = -Q_p \cdot \cot \alpha + 2Z_{f0} \quad (5.29)$$

$$Q_p = B_f \cdot \frac{a}{s} \cdot \cot \alpha \quad (5.30)$$

umrissen. Im ersten Fall wird ein Gurtstab für das Versagen der Fachwerkscheibe massgebend, im zweiten Fall wird die Tragfähigkeit durch den Widerstand der Bügel begrenzt. Da bei freier Diagonalenneigung sowohl ein Gurtstab als auch die Bügel fließen, ist Gl. (5.28) der geometrische Ort der Schnittpunkte der Geraden nach Gl. (5.29) und Gl. (5.30).

5.6 Lösung mit dem kinematischen Grenzwertsatz

Nach dem kinematischen Grenzwertsatz ist ein möglichst kleiner Wert des Traglastfaktors λ zu suchen. Im Kollapszustand ist die Leistung L_a der äusseren Schnittkräfte λN und λQ gleich der Dissipationsleistung L_d . Die zur Bestimmung von L_a verwendeten Verschiebungsgeschwindigkeiten $(du/dx)^\cdot$ und $\dot{\gamma}$ und die zur Bestimmung von L_d verwendeten Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}_u$, $\dot{\epsilon}_o$ und $\dot{\epsilon}_B$ müssen untereinander verträglich sein.

Bei proportionaler Laststeigerung ist die Leistung der äusseren Schnittkräfte nach Gl. (5.19):

$$L_a = \lambda \cdot \left(N \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^\cdot + Q \cdot \dot{\gamma} \right) \quad (5.31)$$

Die Dissipationsleistung ist mit Gl. (5.20) gegeben. Soll die Gesamtleistung verschwinden, dann kann der Traglastfaktor λ explizit angeschrieben werden:

$$\lambda = \frac{Z_{fu} \cdot \dot{\epsilon}_u + Z_{fo} \cdot \dot{\epsilon}_o + B_f \cdot \frac{a}{s} \cdot \dot{\epsilon}_B}{N \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^\cdot + Q \cdot \dot{\gamma}} \quad (5.32)$$

Da der absolute Betrag der Verschiebungsgeschwindigkeiten beliebig ist, kann verlangt werden, dass der Nenner in Gl. (5.32) die Summe 1 ergebe:

$$N \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^\cdot + Q \cdot \dot{\gamma} = 1 \quad (5.33)$$

Die Zielfunktion der Optimierungsaufgabe lautet somit:

$$\lambda = Z_{fu} \cdot \dot{\epsilon}_u + Z_{fo} \cdot \dot{\epsilon}_o + B_f \cdot \frac{a}{s} \cdot \dot{\epsilon}_B \rightarrow \text{Min.} \quad (5.34)$$

Stellt man die Leistungsbedingungen (Gl. (5.33) und Gl. (5.34)) sowie die Verträglichkeitsbedingungen ((Gl. 5.3), Gl. (5.14) und Gl. (5.17)) zusammen, so erhält man das nichtlineare Tableau des Bildes 5.14. Mit Ausnahme der letzten Zeile entspricht dieses Tableau der transponierten Matrix des Bildes 5.11. Für lineare Programme finden in diesem Falle die Dualitätsregeln Anwendung, wonach die Minimumaufgabe dieselbe Lösung wie die zugeordnete Maximumaufgabe besitzt. Da die Dualitätsregeln für nichtlineare Optimierung nur beschränkt gültig sind und zudem eine zusätzliche Verträglichkeitsbedingung berücksichtigt werden muss, wird hier die Minimumaufgabe getrennt gelöst.

	1	$(\frac{du}{dx})^{\cdot}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{d(u_u - u_o)^{\cdot}}{dx}$	$\dot{\gamma}$	$\dot{\epsilon}_u$	$\dot{\epsilon}_o$	$\dot{\epsilon}_B$	
$\lambda =$	0	0	0	0	Z_{fu}	Z_{fo}	$B_f \frac{a}{s}$	→ Min.
$0 =$	1	-N	0	-Q	0	0	0	
$0 =$	0	1	1	0	-1	0	0	
$0 =$	0	1	-1	0	0	-1	0	
$0 =$	0	$-\cot^2 \alpha$	0	$\cot \alpha$	0	0	-1	
$0 =$	0	$\cot^2 \alpha$	0	0	0	0	-1	

Bild 5.14 : Tableau der Leistungs- und Verträglichkeitsbedingungen

Wie bei der Maximumaufgabe wird die Schubkraft auf dem Niveau Q_1 festgehalten. Dann aber lässt sich die Leistungsbedingung wie folgt umformen:

$$\lambda N \cdot (\frac{du}{dx})^{\cdot} = Z_{fu} \cdot \dot{\epsilon}_u + Z_{fo} \cdot \dot{\epsilon}_o + B_f \cdot \frac{a}{s} \cdot \dot{\epsilon}_B - Q_1 \cdot \dot{\gamma} \rightarrow \text{Min.} \quad (5.35)$$

oder aufgelöst nach der Traglast:

$$\lambda N = \frac{Z_{fu} \cdot \dot{\epsilon}_u + Z_{fo} \cdot \dot{\epsilon}_o + B_f \cdot \frac{a}{s} \cdot \dot{\epsilon}_B - Q_1 \cdot \dot{\gamma}}{(\frac{du}{dx})^{\cdot}} \rightarrow \text{Min.} \quad (5.36)$$

Der Traglastfaktor wird ohne Verletzung der Verträglichkeitsbedingungen sicher minimal, wenn einer der beiden Gurtstäbe starr bleibt. Bleibt der untere Gurtstab starr ($Z_{fu} > Z_{fo}$), so verschwindet die entsprechende Dehnungsgeschwindigkeit. Für $\dot{\epsilon}_u = 0$ ist die Verformungsgeschwindigkeit $(\frac{du}{dx})^{\cdot}$ nach Gl. (5.16):

$$(\frac{du}{dx})^{\cdot} = \frac{1}{2} (\frac{du_o}{dx})^{\cdot} = \frac{1}{2} \cdot \dot{\epsilon}_o \quad (5.37)$$

Die Dehnungsgeschwindigkeit der Bügel folgt unter Berücksichtigung von Gl. (5.37) aus Gl. (5.3):

$$\dot{\epsilon}_B = \frac{1}{2} \cdot \dot{\epsilon}_o \cdot \cot^2 \alpha \quad (5.38)$$

Mit Gl. (5.37) und Gl. (5.38) führt Gl. (5.15) auf die Schiebungsgeschwindigkeit:

$$\dot{\gamma} = \dot{\varepsilon}_0 \cdot \cot \alpha \quad (5.39)$$

Gl. (5.37) bis Gl. (5.39) eingesetzt in Gl. (5.36) ergibt:

$$\lambda N = 2Z_{f0} + B_f \cdot \frac{a}{s} \cdot \cot^2 \alpha - 2Q_1 \cdot \cot \alpha \rightarrow \text{Min.} \quad (5.40)$$

Die einzige freie Variable in dieser Zielfunktion ist die Strebenneigung α . Gesucht wird also derjenige $\cot \alpha$, der die kleinste Traglast zur Folge hat:

$$\frac{d(\lambda N)}{d(\cot \alpha)} = + 2B_f \cdot \frac{a}{s} \cot \alpha - 2Q_1 = 0 \quad (5.41)$$

Daraus folgt die Diagonalenneigung im Bruchzustand:

$$\tan \alpha = \frac{B_f \cdot a}{Q_1 \cdot s} \quad (5.42)$$

Die Diagonalenneigung stimmt somit vollständig mit dem aus Gl. (5.23) nach der statischen Methode gefundenen Wert überein. Nach Einsetzen der Gl. (5.42) in die Gl. (5.40) lautet die Interaktion im Bruchzustand:

$$N_p = 2Z_{f0} - \frac{Q_p^2 \cdot s}{B_f \cdot a} \quad (5.43)$$

oder in normierter Form:

$$\frac{N_p}{N_{p0}} = 1 - \left(\frac{Q_p}{Q_{p0}} \right)^2 \quad (5.44)$$

Das Tableau der Mechanismenmethode (Bild 5.14) liefert somit dieselbe Lösung wie das Tableau der Gleichgewichtsmethode (Bild 5.11). Da der kinematisch zulässige Kollapsmechanismus sowohl die Gleichgewichtsbedingungen als auch die Plastizitätsbedingungen erfüllt, stellt die Lösung die Tragfähigkeit des untersuchten Fachwerkmodells dar. Mögliche Abweichungen von der im Versuch gemessenen Traglast der Schubwand folgen allein aus vereinfachenden Annahmen des Betrachtungsmodells.

5.7 Grenzen der Anwendbarkeit des Fachwerkmodelles

Die Einführung des Fachwerkes als physikalisches Betrachtungsmodell eines schubbeanspruchten Stahlbetonträgers ist mit grundlegenden Annahmen verbunden, die eine allgemeine Anwendbarkeit einschränken. Erstens wird vorausgesetzt, dass sich die Risse im Bruchzustand senkrecht öffnen. Ein Gleiten der Rissufer wird ausgeschlossen. Dadurch werden nur geradlinige Risse als möglich erachtet. Zweitens werden wie in der Balkenstatik üblich die Verformungen in jedem Punkt mit integralen für den Gesamtquerschnitt gültigen Verformungsgrößen beschrieben. Insbesondere soll die Schiebung und die Diagonalenneigung über die Trägerhöhe konstant sein. In der letzten Annahme steckt indirekt die Aussage, dass die Diagonalenneigung auch in Längsrichtung nicht ändert. Die Diagonalenneigung fällt bei Fehlen der Betonzugfestigkeit mit der Rissrichtung zusammen. Die Risse sind aber geradlinig und die Diagonalenneigung ist somit über Höhe und Länge konstant. Zuletzt wird vorausgesetzt, dass die Bügel über ihre ganze Länge fließen und der Beton für das Versagen nicht massgebend wird. Die Betondruckdiagonalen sind als starre Glieder des Fachwerkes zu betrachten.

Unter diesen Annahmen können die Verträglichkeitsbedingungen Gl. (5.3) bzw. Gl. (5.15) nur erfüllt werden, wenn alle Fasern mit der gleichen Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_L$ über die ganze Trägerlänge gezogen werden. Obere Grenzwerte der Tragfähigkeit lassen sich mit dem Fachwerkmodell nur für solche Träger anschreiben, die mit einer Schubkraft Q und einer Normalkraft N beansprucht werden und deren Längsbewehrung symmetrisch ausgelegt ist. Ungleiche Gurtstäbe oder ein Biegemoment verursachen eine über die Höhe veränderliche Dehnungsgeschwindigkeit. Die Verträglichkeitsbedingungen können im Querschnitt wohl im Mittel erfüllt werden, werden aber in den einzelnen Fasern verletzt. Obere Grenzwerte der Tragfähigkeit müssen mit Hilfe unstetiger Mechanismen gesucht werden. Dabei wird von der Vorstellung ausgegangen, dass sich das Tragwerk im Bruchzustand entlang diskreter Risse öffnet. Die Anwendung auf torsionsbeanspruchte Kastenträger führt zu räumlichen Mechanismen, die sich über eine gewisse Balkenlänge erstrecken. Die Betrachtung des Einzelquerschnittes, wie sie in der Balkentheorie üblich ist, ist dann aber unzulässig. Der Träger muss als Flächentragwerk untersucht werden. Wie in [15] gezeigt wird, nimmt die am unstetigen Mechanismus hergeleitete Lösung denselben Wert ein wie der untere Grenzwert am Fachwerkmodell. Die Verträglichkeits- und Leistungsbedingungen des unstetigen Mechanismus sind folglich dual zu den statischen Bedingungen des Fachwerkes.

Ein Gradient im Biegemoment oder im Wölbmoment hat eine Änderung der Gurtkräfte zur Folge. Bei konstanter Diagonalenneigung und durchgezogener Längsbewehrung wird diese nur in einem Querschnitt fließen. Im übrigen Balken-

bereich bleiben die Gurtstäbe starr. Eine Schiebung in diesem Bereich ist kinematisch nur verträglich, wenn sich die Risse nicht senkrecht öffnen. Eine mögliche Interpretation ist die, dass die Rissuferverzahnung im Bruchzustand wegfällt. Die Diagonalenneigung entspricht dem Grenzwinkel nach Gl. (5.5). Es fließen nur die Bügel. Bleibt die Rissuferverzahnung bis zum Bruchzustand wirksam, dann müssen zudem die Druckdiagonalen gestaucht werden, damit ein kinematisch verträglicher Mechanismus auftreten kann (vgl. [16] oder [17]).

Für torsionsbeanspruchte Träger ist aber die Berücksichtigung des Betons wenig sinnvoll, weil neben der zentrischen Stauchung infolge der Fachwerk-wirkung die Querschnittswände zusätzlich auf Biegung infolge Verwindung beansprucht werden. Studien über das Verhalten von Stahlbetonelementen, die sowohl Membran- als auch Plattenkräften ausgesetzt sind, sind wohl ausgearbeitet worden, quantitative Angaben über ein Stoffgesetz solcher Stahlbetonscheiben sind aber zur Zeit nicht bekannt. Das Fachwerk behält also für unterarmierte, torsionsbeanspruchte Träger seine Bedeutung als physikalisches Betrachtungsmodell.

6. BEDINGUNGEN BEI STAHLBETONTRÄGERN IM BRUCHZUSTAND

6.1 Querschnitt und Bruchmodell

In Kapitel 2 wurden die Gleichgewichtsbedingungen und in Kapitel 3 die kinematischen Bedingungen für den Stab formuliert. Mit Hilfe idealisierter Fließbedingungen wurden in Kapitel 4 grundsätzliche Überlegungen über das Tragverhalten von Kastenträgern angestellt. Zur Darstellung von Kastenträgern aus Stahlbeton wird im folgenden das im letzten Kapitel beschriebene Fachwerkmodell mit den Bedingungen des Stabes verknüpft.

Bild 6.1 zeigt einen Stahlbetonträger mit beliebiger Querschnittsform. Der Träger wird aus einzelnen Fachwerkscheiben aufgebaut. Für die rechnerische Behandlung wird die Längsbewehrung in den Eckpunkten zusammengefasst.

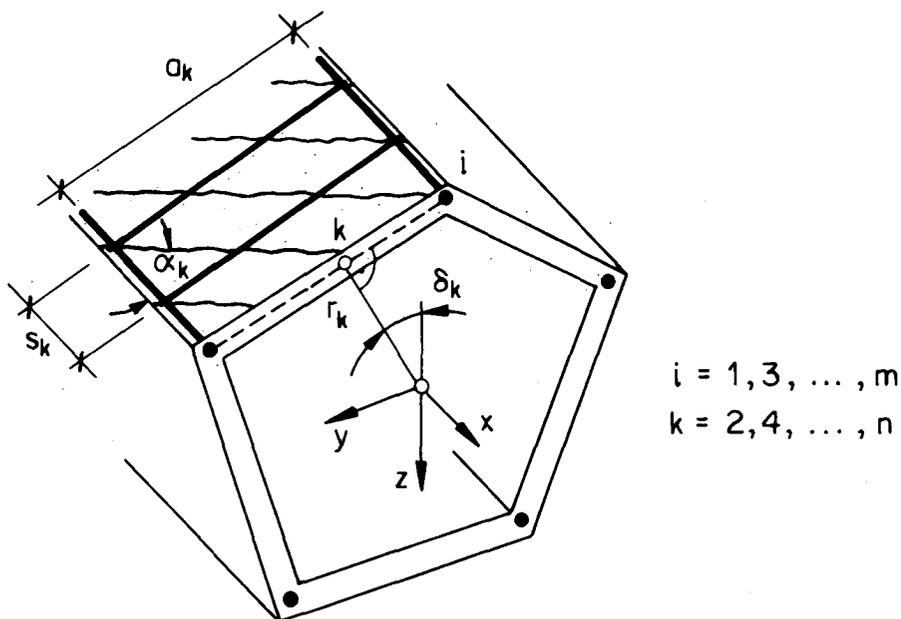


Bild 6.1: Prismatischer Stahlbetonquerschnitt

Trotz den in Abschnitt 5.7 erwähnten Einschränkungen bildet ein aus dem Träger geschnittener Einzelquerschnitt den Kern der Untersuchung. An diesem Querschnitt werden sowohl die Gleichgewichtsbedingungen als auch die Leistungs- und Verträglichkeitsbedingungen im Bruchzustand formuliert.

Stahlbetonträger versagen, wenn entweder die Bewehrung fließt und/oder der Beton gestaucht wird. Versagen soll durch grosse Verformungen angekündigt werden. Es wird deshalb durch geeignete Massnahmen (obere Schubspannungsgrenze, maximaler Bewehrungsgrad) vermieden, dass der Beton massgebend wird. Auch in dieser Untersuchung werden nur unterarmierte Träger in Betracht ge-

zogen. Die Tragfähigkeit ist erschöpft, wenn genügend Bewehrungselemente fließen.

6.2 Statische Methode

In den Fachwerkgliedern (Gurtstäbe, Bügel, Betondruckdiagonalen) werden unter Belastung Kräfte aufgebaut. Diese inneren Kräfte sind den Schnittkräften statisch äquivalent (Bild 6.2). Die Schnittkräfte werden in gleichbleiben-

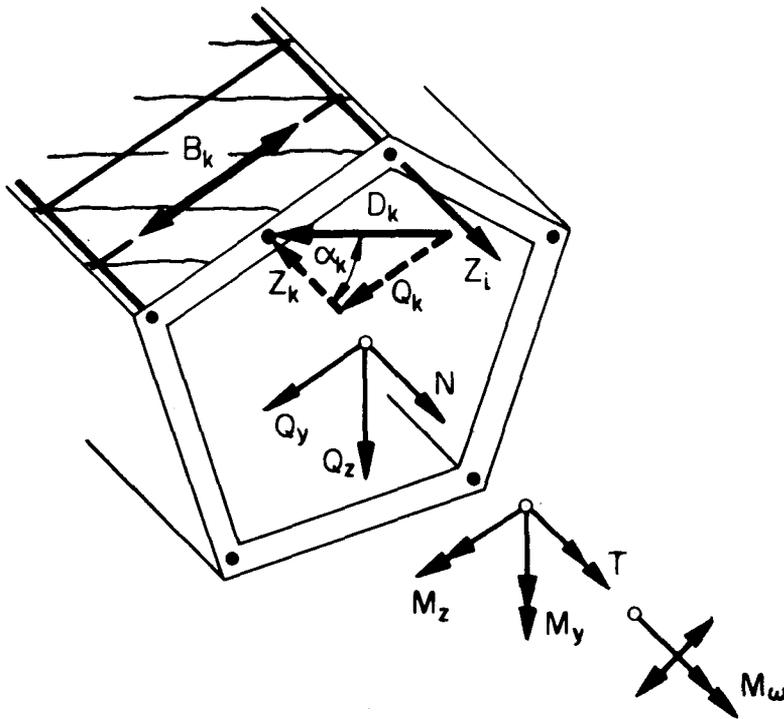


Bild 6.2 : Innere Kräfte und Schnittkräfte am Stahlbetonquerschnitt

dem Verhältnis zueinander bis zum Bruch gesteigert. Die Lastintensität wird durch den Lastfaktor λ erfasst.

Analog Gl. (2.4) werden die Schubkräfte Q_k der Querschnittswände in einen über den Umfang konstanten und in einen variablen Anteil aufgeteilt:

$$Q_k = S_o \cdot a_k + \Delta Q_k \quad (6.1)$$

Damit können die Gleichgewichtsbeziehungen nach Gl. (2.8) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda Q_y &= \sum_2^n \Delta Q_k \cdot \cos \delta_k \\
 \lambda Q_z &= \sum_2^n \Delta Q_k \cdot \sin \delta_k \\
 \lambda T &= 2F_0 \cdot S_0 + \sum_2^n \Delta Q_k \cdot r_k
 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

In einer Fachwerkscheibe gilt die Beziehung zwischen Längskraft und Schubkraft:

$$Z_k = Q_k \cdot \cot \alpha_k \quad (6.3)$$

Die Gleichgewichtsbeziehungen für die Längsschnittkräfte nach Gl. (2.9) heißen unter Einbezug von Gl. (6.3) neu:

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda N &= \sum_1^m Z_i - \sum_2^n Q_k \cdot \cot \alpha_k \\
 \lambda M_y &= - \sum_1^m Z_i \cdot y_i + \sum_2^n Q_k \cdot y_k \cdot \cot \alpha_k \\
 \lambda M_z &= \sum_1^m Z_i \cdot z_i - \sum_2^n Q_k \cdot z_k \cdot \cot \alpha_k
 \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Nach Einführung von Gl. (6.1) in Gl. (6.4) gehen diese über in:

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda N &= \sum_1^m Z_i - S_0 \cdot \sum_2^n a_k \cdot \cot \alpha_k - \sum_2^n \Delta Q_k \cdot \cot \alpha_k \\
 \lambda M_y &= - \sum_1^m Z_i \cdot y_i + S_0 \cdot \sum_2^n a_k \cdot y_k \cdot \cot \alpha_k + \sum_2^n \Delta Q_k \cdot y_k \cdot \cot \alpha_k \\
 \lambda M_z &= \sum_1^m Z_i \cdot z_i - S_0 \cdot \sum_2^n a_k \cdot z_k \cdot \cot \alpha_k - \sum_2^n \Delta Q_k \cdot z_k \cdot \cot \alpha_k
 \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Diese Gleichgewichtsbedingungen sind mit der Beziehung zwischen Wölbmoment und inneren Kräften zu vervollständigen. Nach Gl. (2.10) gilt unter Berücksichtigung von Gl. (6.1):

$$\lambda M_\omega = \sum_1^m Z_i \cdot \omega_i - S_0 \cdot \sum_2^n a_k \cdot \omega_k \cdot \cot \alpha_k - \sum_2^n \Delta Q_k \cdot \omega_k \cdot \cot \alpha_k \quad (6.6)$$

Die Wölbkoordinate ist in Gl. (2.20) definiert. Für die Gurtstäbe lauten die Koordinaten:

$$\omega_i = \sum_2^{i-1} r_k \cdot a_k \quad (6.7)$$

In analoger Weise können auch die Koordinaten ω_k für die Wandmittelpunkte angeschrieben werden. Diese Definition von ω verursacht bei der Summation über den geschlossenen Querschnitt eine Sprungstelle in der Wölbkoordinate. Dieser Nachteil wird aufgehoben, wenn Gl. (6.7) mit einer Ansatzfunktion f in der Weise ergänzt wird:

$$\omega_{oi} = \sum_2^{i-1} r_k \cdot a_k - \sum_2^{i-1} f_k \cdot a_k \quad (6.8)$$

dass die Bedingung:

$$\sum_2^n r_k \cdot a_k = \sum_2^n f_k \cdot a_k = 2F_0 \quad (6.9)$$

erfüllt wird. Zudem soll das Wölbmoment infolge der neuen Bezugskoordinate nicht ändern:

$$\lambda M_\omega = \sum_1^m Z_i \cdot \omega_i + \sum_2^n Z_k \cdot \omega_k = \sum_1^m Z_i \cdot \omega_{oi} + \sum_2^n Z_k \cdot \omega_{ok} \quad (6.10)$$

Die Bedingung für das Wölbmoment am prismatischen Stahlbetonquerschnitt geht somit über in :

$$\lambda M_\omega = \sum_1^m Z_i \cdot \omega_{oi} - S_0 \cdot \sum_2^n a_k \cdot \omega_{ok} \cdot \cot \alpha_k - \sum_2^n \Delta Q_k \cdot \omega_{ok} \cdot \cot \alpha_k \quad (6.11)$$

Neben den Gleichgewichtsbedingungen muss auch Gl. (2.24) erfüllt werden:

$$T_w = \frac{dM_\omega}{dx} \quad (6.12)$$

Das Wölbmoment in Funktion des Schubflusses geht aus Gl. (2.8) bzw. Gl. (6.2) hervor. Für den prismatischen Querschnitt heisst das Wölb-torsionsmoment:

$$T_w = \sum_2^n \Delta Q_k \cdot r_k \quad (6.13)$$

Bei der Ableitung des Wölbmomentes ist zu beachten, dass die Längskomponenten Z_k der Diagonaldruckkräfte in x-Richtung nicht ändern. Mit Gl. (6.8) und Gl. (6.10) lautet die Ableitung:

$$\frac{dM_\omega}{dx} = \sum_1^m \left\{ \frac{dZ_i}{dx} \cdot \sum_2^{i-1} (r_k - f_k) \cdot a_k \right\} \quad (6.14)$$

Nach Anwendung der Gl. (4.2) und nach Umformung der Doppelsumme geht Gl. (6.14) über in:

$$\frac{dM_\omega}{dx} = \sum_2^n \Delta Q_k (r_k - f_k) \quad (6.15)$$

Wird Gl. (6.13) der Gl. (6.15) gleichgesetzt, dann gilt folgende Bedingung:

$$\sum_2^n \Delta Q_k \cdot f_k = 0 \quad (6.16)$$

Nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie müssen neben den Gleichgewichtsbedingungen auch die Plastizitätsbedingungen erfüllt werden. Bei der Beschränkung auf unterarmierte Querschnitte wird der Beton für das Versagen des Trägers nicht massgebend. Die entsprechende Plastizitätsbedingung wird immer erfüllt und darf weggelassen werden. Hingegen besteht die Forderung, dass die Gurtkräfte und die Bügelkräfte die Fließkräfte nicht überschreiten. Die Fließbedingungen für die Gurtstäbe werden aus Kapitel 4 übernommen:

$$P_i = Z_{fi} - Z_i \geq 0 \quad (6.17)$$

Die Fließbedingungen für die Bügel heissen:

$$B_k \cdot \frac{a_k}{s_k} \leq B_{fk} \cdot \frac{a_k}{s_k} \quad (6.18)$$

oder nach Einführung einer Schlupfvariablen:

$$P_k = B_{fk} \cdot \frac{a_k}{s_k} - B_k \cdot \frac{a_k}{s_k} \geq 0 \quad (6.19)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung Gl. (5.9) des Schubwandelementes folgt:

$$P_k = B_{fk} \cdot \frac{a_k}{s_k} - Q_k \cdot \tan \alpha_k \geq 0 \quad (6.20)$$

Der zweite Ausdruck in Gl. (6.20) ist immer positiv. Im Gegensatz zum Querschnitt mit vereinfachter Fließbedingung (Kap. 4) genügt hier also je eine Plastizitätsbedingung für die Schubkräfte. Diese lauten nach Unterteilung des Schubflusses in einen konstanten und in einen variablen Anteil:

$$P_k = B_{fk} \cdot \frac{a_k}{s_k} - S_0 \cdot a_k \cdot \tan \alpha_k - \Delta Q_k \cdot \tan \alpha_k \geq 0 \quad (6.21)$$

Jede Kombination von Schnittkräften, die die Gleichgewichtsbedingungen einhält und nirgends zum Fließen des Stahles führt, bildet einen unteren Grenzwert des Querschnittswiderstandes. Gesucht wird der grösste Lastfaktor λ . Die Optimierungsaufgabe ist in Bild 6.3 in Tableauform zusammengestellt. Neben der Zielfunktion sind die Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen aufgeführt.

	1	λ	$\dots Z_i \dots$	S_o	$\dots \Delta Q_k \cdot \tan \alpha_k \dots$	
$\lambda =$	0	1	$\dots 0 \dots$	0	$\dots 0 \dots$	Max. \rightarrow
\vdots	\vdots	-N	$\dots 1 \dots$	$-\sum a_k \cdot \cot \alpha_k$	$\dots -\cot^2 \alpha_k \dots$	
0 =	0	-M _y	$\dots -y_i \dots$	$\sum a_k \cdot y_k \cdot \cot \alpha_k$	$\dots y_k \cdot \cot^2 \alpha_k \dots$	
\vdots	\vdots	-M _z	$\dots z_i \dots$	$-\sum a_k \cdot z_k \cdot \cot \alpha_k$	$\dots -z_k \cdot \cot^2 \alpha_k \dots$	
\vdots	\vdots	-M _w	$\dots \omega_{oi} \dots$	$-\sum a_k \cdot \omega_{ok} \cdot \cot \alpha_k$	$\dots -\omega_{ok} \cdot \cot^2 \alpha_k \dots$	
\vdots	\vdots	-Q _y		0	$\dots \cos \delta_k \cdot \cot \alpha_k \dots$	
0 =	0	-Q _z	$\dots 0 \dots$	0	$\dots \sin \delta_k \cdot \cot \alpha_k \dots$	
\vdots	\vdots	-T		2F ₀	$\dots r_k \cdot \cot \alpha_k \dots$	
\vdots	\vdots	0		0	$\dots f_k \cdot \cot \alpha_k \dots$	
\vdots	\vdots					
p _i =	Z _{fi}	0	$\dots -1 \dots$	0	$\dots 0 \dots$	
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		
\vdots	\vdots					
p _k =	$B_{fk} \frac{a_k}{s_k}$	0	$\dots 0 \dots$	$-a_k \cdot \tan \alpha_k$	$\dots -1 \dots$	
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		

Bild 6.3: Tableau der Gleichgewichts- und Plastizitätsbedingungen

6.3 Kinematische Methode

Nach dem kinematischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie stellt jede Lastkombination, die einen Mechanismus zur Folge hat, einen oberen Grenzwert des Querschnittswiderstandes dar. Eine Bewegung tritt dann auf, wenn die Leistung der äusseren Kräfte grösser ist als die Dissipationsleistung:

$$L_a - L_d \geq 0 \quad (6.22)$$

Die Leistung wird an einem Balkenelement der Länge $dx = 1$ berechnet. Als äussere Kräfte greifen an diesem Element die Schnittkräfte an. Die Leistung der Schnittkräfte bei Beginn der plastischen Verformungen ergibt sich aus

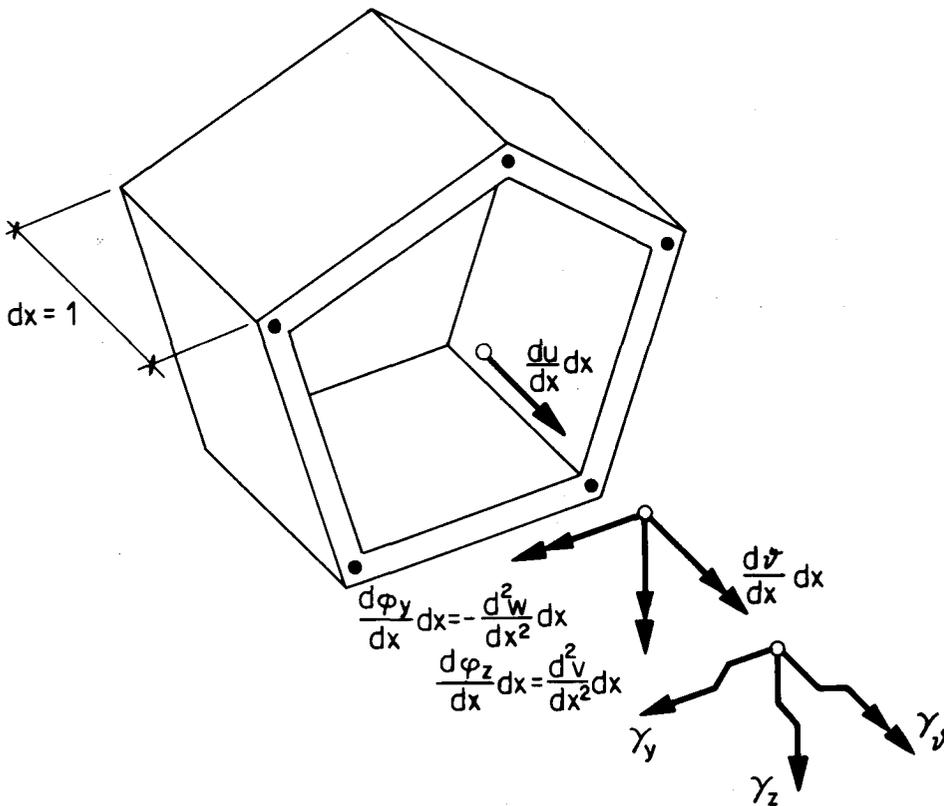


Bild 6.4: Verformungen am Balkenelement

Gl. (4.15), wenn die Dehnungen und Schiebungen nach Gl. (3.12) und Gl. (3.15) durch die Verformungsparameter ersetzt werden:

$$L_a = \lambda \left\{ N \cdot \left(\frac{du}{dx} \right) \cdot + M_y \cdot \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) \cdot - M_z \cdot \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \cdot - M_x \cdot \left(\frac{d^2 \delta}{dx^2} \right) \cdot + Q_y \cdot \dot{\gamma}_y + Q_z \cdot \dot{\gamma}_z + \right. \\ \left. + T \cdot \dot{\gamma}_{\delta} + T_0 \cdot \left(\frac{d\delta}{dx} \right) \cdot \right\} \quad (6.23)$$

Die Verformungsparameter sind in Bild 6.4 aufgezeichnet. Aus Gl. (3.15) geht

hervor, dass die Schiebung einen Anteil infolge der Drehschiebung γ_δ und einen Anteil infolge des Verdrehungszuwachses $d\delta/dx$ enthält. Wegen der Bedingung nach Gl. (6.16) trägt aber dieser zweite Anteil nur in Verbindung mit dem konstanten Schubfluss S_0 , bzw. dem entsprechenden Torsionsmoment T_0 , zur Leistung der äusseren Kräfte bei.

Die Dissipationsleistung lautet für das Stabelement der Länge $dx = 1$:

$$L_d = \sum_1^m Z_{fi} \cdot \dot{\epsilon}_i + \sum_2^n B_{fk} \cdot \frac{a_k}{s_k} \cdot \dot{\epsilon}_{Bk} \quad (6.24)$$

Werden Gl. (6.23) und Gl. (6.24) in Gl. (6.22) eingesetzt, so folgt der Lastfaktor λ zu:

$$\lambda = \frac{\sum_1^m Z_{fi} \cdot \dot{\epsilon}_i + \sum_2^n B_{fk} \cdot \frac{a_k}{s_k} \cdot \dot{\epsilon}_{Bk}}{\{N \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot + M_y \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) \cdot - M_z \cdot \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) \cdot - M_\omega \cdot \left(\frac{d^2\delta}{dx^2}\right) \cdot + Q_y \cdot \dot{\gamma}_y + Q_z \cdot \dot{\gamma}_z + T \cdot \dot{\gamma}_\delta + T_0 \cdot \left(\frac{d\delta}{dx}\right) \cdot \}} \quad (6.25)$$

Nach der kinematischen Methode wird die Schnittkraftkombination mit dem kleinsten Lastfaktor gesucht. Weil die absolute Grösse der Verformungsgeschwindigkeiten keine Rolle spielt, wird der Nenner normiert:

$$N \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot + M_y \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) \cdot - M_z \cdot \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) \cdot - M_\omega \cdot \left(\frac{d^2\delta}{dx^2}\right) \cdot + Q_y \cdot \dot{\gamma}_y + Q_z \cdot \dot{\gamma}_z + T \cdot \dot{\gamma}_\delta + T_0 \cdot \left(\frac{d\delta}{dx}\right) \cdot = 1 \quad (6.26)$$

Die Zielfunktion wird demzufolge in folgender Form in die Optimierungsaufgabe aufgenommen:

$$\lambda = \sum_1^m Z_{fi} \cdot \dot{\epsilon}_i + \sum_2^n B_{fk} \cdot \frac{a_k}{s_k} \cdot \dot{\epsilon}_{Bk} \rightarrow \text{Min.} \quad (6.27)$$

Ein Mechanismus ist im weiteren nur dann möglich, wenn zusätzlich die Verträglichkeitsbedingungen am Querschnitt (Abschnitt 3.2) mit den Verträglichkeitsbedingungen der einzelnen Fachwerkscheiben (Abschnitt 5.4) übereinstimmen. Die Dehnungsinkremente der Gurtstäbe sind in Gl. (3.12) festgehalten:

$$\dot{\epsilon}_i = \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot - \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) \cdot y_i - \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) \cdot z_i - \left(\frac{d^2\delta}{dx^2}\right) \cdot \left(\sum_2^{i-1} r_k \cdot a_k - \sum_2^{i-1} f_k \cdot a_k\right) \quad (6.28)$$

oder mit der Abkürzung nach Gl. (6.8):

$$\dot{\epsilon}_i = \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot - \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) \cdot y_i - \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) \cdot z_i - \left(\frac{d^2\delta}{dx^2}\right) \cdot \omega_{oi} \quad (6.29)$$

Die Dehnungsinkremente der Bügel werden mit Hilfe der Gl. (5.15) berechnet:

$$\dot{\epsilon}_{Bk} = \dot{\gamma}_k \cdot \cot \alpha_k - \dot{\epsilon}_{Lk} \cdot \cot^2 \alpha_k \quad (6.30)$$

Unter Bezug von Gl. (3.12) und Gl. (3.15) geht Gl. (6.30) über in:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{Bk} = & \dot{\gamma}_y \cdot \cos \delta_k \cdot \cot \alpha_k + \dot{\gamma}_z \cdot \sin \delta_k \cdot \cot \alpha_k + \dot{\gamma}_\vartheta \cdot r_k \cdot \cot \alpha_k + \\ & + \left(\frac{d\delta}{dx}\right) \cdot f_k \cdot \cot \alpha_k - \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot \cot^2 \alpha_k + \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) \cdot y_k \cdot \cot^2 \alpha_k - \\ & - \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) \cdot z_k \cdot \cot^2 \alpha_k - \left(\frac{d^2\vartheta}{dx^2}\right) \cdot \omega_{ok} \cdot \cot^2 \alpha_k \end{aligned} \quad (6.31)$$

Die Bügel- und Längsdehnungen sind über Gl. (5.3) miteinander verbunden:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{Bk} = & \dot{\epsilon}_{Lk} \cdot \cot^2 \alpha_k = \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot \cot^2 \alpha_k - \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right) \cdot y_k \cdot \cot \alpha_k - \\ & - \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) \cdot z_k \cdot \cot^2 \alpha_k - \left(\frac{d^2\vartheta}{dx^2}\right) \cdot \omega_{ok} \cdot \cot^2 \alpha_k \end{aligned} \quad (6.32)$$

Bei geschlossenem Querschnitt muss aber die Stetigkeitsbedingung Gl. (3.4) erfüllt sein:

$$\sum_2^n \dot{\Delta u}_k = 0 \quad (6.33)$$

Mit $\dot{\Delta u}_k$ wird die Differenz der Längsverschiebungen der beiden Gurtstäbe bezeichnet, die an die Querschnittswand k anschliessen. Nach Gl. (3.13) gilt die Beziehung:

$$\sum_2^n \dot{\Delta u}_k = \sum_2^n \dot{\gamma}_k \cdot a_k - \sum_2^n \left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot a_k = 0 \quad (6.34)$$

Werden die Schiebungen durch Gl. (5.15) des Fachwerkmodelles einerseits und die tangentiellen Verschiebungen der Querschnittswände mit Gl. (3.9) andererseits ersetzt, so heisst Gl. (6.34) neu:

$$\begin{aligned} \sum_2^n \dot{\epsilon}_{Bk} \cdot a_k \cdot \tan \alpha_k + \sum_2^n \dot{\epsilon}_{Lk} \cdot a_k \cdot \cot \alpha_k - \left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot \sum_2^n a_k \cdot \cos \delta_k - \\ - \left(\frac{dw}{dx}\right) \cdot \sum_2^n a_k \cdot \sin \delta_k - \left(\frac{d\delta}{dx}\right) \cdot \sum_2^n r_k \cdot a_k - \dot{\gamma}_y \cdot \sum_2^n a_k \cdot \cos \delta_k - \\ - \dot{\gamma}_z \cdot \sum_2^n a_k \cdot \sin \delta_k - \dot{\gamma}_\vartheta \cdot \sum_2^n r_k \cdot a_k = 0 \end{aligned} \quad (6.35)$$

Da sowohl $\sum a_k \cdot \sin \delta_k$ als auch $\sum a_k \cdot \cos \delta_k$ bei der Summation über den ganzen Umfang verschwinden, bleibt von Gl. (6.35) noch übrig:

$$\sum_{k=1}^n \dot{\epsilon}_{Bk} \cdot a_k \cdot \tan \alpha_k + \sum_{k=1}^n \dot{\epsilon}_{Lk} \cdot a_k \cdot \cot \alpha_k - \left[\left(\frac{d\dot{\vartheta}}{dx} \right) \cdot \dot{\gamma}_{\dot{\vartheta}} \right] \cdot 2F_0 = 0 \quad (6.36)$$

Werden schliesslich die Längsdehnungsinkremente unter Anwendung von Gl. (3.12) ausgeschrieben, dann nimmt die Stetigkeitsbedingung der Längsverschiebungen am geschlossenen Querschnitt die folgende Form an:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \dot{\epsilon}_{Bk} \cdot a_k \cdot \tan \alpha_k + \left(\frac{du}{dx} \right) \cdot \sum_{k=1}^n a_k \cdot \cot \alpha_k - \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right) \cdot \sum_{k=1}^n a_k \cdot y_k \cdot \cot \alpha_k - \\ & - \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \cdot \sum_{k=1}^n a_k \cdot z_k \cdot \cot \alpha_k - \left(\frac{d^2 \dot{\vartheta}}{dx^2} \right) \cdot \sum_{k=1}^n a_k \cdot w_{ok} \cdot \cot \alpha_k - \\ & - \left[\left(\frac{d\dot{\vartheta}}{dx} \right) \cdot \dot{\gamma}_{\dot{\vartheta}} \right] \cdot 2F_0 = 0 \end{aligned} \quad (6.37)$$

Die Optimierungsaufgabe nach der kinematischen Methode ist in Bild 6.5 in Tableauform zusammengestellt. Dabei ist zu beachten, dass darin das Tableau der statischen Methode (Bild 6.3) in transponierter Schreibweise enthalten ist, wenn Gl. (6.16) durch Gl. (2.23) erweitert wird:

$$- T_0 + 2F_0 \cdot S_0 + \sum_{k=1}^n \Delta Q_k \cdot f_k = 0 \quad (6.38)$$

Zudem wird das transponierte Tableau der statischen Methode ergänzt durch die Matrix der Gl. (6.32).

6.4 Mögliche Lösungswege

Sowohl das statische als auch das kinematische Tableau enthalten Variablen, die miteinander gekoppelt sind. Im statischen Tableau werden die Schubkräfte der Querschnittswände mit dem reziproken Wert der Neigungen der Druckdiagonalen multipliziert. Im kinematischen Tableau stehen die Neigungswinkel mit den Verformungsgrössen in Verbindung. Beide Optimierungsaufgaben besitzen also nichtlineare Nebenbedingungen. Für solche Aufgaben sind aber keine geschlossene analytische Lösungen bekannt.

Im folgenden werden Näherungslösungen gesucht, die aber nur über vereinfachende Annahmen erreichbar sind. Zweck dieser Annahmen ist es, die nichtlinearen Nebenbedingungen in lineare Bedingungen überzuführen. Zwei mögliche Wege werden unter Bezugnahme auf frühere Arbeiten über die Lösung statischer Programme kurz beschrieben. Eine Linearisierung der Nebenbedingungen verlangt, dass die Schubkräfte Q_k und die Neigungen der Druckdiagonalen $\tan\alpha_k$ getrennt werden. Eine Trennung ist aber nur dann möglich, wenn entweder die Schubkräfte oder die Diagonalenneigungen zum voraus bestimmt werden. Mit der Linearisierung ist gleichzeitig eine Reduktion der Anzahl Variablen verbunden.

In [1] werden Kastenträger aus Stahlbeton unter Torsion und Biegung untersucht. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Schubfluss gleichmässig über den Umfang verteilt ist. Die Schubkraft jeder Querschnittswand lässt sich direkt in Funktion des Torsionsmomentes anschreiben. Die Anzahl freier Variablen wird beträchtlich eingeschränkt. Im Zuge der Lösung wird schliesslich das Torsionsmoment festgehalten und das dazugehörige maximale Biegemoment mit Hilfe der Methoden der linearen Programmierung gesucht. Im allgemeinen entspricht für reine Torsion am geschlossenen Querschnitt die wirkliche Schubflussverteilung der angenommenen Verteilung. Damit ist der effektive Querschnittswiderstand gefunden. Gegenstand der Arbeit [2] ist die Bestimmung der Traglast von Trägern mit offenem Querschnitt. Bei der Lösung der nichtlinearen Aufgabe wird im wesentlichen eine Aussage über die Diagonalenneigung gemacht. Als Vereinfachung wird vorausgesetzt, dass die Diagonalenneigung über den ganzen Querschnitt konstant ist. Die Näherungslösung nach diesem Vorgehen führt zu umso besseren Resultaten, je näher die wirklichen Diagonalenneigungen der angenommenen Neigung entsprechen. Bei gleichen Bügeln in allen Querschnittswänden sollte der Schubfluss entlang des Profils möglichst wenig ändern. Wird die Bewehrung so ausgelegt, dass überall der Grenzwinkel der Diagonalenneigung erreicht wird, dann entspricht die Annahme der Wirklichkeit.

Die Nebenbedingungen der Optimierungsaufgabe können aber auch linearisiert werden, wenn extreme Lastkombinationen getrennt betrachtet werden. Die Opti-

mierungsaufgabe wird unterteilt in eine Aufgabe für vorwiegende Schubbeanspruchung ($N, M_y, M_z, M_\omega \rightarrow 0$) und in eine solche für vorwiegende Längsbeanspruchung ($Q_y, Q_z, T \rightarrow 0$). Auf diese Weise lässt sich das Tragverhalten im Bruchzustand qualitativ beurteilen.

6.5 Unterteilung der Optimierungsaufgabe

Die statische Aufgabe nach Bild 6.3 zeigt, dass die Längskräfte und die Biegelkräfte nur über Gl. (6.3) miteinander verbunden sind.

Vorerst wird ein Träger untersucht, der vorwiegend auf Schub beansprucht wird ($N, M_y, M_z, M_\omega \rightarrow 0$) oder dessen Längsbewehrung so stark ausgeführt ist, dass sie im Bruchzustand nicht fließt. Die Plastizitätsbedingungen für die Gurtstäbe (Gl. (6.17)) werden bei der Suche nach der optimalen Lösung nicht massgebend und können weggelassen werden. Auch die Gleichgewichtsbedingungen für die Längskräfte (Gl. (6.5) und Gl. (6.11)) können mit einer beliebigen Kombination der Gurtkräfte in jedem Fall erfüllt werden. Sie sind als Nebenbedingungen nicht notwendig.

Im reduzierten Tableau kommen die Diagonalenneigungen nur noch in linearer Form vor. Anstelle der freien Variablen $\Delta Q_k \cdot \tan \alpha_k$ werden die Variablen ΔQ_k eingeführt. Damit gehen die Plastizitätsbedingungen Gl. (6.21) über in:

$$p_k = B_{fk} \cdot \frac{a_k}{s_k} \cdot \cot \alpha_k - S_o \cdot a_k - \Delta Q_k \geq 0 \quad (6.39)$$

Diese Beziehungen gelten nur für positive Schubkräfte. Mit der Schubkraft wechselt auch die Diagonalenneigung ihr Vorzeichen. Hingegen bleibt der konstante Schubfluss immer positiv ($T \geq 0$). Gl. (6.39) muss deshalb für negative Schubkräfte wie folgt ergänzt werden:

$$p_k^- = - B_{fk} \cdot \frac{a_k}{s_k} \cdot \cot \alpha_k - S_o \cdot a_k + \Delta Q_k \geq 0 \quad (6.40)$$

Mit der Abkürzung:

$$Q_{fk} = B_{fk} \cdot \frac{a_k}{s_k} \cdot |\cot \alpha_k| \quad (6.41)$$

ergeben sich die Plastizitätsbedingungen zu:

$$\begin{aligned} p_k^+ &= Q_{fk} - S_o \cdot a_k - \Delta Q_k \\ p_k^- &= Q_{fk} - S_o \cdot a_k + \Delta Q_k \end{aligned} \quad (6.42)$$

	1	λ	S_0	$\dots \Delta Q_k \dots$	
$\lambda =$	0	1	0	$\dots 0 \dots$	Max →
\vdots	\vdots	$-Q_y$	0	$\dots \cos \delta_k \dots$	
$0 =$	\vdots	$-Q_z$	0	$\dots \sin \delta_k \dots$	
\vdots	\vdots	$-T$	$2F_0$	$\dots r_k \dots$	
\vdots	\vdots	0	0	$\dots f_k \dots$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$\dots -1 \dots$	
$P_k^+ =$	\vdots	0	$-a_k$	$\dots +1 \dots$	
$P_k^- =$	Q_{fk}	\vdots	\vdots	$\dots \vdots \dots$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$\dots \vdots \dots$	

Bild 6.6: Reduziertes Tableau der Schubkräfte

Damit trotz starrer Längsbewehrung ein Versagen möglich ist, muss als Diagonalenneigung der untere Grenzwinkel nach Gl. (5.5) berücksichtigt werden. Die Schubfließkräfte gemäss Gl. (6.41) erscheinen als konstante Grössen. Die Optimierungsaufgabe ist aus linearen Bedingungen aufgebaut (Bild 6.6).

Das statische Tableau enthält neben dem Lastfaktor und dem konstanten Schubfluss die n freien Variablen ΔQ_k und $2n$ abhängige Schlupfvariablen. Diesen $(3n + 2)$ Unbekannten sind $(2n + 4)$ Gleichungen gegenübergestellt. Nach dem Simplex-Theorem gehen mindestens $(n - 2)$ Grössen mit dem Wert null in die Basislösung ein. Der Lastfaktor wird sicher maximal, wenn möglichst viele Bügel fließen. Es werden folglich $(n - 2)$ Schlupfvariablen zu null vorausbestimmt. Wird beachtet, dass für jede Querschnittswand zwei Schlupfvariablen definiert werden, dann heisst das, dass im Bruchzustand mit Ausnahme der Bügel zweier Querschnittswände die gesamte Querbewehrung fliesst. Der Drehpunkt des Schubmechanismus liegt im Schnittpunkt der Spuren der beiden starren Querschnittswände.

In einer zweiten Ueberlegung wird ein Träger mit überwiegender Längsbeanspruchung ($Q_y, Q_z, T \rightarrow 0$) ins Auge gefasst. Das gleiche Tragverhalten zeigt auch ein Träger, dessen Bügel so stark ausgebildet sind, dass sie im Bruchzustand nicht fließen. Die entsprechenden Plastizitätsbedingungen und die Gleichgewichtsbedingungen für die Schubkräfte (Gl. (6.2)) werden immer er-

füllt und können weggelassen werden. Bei kleiner Schubbeanspruchung werden die Schubkräfte der Querschnittswände klein. Eine starke Bügelbewehrung hat steile Diagonalen zur Folge. In beiden Fällen sind die Längskomponenten der Diagonaldruckkräfte gegenüber den Gurtkräften unbedeutend und werden zur Vereinfachung ebenfalls gestrichen. Damit wird das ursprüngliche statische Tableau auf die in Bild 6.7 dargestellte lineare Form reduziert.

	1	λ	$\dots z_i \dots$
$\lambda =$	0	1	$\dots 0 \dots$
\vdots	\vdots	-N	$\dots 1 \dots$
0 =	0	-M _y	$\dots -y_i \dots$
\vdots	\vdots	-M _z	$\dots z_i \dots$
		-M _ω	$\dots \omega_{oi} \dots$
\vdots	\vdots	\vdots	\dots
p _i =	Z _{fi}	0	-1
\vdots	\vdots	\vdots	\dots

Max
→

Bild 6.7: Reduziertes Tableau der Längskräfte

In Austauschschritten können alle bis auf drei Schlupfvariablen durch die Gurtkräfte ersetzt werden. Der Lastfaktor wird maximal, wenn die ausgetauschten Schlupfvariablen den Wert null einnehmen. Die Lösung sagt also aus, dass im Bruchzustand höchstens drei Gurtstäbe starr bleiben. Die Stetigkeitsbedingung der Längsverschiebungen Gl. (6.37) macht allerdings deutlich, dass im Beisein eines Wölbmomentes am geschlossenen Querschnitt kein reiner Längsmechanismus auftritt. Mindestens die Bügel einer Querschnittswand werden im Bruchzustand ebenfalls fließen.

Die Schlussfolgerungen sowohl bezüglich des Schubmechanismus als auch bezüglich des Längsmechanismus, die mit Hilfe der Aufteilung des statischen Tableaus gezogen werden, bestätigen die Erkenntnisse, die in Kapitel 4 für den Rechteckquerschnitt gewonnen wurden.

7. BRUCHWIDERSTAND VON STAHLBETONTRÄGERN MIT TRAPEZQUERSCHNITT

7.1 Einfluss der Wölbtorsion

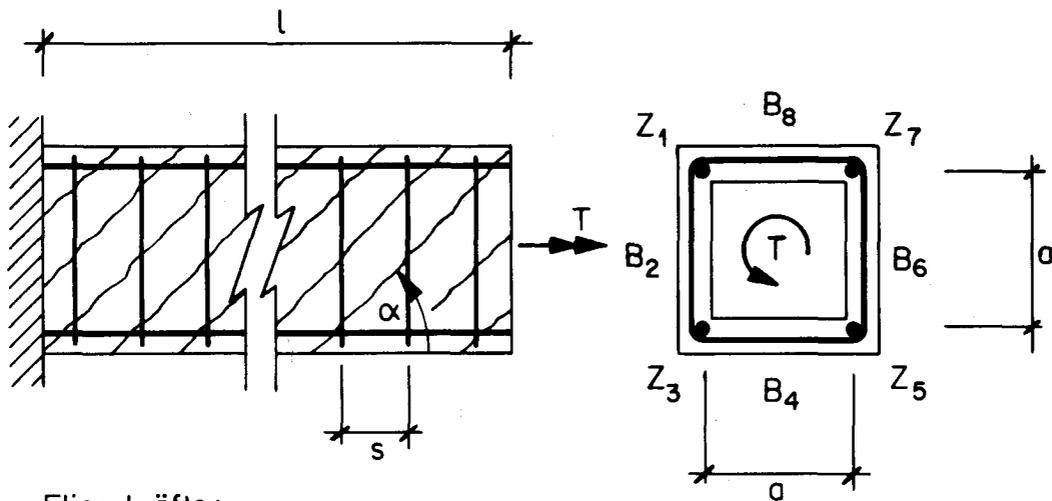
Die rechnerische Bestimmung des Bruchwiderstandes wird wesentlich vereinfacht, wenn das Wölbmoment vernachlässigt werden darf. Die Gleichgewichtsbedingungen für das Wölbmoment darf gestrichen werden, wenn das Torsionsmoment einen über den Umfang konstanten Schubfluss zur Folge hat. In diesem Fall wird die Gleichgewichtsbedingung für das Wölbmoment trivial. Sie darf ferner auch ausser acht gelassen werden, wenn das Wölbmoment in der Weise abgebaut werden kann, dass nirgends die Plastizitätsbedingungen verletzt werden. Zum Beispiel können biegesteife Querträger das Kräftespiel im dazwischen liegenden Balkenabschnitt soweit beeinflussen, dass eine Plastifizierung infolge des Wölbmomentes verunmöglicht wird. Die Gleichgewichtsbedingung für das Wölbmoment kann im Zwischenbereich immer erfüllt werden. Dieselbe Wirkung erzielen beim Träger mit geschlossenem Querschnitt auch Balkenabschnitte, die im Bruchzustand noch elastisch arbeiten.

Wieweit ein Wölbmoment den Bruchwiderstand verändert, wird anschliessend an einem Kragträger abgeklärt. Am freien Ende greift ein Torsionsmoment an. Zur Vereinfachung der Rechnung wird als Querschnittsform ein Quadrat gewählt, ohne dass dadurch die grundsätzliche Aussagekraft der Untersuchung geschmälert wird. Die Bezeichnungen und die Fließkräfte der Bewehrung finden sich in Bild 7.1. Die Längsbewehrung ist zu gleichen Teilen in den Eckpunkten konzentriert. Die Bügel sind in der Querschnittswand 2 schwächer ausgebildet. Die Resultate für den Träger mit einem schwächeren Steg unter reiner Torsion dürfen auch zur Beurteilung eines symmetrischen Trägers unter kombinierter Beanspruchung beigezogen werden, weil unter der Lastkombination Torsion - Querkraft sicher die Querschnittswand 2 am stärksten beansprucht wird.

Gesucht wird das grösstmögliche Torsionsmoment, bei dem weder die Gurtfließkräfte noch die Bügelfließkräfte überschritten werden. Die Gleichgewichtsbedingungen der Schubkräfte führen zu folgender Zielfunktion:

$$T_p = a \cdot (Q_2 + Q_4) \rightarrow \text{Max.} \quad (7.1)$$

Nach den Ausführungen in Kapitel 6 bleiben im Bruchzustand maximal drei Gurtstäbe starr. Die Studien am Träger mit vereinfachter Fließfigur zeigen, dass zuerst der Gurtstab 3 fließt. Als Nebenbedingung zur Zielfunktion wird deshalb die Fließbedingung für diesen Gurtstab im Einspann-Querschnitt formuliert. Die Gurtkraft setzt sich zusammen aus einem Anteil infolge der Differenz der Schubflüsse der benachbarten Querschnittswände und aus einem



Fließkräfte:

$$Z_{f1} = Z_{f3} = Z_{f5} = Z_{f7} = Z_f$$

$$B_{f2} = \frac{B_f}{\nu}; B_{f4} = B_{f6} = B_{f8} = B_f$$

Bild 7.1: Bezeichnungen am Stahlbetonkragträger

Fachwerkanteil. Die Bestimmung der ersten Komponente beruht auf der Annahme, dass die Schubkräfte der Querschnittswände in Längsrichtung nicht ändern. Die gesuchte Gurtkraft ergibt sich dann zu:

$$Z_3 = \frac{1}{a} \cdot (Q_4 - Q_2) + \frac{1}{2} \cdot (Q_2 \cdot \cot \alpha_2 + Q_4 \cdot \cot \alpha_4) \quad (7.2)$$

Wenn ein Gurtstab fließt, fließen auch die Bügel in den anschließenden Querschnittswänden. Die Neigungswinkel der Druckdiagonalen werden in der Folge nach Gl. (5.9) durch die Schubkräfte und die Bügelflisskräfte ersetzt. Die Plastizitätsbedingung für den Gurtstab lautet somit:

$$Z_3 = \frac{1}{a} \cdot (Q_4 - Q_2) + \frac{s}{2B_f \cdot a} \cdot (\nu \cdot Q_2^2 + Q_4^2) = Z_f \quad (7.3)$$

Die Optimierungsaufgabe erscheint als Maximumaufgabe einer Funktion zweier Variablen mit einer Nebenbedingung. Die Lösung wird mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatorenregel vollzogen. Als Prinzipalfunktion wird definiert:

$$\Phi = a \cdot (Q_2 + Q_4) + \lambda_L \cdot \left\{ \frac{1}{a} \cdot (Q_4 - Q_2) + \frac{s}{2B_f \cdot a} \cdot (\nu \cdot Q_2^2 + Q_4^2) - Z_f \right\} \quad (7.4)$$

Mit λ_L wird der Lagrange'sche Multiplikator bezeichnet. Die notwendigen Bedingungen für das Eintreten eines Extremums heissen:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial Q_2} &= a - \lambda_L \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{v \cdot Q_2 \cdot s}{B_f \cdot a} \right) = 0 \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial Q_4} &= a + \lambda_L \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{Q_4 \cdot s}{B_f \cdot a} \right) = 0 \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_L} &= \frac{1}{a} \cdot (Q_4 - Q_2) + \frac{s}{2B_f \cdot a} \cdot (v \cdot Q_2^2 + Q_4^2) - Z_f = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Die Auflösung des Gleichungssystems erlaubt die Bestimmung der beiden unbekanntenen Schubkräfte:

$$\left. \begin{aligned}
 Q_2 &= \frac{B_f \cdot a}{v \cdot s} \cdot \left\{ \frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{Z_f \cdot s}{B_f \cdot a} \cdot \frac{2v}{(v+1)}} \right\} \\
 Q_4 &= \frac{B_f \cdot a}{s} \cdot \left\{ -\frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{Z_f \cdot s}{B_f \cdot a} \cdot \frac{2v}{(v+1)}} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Das Torsionsmoment berechnet sich durch Einsetzen von Gl. (7.6) in Gl.(7.1):

$$T_p = \frac{B_f \cdot a^2}{s} \cdot \left\{ \frac{(1-v)}{v} \cdot \frac{1}{a} + \frac{(1+v)}{v} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{Z_f \cdot s}{B_f \cdot a} \cdot \frac{2v}{(v+1)}} \right\} \quad (7.7)$$

Den grössten Wert nimmt diese Funktion bei der Länge $l = 0$ an:

$$T_p(l=0) = \frac{(1+v) \cdot a^2}{v} \sqrt{\frac{Z_f \cdot B_f}{a \cdot s} \cdot \frac{2v}{(v+1)}} \quad (7.8)$$

und nimmt mit zunehmender Länge ab. Ein Minimum wird erreicht, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{\partial T_p}{\partial \left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{(1-v)}{v} + \frac{(1+v)}{v} \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{a}}{2 \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{Z_f \cdot s}{B_f \cdot a} \cdot \frac{2v}{(v+1)}}} = 0 \quad (7.9)$$

Daraus folgt die zum Minimum gehörende Länge:

$$\left(\frac{1}{a}\right) = (v-1) \cdot \sqrt{\frac{Z_f \cdot s}{B_f \cdot a} \cdot \frac{1}{2(v+1)}} \quad (7.10)$$

und das kleinste Torsionsbruchmoment:

$$T_{pmin} = 4a^2 \cdot \sqrt{\frac{Z_f \cdot B_f}{a \cdot s} \cdot \frac{1}{2(v+1)}} \quad (7.11)$$

Aus Gl. (7.6) geht hervor, dass bei dieser Trägerlänge alle Schubkräfte der Querschnittswände gleich gross sind:

$$Q_2 = Q_4 = Q_6 = Q_8 = \sqrt{\frac{2Z_f \cdot B_f \cdot a}{(v+1) \cdot s}} \quad (7.12)$$

Der Schubfluss ist konstant über den Umfang. Uebersteigt der Träger die Länge l_1 , so kann gezeigt werden, dass die Schubkraft Q_2 grösser wird als die Schubkraft Q_4 . Diese Aussage ist physikalisch wenig sinnvoll und führt mathematisch zu einem Widerspruch. Die Lösung nach Gl. (7.7) ist deshalb nur bis zur Trägerlänge l_1 gültig.

Zusätzlich muss geprüft werden, ob die Diagonalenneigung den in Gl. (5.5) festgelegten Grenzwert nicht unterschreitet. Sicher ist die Diagonalenneigung in der schwächeren Querschnittswand am kleinsten. Gl. (7.6) eingesetzt in Gl. (5.9) führt zur folgenden Bedingung für die Diagonalenneigung:

$$\cot \alpha_2 = \frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{Z_f \cdot s}{B_f \cdot a} \cdot \frac{2v}{(v+1)}} \leq 2 \quad (7.13)$$

Diese Bedingung wird erfüllt, sofern der Träger kürzer ist als:

$$\left(\frac{l_2}{a}\right) = 1 - \frac{Z_f \cdot s}{B_f \cdot a} \cdot \frac{v}{2(v+1)} \quad (7.14)$$

Ist die Diagonalenneigung in der einen Querschnittswand am Grenzwinkel, dann ist auch die entsprechende Schubkraft zum vornherein bekannt:

$$Q_2 = \frac{2B_f \cdot a}{v \cdot s} \quad (7.15)$$

und die Schubkraft Q_4 kann direkt aus Gl. (7.3) angeschrieben werden:

$$Q_4 = \frac{B_f \cdot a}{s} \cdot \left\{ -\frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{Z_f \cdot s}{Q_f \cdot a} + \frac{4}{v} \cdot \left(\frac{1}{a} - 1\right)} \right\} \quad (7.16)$$

Das Torsionsbruchmoment ist damit beschränkt auf:

$$T_p(\cot \alpha_2 = 2) = \frac{B_f \cdot a^2}{s} \cdot \left\{ \frac{2}{v} - \frac{1}{a} + \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{Z_f \cdot s}{Q_f \cdot a} + \frac{4}{v} \cdot \left(\frac{1}{a} - 1\right)} \right\} \quad (7.17)$$

In Bild 7.2 ist der Verlauf des Torsionsbruchmomentes für verschiedene v in Funktion der Länge aufgetragen. Als Beispiel wird ein Träger gewählt, der auf drei Seiten im Längs- und im Quersinn volumengleich bewehrt ist.

Wie schon in Kapitel 4 festgestellt wurde, klingt die Wölbbeanspruchung im

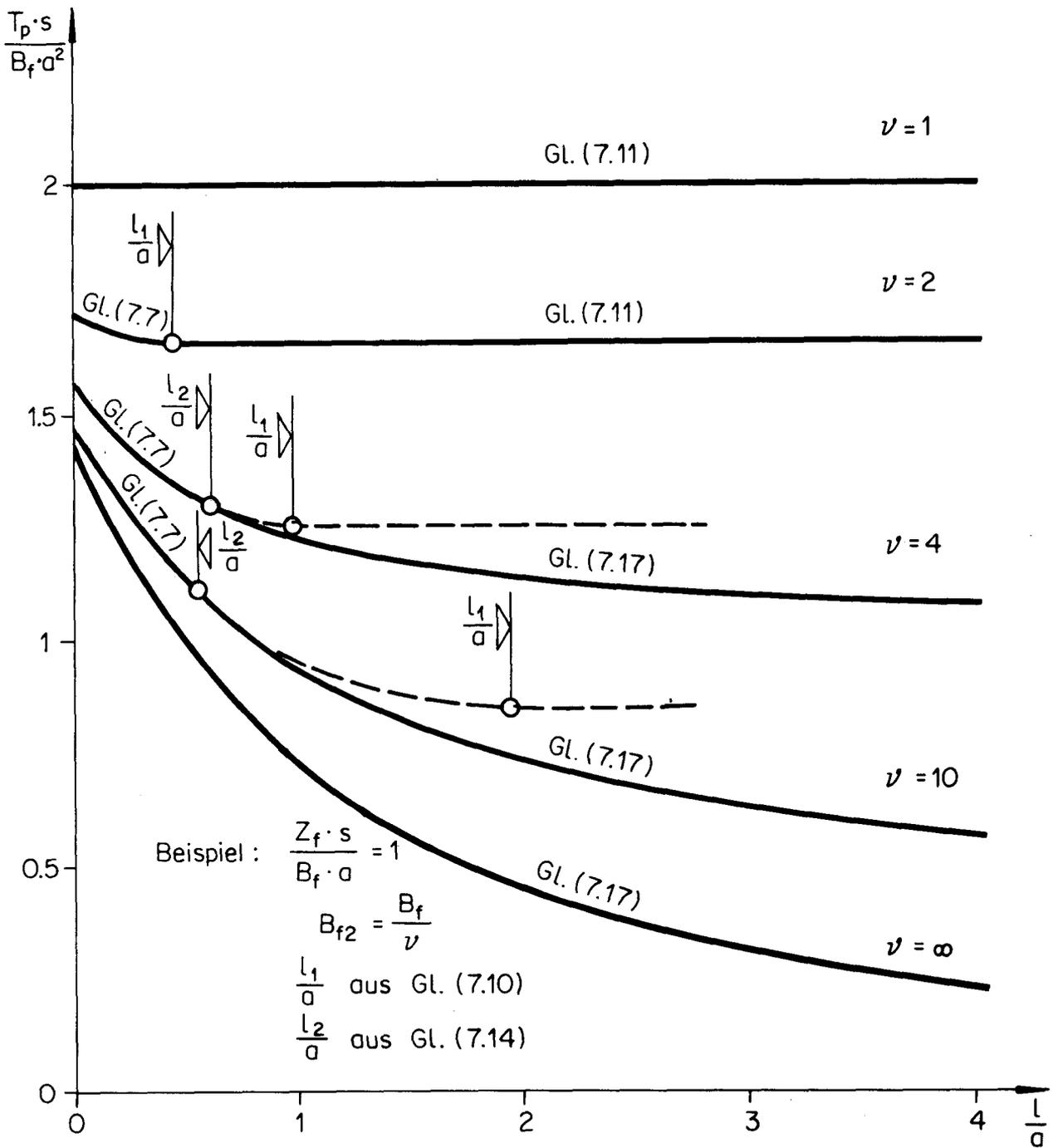


Bild 7.2 : Torsionstragfähigkeit eines Stahlbetonkragträgers in Funktion der Trägerlänge

Gurtstab mit zunehmender Länge ab. Der zusätzliche Torsionswiderstand infolge veränderter Verwölbung verschwindet und das Torsionsmoment wird allein durch einen konstanten Schubfluss übertragen. Diese Tendenz ist beim Stahlbetonträger in noch ausgeprägterem Masse erkennbar, solange sich die Diagonaleneneigung optimal einstellen kann. Physikalisch lässt sich diese Feststellung dahin deuten, dass der Stahlbetonträger wegen der variablen Diagonaleneneigung die Fähigkeit hat, den über den Umfang unterschiedlichen Schubfluss schon innerhalb einer sehr kurzen Strecke auszugleichen.

Die Annahme, dass der Schubfluss infolge Torsion konstant ist, stimmt beim Kastenträger aus Stahlbeton im allgemeinen mit der Wirklichkeit überein. In diesem Fall wird die Gleichgewichtsbedingung für das Wölbmoment trivial und fällt weg. Ist der Träger kürzer als l_1 , so ist wohl eine erhöhte Tragfähigkeit möglich. Die Annahme eines konstanten Schubflusses stellt aber eine untere Grenze der Tragfähigkeit dar.

7.2 Interaktion Torsion - Biegung - Querkraft am einfach symmetrischen Trapezquerschnitt

Im folgenden wird der Querschnittswiderstand des im Brückenbau weit verbreiteten Trapezquerschnittes (Bild 7.3) hergeleitet. Die Bügel sind über den

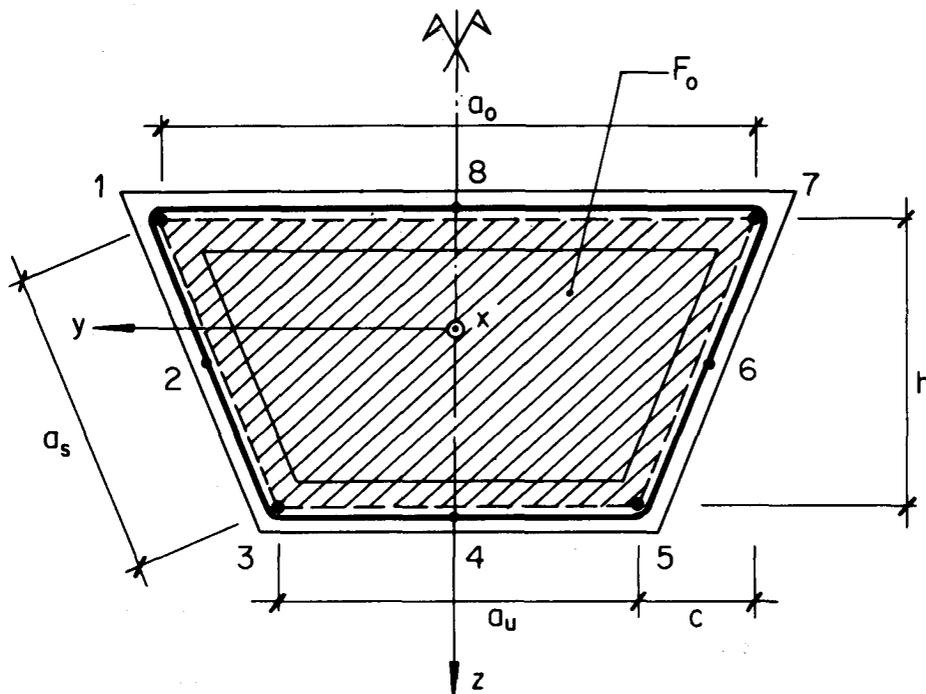


Bild 7.3: Abmessungen des Trapezquerschnittes

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass der Schubfluss infolge Torsion über den Umfang nicht ändert. Bei genügend langen Trägern kann aber auch gesagt werden, dass die Querkraft zu gleichen Teilen durch die beiden Stege aufgenommen wird. Dann lässt sich der Schubfluss der einzelnen Querschnittswände in Anlehnung an Bild 7.5 anschreiben zu:

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= \frac{T}{2F_0} + \frac{Q}{2h} \\ S_6 &= \frac{T}{2F_0} - \frac{Q}{2h} \\ S_4 &= S_8 = \frac{T}{2F_0} \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Mit dieser Schubflussverteilung werden die Gleichgewichtsbedingungen der Schubkräfte Gl. (2.3) bzw. Gl. (6.2) erfüllt. Die Gleichgewichtsbedingung für das Wölbmoment ist trivial. Aus dem statischen Tableau nach Bild 6.2 geht dann aber hervor, dass - bei einer Gleichung weniger - alle bis auf zwei Schlupfvariablen ausgetauscht werden können. Im Bruchzustand fließen maximal zwei Gurtstäbe nicht.

Die Interaktionsbeziehung wird mit Hilfe einer einzigen Momentenbedingung zwischen den Schnittkräften und den inneren Kräften bestimmt. Mit Vorteil wird diese Momentenbedingung bezüglich der Verbindungslinie der beiden starren Gurtstäbe formuliert. In Rechnung gehen dann nur die bekannten Fließkräfte der Bügel und der Gurtstäbe einerseits und die gesuchten Schnittkräfte

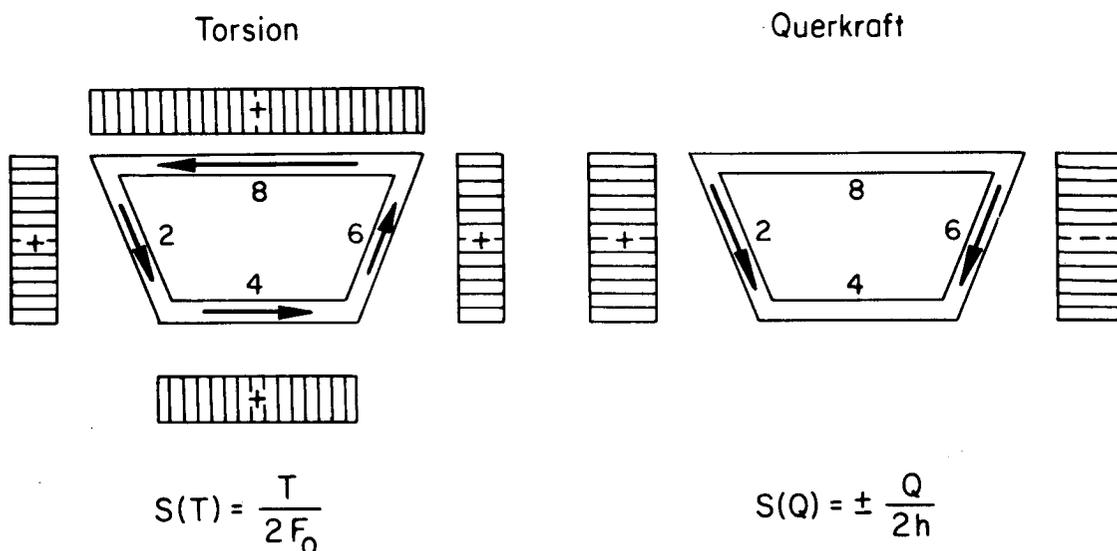


Bild 7.5: Schubflussverteilung

andererseits ein. Die verbleibende Momentenbedingung und die Gleichgewichtsbedingung für die Längskräfte können schliesslich zur Berechnung der unbekanntenen Kräfte der beiden starren Gurtstäbe verwendet werden.

Die Annahme, dass die Gurtstäbe unbeschränkt Druck aufnehmen können und damit bei starr-plastischem Materialverhalten unter Druck nicht gestaucht werden, zeigt, dass nur die Verbindungslinie benachbarter Eckpunkte auf dem Umfang des Querschnittes als mögliche Drehachsen in Frage kommen.

In einem ersten Rechengang wird vorausgesetzt, dass die beiden oberen Gurtstäbe nicht fließen. Die Momentenbedingung bezüglich deren Verbindungsgerade (Drehaxe 1-7) heisst:

$$M_p = 2Z_{fu} \cdot h - S_2 \cdot a_s \cdot \cot \alpha_2 \cdot \frac{h}{2} - S_4 \cdot a_u \cdot \cot \alpha_4 \cdot h - S_6 \cdot a_s \cdot \cot \alpha_6 \cdot \frac{h}{2} \quad (7.21)$$

Im Bruchzustand ist die Bügelkraft bekannt. Die Diagonalenneigung wird nach Gl. (5.9) durch die Bügelfliesskraft und den Schubfluss ersetzt:

$$\frac{M_p}{2h} = Z_{fu} - \frac{s}{4B_f} \cdot \left\{ S_2^2 \cdot a_s + 2S_4^2 \cdot a_u + S_6^2 \cdot a_s \right\} \quad (7.22)$$

Die Beziehung zwischen den Schnittkräften, die der Querschnitt im Bruchzustand aufnehmen kann, erscheint, wenn die Schubflüsse nach Gl. (7.20) eingesetzt werden:

$$\frac{M_p}{2h} = Z_{fu} - \frac{s}{4B_f} \cdot \left\{ \frac{T_p^2}{2F_0^2} \cdot (a_s + a_u) + \frac{Q_p^2}{2h^2} \cdot a_s \right\} \quad (7.23)$$

Die Aufgabe ist noch nicht vollständig gelöst, solange die Plastizitätskontrolle fehlt. Mit Hilfe des Kräftegleichgewichtes in Längsrichtung und des Momentengleichgewichtes um die z-Axe könnten die Gurtkräfte Z_1 und Z_7 berechnet und der massgebenden Fließkraft Z_{f_0} gegenübergestellt werden. Dieser Rechengang wird hier aber nicht ausgeführt. Vielmehr werden unmittelbar die übrigen möglichen Bruchmechanismen untersucht. Für ein gegebenes Lastverhältnis wird diejenige Interaktionsbeziehung bestimmend, die den kleinsten Lastfaktor liefert. Nur dann sind alle Plastizitätsbedingungen erfüllt.

In einem zweiten Schritt wird die Momentenbedingung bezüglich der Verbindungslinie der unteren Gurtstäbe (Drehaxe 3-5) angeschrieben:

$$M_p = -2Z_{f_0} \cdot h + S_2 \cdot a_s \cdot \cot \alpha_2 \cdot \frac{h}{2} + S_6 \cdot a_s \cdot \cot \alpha_6 \cdot \frac{h}{2} + S_8 \cdot a_o \cdot \cot \alpha_8 \cdot h \quad (7.24)$$

Nach Ersetzen der Diagonalenneigung geht diese Gleichung über in:

$$\frac{M_p}{2h} = -Z_{fo} + \frac{s}{4B_f} \cdot \left\{ S_2^2 \cdot a_s + S_6^2 \cdot a_s + 2S_8^2 \cdot a_o \right\} \quad (7.25)$$

Anschliessend wird das Gleichungssystem Gl. (7.20) verwendet:

$$\frac{M_p}{2h} = -Z_{fo} + \frac{s}{4B_f} \cdot \left\{ \frac{T_p^2}{2F_0^2} \cdot (a_s + a_o) + \frac{Q_p^2}{2h} \cdot a_s \right\} \quad (7.26)$$

Bei kombinierter Beanspruchung Torsion, Biegung und Querkraft besteht aber auch die Möglichkeit, dass im Bruchzustand die beiden hinteren Gurtstäbe starr bleiben (Drehaxe 5-7). Aus dem Momentengleichgewicht bezüglich deren Verbindungslinie folgt:

$$\begin{aligned} -M_p \cdot \frac{c}{a_s} &= (Z_{fo} \cdot a_o + Z_{fu} \cdot a_u) \frac{h}{a_s} - S_2 \cdot a_s \cdot \cot \alpha_2 \cdot \frac{(a_o + a_u)}{2} \cdot \frac{h}{a_s} - \\ &- S_4 \cdot a_u \cdot \cot \alpha_4 \cdot \frac{a_u}{2} \cdot \frac{h}{a_s} - S_8 \cdot a_o \cdot \cot \alpha_8 \cdot \frac{a_o}{2} \cdot \frac{h}{a_s} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Einmal mehr wird zur Elimination der Diagonalenneigung Gl. (5.9) beigezogen:

$$\begin{aligned} -M_p \frac{(a_o - a_u)}{2h} &= Z_{fo} \cdot a_o + Z_{fu} \cdot a_u - \frac{s}{B_f} \cdot \left\{ S_2^2 \cdot a_s \cdot \frac{(a_o + a_u)}{2} + \right. \\ &\left. + S_4^2 \cdot \frac{a_u^2}{2} + S_8^2 \cdot \frac{a_o^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Unter Anwendung von Gl. (7.20) heisst Gl. (7.28) neu:

$$\begin{aligned} -M_p \frac{(a_o - a_u)}{2h} &= Z_{fo} \cdot a_o + Z_{fu} \cdot a_u - \frac{s}{B_f} \cdot \left\{ \frac{T_p^2}{4F_0^2} \cdot \left[a_s \cdot \frac{(a_o + a_u)}{2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} \cdot (a_u^2 + a_o^2) \right] + \frac{T_p \cdot Q_p}{4F_0 \cdot h} \cdot a_s \cdot (a_o + a_u) + \frac{Q_p^2}{4h^2} \cdot a_s \cdot \frac{(a_o + a_u)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (7.29)$$

In dieser Form erscheinen die Interaktionsbeziehungen Gl. (7.23), Gl. (7.26) und Gl. (7.29) umständlich für die praktische Anwendung. Vor allem sind sie für jeden einzelnen Querschnitt neu zu berechnen. Es liegt auf der Hand, die Interaktionsbeziehungen auf solche Grössen zu normieren, dass ihre Anwendbarkeit ausgeweitet werden kann. Als Bezugsgrössen werden die Bruchschnittkräfte eingeführt, die vom Querschnitt aufgenommen werden können, wenn jeweils eine Schnittkraft allein angreift.

Wird der Querschnitt nur einem Biegemoment unterworfen, so kann das folgende Bruchmoment übertragen werden:

$$M_{p0} = 2Z_{fu} \cdot h \quad (7.30)$$

Dabei ist zu beachten, dass als Hebelarm der inneren Kräfte der Abstand der Gurtstäbe eingesetzt wird. Stark bewehrte Querschnitte verlangen eine grosse Betondruckzone. Unter Umständen nimmt der Hebelarm der inneren Kräfte einen kleineren Wert als h ein. Das Bezugsmoment ist entsprechend zu reduzieren.

Bei reiner Torsion steht die Resultierende der Gurtkräfte Z_i im Gleichgewicht mit der Resultierenden der Längskomponenten Z_k der Diagonaldruckkräfte. Ist die Bügelbewehrung über den Umfang konstant, so ist auch die Diagonalen- neigung konstant. Die Resultierende der Längskräfte greift im Schwerpunkt des Umfanges an und ergibt sich zu:

$$\Sigma Z_k = \frac{T_{p0}^2}{4F_0^2} \cdot \frac{u \cdot s}{B_f} \quad (7.31)$$

Im Bruchzustand bleiben maximal zwei Gurtstäbe starr. Untersucht werden alle möglichen Kombinationen von zwei starren Gurtstäben. Zu jeder Kombination wird die entsprechende Zugresultierende \bar{Z}_f berechnet. Massgebend wird derjenige Zustand, der die kleinste Zugresultierende $\text{Min}(\bar{Z}_f)$ liefert. Für den Trapezquerschnitt folgt diese zu:

$$\text{Min}(\bar{Z}_f) = 2Z_{fo} \cdot \frac{u}{(a_s + a_o)} \quad (7.32)$$

Gl. (7.32) wird der Gl. (7.31) gleichgesetzt. Das Torsionsbruchmoment heisst dann:

$$T_{p0} = 2F_0 \cdot \sqrt{\frac{4Z_{fo} \cdot B_f}{2(a_s + a_o) \cdot s}} \quad (7.33)$$

Dasselbe Resultat wird erreicht, wenn in Gl. (7.26) die Schnittkräfte M_p und Q_p gestrichen werden. Bei reiner Torsion fliessen also neben den Bügeln die beiden oberen Gurtstäbe.

Reiner Schub infolge einer Querkraft tritt in Wirklichkeit nicht auf. Als Bezugsgrösse wird dennoch analog dem Torsionsbruchmoment diejenige Querkraft eingeführt, die aus Gl. (7.26) hervorgeht, wenn das Biegemoment und das Torsionsmoment weggelassen werden:

$$Q_{p0} = 2 \cdot \sqrt{2Z_{fo} \cdot B_f \cdot \frac{h^2}{a_s \cdot s}} \quad (7.34)$$

Mit den Bezugsgrössen nach Gl. (7.30), Gl. (7.33) und Gl. (7.34) werden nacheinander die drei Interaktionsbeziehungen normiert. Gl. (7.23), die den Bereich bei starren oberen Gurtstäben (Drehaxe 1-7) regiert, geht über in:

$$\left(\frac{T_p}{T_{p0}}\right)^2 \cdot \frac{(a_s + a_u)}{(a_s + a_o)} + \left(\frac{Q_p}{Q_{p0}}\right)^2 = \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \cdot \left(1 - \frac{M_p}{M_{p0}}\right) \quad (7.35)$$

Die bezogene Interaktionsbeziehung nach Gl. (7.26) für die Drehaxe 3-5 lautet:

$$\left(\frac{T_p}{T_{p0}}\right)^2 + \left(\frac{Q_p}{Q_{p0}}\right)^2 = 1 + \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \cdot \frac{M_p}{M_{p0}} \quad (7.36)$$

Schliesslich heisst die dritte Gl. (7.29) für die Drehaxe 5-7 in normierter Form:

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_p}{T_{p0}}\right)^2 + \frac{2T_p \cdot Q_p}{T_{p0} \cdot Q_{p0}} \cdot \frac{(a_o + a_u) \cdot \sqrt{a_s \cdot (a_s + a_o)}}{a_u \cdot (a_s + a_u) + a_o \cdot (a_s + a_o)} + \\ + \left(\frac{Q_p}{Q_{p0}}\right)^2 \cdot \frac{(a_o + a_u) \cdot (a_s + a_o)}{a_u \cdot (a_s + a_u) + a_o \cdot (a_s + a_o)} = \\ = \frac{Z_{fu}}{Z_{fo}} \cdot \frac{(a_s + a_o)}{a_u \cdot (a_s + a_u) + a_o \cdot (a_s + a_o)} \cdot \left\{ (a_o \cdot \frac{Z_{fo}}{Z_{fu}} + a_u) + \frac{M_p}{M_{p0}} \cdot (a_o - a_u) \right\} \quad (7.37) \end{aligned}$$

Für den Rechteckquerschnitt ($a_o = a_u = b$ und $a_s = h$) stimmen diese Gleichungen mit den in [10] hergeleiteten Interaktionsbeziehungen überein.

Die in [14] beschriebenen Versuche an acht quadratischen Stahlbetonträgern zeigen, dass der Bruchwiderstand bei kombinierter Beanspruchung rechnerisch sehr genau erfasst werden kann. Insbesondere ist auch die Voraussage des massgebenden Mechanismus für jedes Schnittkräfteverhältnis möglich.

In Bild 7.6 sind Gl. (7.35), Gl. (7.36) und Gl. (7.37) als räumliche Flussfigur des Trapezquerschnittes dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass der Widerstand gegenüber Schub, sei er aus Torsion oder sei er infolge reiner Querkraft, gesteigert werden kann, wenn die Biegedruckkraft der Zugkraft aus der Fachwerkwirkung in den oberen Gurtstäben entgegenwirkt. Der Querschnittswiderstand gegenüber Torsion wird maximal, wenn im Bruchzustand alle Gurtstäbe fliessen:

$$T_{pmax} = 2F_0 \cdot \sqrt{\frac{2(Z_{fu} + Z_{fo}) \cdot B_f}{u \cdot s}} \quad (7.38)$$

Die gleiche Aussage gilt für die Querkraft. Aus der Kombination der Gl.(7.23) mit Gl. (7.26) ergibt sich die grösste Querkraft zu:

$$Q_{pmax} = 2 \cdot \sqrt{(Z_{fu} + Z_{fo}) \cdot B_f \cdot \frac{h^2}{a_s \cdot s}} \quad (7.39)$$

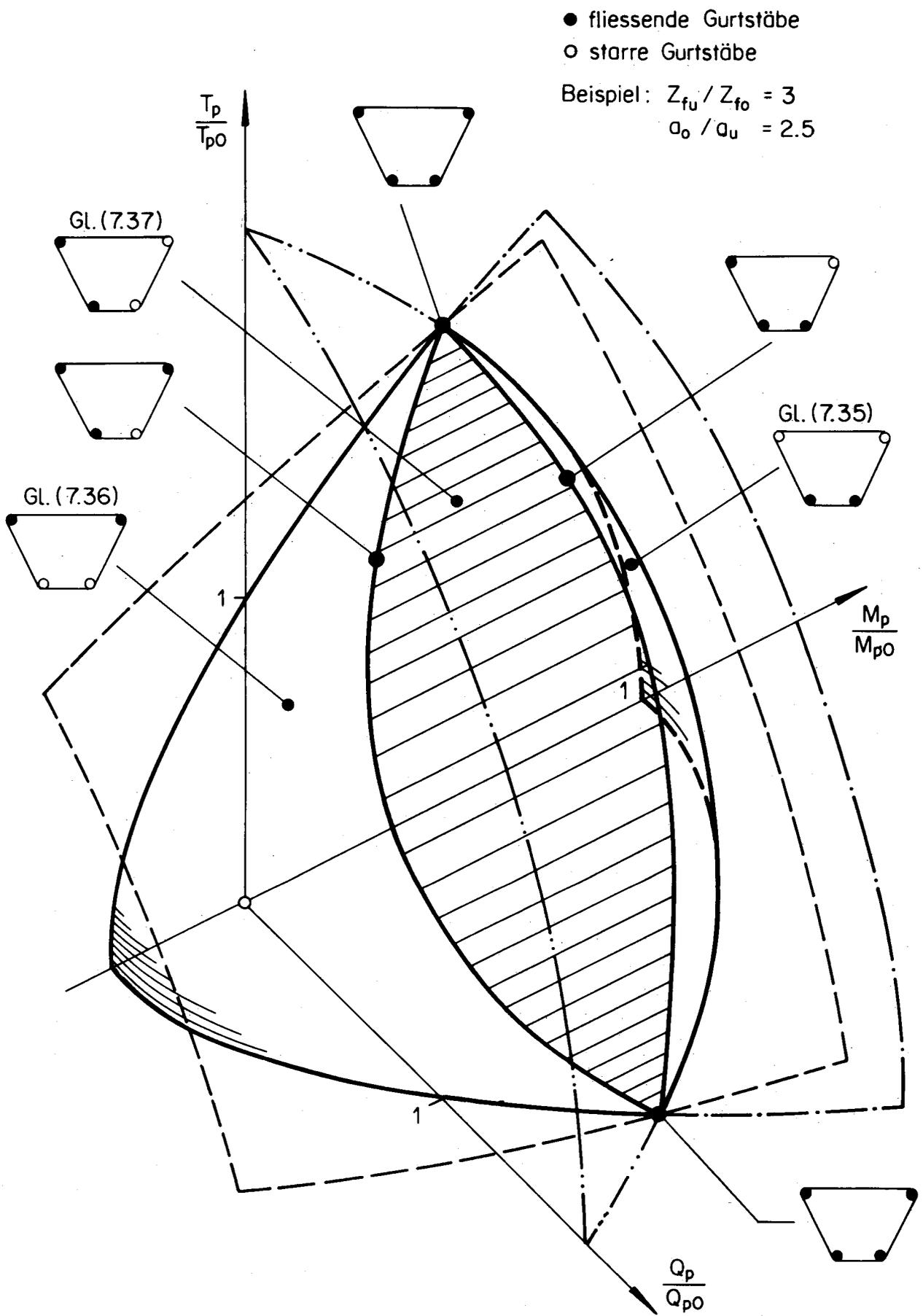


Bild 7.6: Interaktion Torsion - Biegung - Querkraft

Es sei indessen darauf hingewiesen, dass die beiden maximalen Schnittkräfte nur beim Rechteckquerschnitt unter der gleichen Biegebeanspruchung auftreten. Der Widerstand gegenüber Biegung wird durch jede Schubkraft vermindert, weil der Biegezugkraft immer eine zusätzliche Zugkraft überlagert wird.

Die Gestalt der Fließfigur wird in überwiegendem Masse durch das Verhältnis zwischen den Fließkräften der unteren und oberen Gurtstäbe geprägt. Als Beispiel wird in Bild 7.6 das Verhältnis $Z_{fu}/Z_{fo} = 3$ gewählt. In zweiter Linie wird die Fließfigur durch die Querschnittsform beeinflusst. Aus geometrischen Gründen ist klar, dass davon vor allem die Fläche nach Gl. (7.37) betroffen wird. Wird der Trapezquerschnitt in einen Rechteckquerschnitt umgewandelt, dann geht das elliptische Paraboloid in einen elliptischen Zylinder über.

Der Einfluss der Schlankheit des Trägers wird an einem Rechteckquerschnitt diskutiert. Dazu eignet sich die Projektion auf die Torsions-Querkräfte-Ebene. Als Schnittebene wird diejenige Ebene gewählt, die durch die beiden Schnittpunkte der drei Fließflächen geht (Bild 7.7). Die Schnittkräfte werden auf die maximalen Werte nach Gl. (7.38) bzw. Gl. (7.39) bezogen. Der elliptische

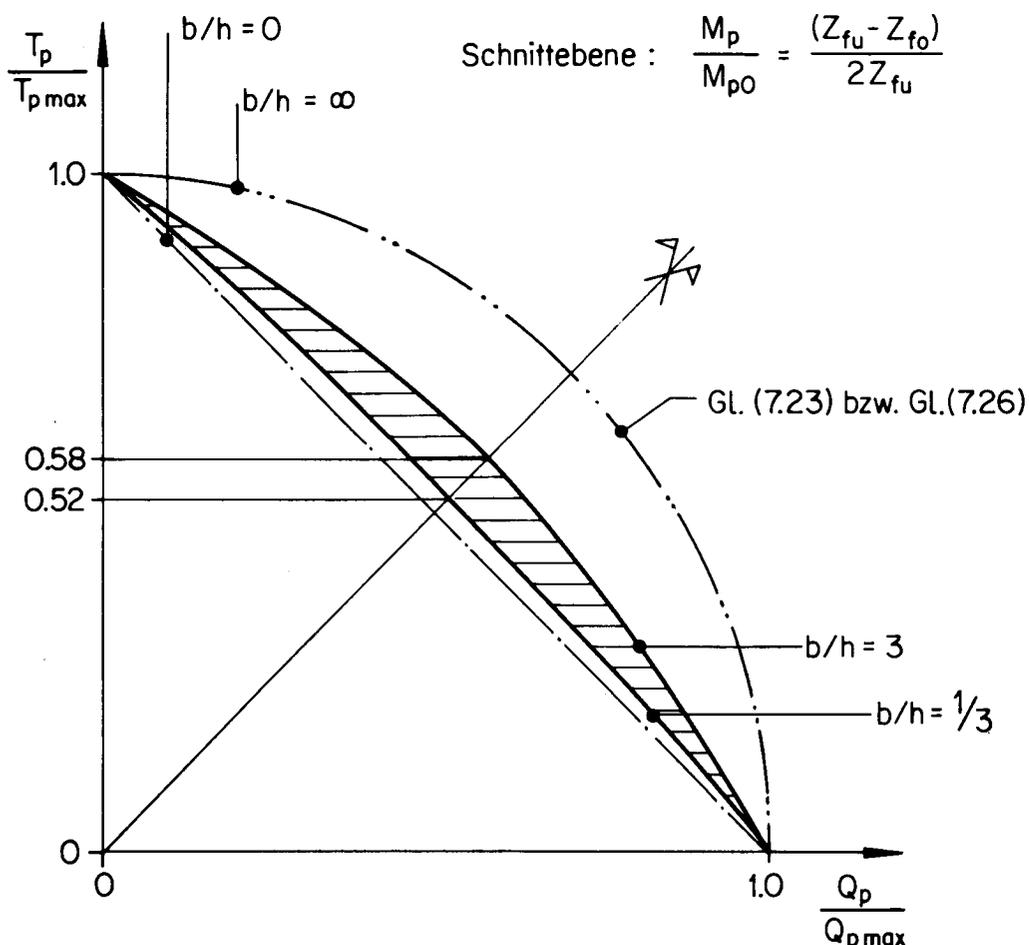


Bild 7.7: Projektion der Fließfigur auf Torsions - Querkräfte - Ebene

Zylinder, der die Fließfigur für die Drehaxe 5-7 wiedergibt, wird umso flacher, je schlanker der Träger ausgebildet ist. Umgekehrt nähert sich dessen Form einem Kreiszyylinder und fällt auf der ganzen Länge der Schnittkurve von Gl. (7.23) mit Gl. (7.26) zusammen, wenn der Querschnitt unendlich breit wird. Das Verhältnis von Breite zu Höhe ist aus praktischen Gründen beschränkt. Die Analyse von Gl. (7.29) zeigt dann, dass der Verlauf der Interaktionskurve für die häufig vorkommenden Querschnittsformen kaum ändert.

7.3 Bemessung

Aufgabe des Ingenieurs ist es, nutzbare und sichere Tragwerke zu entwerfen. Diese Zweiteilung kommt auch bei den Bemessungsregeln in vermehrtem Masse zur Geltung, indem zwei Grenzzustände, Gebrauchszustand und Bruchzustand, unterschieden werden. Im Gebrauchszustand ist die Nutzung und Dauerhaftigkeit zu garantieren. Unzulässige Verformungen und grosse Risse sind zu vermeiden. Eine Methode, die Verformungen gerissener Kastenträger aus Stahlbeton vorauszusagen, ist in [18] beschrieben. Tragwerke sollen aber auch mit genügender Sicherheit die zu erwartenden Lasten aufnehmen. Dabei nimmt die rechnerische Bestimmung des Bruchwiderstandes eines Trägerquerschnittes oder eines ganzen Tragwerks eine zentrale Stellung ein. Insbesondere zeigen Fließfiguren auf anschauliche Art das Verhalten im Bruchzustand.

Die Interaktionsbeziehungen nach Gl. (7.35), Gl. (7.36) und Gl. (7.37) eignen sich vor allem, wenn bei einem gegebenen Querschnitt mit bekannter Bewehrung nach den im Bruchzustand möglichen Schnittkraftkombinationen gefragt wird. Die freie Bemessung sucht hingegen bei gegebener Belastung die Querschnittsabmessungen und die notwendige Bewehrung. Die Abmessungen werden zum guten Teil durch die Tragfähigkeit des Betons bestimmt. Auf diese wird im Rahmen dieser Arbeit nicht eingetreten. Für die Berechnung der Bewehrung stehen zu wenig Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Die Bemessungsaufgabe kann aber gelöst werden, wenn der Diagonalenneigung der Querschnittswände zum voraus ein bestimmter Wert zugeordnet wird. Im Sinne der Plastizitätstheorie wird ein statisch zulässiger Spannungszustand angenommen. Dieser liefert in jedem Fall einen unteren Grenzwert der Tragfähigkeit.

Bei fester Diagonalenneigung werden die notwendigen Bügel nach Gl. (5.9) berechnet:

$$B_{fk} \geq \frac{Q_k}{a_k} \cdot s_k \cdot \tan \alpha \quad (7.40)$$

Mit Q_k wird die Schubresultierende aus Torsion und Querkraft gemäss Gl. (7.20) bezeichnet. Die Gurtkräfte werden für die Biegebeanspruchung und die Schub-

beanspruchung (Torsion und Querkraft) getrennt bestimmt und anschliessend superponiert. Die erforderliche Fliesskraft muss die folgende Bedingung erfüllen:

$$Z_{fi} \geq Z_i(M) + Z_i(T,Q) \quad (7.41)$$

Der Anteil infolge der Schubbeanspruchung setzt sich zusammen aus je der Hälfte der Längskomponenten der Diagonaldruckkräfte der benachbarten Querschnittswände:

$$Z_i(T,Q) = \frac{1}{2} \Sigma Q_k \cdot \cot \alpha \quad (7.42)$$

Für die Wahl der Diagonalenneigung bestehen verschiedene Kriterien. Es kann gezeigt werden, dass im Falle reiner Torsion der Aufwand an Stahl minimal wird, wenn $\tan \alpha = 1$ ist. Sicher spielen aber vorwiegend wirtschaftliche Ueberlegungen eine Rolle. Die Verarbeitungskosten und die Einheitspreise für Bügel sind höher als diejenigen für die Längsbewehrung. Es wird deshalb angestrebt, die Bügelbewehrung klein zu halten. Dies wird erreicht, wenn eine flachere Diagonalenneigung gewählt wird. Eine Reduktion ist allerdings nur möglich, wenn die Längsbewehrung entsprechend verstärkt wird. Zudem sind die Umlagerungsgrenzen, wie sie in Abschnitt 5.2 aufgezeigt werden, zu beachten.

Die Bemessungsregeln für Träger unter reinem Biegeschub und für Träger mit offenem Querschnitt unter kombinierter Beanspruchung beruhen auf demselben Bruchmodell. Die Regeln nach Gl. (7.40), Gl. (7.41) und Gl. (7.42) sind deshalb in äquivalenter Form sowohl in [19] als auch in [20] für solche Träger aufgenommen worden, für die im Bruchzustand die volle Ausbildung der Fachwerkwirkung erwartet werden darf.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, das Tragverhalten im Bruchzustand von Kastenträgern aus Stahlbeton unter Torsion, Biegung und Querkraft theoretisch abzuklären. Insbesondere wird der Bruchwiderstand solcher Träger analytisch mit Hilfe eines räumlichen Fachwerkmodelles und unter Anwendung der Platizitätstheorie bestimmt. Die Schnittkraftkombinationen, die im Bruchzustand zulässig sind, werden in einer Interaktionsfigur dargestellt.

Im allgemeinen Fall erzeugt ein Torsionsmoment im Kastenträger einen über den Umfang konstanten Schubfluss (Umlauf torsion) und einen veränderlichen Schubfluss (Wölb torsion). Im Hinblick auf eine einfache Darstellung drängt sich eine Aufteilung der Aufgabe auf. Erstens wird der Einfluss der Wölb torsion auf das Tragverhalten untersucht. Zweitens wird der Querschnittswiderstand gegenüber Torsion, Biegung und Querkraft hergeleitet.

Vorerst werden die statischen und kinematischen Bedingungen am Träger formuliert. Dabei wird der Träger als Stab idealisiert. Die Querbiegung wird also nicht berücksichtigt und die Querschnittsform wird als starr vorausgesetzt.

Grundsätzliche Ueberlegungen über das Verhalten im Bruchzustand werden an einem idealisierten Träger mit idealisierten Fliessbedingungen angestellt. Die Längskräfte werden durch Gurtstäbe in den Kanten, die Schubkräfte durch die dazwischenliegenden Schubwände aufgenommen. Es wird angenommen, dass die Schubkräfte der Querschnittswände die Tragfähigkeit der Gurtstäbe nicht beeinflussen und umgekehrt. Nach dem statischen Grenzwertsatz wird die grösste Last gesucht, die ohne Verletzung der Gleichgewichts- und Platizitätsbedingungen möglich ist (Maximumaufgabe). Nach dem kinematischen Grenzwertsatz wird die kleinste Last gesucht, zu der noch ein kinematisch zulässiger Mechanismus angegeben werden kann (Minimumaufgabe). Die Bedingungen beider Optimierungsaufgaben sind linear und werden je in einem Tableau zusammengestellt. Da die Aufgaben dual sind, führen sie zur gleichen Lösung, der Traglast des Trägers. Die Tragfähigkeit ist erschöpft, wenn entweder ein Schubmechanismus, ein Wölbmechanismus oder ein Biegemechanismus auftritt.

Das Schubwandelement aus Stahlbeton wird für die rechnerische Erfassung mit einem Fachwerkmodell nachgebildet. In diesem Fachwerk bildet die Längsbewehrung die Gurtungen, die Bügel wirken als Pfosten, und der Beton überträgt die Strebenkräfte. In Betracht gezogen werden nur unterarmierte Schubwände, bei denen Versagen durch Fliessen der Bewehrung eingeleitet wird. Der Beton soll nicht massgebend werden. Unter dieser Bedingung stellt sich die Neigung der Streben so ein, dass im Bruchzustand sowohl die Bügel als auch mindestens ein Gurtstab fliessen.

Zur Untersuchung von Kastenträgern aus Stahlbeton werden die Bedingungen der einzelnen Fachwerkscheiben in die statischen und kinematischen Bedingungen des Stabes eingebaut. Die Optimierungsaufgaben nach den beiden Grenzwertsätzen führen zu zwei nichtlinearen Tableaux. Eine analytische Lösung ist möglich, wenn entweder eine Aussage über die Schubflussverteilung oder über die Diagonalenneigung getroffen werden kann.

Es lässt sich zeigen, dass bei langen Trägern der Schubfluss infolge Torsion über den Umfang annähernd konstant ist. Auch bei behinderter Wölbung des Querschnittes wird kein zusätzlicher Torsionswiderstand aufgebaut. Mit dieser Voraussetzung wird der Querschnittswiderstand des häufig vorkommenden Trapezquerschnittes bestimmt. Im Bruchzustand bleiben maximal zwei Gurtstäbe starr. Die gesamte übrige Bewehrung fließt. Die Fließbedingungen werden als räumliche Interaktionsfigur der Schnittkräfte Torsion, Biegung und Querkraft dargestellt.

Die Berechnung des Querschnittswiderstandes wird ergänzt durch Bemessungsformeln, die Anwendung finden, wenn die Bewehrung für eine gegebene Schnittkraftkombination bestimmt werden muss.

RESUME

Le travail présenté poursuit le but d'analyser le comportement, à l'état ultime, des poutres-caissons en béton armé soumises à la torsion, à la flexion et à l'effort tranchant. En particulier, leur résistance à la rupture est déterminée à l'aide d'un modèle de treillis spatial et en employant la théorie de la plasticité. Les combinaisons possibles de torsion, flexion et effort tranchant sous la charge ultime sont représentées dans un diagramme d'interaction.

Dans le cas général, un moment de torsion produit, dans une poutre-caisson, un flux de cisaillement constant (torsion circulaire) et un flux variable (torsion gauche) le long du contour de la section. Afin d'obtenir plus de clarté dans la présentation du problème, celui-ci est divisé en deux parties. Dans la première, on étudie l'influence de la torsion gauche sur le comportement structural. Dans la deuxième, on détermine la résistance à la torsion, à la flexion et à l'effort tranchant d'une section.

Les conditions statiques et cinématiques sont formulées. La poutre est idéalisée comme barre. Par conséquent la flexion transversale est négligée et la forme de la section est supposée être maintenue.

Des considérations fondamentales sont faites sur le comportement d'un modèle d'une poutre obéissant, à l'état ultime, à des critères de plasticité idéalisés. La conception du modèle conduit à la concentration des efforts longitudinaux dans les coins des semelles et des efforts de cisaillement dans les parois intermédiaires. Les forces de cisaillement dans les parois sont supposées ne pas influencer les forces de rupture des semelles et vice versa. Le théorème de la borne inférieure conduit à la charge maximale, qui satisfait à toutes les conditions d'équilibre et qui ne viole pas les critères de plasticité (problème maximum). Le théorème de la borne supérieure conduit à la charge minimale, sous laquelle un mécanisme peut se développer (problème minimum). Les équations de tous les deux problèmes de la recherche d'optimum sont linéaires et elles sont contenues dans deux tableaux. Par ce que les deux problèmes représentent une dualité, ils conduisent à la même solution pour la charge ultime de la poutre. La charge atteint la résistance de la poutre, si un mécanisme de glissement, un mécanisme à section voilée ou bien un mécanisme de flexion se produit.

Pour le calcul suivant l'élément d'une parois en béton armé soumise au cisaillement est idéalisée avec un treillis. L'armature longitudinale agit comme des membrures et les étriers agissent comme des montants. Le béton

transmet les forces inclinées de compression. On ne considère que des parois sous-armées. Cela signifie, que l'armature atteint le niveau d'écoulement avant que le béton ne s'écrase. Dans ces conditions les bielles sont inclinées de façon, que les étriers ainsi qu'au moins une membrure atteignent le niveau d'écoulement sous la charge ultime.

Pour l'étude des poutres-caissons en béton armé les conditions du treillis sont introduites dans les conditions statiques et cinématiques de la poutre. Les problèmes de la recherche d'optimum selon les deux théorèmes de bornes conduisent à deux tableaux non-linéaires. Une méthode pour résoudre les deux problèmes serait possible, si l'on supposait, que soit la distribution du flux de cisaillement, soit les inclinaisons des bielles fussent connues.

Si la poutre est assez longue, on peut montrer, que le flux de cisaillement dû à la torsion est presque constant le long du contour de la section. Le fait d'empêcher le voilement de la section n'apporte pas une augmentation de la résistance. Avec cette supposition la résistance d'une section trapézoïdale est déterminée. Sous la charge ultime toute l'armature atteint le niveau d'écoulement exceptés deux fers de coin au maximum. Les critères de plasticité sont représentés dans un diagramme d'interaction spatial, qui comprend les efforts intérieurs, la torsion, la flexion et l'effort tranchant.

Le calcul de la résistance de la section est complété par des formules de dimensionnement, qui s'emploient, lorsque l'armature est à déterminer pour une combinaison fixée des efforts intérieurs.

SUMMARY

The aim of the thesis is to analyse theoretically the behavior at ultimate load of reinforced concrete box girders subjected to combined torsion, bending and shear. In particular, introducing a space truss model and applying the theory of plasticity the load carrying capacity of such beams is determined. The combinations of torsion, bending and shear at ultimate load are shown in an interaction diagram.

In the general case a torsional moment causes in a box girder a constant shear flow (circulatory torsion) and a variable shear flow (warping torsion) around the circumference. Aiming at a clear presentation the problem is divided into two parts. First, the influence of warping torsion on the structural behavior is analysed. Second, the resistance of a cross section under torsion, bending and shear is derived.

The statical and kinematic conditions of the idealized beam are formulated. Transverse bending is neglected and the cross section is assumed to be rigid.

Basic considerations are made on the behavior at ultimate load of a model beam with idealized yield conditions. The longitudinal forces are taken by stringers in the corners, the shear forces by the intermediate shear walls. The forces of the cross sectional walls are supposed not to influence the ultimate strength of the stringers and vice versa. The lower bound theorem of plastic theory leads to the maximum load fulfilling all equilibrium conditions (maximum problem). The upper bound theorem leads to the minimum load for which a kinematically admissible mechanism can be found (minimum problem). The equation of both optimization problems are linear and they are shown in two tables. The duality of the two problems leads to the same solution for the ultimate load of the beam. The load carrying capacity is reached when either a shearing mechanism, a warping mechanism or a bending mechanism occurs.

For the further investigation the shear wall of reinforced concrete is described with a truss model. The longitudinal bars act as stringers (flanges) and the stirrups as posts. The concrete transmits the inclined compression forces. Only underreinforced shear walls are considered, i.e. yielding of the steel will take place prior to crushing of the concrete. Under this condition the concrete struts are inclined at such an angle that the stirrups as well as at least one stringer yield under ultimate load.

To study box girders of reinforced concrete the conditions of the truss model

are transferred into the statical and kinematic conditions of the beam. The upper and lower bound theorems applied on the beam leads to two non-linear tables. An analytical solution is possible, if either the distribution of the shear flow is known or the inclination of the struts.

It can be shown that the shear flow due to torsion is almost constant around the circumference, if the beam is long enough. Even if warping is prevented no additional resistance is built up. Under this condition the resistance of a trapezoidal cross section is determined. At ultimate load not more than two stringers are rigid. All the other reinforcing bars yield. The yield conditions are illustrated with an interaction-diagram of the three components torsion, bending and shear.

The calculation of the resistance of the cross section is completed with design formulas which apply when the reinforcement has to be determined for a given combination of the internal forces.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Lampert P.: "Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung", Dissertation Nr. 4445, ETH Zürich, 1970.
- [2] Grob J.: "Traglast von Stäben mit dünnwandigen offenen Querschnitten", Bericht Nr. 56, Institut für Baustatik und Konstruktion ETHZ, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Juni 1975.
- [3] Prager W.: "Probleme der Plastizitätstheorie", Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1955.
- [4] Thürlimann B., Ziegler H.: "Plastische Berechnungsmethoden", ETH Zürich, 1963.
- [5] Lundgren H.: "Cylindrical Shells", Danish Technical Press Copenhagen, 1949.
- [6] Stiefel E.: "Einführung in die numerische Mathematik", Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart, 1965.
- [7] Künzi H.P., Krelle W.: "Einführung in die mathematische Optimierung", Verlag Industrielle Organisation Zürich, 1969.
- [8] Flügge W.: "Stresses in Shells", Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
- [9] Wlassow W.S.: "Dünnwandige elastische Stäbe", Band 1, VEB Verlag für Bauwesen Berlin, 1964.
- [10] Thürlimann B., Grob J., Lüchinger P.: "Torsion, Biegung und Schub in Stahlbetonträgern", Vorlesungsunterlagen, Institut für Baustatik und Konstruktion ETHZ, Zürich, April 1975.
- [11] Lampert P., Thürlimann B.: "Torsionsversuche an Stahlbetonbalken", Bericht Nr. 6506-2, Institut für Baustatik ETHZ, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Juni 1968.
- [12] Lampert P., Thürlimann B.: "Torsions-Biegeversuche an Stahlbetonbalken", Bericht Nr. 6506-3, Institut für Baustatik ETHZ, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Januar 1969.
- [13] Lampert P., Lüchinger P., Thürlimann B.: "Torsionsversuche an Stahl- und Spannbetonbalken", Bericht Nr. 6506-4, Institut für Baustatik ETHZ, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Februar 1971.
- [14] Lüchinger P., Thürlimann B.: "Versuche an Stahlbetonbalken unter Torsion, Biegung und Querkraft", Bericht Nr. 6506-5, Institut für Baustatik ETHZ, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Juli 1973.
- [15] Müller P.: "Failure Mechanisms for Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending", Bericht Nr. 65, Institut für Baustatik und Konstruktion ETHZ (Sonderdruck aus IVBH-Abhandlungen Band 36-II), Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, September 1976.
- [16] Müller P.: "Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben", Institut für Baustatik und Konstruktion ETHZ, in Vorbereitung.
- [17] Braestrup M.: "Plastic Analysis of Shear in Reinforced Concrete", Magazine of Concrete Research, Vol. 26, No. 89, December 1974.

- [18] Thürlimann B., Lüchinger P.: "Steifigkeit von gerissenen Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung", Bericht Nr. 46, Institut für Baustatik ETHZ (Sonderdruck aus Beton- und Stahlbetonbau, 68. Jahrgang, Heft 6, Juni 1973), Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Juni 1973.
- [19] "Bruchwiderstand und Bemessung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken", Richtlinie 34 zu Norm SIA 162, Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein, Zürich, 1976.
- [20] "Système international de réglementation technique unifiée des structures", Bulletin d'information No 117, Comité Européen du Béton, Paris, Dezember 1976.

BEZEICHNUNGEN

B	Bügelkraft
B_k	Bügelkraft in der k-ten Querschnittswand
B_f	Bügefliesskraft
B_{fk}	Bügefliesskraft in der k-ten Querschnittswand
D	Diagonaldruckkraft
D_k	Diagonaldruckkraft in der k-ten Querschnittswand
F_0	Querschnittsfläche eingeschlossen von der Verbindungslinie der Eckstäbe
L_a, L_i	Leistung der äusseren bzw. inneren Kräfte
L_d	Dissipationsleistung
M_y, M_z	Biegemoment um y- bzw. z-Axe
M_p	Biegemoment im Bruchzustand
M_{p0}	Bruchmoment reine Biegung
M_w	Wölbmoment
N	Normalkraft
N_p	Normalkraft im Bruchzustand
N_{p0}	Normalkraft im Bruchzustand reiner Zug
O	Koordinatenursprung
P	Punkt auf Querschnittsumfang, Einzellast
Q_k	Schubkraft in der k-ten Querschnittswand
Q_{fk}	Schubwiderstand der k-ten Querschnittswand
Q_p	Querkraft im Bruchzustand
Q_{p0}	Querkraft im Bruchzustand reiner Schub
Q_y, Q_z	Querkraft in y- bzw. z-Richtung
S	Schubfluss
S_o	Konstanter Anteil am Schubfluss
T	Torsionsmoment
T_o	Torsionsmoment aus konstantem Schubfluss (Umlauftorsion)
T_w	Wölbtorsionsmoment
T_p	Torsionsmoment im Bruchzustand

T_{p0}	Bruchmoment bei reiner Torsion
V	Volumen
Z_i	Zugkraft im i-ten Eckstab
Z_{fi}	Fliesskraft des i-ten Eckstabes
\bar{Z}_f	Zugresultierende im Bruchzustand
Z_k	Längskomponente der Diagonaldruckkraft in der k-ten Querschnittswand
Z_o, Z_u	Zugkraft im oberen bzw. unteren Gurtstab
Z_{fo}, Z_{fu}	Fliesskraft des oberen bzw. unteren Gurtstabes
a	Gurtstababstand am quadratischen Querschnitt bzw. am Schubwandelement
a_k	Eckstababstand der k-ten Querschnittswand
a_o, a_u, a_s	Eckabstände am Trapezquerschnitt
b	Querschnittsbreite bezogen auf Gurtstäbe
c	Seitenverhältnis am Trapezquerschnitt
$f(s)$	Schiebungsparameter infolge Wölbung
f_k	Schiebungsparameter der k-ten Querschnittswand
h	Querschnittshöhe bezogen auf Gurtstäbe
i	Nummer Eckstab ($i=1, 3, \dots, m$)
k	Nummer Querschnittswand ($k=2, 4, \dots, n$)
l	Trägerlänge
m_x	Torsionsbelastung
\bar{p}_x	Flächenlast in x-Richtung
p_y, p_z	Linienlast in y- bzw. z-Richtung
p_B	Schlupfvariable Bügel
p_i, p_k	Schlupfvariable i-ter Eckstab bzw. k-te Querschnittswand
p_o, p_u	Schlupfvariable oberer bzw. unterer Gurtstab
r	Abstand der Querschnittstangente
r_k	Abstand der Tangente der k-ten Querschnittswand
s	Umlaufkoordinate, Bügelabstand
s_k	Bügelabstand in der k-ten Querschnittswand
t	Wandstärke
u	Umfang der Fläche F_0

u, v, w	Verschiebungen des Querschnittes in x-, y-, z-Richtung
v^*, w^*	Integrale Querschnittsverschiebung in y-, z-Richtung
u_P, v_P	Längs- bzw. tangentielle Verschiebung des Punktes P
u_i	Längsverschiebung der i-ten Kante
u_o, u_u	Längsverschiebung des oberen bzw. unteren Gurtstabes
v_k	Tangentielle Verschiebung der k-ten Querschnittswand
x, y, z	Koordinaten
x_i, y_i, z_i	Koordinaten des i-ten Eckstabes
x_k, y_k, z_k	Koordinaten des Mittelpunktes der k-ten Querschnittswand
y_o	Exzentrizität der Einzellast am Kragträger
α	Diagonalenneigung
α_k	Diagonalenneigung in der k-ten Querschnittswand
β	Verhältniszahl aus Abschnitt 5.2
γ	Schiebung des Wandelementes
γ_k	Schiebung der k-ten Querschnittswand
γ_y, γ_z	Schiebung des Querschnittes in y- bzw. z-Richtung
γ_δ	Drehschiebung des Querschnittes um x-Axe
δ	Winkel zwischen y-Axe und Querschnittstangente
δ_k	Winkel zwischen y-Axe und der k-ten Querschnittswand
δ_B, δ_L	Relativbewegung der Rissufer in Richtung der Bügel bzw. Längsbewehrung
δ_t, δ_v	Relativbewegung der Rissufer in tangentieller bzw. vertikaler Richtung
ϵ	Dehnung
ϵ_B	Bügeldehnung
ϵ_{Bk}	Bügeldehnung in der k-ten Querschnittswand
ϵ_L	Mittlere Längsdehnung
ϵ_{Lk}	Mittlere Längsdehnung in der k-ten Querschnittswand
ϵ_i	Dehnung im i-ten Eckstab
ϵ_o, ϵ_u	Dehnung im oberen bzw. unteren Gurtstab
ϑ	Verdrehung des Querschnittes um x-Axe
ϑ^*	Integrale Verdrehung des Querschnittes um x-Axe
λ	Lastfaktor

λ_L	Lagrange'scher Multiplikator
ν	Verhältniszahl Abschnitt 4.4
ξ	Verhältniszahl Abschnitt 4.7
σ	Normalspannung
σ_f	Fliessspannung
τ	Schubspannung
Φ	Prinzipalfunktion
φ_y, φ_z	Verdrehung um y- bzw. z-Axe
ω	Wölbkoordinate
ω_i, ω_k	Wölbkoordinate des i-ten Eckstabes bzw. der k-ten Querschnittswand
ω_{oi}, ω_{ok}	Reduzierte Wölbkoordinate des i-ten Eckstabes bzw. der k-ten Querschnittswand