Prom. N° 3107

LES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES PONDÉRÉES DES LOIS DE PROBABILITÉ

THÈSE

présentée

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE ZURICH

pour l'obtention
du grade de Docteur ès Sciences Mathématiques

par

ALAIN RUEGG

Mathématicien diplômé EPF

de Zurich

Rapporteur : M. le professeur W. Saxer

Corapporteur : M. le professeur E. Specker

1961 – GAP, IMPRIMERIE LOUIS-JEAN

Extrait des
"Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris"
Vol. X - Fascicule 2 – GAP, Imprimerie Louis-Jean

LES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES PONDÉRÉES DES LOIS DE PROBABILITÉ

Alain RUEGG
Mathématicien diplômé EPF

INTRODUCTION

En calcul des probabilités, on a souvent affaire à des transformations appliquées à une famille de lois de probabilité, et qui, en intégrant ces lois par rapport à un paramètre, leur associent une nouvelle loi dite "loi pondérée" (weigthed law).

La convolution est un exemple bien connu d'une telle transformation ; dans ce cas, la famille de lois s'obtient par translation d'une loi originale. Des lois pondérées apparaissent ensuite d'une façon naturelle si l'on considère des probabilités conditionnelles. Mais c'est surtout dans l'étude du problème limite central que les lois pondérées jouent un rôle essentiel lorsque les variables aléatoires ne sont plus indépendantes.

Or, malgré son importance, les publications consacrées à ce sujet sont encore peu nombreuses. Signalons cependant les thèses de M. Girault [5](1) et de H. Loeffel [10]. Le premier étudie de façon détaillée la transformation H définie par

$$H(f) = \frac{1}{t}\int_0^t f(u)\, du = \int_0^1 f(tu)\, du$$

où f est une fonction caractéristique ; le second cherche à généraliser cette transformation. D'autres cas particuliers sont traités dans le livre de M. Loève ([11], p. 380).

Le présent travail voudrait être une contribution à l'étude systématique des lois pondérées et des fonctions caractéristiques pondérées en particulier. Le chapitre 2 donne un théorème sur la transformation générale et en établit quelques propriétés. Les chapitres

---

(1) Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie citée à la fin de ce travail.

3 et 4 sont consacrés à l'étude d'une transformation particulière rattachée au produit de deux variables aléatoires et qui jusqu'à présent "ne semble pas avoir été étudiée d'une manière systématique" (P. Levy [9]). La continuité de la transformation générale fera l'objet des chapitres 5 et 6. Nous terminerons en considérant au chapitre 7 la transformation d'une classe de lois indéfiniment divisibles et en particulier les lois pondérées du type normal et poissonien.

CHAPITRE I

REMARQUES PRÉLIMINAIRES

1.1 - NOTATIONS PRINCIPALES.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ = espace de probabilité ([11], p. 150)

$X(\omega)$ = variable aléatoire (v.a.), $\omega \in \Omega$

R = axe réel

$F(x)$ = fonction de répartition (f.r.) ou pseudo-f.r. (p.f.r.) selon que Var $F = 1$ ou Var $F \leqslant 1$, $x \in R$ ([11], p. 167)

$f(t)$ = fonction caractéristique (f.c.) ou pseudo-f.c. (p.f.c.) selon que $f(0) = 1$ ou $f(0) \leqslant 1$, $t \in R$ ([11], p. 185)

$I_a(x)$ = f.r. dégénérée = 0 pour $x \leqslant a$ et 1 pour $x > a$

$F_n \xrightarrow{f} F$ = convergence faible

$F_n \xrightarrow{c} F$ = convergence complète ([11], p. 178)

$\int = \int_{-\infty}^{+\infty}$ toutes les intégrales étant comprises au sens de Lebesgue-Stieltjes

$\mathcal{B}$ = système des ensembles boréliens $B \subset R$

P_F = mesure de probabilité dans $\mathcal{B}$ engendrée par F ([11], p. 96)

P_L = mesure de Lebesgue

$\mathcal{B}_F$ = complétion de $\mathcal{B}$ par rapport à P_F ([11], p. 90)

Sauf notation contraire, nous supposerons toujours que F, G et H soient des f.r. et f, g et h les f.c. correspondantes.

1.2 - FONCTIONS CARACTERISTIQUES ANALYTIQUES.

Nous aurons besoin des notions et résultats suivants (voir par exemple [12], p. 218-224) :

Soit $w = u + iv$ un point du plan complexe et écrivons

$$J(w, F) = \int e^{iwx} \, dF(x)$$

lorsque cette intégrale existe. On a donc

$$J(u, F) = f(u),$$

tandis que $J(iv, F)$ définit pour tout v réel une fonction réelle et non négative, finie et convexe dans un intervalle (a, b) contenant l'origine et égale à $+\infty$ ailleurs, où $-\infty \leqslant a \leqslant o \leqslant b \leqslant +\infty$.

Définition.

Une f.c. $f(u)$ sera dite f.c. analytique s'il existe un prolongement analytique $f(w)$ dans un cercle autour de l'origine.

Lemme 1.1.

f est une f.c. analytique si et seulement si l'origine est un point intérieur de l'intervalle (a, b) où $J(iv, F)$ reste finie. Alors $f(w)$ est analytique au moins dans la bande $a < v < b$ et y coïncide avec $J(w, F)$. Les points ia et ib sont des singularités de f.

Si f est une f.c. entière ($f \neq 1$), on a

$$M(t, f) = \max \left\{ f(it), f(-it) \right\}$$

où $M(t, f)$ est définie par

$$M(t, f) = \max_{|w| = t} | f(w) |,$$

et

$$1 \leqslant \lambda(f) \leqslant \rho(f) \leqslant +\infty$$

où

$$\lambda(f) = \liminf_{t \to +\infty} \frac{\log \log M(t, f)}{\log t}$$

et

$$\rho(f) = \limsup_{t \to +\infty} \frac{\log \log M(t, f)}{\log t}$$

sont respectivement l'ordre inférieur et l'ordre supérieur de f.

Définition.

On dit qu'une fonction entière f est d'ordre 1 et du type exponentiel si

$$M(t, f) = O(e^{kt}) \quad \text{pour } t \longrightarrow +\infty$$

où

$$0 < k < +\infty.$$

1.3 - FONCTIONS INVERSES DES FONCTIONS DE REPARTITION.

La fonction inverse d'une p.f.r. F est définie par

$$F^{-1}(u) = \inf [x \; ; \; F(x) \geqslant u]$$

où $0 < u < 1$ (voir [18]) ; c'est également une fonction non décroissante, continue à gauche si $F(-\infty) < u < F(+\infty)$ et telle que

$$F^{-1}(u) = -\infty \quad \text{si} \quad 0 < u \leqslant F(-\infty)$$

$$F^{-1}(u) = +\infty \quad \text{si} \quad F(+\infty) \leqslant u < 1,$$

et qui satisfait à la formule de réciprocité

$$F(x) = \inf [u \; ; \; F^{-1}(u) \geqslant x].$$

La convergence faible d'une suite de p.f.r. F_n vers une p.f.r. F implique que $F_n^{-1}(u) \longrightarrow F^{-1}(u)$ presque partout dans $(0, 1)$.

Lemme 1.2.

Etant données des f.r. F_n, G_n telles que $F_n \xrightarrow{c} F$ et $G_n \xrightarrow{f} G$ avec $\operatorname{Var} G < 1$, on peut trouver des v.a. X_n, Y_n et X obéissant respectivement aux lois F_n, G_n et F telles que X_n et Y_n soient indépendantes, $X_n \longrightarrow X$ en probabilité et $P[|Y_n| \longrightarrow +\infty] > 0$.

Démonstration.

Choisissons pour Ω le carré $[\omega = (u, v) \; ; \; 0 < u < 1, \; 0 < v < 1]$, pour $\mathcal{A}$ le système des ensembles boréliens $B \subset \Omega$, et pour P la mesure de Lebesgue. Si nous posons

$$X_n(\omega) = X_n(u) = F_n^{-1}(u)$$

$$Y_n(\omega) = Y_n(v) = G_n^{-1}(v)$$

$$X(\omega) = X(u) = F^{-1}(u),$$

les assertions du lemme sont évidemment satisfaites en vertu des propriétés dont jouissent les fonctions inverses et du fait que

$$P[X_n < a,\ Y_n < b] = P[X_n < a]\ P[Y_n < b]$$

quels que soient a et b. c.q.f.d.

CHAPITRE II

TRANSFORMATION D'UNE FAMILLE DE FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Dans sa thèse, H. Loeffel ([10], p. 6) a établi un théorème sur l'intégration d'une famille de f. c. dont les éléments dépendent de façon continue d'un paramètre réel ω ($a \leqslant \omega \leqslant b$). Nous allons montrer que cette condition de continuité n'est pas nécessaire, mais peut être remplacée par une condition plus faible exigeant seulement la mesurabilité de $f(t, \omega)$ par rapport à ω, ce qui permettra également de choisir comme domaine de définition du paramètre ω un espace de probabilité arbitraire.

2.1 - UN LEMME DE ROBBINS -

Nous aurons besoin du lemme suivant établi par H. Robbins [14].

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $F(x, \omega)$ une fonction réelle définie sur $R_x \times \Omega$ telle que

a) $F(x, \omega)$ soit une f. r. pour presque tout ω,

b) $F(x, \omega)$ soit une fonction mesurable $\mathcal{A}$ pour tout x.

On vérifie aisément que

$$H(x) = \int_\Omega F(x, \omega)\, dP$$

définit également une f. r.. Soit enfin $\varphi(x)$ une fonction réelle mesurable B, et posons

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x)$$

où

$$\varphi^+(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si} \quad \varphi(x) > 0 \\ 0 & \text{"} \quad \varphi(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\varphi^-(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si} \quad \varphi(x) < 0 \\ 0 & \text{"} \quad \varphi(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Lemme 2.1.

Pour que la relation

$$\int_\Omega dP \int \varphi(x) d_x F(x, \omega) = \int \varphi(x) dH(x) \qquad \text{(R1)}$$

soit valable, il est nécessaire et suffisant que l'une des deux inégalités

$$\int \varphi^+(x)\, dH(x) = \int_\Omega dP \int \varphi^+(x)\, d_x F(x, \omega) < +\infty \qquad \text{(R2)}$$

$$\int \varphi^-(x)\, dH(x) = \int_\Omega dP \int \varphi^-(x)\, d_x F(x, \omega) < +\infty \qquad \text{(R3)}$$

soit réalisée.

Remarques.

1) Si $\varphi(x)$ est une fonction complexe, il suffit de remplacer dans (R2) $\varphi^+(x)$ par $\mathcal{R}^+\varphi(x) + i\, \mathcal{J}^+\varphi(x)$, et de même pour $\varphi^-(x)$ dans (R3).

2) Le lemme n'est pas valable si l'on suppose $\varphi(x)$ mesurable L. Pour que (R1) ait un sens, il faut en effet que $\varphi(x)$ soit mesurable $\mathcal{B}_F$ pour presque tout $F(x, \omega)$ $(\omega \in \Omega)$. Cette condition est vérifiée si $\varphi(x)$ est mesurable B, en vertu de $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_F$; il n'en est pas de même si $\varphi(x)$ est mesurable L, l'inclusion $\mathcal{B}_L \subset \mathcal{B}_F$ n'étant pas réalisée si la f. r. F a une composante singulière non nulle (voir [3], p. 6).

2.2 - UN THEOREME GENERAL SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS CARACTERISTIQUES.

THEOREME 2.1.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $N \subset \Omega$ un ensemble de mesure P nulle et $f(t, \omega)$ $(-\infty < t < +\infty, \omega \in \Omega)$ une fonction complexe telle que

(2a) $f(t, \omega)$ soit une f. c. pour tout $\omega \in \Omega - N$ et

(2b) $f(t, \omega)$ soit une fonction mesurable $\mathcal{A}$ pour tout t.

Alors

$$h(t) = \int_\Omega f(t, \omega)\, dP$$

est également une f. c., et les f. r. correspondantes sont liées par la relation

$$H(x) = \int_\Omega F(x, \omega)\, dP.$$

Démonstration.

Pour tout $\omega \in \Omega - N$, la formule d'inversion des f. c.

$$F^*(x, \omega) - F^*(y, \omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} f(t, \omega)dt \qquad (1)$$

fait correspondre à $f(t, \omega)$ sa f. r. normalisée

$$F^*(\omega) = \frac{1}{2}\{F(x - o, \omega) + F(x + o, \omega)\}.$$

Désignons par $\Phi(T, x, y, \omega)$ l'intégrale figurant dans (1) et par $\Psi(t, x, y, \omega)$ son intégrant. Puisque ce dernier est continu en t, l'intégrale est la fonction limite d'une suite de sommes de Riemann-Stieltjes

$$\Phi(T, x, y, \omega) = \lim_{\delta_n \to o} \Phi_n(T, x, y, \omega)$$

où

$$\Phi_n(T, x, y, \omega) = \sum_{k=o}^{n-1} \Psi(b_k^{(n)}, x, y, \omega)\, [a_{k+1}^{(n)} - a_k^{(n)}],$$

$$a_k^{(n)} \leqslant b_k^{(n)} \leqslant a_{k+1}^{(n)} \quad (k = 0, 1, \ldots . n-1),$$

$$a_o^{(n)} = -T, \quad a_n^{(n)} = +T \quad (n = 1, 2, \ldots .)$$

et

$$\delta_n = \max\, [a_{k+1}^{(n)} - a_k^{(n)}].$$

Or l'ensemble des fonctions mesurables $\mathfrak{a}$ sur $\Omega - N$ étant fermé par rapport à l'addition et par rapport au passage à la limite, il contient en même temps que $\Psi(b_k^{(n)}, x, y, \omega)$ les fonctions

$$\Phi_n(T, x, y, \omega), \quad \Phi(T, x, y, \omega),$$

$$F^*(x, \omega) - F^*(y, \omega),$$

$$F^*(x, \omega) = \lim_{y \to -\infty} \{F^*(x, \omega) - F^*(y, \omega)\}$$

et

$$F(x,\ \omega) = F(x - o,\ \omega) = F^{*}(x - o,\ \omega)$$

$$= \lim_{x_n \uparrow x} F^{*}(x_n,\ \omega)$$

quel que soit x réel.

Appliquons maintenant le lemme 2.1.. Les inégalités (R2) et (R3) sont remplies si $\varphi(x) = e^{itx}$, on a donc

$$\int_\Omega f(t,\ \omega)\ dP = \int e^{itx}\ dH(x)$$

pour tout t réel où

$$H(x) = \int_\Omega F(x,\ \omega)\ dP,$$

et le théorème est démontré.

Dans la suite nous désignerons par T cette transformation générale qui fait correspondre une nouvelle loi, dite "loi pondérée", à une famille de lois données.

Remarque.

Si pour tout $\omega \in \Omega - N$, $f(t,\ \omega)$ est une p.f.c. avec $f(0,\ \omega) = c_1$ $(0 < c_1 \leqslant 1)$ et si P est une mesure avec $P(\Omega) = c_2$ $(0 < c_2 \leqslant 1)$, $h(t)$ est une p.f.c. telle que $h(0) = c_1\ c_2$.

2.3 - TRANSFORMATION DES MOMENTS -

Désignons respectivement par $m_\omega^{(k)}$ et $m^{(k)}$ les moments et par $\mu_\omega^{(k)}$ et $\mu^{(k)}$ les moments absolus d'ordre k des lois $F(x,\ \omega)$ et $H(x)$, et soit $f^{(k)}(t,\ \omega)$ la k-ième dérivée par rapport à t de $f(t,\ \omega)$.

THEOREME 2.2.

Si les hypothèses du théorème 2.1. sont vérifiées et si $\mu_\omega^{(n)}$ est une fonction intégrable P, les expressions $\mu^{(k)}$, $m^{(k)}$ et $h^{(k)}(t)$ existent et sont finies pour tout entier $k \leqslant n$, et on a les relations

$$\mu^{(k)} = \int_\Omega \mu_\omega^{(k)}\ dP,\quad m^{(k)} = \int_\Omega m_\omega^{(k)}\ dP$$

et

$$h^{(k)}(t) = \int_\Omega f^{(k)}(t,\ \omega)\ dP.$$

Démonstration.

Les inégalités (R2) et (R3) du lemme 2.1. sont remplies si $\varphi(x)$ est l'une des fonctions

$$|x|^k, \quad x^k \text{ et } e^{itx}\, x^k \qquad (k \leqslant n). \tag{2}$$

En effet, l'inégalité

$$|x|^k \leqslant 1 + |x|^n$$

valable pour $k \leqslant n$ implique la majoration presque partout de $\int \varphi^{\pm}(x)\, d_x F(x, \omega)$ par la fonction intégrable P $1 + \mu_\omega^{(n)}$. La formule (R1) s'applique donc aux fonctions (2), ce qui établit immédiatement les propositions pour les moments. Puisque les moments absolus $\mu_\omega^{(k)}$ $(\omega \in \Omega - N)$ et $\mu^{(k)}$ sont finis, on peut permuter l'ordre de l'intégration et de la différentiation dans les expressions

$$\frac{d^k}{dt^k}\int e^{itx}\, d_x F(x, \omega) \text{ et } \frac{d^k}{dt^k}\int e^{itx}\, dH(x),$$

ce qui complète le raisonnement pour les dérivées.

Ajoutons que dans le cas des moments absolus, on pourrait remplacer l'entier k par un nombre réel r $(0 < r \leqslant n)$. Nous donnons la réciproque suivante :

THEOREME 2.2.a.

<u>Si le moment absolu $\mu^{(n)}$ de $H(x)$ est fini, il en est de même des expressions $\mu_\omega^{(k)}$, $m_\omega^{(k)}$ et $f^{(k)}(t, \omega)$ quel que soit $k \leqslant n$ et pour presque tout $\omega \in \Omega$.</u>

Démonstration.

En effet, si $\mu^{(n)}$ est fini, il en est de même des intégrales figurant dans (R2) et (R3) si l'on y remplace $\varphi(x)$ par $|x|^n$. En raison de (R1),

$$\int |x|^n d_x F(x, \omega) = \mu_\omega^{(n)}$$

représente donc une fonction intégrable P, c'est-à-dire finie pour presque tout $\omega \in \Omega$. Les autres assertions en sont des conséquences directes. c.q.f.d.

2.4 - PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION T -

Nous supposons une fois pour toutes que

$$h(t) = \int_\Omega f(t, \omega)\, dP \quad \text{et} \quad H(x) = \int_\Omega F(x, \omega)\, dP.$$

Définition.

On dit qu'une fonction réelle $\varphi(t)$ est une fonction de Pólya, si

a) $\varphi(-t) = \varphi(t)$, c) $\varphi(t) \geqslant 0$,

b) $\varphi(0) = 1$, d) $\varphi(t)$ convexe pour $t > 0$.

Dugué et Girault [4] ont montré, en généralisant le raisonnement donné par Pólya [13], qu'une telle fonction est une f. c.

THEOREME 2. 3.

Si $f(t, \omega)$ est une fonction de Pólya pour presque tout $\omega \in \Omega$, il en est de même de $h(t)$.

La démonstration est évidente. Nous verrons plus loin (3. 2) que la transformation T permet d'obtenir des fonctions de Pólya, en partant d'une famille de fonctions qui ne sont pas des f. c.

THEOREME 2. 4.

Pour que $h(t)$ soit une f. c. analytique, il est nécessaire et suffisant qu'on ait $t_1 > o$ tel que $J(it_1, F_\omega)$ et $J(-it_1, F_\omega)$ soient des fonctions intégrables P.

Démonstration.

On déduit du lemme 2. 1. que

$$\int_\Omega J(it, F_\omega)\, dP = J(it, H)$$

et l'on applique le lemme 1. 1.

Remarque.

Le fait que toutes les fonctions $f(t, \omega)$ soient analytiques ou même entières n'entraîne nullement la régularité de h (voir théorème 4. 4.).

Définition.

On dit qu'une f. r. F est unimodale de vertex a si F(x) est convexe pour $x < a$ et concave pour $x > a$.

THEOREME 2.5.

Si $F(x, \omega)$ est unimodale de vertex a pour presque tout $\omega \in \Omega$, il en est de même de $H(x)$.

La démonstration est évidente.

THEOREME 2.6.

Si $F(x, \omega)$ est continue (ou absolument continue) pour presque tout $\omega \in \Omega$, il en est de même de $H(x)$.

Démonstration.

Dans les conditions du théorème 2.1., la mesure de probabilité $P_F(B, \omega)$ correspondant à $F(x, \omega)$ est une fonction mesurable $\mathfrak{A}$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$ (voir [14]). On vérifie aisément que

$$P^*(B) = \int_\Omega P_F(B, \omega)\, dP$$

définit également une mesure de probabilité ; puisque les valeurs de P_H et de P^* coïncident pour tout intervalle $[a, b)$, on a $P_H = P^*$, donc

$$P_H(B) = \int_\Omega P_F(B, \omega)\, dP,$$

et il suffit de poser $B = \{a\}$ et $B = N$ où N est un ensemble de mesure L nulle.

Remarque.

Le fait que $F(x, \omega)$ et $H(x)$ soient absolument continues n'implique cependant pas que

$$H'(x) = \int_\Omega F'(x, \omega)\, dP.$$

En effet soit $(\Omega, \mathfrak{A}, P) = (E_\omega, \mathfrak{B}, P_L)$ où $E_\omega = [0, 1]$, et soit A une partie du carré $E_x \times E_\omega = [0 \leqslant x \leqslant 1 ; 0 \leqslant \omega \leqslant 1]$ telle que

$$A_x = [\omega ; (x, \omega) \in A] \qquad (x \in E_x)$$

et

$$E_x - A_\omega = E_x - [x ; (x, \omega) \in A] \quad (\omega \in E_\omega)$$

soient des ensembles dénombrables (voir [7], p. 149).

En posant

$$F'(x, \omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x, \omega) \in A \\ 0 \text{ si } (x, \omega) \notin A, \end{cases}$$

on a

$$F(x, \omega) = \int_0^x F'(u, \omega)\, du = x$$

et

$$H(x) = \int_0^1 F(x, \omega)\, d\omega = x,$$

c'est-à-dire $H'(x) = 1$ pour $x \in E_x$, tandis que

$$\int_0^1 F'(x, \omega)\, d\omega = 0.$$

THEOREME 2.7.

Si $F(x, \omega)$ est strictement monotone, c'est-à-dire si le support de $F(x, \omega)$ recouvre l'axe entier pour presque tout $\omega \in \Omega$, il en est de même de $H(x)$.

La démonstration est évidente.

2.5 - EXEMPLES

Nous supposons dans la suite que $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (R, \mathcal{B}, P_G)$ où G est une f.r. arbitraire. Donnons maintenant trois exemples de fonctions $f(t, v)$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.1. :

1) $f(t, v) = f(t)e^{itv}$ $(v \in R)$

2) $f(t, v) = f(tv)$ $(v \in R)$

3) $f(t, v) = f\left(\frac{t}{v}\right)$ $(v \neq 0)$

où $f \neq 1$ est une f.c. arbitraire.

D'après la formule d'inversion, on trouve

1) $F(x, v) = F(x-v)$

2) $$F(x, v) = \begin{cases} F\left(\frac{x}{v}\right) & \text{si } v > 0 \\ I_0(x) & \text{si } v = 0 \\ 1-F\left(\frac{x}{v}+0\right) & \text{si } v < 0 \end{cases}$$

3) $$F(x, v) = \begin{cases} F(xv) & \text{si } v > 0 \\ 1-F(xv+0) & \text{si } v < 0. \end{cases}$$

L'application de la transformation T donne d'abord

1) $$h = fg \quad \text{et} \quad H = F * G.$$

Pour les deux autres cas, nous introduisons les notations

2) $$h = f \circ g \quad \text{et} \quad H = F \circ G$$

et

3) $$h = f \diamond g \quad \text{et} \quad H = F \diamond G,$$

en remarquant que 3) impose la continuité de G à l'origine.

Chacun de ces exemples fait donc correspondre à un couple de f. c. ou de f. r. une nouvelle f. c. ou f. r. L'intérêt de ces opérations réside dans le fait qu'elles sont associées à des opérations extrêmement simples pour les v. a.. Soient en effet X et Y deux v. a. indépendantes et F et G leurs f. r.

THEOREME 2.8.

Les v. a. $X + Y$, XY et, à condition que $P[Y = 0] = 0$, X/Y obéissent respectivement aux f. r. $F * G$, $F \circ G$ et $F \diamond G$.

Le raisonnement bien connu pour la somme (voir [3], p. 5) s'applique sans difficultés aux deux autres cas.

Signalons encore un cas particulier :

Corollaire.

Si G est la f. r. d'une v. a. Y vérifiant $P[Y = 0] = 0$, la f. r. $\overline{G}$ de $1/Y$ est définie par

$$\overline{G}(x) = I_0(x) + G(0) - G\left(\frac{1}{x} + 0\right) \qquad (x \neq 0)$$

et

$$\overline{G}(0) = G(0).$$

Leer - Vide - Empty

CHAPITRE III

TRANSFORMATION F o G

Tandis que l'addition des v.a. est un des problèmes classiques du calcul des probabilités, il semble que leur multiplication n'a pas encore été étudiée de façon systématique. Il existe bien un certain nombre de publications ([1], [2], [17]) traitant de cas particuliers, mais ce n'est que très récemment que P. Lévy [9] a présenté l'esquisse d'une théorie générale de ce problème. Il propose d'en ramener l'étude aux problèmes connus de l'addition des v.a., soit par l'introduction des logarithmes, soit en appliquant les relations qui lient les moments. En d'autres termes il suggère de déduire l'arithmétique "multiplicative" des lois de probabilité de leur arithmétique "additive".

Contrairement à cette méthode, nous nous proposons ici d'étudier directement l'opération $F \circ G$ rattachée au produit de deux v.a. indépendantes. Signalons que plusieurs des résultats de ce chapitre sont des extensions de théorèmes trouvés par H. Loeffel [10] qui a examiné le "produit" $F \circ G$ pour des cas particuliers de G.

3.1 - PROPRIETES FONDAMENTALES -

Dans ce chapitre comme dans le chapitre suivant, nous supposerons une fois pour toutes que

$$H = F \circ G \quad \text{et} \quad h = f \circ g.$$

On déduit d'abord du théorème 2.8. que le "produit" $F \circ G$ est commutatif et associatif.

Définition.

Si A et B sont deux ensembles réels non vides, leur produit vectoriel est défini par

$$A \; (x) \; B = [ab \; ; \; a \in A, \; b \in B].$$

THEOREME 3.1.

Le support S_H de H est égal à l'adhérence de $S_F (x) S_G$.

Démonstration.

Soit $a \in S_F$, $b \in S_G$ et posons $c = ab$. Le point (a, b) du plan $R_u \times R_v$ appartient à l'ensemble ouvert

$$A_{c,\varepsilon} = [(u, v) ; c - \varepsilon < u v < c + \varepsilon]$$

quel que soit $\varepsilon > 0$; il existe donc un carré ouvert $Q_\delta (a, b)$ de centre (a, b) et de côté $2\delta > 0$ qui est contenu dans $A_{c,\varepsilon}$.
Alors

$$H(c + \varepsilon) - H (c - \varepsilon + 0) = \iint_{A_{c,\varepsilon}} dF(u)dG(v) \geqslant \iint_{Q_\delta(a,b)} dF(u)dG(v)$$

$$= [F(a + \delta) - F(a - \delta + 0)] [G(b + \delta) - G(b - \delta + 0)] > 0$$

quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, ce qui implique $c \in S_H$, c'est-à-dire

$$S_F (x) S_G \subset S_H$$

et par conséquent

$$\overline{S_F (x) S_G} \subset S_H,$$

S_H étant un ensemble fermé.

Si réciproquement $c \in S_H$, on a

$$\iint_{A_{c,1/n}} dF(u)dG(v) = H\left(c + \frac{1}{n}\right) - H\left(c - \frac{1}{n} + 0\right) > 0$$

pour $n = 1, 2, \ldots$, donc $A_{c,1/n}$ contient au moins un point $p_n = (a_n, b_n)$ appartenant au spectre $S_{F\,G}$ de la f. r. composée $F(u)$ $G(v)$. Alors

$$\iint_{Q_\delta(a_n,b_n)} dF(u)dG(v) = [F(a_n + \delta) - F(a_n - \delta + 0)] [G(b_n + \delta) - G(b_n - \delta + 0)] > 0$$

quelque petit que soit $\delta > 0$, d'où $a_n b_n \in S_F (x) S_G$. Mais puisque

$$p_n = (a_n, b_n) \in A_{c,1/n},$$

on a $a_n b_n \longrightarrow c$, ce qui établit bien la deuxième inclusion

$$S_H \subset \overline{S_F (x) S_G}.$$

Remarque.

L'exemple suivant montrera que le produit vectoriel de deux ensembles fermés S_F et S_G n'est pas nécessairement fermé. Posons en effet

$$S_F = \{n\}$$

$$S_G = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right\} \cup \{0\} \qquad (n = 1, 2, ..)$$

On voit que le produit S_F (x) S_G contient chaque valeur $c_n = 1 + \frac{1}{n}$ sans contenir $\lim c_n = 1$.

Désignons maintenant par D_F l'ensemble des points de discontinuité d'une f. r. F.

THEOREME 3. 2.

Si D_F et D_G ne sont pas vides, on a $D_H = D_F$ (x) D_G. Si l'un des deux ensembles D_F et D_G est vide, tandis que l'autre contient l'origine, on a $D_H = \{0\}$. Dans tous les autres cas, D_H est vide.

Démonstration.

Ce théorème est une conséquence des deux formules

$$H(x + 0) - H(x) = \sum_{a_k b_k = x} [F(a_k + 0) - F(a_k)]\, [G(b_k + 0) - G(b_k)] \qquad (x \neq 0)$$

et

$$H(+ 0) - H(0) = [F(+ 0) - F(0)]\, [1 - G(+ 0) + G(0)] + G(+ 0) - G(0)$$

$$= [G(+ 0) - G(0)]\, [1 - F(+ 0) + F(0)] + F(+ 0) - F(0)$$

qu'on obtient aisément à partir de la relation $H = F \circ G$.

Les théorèmes 3. 1. et 3. 2. entraînent les trois corollaires suivants :

Corollaire 1.

Pour que H soit continue, il est nécessaire et suffisant que l'une des deux f. r. F et G soit continue et que l'autre soit continue à l'origine.

Corollaire 2.

Si $H = I_c$ avec $c \neq 0$, on a $F = I_a$ et $G = I_b$ avec $a\ b = c$.

Corollaire 3.

Si $H = I_0$ et si $F \neq I_0$, on a $G = I_\alpha$.

THEOREME 3.3.

Si F est absolument continue et si G est continue à l'origine, H est absolument continue ; sa densité H' est définie presque partout par la formule

$$H'(x) = \int F'\left(\frac{x}{v}\right) \frac{1}{|v|}\, dG(v).$$

Démonstration.

La première partie de l'énoncé est une conséquence directe du théorème 2.6. Pour établir la formule précédente, remarquons que la fonction

$$\Psi(y, v) = F'\left(\frac{y}{v}\right) \frac{1}{|v|}$$

définie pour $[-\infty < y < +\infty, |v| > 0]$ est non négative et mesurable B. En appliquant le théorème de Fubini, on a donc

$$H_1(x) = \int_{-\infty}^{x} dy \int_{+0}^{+\infty} \Psi(y, v)\, dG(v) = \int_{+0}^{+\infty} dG(v) \int_{-\infty}^{x} \Psi(y, v) dy = \int_{+0}^{+\infty} F\left(\frac{x}{v}\right) dG(v)$$

et

$$H_2(x) = \int_{-\infty}^{x} dy \int_{-\infty}^{-0} \Psi(y, v)\, dG(v) = \int_{\infty}^{-0} \left[[1] - F\left(\frac{x}{v}\right) \right] dG(v),$$

c'est-à-dire

$$H(x) = H_1(x) + H_2(x),$$

et par conséquent

$$H'(x) = \int_{+0}^{+\infty} \Psi(x, v)\, dG(v) + \int_{\infty}^{-0} \Psi(x, v)\, dG(v). \qquad \text{c. q. f. d.}$$

3.2 - FONCTIONS DE REPARTITION UNIMODALES ET FONCTIONS DE POLYA.

Alors que le problème de trouver des conditions suffisantes pour que la convolution $F * G$ de deux f.r. soit unimodale est assez délicat (voir par exemple [6], p. 252), l'énoncé suivant concernant le "produit" $F \circ G$ résulte immédiatement du théorème 2.5.

THEOREME 3.4.

Si l'une des deux f.r. F et G est unimodale de vertex zéro, il en est de même de $H = F \circ G$.

Remarques.

1) En prenant pour G la f.r. qui est égale à x^p pour $0 < x < 1$ et constante ailleurs $(0 < p < +\infty)$, donc unimodale si $0 < p < 1$, on voit que le résultat précédent est une extension du théorème 1 de H. Loeffel ([10], p. 27)

2) On trouverait aisément des exemples démontrant que la réciproque du théorème 3.4. n'est pas vraie.

THEOREME 3.5.

Si l'une des deux f.c. f et g est une fonction de Pólya, il en est de même de h.

Ce résultat est une conséquence du théorème 2.3.. Le théorème suivant permettra d'obtenir des fonctions de Pólya en partant de fonctions non caractéristiques.

THEOREME 3.6.

Si $\varphi(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ est une fonction réelle satisfaisant aux conditions

a) $\varphi(-t) = \varphi(t)$ c) $\varphi(t) \geqslant 0$

b) $\varphi(0) = 1$ d) $\varphi(t)$ non croissant pour $t > 0$

et si e) $W(v) = G\left(\frac{1}{v}\right) - G\left(-\frac{1}{v}\right)$ est une fonction convexe pour $v > 0$,

$$h(t) = \int \varphi(tv)\, dG(v)$$

est une fonction de Pólya.

Démonstration.

Les trois premières conditions (voir 2.4.) étant immédiatement vérifiées, il suffit de démontrer que $h(t)$ est convexe pour $t > 0$. Posons

$$h(t) = J_1(t) + J_2(t) + G(+0) - G(0)$$

où

$$J_1(t) = \int_{+0}^{+\infty} \varphi(tv)dG(v) = \int_{+0}^{+\infty} \varphi(u)dG\left(\frac{u}{t}\right)$$

$$J_2(t) = \int_{-\infty}^{-0} \varphi(tv)dG(v) = \int_{-\infty}^{-0} \varphi(u)dG\left(\frac{u}{t}\right) \qquad (t > 0).$$

Or G est continue pour tout $v \neq 0$ en vertu de la condition e) ; on peut donc appliquer l'intégration par parties (voir [19], p. 7), et l'on a

$$J_1(t) = \varphi(+\infty) - \varphi(+0)\, G(+0) - \int_{+0}^{+\infty} G\left(\frac{u}{t}\right) d\varphi(u),$$

$$J_2(t) = \varphi(-0)G(-0) - \int_{-\infty}^{-0} G\left(\frac{u}{t}\right) d\varphi(u)$$

$$= \varphi(-0)G(-0) + \int_{+0}^{+\infty} G\left(-\frac{u}{t}\right) d\varphi(u).$$

Il en résulte que

$$h(t) = \varphi(+\infty) + [G(+0) - G(-0)]\,[1 - \varphi(+0)]$$

$$+ \int_{+0}^{+\infty} W\left(\frac{t}{u}\right) d\,[1 - \varphi(u)]$$

$$= \varphi(+\infty) + \int_{-0}^{+\infty} W\left(\frac{t}{u}\right) d\,[1 - \varphi(u)]$$

pour $t > 0$ où $1 - \varphi(u)$ est non décroissante, et le théorème est établi.

Remarques.

1) La condition e) est certainement réalisée si

$$v\,G''(v) + 2G'(v) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } v \text{ réel.}$$

2) Si $G \neq I_0$, elle n'est réalisée que si le support S_G de G n'est pas borné. En effet, l'inclusion $S_G \subset [-a, +a]$ impliquerait que $W(v) = 1$ pour $0 < v < \frac{1}{a}$; puisque $W \neq 1$, cela est incompatible avec la convexité de W.

Exemples de f.r. satisfaisant à la condition e)

1) $$G(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \leqslant 1 \\ 1 - v^{-p} & \text{si } v > 1 \end{cases} \qquad (0 < p < +\infty),$$

2) $$G(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \leqslant 0 \\ e^{-\frac{a}{v}} & \text{si } v > 0 \end{cases} \qquad (a > 0),$$

3) $$G(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \leqslant 0 \\ \dfrac{v}{1+v} & \text{si } v > 0. \end{cases}$$

3.3 - RELATIONS ENTRE LES MOMENTS -

THEOREME 3.7.

Si les moments (ou moments absolus) d'ordre k de F et G existent et sont finis, il en est de même des moments correspondants de H ; la réciproque est valable pourvu que $H \neq I_0$. On a en plus les formules

$$m_H^{(k)} = m_F^{(k)}\, m_G^{(k)} \qquad \text{et} \qquad \mu_H^{(k)} = \mu_F^{(k)}\, \mu_G^{(k)}.$$

Démonstration.

Les moments de la f.r. F(x, v) définie dans l'exemple 2) (2.5.) se calculent à l'aide d'un simple changement de variables par

$$m_v^{(k)} = v^k\, m_F^{(k)} \qquad \text{et} \qquad \mu_v^{(k)} = |v|^k\, \mu_F^{(k)}$$

et la proposition est ramenée aux théorèmes 2.2. et 2.2.a.

c.q.f.d.

Donnons l'appliquation suivante au problème des moments.

Corollaire 1.

Etant donné c_K réel ($k \leqslant n$ ou $k < +\infty$), une condition suffisante pour l'existence d'une f.r.H telle que

$$c_k = \int x^k \, dH(x)$$

est que $c_k = a_k \, b_k$ où

$$a_k = \int x^k \, dF(x), \qquad b_k = \int x^k \, dG(x).$$

Un énoncé de Khintchine ([6], p. 160) affirme qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction h soit f. c. d'une distribution unimodale de vertex zéro est qu'elle puisse être mise sous la forme

$$h(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(u)du = \int_0^1 f(tu)du$$

où f est une f. c. En d'autres termes, pour que H soit unimodale de vertex zéro, il est nécessaire et suffisant que $H = F \circ G^*$, F étant une f. r. arbitraire et $G^*(x)$ étant égale à x pour $0 < x < 1$ et constante ailleurs. Le moment d'ordre k de G^* se calcule par $\frac{1}{k+1}$, et l'on a le

Corollaire 2.

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une f. r. H, unimodale de vertex 0, telle que

$$c_k = \int x^k \, dH(x) \quad (k \leqslant n \text{ ou } k < +\infty)$$

est que $c_k = \frac{a_k}{k+1}$ où $a_k = \int x^k dF(x)$.

Ce résultat a été démontré d'une manière différente par N. L. Johnson et C. A. Rogers [8].

3. 4 - UN THEOREME LIMITE -

Le résultat suivant présente une extension du théorème d'itération de Loeffel ([10], p. 41) dont l'hypothèse plus restrictive impose au support de $F_n = F$ d'être contenu dans l'intervalle (0, 1).

THEOREME 3. 8.

Soit F_n (n = 1, 2, ...) une suite de f. r. Posons

$$\mu_n^{(r)} = \int |x|^r \, dF_n(x) \qquad (r > 0)$$

et

$$H_n = F_1 \circ F_2 \circ \ldots\ldots \circ F_n.$$

S'il existe des valeurs positives r, δ et n_0 telles que $\mu_n^{(r)} < +\infty$ pour tout n et $\mu_n^{(r)} < 1 - \delta$ pour $n > n_0$, on a $H_n \xrightarrow{c} I_0$.

Démonstration.

Si $F_{n1} = I_0$, on aurait $H_n = I_0$ pour tout $n \geqslant n_1$; supposons donc que $F_n \neq I_0$ pour tout n. Une application répétée du théorème 3.7. nous donne

$$\int |x|^r \, dH_n(x) = \mu_1^{(r)} \quad \mu_2^{(r)} \quad \ldots\ldots \mu_n^{(r)}$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n_0} \mu_k^{(r)} \; (1 - \delta)^{n-n_0} \quad \text{pour } n > n_0,$$

expression tendant vers zéro si n augmente indéfiniment. Soit X_n une v.a. ayant la f.r. H_n ; on en déduit que $X_n \longrightarrow 0$ en moyenne d'ordre r, et par conséquent que $H_n \xrightarrow{c} I_0$ (voir [11], p. 164 et 168).

c.q.f.d.

Exemples de f.r. $F_n = F$ satisfaisant aux conditions du théorème 3.8. :

1) Loi normale symétrique :

$$F'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \text{ pourvu que } \sigma < \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2) Loi uniforme :

$$F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \text{ pour } 0 < x < a \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

pourvu que $a < e$, en raison de $\mu^{(r)} = \dfrac{a^r}{r+1}$.

Leer - Vide - Empty

CHAPITRE IV

TRANSFORMATION F o G ET ANALYTICITÉ DE FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

On sait que la f.c. de $F * G$ est analytique ou entière si les f.c. de F et de G le sont, et réciproquement (voir [11], p. 213). Le présent chapitre est consacré à l'étude du problème analogue pour le "produit" $F \circ G$, problème qui ne permettra pas de réponse aussi simple.

4.1 - DEUX CONDITIONS NECESSAIRES -

On déduit d'abord du lemme 2.1. le

Lemme 4.1.

Soit $H = F \circ G$ et t réel. Alors

$$J(it, H) = \int J(itx, F)\, dG(x).$$

THEOREME 4.1.

Pour que $h \neq 1$ soit analytique, il est nécessaire que f et g soient analytiques.

Démonstration.

En vertu des lemmes 1.1. et 4.1., il existe $t_1 > 0$ tel que

$$J(\pm it_1, H) = \int J(\pm it_1 x, F)\, dG(x) < +\infty ;$$

puisque $g \neq 1$, c'est-à-dire $G(+0) - G(-0) < 1$, cela implique que

$$J(\pm it_1 x, F) < +\infty \tag{1}$$

pour au moins une valeur $x = x_1$ différente de zéro, donc f est analytique. Il en est de même de g, le "produit" $f \circ g$ étant commutatif.

c.q.f.d.

THEOREME 4.2.

Pour que $h \neq 1$ soit entière, il est nécessaire que f et g soient entières.

En effet la valeur t_1 dans (1) peut être rendue aussi grande que l'on veut.

Remarques.

1) Si $h = 1$, l'une au moins des fonctions f et g est égale à 1 (voir corollaire 3 du théorème 3.2.)

2) Paul Lévy ([9], p. 70) a démontré le théorème 4.1. en utilisant les relations qui relient les moments de F, G et H.

3) Les réciproques des deux résultats précédents sont inexactes. Nous verrons plus loin (théorème 4.4) que h peut être une f.c. non analytique même si f et g sont des f.c. entières ; citons comme exemple le cas où f et g sont des f.c. du type poissonien.

4.2 - UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE -

THEOREME 4.3.

Soit f analytique et non entière. Pour que h soit analytique, il est nécessaire et suffisant que g soit une f.c. entière du type exponentiel.

Démonstration.

Si g est du type exponentiel, un théorème de Pólya [13] affirme que le support S_G est contenu dans un intervalle fini $[-b, +b]$; puisque f est analytique, $J(itx, F)$ est finie pour $|tx| < a$ $(a > 0)$. On aura donc

$$J(it, H) = \int_{-b}^{+b} J(itx, F)\, dG(x) < +\infty$$

pour tout t tel que $|t|b < a$; en d'autres termes h est analytique à l'intérieur de la bande $\left(-\frac{a}{b}, +\frac{a}{b}\right)$.

Réciproquement soit

$$J(\pm\, it_1, H) = \int_{S_G} J(\pm\, it_1 x, F)\, dP_G < +\infty$$

pour $t_1 > 0$. Puisque f est non entière, nous pouvons admettre que $J(\pm\, itx,\ F) = +\infty$ pour $tx > a'$ $(a' > 0)$,

donc

$$J(+\, it_1x,\ F) = +\infty \quad \text{si} \quad x > \frac{a'}{t_1}$$

et

$$J(-\, it_1x,\ F) = +\infty \quad \text{si} \quad x < -\frac{a'}{t_1},$$

ce qui implique que

$$S_G \subset \left[-\frac{a'}{t_1}, +\frac{a'}{t_1} \right]$$

et il suffit d'appliquer le théorème de Pólya mentionné plus haut.

c. q. f. d.

Un raisonnement plus long, mais nullement plus compliqué, permettrait d'obtenir un résultat plus précis :

THEOREME 4.3.a.

Soient $(-a_1, a_2)$ et $(-c_1, c_2)$ les bandes de régularité de f et de h $(0 < a_k,\ c_k \leqslant +\infty)$ et $[-b_1, +b_2]$ le plus petit intervalle contenant à la fois le support de G et l'origine $(0 \leqslant b_k < +\infty)$. Alors

$$c_1 = \min \left\{ \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_2} \right\}$$

et

$$c_2 = \min \left\{ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \right\}$$

où $\frac{a_k}{0} = +\infty$ pour $a_k > 0$ quelconque.

Remarquons en particulier que h n'est entière que si f est entière ou $g = 1$.

4.3. DEUX CONDITIONS SUR L'ORDRE DES "FACTEURS" f et g.

Si aucune des deux fonctions f et g n'est du type exponentiel, la régularité de h nécessite que f et g soient entières. Le théorème suivant donne un résultat plus précis :

THEOREME 4.4.

Soit h analytique et f entière telle que $\lambda(f) > 1$. Alors

a) $(\rho(f) - 1)(\rho(g) - 1) \leqslant 1$ si $1 < \lambda(f) < +\infty$ et

b) $\rho(g) = 1$ si $\lambda(f) = +\infty$.

Démonstration.

Supposons d'abord $\lambda(f) < +\infty$. h étant analytique, on a $t_1 > 0$ tel que

$$h(\pm it_1) = \int f(\pm it_1 u)\, dG(u) < +\infty.$$

D'après 1.2.

$$f(it_1u) + f(-it_1u) \geqslant M(|t_1u|, f) > \exp[|t_1u|^{\lambda(f)-\varepsilon}]$$

si $|t_1u| > r$, donc pour $|u| > \frac{r}{t_1}$, $\varepsilon > 0$ étant choisi tel que $1 + \varepsilon < \lambda(f)$ et r suffisamment grand. Il en résulte que pour $x > \frac{r}{t_1}$.

$$\begin{aligned} &h(it_1) + h(-it_1)\\ &\qquad \geqslant \int_{|u|>x} \{f(it_1u) + f(-it_1u)\}\, dG(u)\\ &\qquad > \int_{|u|>x} \exp[|t_1u|^{\lambda(f)-\varepsilon}]\, dG(u)\\ &\qquad \geqslant \exp[(t_1x)^{\lambda(f)-\varepsilon}]\,[G(-x) + 1 - G(x)], \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$G(-x) + 1 - G(x) < k \exp[-ax^{\lambda(f)-\varepsilon}]$$

pour $x > \frac{r}{t_1}$, où $k = h(it_1) + h(-it_1)$ et $a = t_1^{\lambda(f)-\varepsilon}$ sont deux constantes positives.

Cela implique que

$$\rho(g) \leqslant 1 + \frac{1}{\lambda(f) - 1 - \varepsilon}$$

ou

$$\rho(g) \leqslant 1 + \frac{1}{\lambda(f) - 1} + \varepsilon'$$

avec

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{(\lambda(f) - 1)(\lambda(f) - 1 - \varepsilon)} > 0$$

d'après le raisonnement utilisé par E. Lukacs [12] dans la première partie de la démonstration de son théorème 3.4.. Puisque ε et ε' sont des valeurs arbitrairement petites, on a

$$\rho(g) \leqslant 1 + \frac{1}{\lambda(f) - 1}$$

et la proposition a) est démontrée. Si $\lambda(f) = +\infty$, le même raisonnement reste valable pour des valeurs arbitrairement grandes de l'exposant $\lambda(f) - \varepsilon$ d'où $\rho(g) \leqslant 1$, c'est-à-dire $\rho(g) = 1$.

c.q.f.d.

Nous allons établir maintenant une condition suffisante pour la régularité de h.

THEOREME 4.5.

Soient f et g entières. Alors h est entière si

a) $\rho(f) = 1$ et $\rho(g) < +\infty$ ou si

b) $1 < \rho(f) < +\infty$ et $(\rho(f) - 1)(\rho(g) - 1) < 1$.

Démonstration.

Soit $c > 0$. Nous montrons d'abord l'existence de deux valeurs positives a et δ telles que $x > a$ entraîne

$$1 - G(x) < \exp[-cx^{\rho(f)+\delta}] \tag{2}$$

et

$$G(-x) < \exp[-cx^{\rho(f)+\delta}]. \tag{3}$$

En effet si (2) n'était pas vérifiée, on pourrait trouver pour tout $\varepsilon > 0$ une suite x_n tendant vers $+\infty$ telle que

$$1 - G(x_n) \geqslant \exp[-cx_n^{\rho(f)+\varepsilon}];$$

donc

$$\begin{aligned} M(t, g) \geqslant g(-it) &= \int e^{tu}\, dG(u) \\ &\geqslant \int_{x_n}^{+\infty} e^{tu}\, dG(u) \geqslant e^{tx_n}\ [1 - G(x_n)] \\ &\geqslant \exp[tx_n - cx_n^{\rho(f)+\varepsilon}] \end{aligned}$$

quels que soient $t > 0$ et $n = 1, 2, \ldots$. En remplaçant t par

$$t_n = (1 + c)\ x_n^{\rho(f) - 1 + \varepsilon},$$

on obtient

$$M(t_n, g) \geqslant \exp[x_n^{\rho(f)+\varepsilon}] = \exp\left[\left(\frac{t_n}{1+c}\right)^{1+\frac{1}{\rho(f)-1+\varepsilon}}\right],$$

donc

$$\frac{\log\log M(t_n, g)}{\log t_n} \geqslant \left(1 + \frac{1}{\rho(f) - 1 + \varepsilon}\right)\left(1 - \frac{\log(1+c)}{\log t_n}\right)$$

et par conséquent

$$\rho(g) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\log M(t_n, g)}{\log t_n} \geqslant 1 + \frac{1}{\rho(f) - 1 + \varepsilon}.$$

Puisqu'on peut choisir $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut, on trouve $\rho(g) \geqslant 1 + \frac{1}{\rho(f) - 1}$ si $\rho(f) > 1$ et $\rho(g) = +\infty$ si $\rho(f) = 1$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse. D'une façon analogue s'établit l'inégalité (3).

Montrons maintenant que

$$\int_a^{+\infty} \exp[|tx|^{\rho(f)+\delta}]\, dG(x) < +\infty \tag{4}$$

et

$$\int_{-\infty}^{-a} \exp[|tx|^{\rho(f)+\delta}]\, dG(x) < +\infty \tag{5}$$

pourvu que $|t|^{\rho(f)+\delta} < c$. En effet, on obtient en intégrant par parties

$$\int_a^b \exp\,[|tx|^{\rho(f)+\delta}]\,dG(x) = -\int_a^b \exp\,[|tx|^{\rho(f)+\delta}]\,d\,[1 - G(x)]$$

$$= \exp\,[|t\,a|^{\rho(f)+\delta}]\,[1 - G(a)] - \exp\,[|t\,b|^{\rho(f)+\delta}]\,[1 - G(b)]$$

$$+ \int_a^b [1 - G(x)]\,d_x \exp\,[|tx|^{\rho(f)+\delta}].$$

En raison de (2), les deux termes contenant b sont majorés respectivement par

$$\exp\,[(|t|^{\rho(f)+\delta} - c)\,b^{\rho(f)+\delta}]$$

et par

$$\int_a^b \exp\,[-\,cx^{\rho(f)+\delta}]\,d_x \exp\,[|tx|^{\rho(f)+\delta}]$$

$$= \frac{|t|^{\rho(f)+\delta}}{c - |t|^{\rho(f)+\delta}}\left\{\exp\,[(|t|^{\rho(f)+\delta} - c)\,a^{\rho(f)+\delta}] - \exp\,[(|t|^{\rho(f)+\delta} - c)\,b^{\rho(f)+\delta}]\right\},$$

expressions tendant vers des limites finies lorsque $b \longrightarrow +\infty$ ce qui établit (4). En partant de (3), on voit qu'il en est de même de (5).

Finalement puisque

$$f(itx) \leqslant M(|tx|,\ f) < \exp\,[|tx|^{\rho(f)+\delta}]$$

pour $|tx|$ suffisamment grand et en appliquant les inégalités (4) et (5), on trouve

$$\int f(itx)\,dG(x) = J(it,\ H) < +\infty$$

lorsque $|t|^{\rho(f)+\delta} < c$, donc h est une f. c. entière, la valeur positive c pouvant être choisie arbitrairement grande. c. q. f. d.

Donnons encore une synthèse des deux résultats précédents.

Corollaire.

Soit $\lambda(f) > \gamma > 1$. Pour que h soit analytique, il est nécessaire et suffisant que $\rho(g) < 1 + \frac{1}{\gamma - 1}$.

Leer - Vide - Empty

CHAPITRE V

CONTINUITÉ DE LA TRANSFORMATION GÉNÉRALE (I)

Après avoir traité d'une transformation particulière au cours des deux chapitres précédents, nous revenons au cas général de la transformation T pour en étudier la continuité. En d'autres termes nous allons établir des énoncés reliant la convergence de $f_m(t, v)$ et de $G_n(v)$ à celle de $h_{m,n}(t) = \int f_m(t, v)\, dG_n(v)$.

5.1 - UN THEOREME GENERAL -

Soient $f_m(t,v)$ et $f(t, v)$ $(m = 1, 2, \ldots, v \in R-N)$ des f. c., G_n et G $(n = 1, 2, \ldots)$ des f.r. et P_n et P leurs mesures de probabilité telles que

$$P_n(N) = P(N) = 0.$$

Dans ces conditions, les intégrales

$$h_{m,n}(t) = \int f_m(t, v)\, dG_n(v)$$

et

$$h(t) \quad = \int f(t, v)\, dG(v)$$

existent et représentent d'après le théorème 2.1. des f.c.. Supposons maintenant que $f_m(t, v) \longrightarrow f(t, v)$ et $G_n \xrightarrow{c} G$. Le théorème suivant donne alors des conditions assurant la convergence de $h_{m,n}$ vers h.

THEOREME 5.1. Si

(5a) $f_m(t, v)$ est continue en v $(v \in R-N)$ quels que soient m et t,

(5b) $f_m(t, v) \longrightarrow f(t, v)$ uniformément dans chaque intervalle fini $[v', v''] \subset R-N$ quel que soit t, (5c) $G_n \xrightarrow{c} G$,

(5d) $N = \bigcup_1^p N_k$ avec $N_k \cap N_j = \emptyset$ pour $k \neq j$, les ensembles N_k étant des intervalles[1] de continuité par rapport à G,

alors

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} h_{m,n}(t) = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} h_{m,n}(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} h_{m,n}(t) = h(t).$$

Démonstration.

Nous nous bornerons à démontrer que

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} h_{m,n}(t) = h(t) \ ;$$

on trouvera facilement les modifications à apporter au raisonnement suivant pour établir les deux autres relations.

Soient donc t et $\varepsilon > 0$ choisis arbitrairement ; nous avons à vérifier que

$$|h(t) - h_{m,n}(t)| < 3\,\varepsilon \tag{1}$$

pour $m > m_o$ et $n > n_o$ suffisamment grands.

En vertu de l'hypothèse (5d), on peut associer à tout k ($k = 1, 2, \ldots p$) un intervalle ouvert A_k contenant N_k, et trouver deux ensembles $A_o = (-\infty, a)$ et $A_{p+1} = (b, +\infty)$ tels que

$$A_k \cap A_j = \emptyset \qquad \text{pour} \qquad k \neq j$$

et

$$P(A) < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{avec} \qquad A = \bigcup_o^{p+1} A_k. \tag{2}$$

Puisqu'on peut toujours s'arranger pour que les A_k soient des intervalles de continuité par rapport à P, on a

$$P_n(A_k) \longrightarrow P(A_k)$$

---

(1) Nous désignons par "intervalle" tout intervalle fermé ou ouvert, pouvant aussi bien recouvrir un demi-axe que dégénérer en un point.

pour chaque A_k, donc

$$|P(A) - P_n(A)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

et par conséquent

$$P_n(A) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

pour $n > n_1$ suffisamment grand. Posons encore

$$B = R - A = \bigcup_{0}^{p} B_k,$$

les ensembles B_k étant des intervalles disjoints et fermés.

Soit maintenant $h(t) - h_{m,n}(t)$ décomposée en

$$\Phi_n(t) = \int f(t, v)\, dP - \int f(t, v)\, dP_n$$

et

$$\Psi_{m,n}(t) = \int f(t, v)\, dP_n - \int f_m(t, v)\, dP_n .$$

Nous montrons d'abord que

$$|\Phi_n(t)| < \varepsilon \tag{4}$$

pour $n > n_0$. Il résulte des conditions (5a) et (5b) que $f(t, v)$ est continue pour $v \in B$; le lemme de Helly-Bray ([11], p. 180) s'applique donc à chacun des intervalles B_k, intervalles de continuité par rapport à P, d'où

$$\left|\int_B f(t, v)\, dP - \int_B f(t, v)\, dP_n\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

pour $n > n_2$ suffisamment grand. En outre

$$\left|\int_A f(t, v)\, dP - \int_A f(t, v)\, dP_n\right|$$

$$\leqslant P(A) + P_n(A) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{4}\,\varepsilon$$

pour $n > n_1$ en raison de (2) et de (3). En prenant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, nous établissons bien l'inégalité (4).

D'autre part on voit que

$$\left| \int_A f(t, v)\, dP_n - \int_A f_m(t, v)\, dP_n \right| \leqslant 2P_n(A) < \varepsilon$$

pour $n > n_0$, et que l'hypothèse (5b) implique l'existence de m_0 tel que

$$\left| \int_B f(t, v)\, dP_n - \int_B f_m(t, v)\, dP_n \right|$$

$$\leqslant \max_{v \in B} |f(t, v) - f_m(t, v)|$$

$$= \max_k \{ \max_{v \in B_k} | f(t, v) - f_m(t, v) | \} < \varepsilon$$

pour $m > m_0$. On a donc

$$|\Psi_{m,n}(t)| < 2\varepsilon \tag{5}$$

pour $m > m_0$ et $n > n_0$, et l'inégalité (1) devient une conséquence immédiate des inégalités (4) et (5). c.q.f.d.

Remarques.

1) Le théorème 5.1. reste valable si $N = (-\infty, a)$ ou $N = (b, +\infty)$ sans que a ou b soient des points de continuité de G. En effet le lemme de Helly-Bray s'applique alors directement à $R - N$.

2) Dans le cas où G_n et G sont des p.f.r., le théorème reste également valable à cela près que les transformées $h_{m,n}$ et h ne sont plus des f.c., mais des p.f.c.

5.2 - APPLICATIONS -

Revenons maintenant aux exemples introduits dans 2.5. et posons

1) $f_m(t, v) = f_m(t)\, e^{itv}$ avec $N = \emptyset$

2) $f_m(t, v) = f_m(tv)$ " $N = \emptyset$

3) $f_m(t, v) = f_m\left(\frac{t}{v}\right)$ " $N = \{0\}$,

$f_m(t)$ étant une suite de f.c. tendant vers une f.c. $f(t)$. Il est facile de voir que ces exemples vérifient les hypothèses du théorème 5.1. ; en vertu du théorème 2.8., on peut donc formuler le

THEOREME 5.2.

Soient X_m et Y_n $(m, n = 1, 2, \ldots)$ deux suites de v.a. telles que X_m et Y_n soient indépendantes pour chaque couple m, n, et désignons par F_m et G_n leurs f.r. Si $F_m \xrightarrow{c} F$ et $G_n \xrightarrow{c} G$, les f.r. des suites doubles $X_m + Y_n$, $X_m Y_n$ et X_m/Y_n tendent respectivement vers $F * G$, $F \circ G$ et $F \diamond G$, ce troisième cas imposant en plus que G_n et G soient continues à l'origine.

Remarque.

Pour $X_m + Y_n$, ce résultat se vérifie d'ailleurs immédiatement à l'aide des f.c.

5.3 - CONVERGENCE FAIBLE -

Le théorème suivant concerne le cas où la suite G_n ne converge que faiblement ; admettons pour simplifier que $f_m(t, v)$ soit f.c. pour tout $v \in R$, c'est-à-dire que $N = \emptyset$.

THEOREME 5.3.

Si $f_m(t, v)$ remplit les hypothèses (5a) et (5) du théorème 5.1. avec $N = \emptyset$, si les limites

$$\lim_{\substack{m \to +\infty \\ v \to -\infty}} f_m(t, v) = \alpha(t)$$

et

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ v \to \infty}} f_m(t, v) = \beta(t)$$

existent pour tout t, et si $G_n \xrightarrow{f} G$, on a

$$\lim_{m, n \to \infty} h_{m,n}(t) = k(t)$$

où

$$h_{m,n}(t) = \int f_m(t, v)\, dG_n(v)$$

et

$$k(t) = \int f(t, v)\, dG(v) + \alpha(t)\, G(-\infty) + \beta(t)\, [1 - G(+\infty)],$$

expression qui n'est en général pas une f.c.

Démonstration.

Soient t et $\varepsilon > 0$ choisis arbitrairement ; nous avons à vérifier que

$$|k(t) - h_{m,n}(t)| < 3\varepsilon \tag{6}$$

pour $m > m_0$ et $n > n_0$ suffisamment grands. Or l'hypothèse implique l'existence de trois valeurs a, b et m_1 telles que

$$\begin{aligned} |\alpha(t) - f_m(t, v)| &< \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour } v < a \text{ et } m > m_1, \\ |\beta(t) - f_m(t, v)| &< \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour } v > b \text{ et } m > m_1, \end{aligned} \tag{7}$$

$$G(a) - G(-\infty) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad G(+\infty) - G(b) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{8}$$

et telles que a, b soient en plus des points de continuité de G. Ce dernier fait entraîne que

$$|G(a) - G_n(a)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ et } |G(b) - G_n(b)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{9}$$

pour $n > n_1$ suffisamment grand.

On a donc

$$\left|\int_{-\infty}^{a} f(t, v)\, dG(v)\right| \leqslant G(a) - G(-\infty) < \frac{\varepsilon}{4}$$

et

$$\left|\alpha(t)\, G(-\infty) - \int_{-\infty}^{a} f_m(t, v)\, dG_n(v)\right|$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{a} |\alpha(t) - f_m(t, v)|\, dG_n(v) + |\alpha(t)|\, |G(-\infty) - G_n(a)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + |G(-\infty) - G(a)| + |G(a) - G_n(a)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3}{4}\,\varepsilon$$

si $m > m_1$ et $n > n_1$, en vertu des inégalités (7), (8) et (9).

L'expression

$$\int_{-\infty}^{a} f(t, v)\, dG(v) + \alpha(t)\, G(-\infty) - \int_{-\infty}^{a} f_m(t, v)\, dG_n(v) \tag{10}$$

est alors bornée en module par ε, et l'on voit aisément qu'il en est de même de

$$\int_{b}^{+\infty} f(t, v)\, dG(v) + \beta(t)\, [1 - G(+\infty)] - \int_{b}^{+\infty} f_m(t, v)\, dG_n(v), \tag{11}$$

toujours à condition que $m > m_1$ et $n > n_1$.

En introduisant encore les p.f.r.

$$G_n^*(x) = \begin{cases} G_n(a) & \text{si} \quad x < a \\ G_n(x) & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ G_n(b) & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

et $G^*(x)$, définie de façon analogue, on a

$$G_n^* \xrightarrow{c} G^*,$$

ce qui permet d'appliquer le théorème 5.1. (voir remarque 2). Il en résulte que pour $m > m_2$ et $n > n_2$, les expressions

$$\int f(t, v)\, dG^*(v) - \int f_m(t, v)\, dG_n^*(v)$$

$$= \int_a^b f(t, v)\, dG(v) - \int_a^b f_m(t, v)\, dG_n(v) \tag{12}$$

sont bornées en module par ε. L'inégalité (6) s'obtient alors en rassemblant les inégalités trouvées pour (10), (11) et (12).

c. q. f. d.

Remarque.

La fonction $k(t)$ est une f. c. si $\mathcal{R}\, \alpha(t)$ et $\mathcal{R}\, \beta(t)$ sont continues en $t = 0$.

D'une façon analogue, on établirait le théorème suivant dont nous aurons besoin au cours des deux derniers chapitres.

THEOREME 5. 3. a.

Si $f_m(t, v)$ remplit les hypothèses (5a) et (5b) du théorème 5.1. avec $N = (-\infty, 0)$, si

$$\lim_{m, v \to \infty} f_m(t, v) = \beta(t)$$

<u>existe pour tout t, et si $G_n \xrightarrow{f} G$, G_n et G ayant leur support dans $[0, +\infty)$, on a</u>

$$\lim_{m, n \to \infty} h_{m, n}(t) = \int_0^{+\infty} f(t, v)\, dG(v) + \beta(t)\, [1 - G(+\infty)].$$

Notons que le théorème 5.1. s'applique ici bien que $[0, +\infty)$ ne soit généralement pas un intervalle de continuité de G (voir remarque 1) du théorème 5.1.).

CHAPITRE VI

CONTINUITÉ DE LA TRANSFORMATION GÉNÉRALE (II)

Nous nous proposons maintenant d'établir des réciproques du théorème 5.1., c'est-à-dire de donner des conditions assurant la convergence complète de G_n si l'on sait que $f_n(t, v)$ et $\int f_n(t, v)\, dG_n(v)$ tendent vers des f. c.

6.1 - UN LEMME GENERAL -

Lemme 6.1.

Soit $f_n(t, v) \longrightarrow f(t, v)$ où $f_n(t, v)$ satisfait aux hypothèses (5a) et (5b) du théorème 5.1. avec $N = \emptyset$, et soit G_n telle que $h_n(t) = \int f_n(t, v)\, dG_n(v) \longrightarrow h(t)$. Pour que $G_n \xrightarrow{c} G$ et $h(t) = \int f(t, v)\, dG(v)$, il est suffisant que les deux conditions suivantes soient remplies :

(6a) Pour aucune suite G_n^*, on ne peut avoir simultanément $\int f_n(t, v)\, dG_n^*(v) \longrightarrow h(t)$ et $G_n^* \xrightarrow{f} G^*$ avec $\text{Var}\, G^* < 1$.

(6b) Si pour deux f. r. G et G^*

$$h(t) = \int f(t, v)\, dG(v) = \int f(t, v)\, dG^*(v),$$

alors $G = G^*$.

Démonstration.

D'après un théorème de Helly (11 , p. 179), tout ensemble dénombrable de f. r. G_n contient une suite partielle tendant au sens faible vers une p. f. r. G. En raison de (6a), on a $\text{Var}\, G = 1$. Si G^* est la fonction limite d'une seconde suite partielle, on aurait de même $\text{Var}\, G^* = 1$, et le théorème directe 5.1. affirme que

$$h(t) = \int f(t, v)\, dG(v) = \int f(t, v)\, dG^*(v).$$

En raison de (6b), il ne peut donc exister qu'une seule fonction limite. c. q. f. d.

Remarque.

La condition (6b) impose en particulier que $f(t, v_1) \not\equiv f(t, v_2)$ si $v_1 \neq v_2$, condition qui n'est cependant nullement suffisante.

Nous appliquons maintenant le lemme 6.1. successivement aux trois "produits" $F * G$, $F \circ G$ et $F \diamond G$.

6.2 - CONTINUITE DE $F * G$ -

THEOREME 6.1.

Si $f_n \longrightarrow f$, $h_n = f_n g_n \longrightarrow h$ et si $f(t) \neq 0$ sauf peut-être pour un ensemble dénombrable de valeurs t, on a $g_n \longrightarrow g$ et $h = fg$.

Démonstration.

La condition (6b) est réalisée. En effet si

$$h = fg = fg^*,$$

il en résulte que $g(t) = g^*(t)$ pour tout t tel que $f(t) \neq 0$, donc partout, g et g^* étant des fonctions continues.

Puis comme $f(t) \neq 0$ pour $|t| < \delta$ $(\delta > 0)$ et comme la convergence de $f_n(t)$ vers $f(t)$ est uniforme dans $[-\delta, +\delta]$, il existe un nombre n_0 tel que $f_n(t) \neq 0$ pour $n > n_0$ et $|t| < \delta$, donc

$$g_n(t) = \frac{h_n(t)}{f_n(t)} \longrightarrow \frac{h(t)}{f(t)} \text{ pour } |t| < \delta .$$

Cette fonction limite étant continue en $t = 0$ et la condition (6b) étant remplie, le théorème A ([11], p. 211) s'applique et donne $g_n \longrightarrow g$, ce qui complète le raisonnement.

THEOREME 6.2.

Si $f_n \longrightarrow f$, $h_n = f_n g_n \longrightarrow h$ et si $h(t)/f(t)$ représente pour $|t| < \delta$ $(\delta > 0)$ soit une fonction analytique soit la fonction frontière d'une fonction analytique, on a $g_n \longrightarrow g$ et $h = fg$.

Démonstration.

La condition (6b) est réalisée en vertu du théorème B ([11], p. 212). La suite de la démonstration est analogue à la précédente.

6.3 - CONTINUITE DE F $\circ$ G -

Lemme 6.2.

La condition (6a) est remplie si $f_n(t, v) = f_n(tv)$, donc si $h_n = f_n \circ g_n$, et si $\lim_{n \to \infty} f_n = f \neq 1$.

Démonstration.

Soient donc

$$\begin{aligned} &F_n \xrightarrow{c} F \neq I_0 \\ &G_n \xrightarrow{f} G \qquad \text{avec Var } G < 1 \;; \end{aligned} \tag{1}$$

nous avons à vérifier que $h_n \not\longrightarrow h$. D'après le lemme 1.2. et en en adoptant les notations, on a

$$X_n \longrightarrow X \quad \text{en probabilité} \tag{2}$$

X_n et X obéissant respectivement aux lois F_n et F, et

$$|Y_n| \longrightarrow + \infty \tag{3}$$

sur un ensemble $A \subset \Omega$ de mesure P positive, Y_n obéissant à la loi G_n.

Par hypothèse, $X_n \not\longrightarrow 0$; on ne peut donc avoir (voir [11] p. 115)

$$P\,[|X_n| > \varepsilon] \longrightarrow 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0, \tag{4}$$

en d'autres termes il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$P[|X_{n'}| > \varepsilon] > \delta \tag{5}$$

pour une suite partielle $X_{n'}$ de X_n.

D'autre part on déduit de (3) que pour a > 0 choisie arbitrairement

$$P\,[|Y_n| < \frac{a}{\varepsilon},\ A] \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \longrightarrow \infty$$

(Cette relation ne figurant pas dans [11] s'établit de la même manière que la deuxième assertion du théorème A, p. 116). On a donc .

$$P[|Y_n| \geqslant \frac{a}{\varepsilon},\ A] \longrightarrow P(A) = p$$

avec $p > 0$ et par conséquent

$$P[|Y_n| \geqslant \frac{a}{\varepsilon}] \geqslant P[|Y_n| \geqslant \frac{a}{\varepsilon},\ A] > \frac{p}{2} \tag{6}$$

pour $n > n_o$ suffisamment grand.

En vertu du théorème 2.8., $H_n = F_n \circ G_n$ est la f.r. de X_nY_n ; il en résulte que pour $n > n_o$

$$\begin{aligned} 1 - H_{n'}(a + o) + H_{n'}(- a) &\\ = P[|X_{n'}Y_{n'}| > a|] &\\ \geqslant P[|X_{n'}| > \varepsilon\ ;\ |Y_{n'}| > \frac{a}{\varepsilon}] &\\ = P[|X_{n'}| > \varepsilon]\, P[|Y_{n'}| > \frac{a}{\varepsilon}], & \end{aligned}$$

$X_{n'}$ et $Y_{n'}$ étant indépendantes, donc en raison de (5) et (6)

$$1 - H_{n'}(a + o) + H_{n'}(- a) > \frac{\delta p}{2}$$

et

$$H(a) - H(- a) \leqslant 1 - \frac{\delta p}{2}$$

si l'on suppose que $H_n \xrightarrow{f} H$. On en déduit que

$$\text{Var } H \leqslant 1 - \frac{\delta p}{2} < 1,$$

ce qui est manifestement incompatible avec $h_n \longrightarrow h$. c.q.f.d.

Dans le cas particulier où $h = 1$, la condition (6b) est réalisée pour n'importe quelle f.c. $f \neq 1$ en raison du corollaire 3 du théorème 3.2 ; on a donc le

THEOREME 6.3.

<u>Si $F_n \xrightarrow{c} F \neq I_o$ et si $H_n = F_n \circ G_n \xrightarrow{c} I_o$, on a $G_n \xrightarrow{c} I_o$.</u>

Dans les cas suivants, la réalisation de la condition (6b) dépend uniquement du choix de f.

1) Si $f(t) = e^{ita}$ $(a \neq 0)$, on a $h(t) = g(at)$, donc g est définie de façon univoque par $g(t) = h\left(\frac{t}{a}\right)$

2) Si $F(x) = x^p$ $(0 < p < +\infty)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et constante ailleurs, on a d'après H. Loeffel [10]

$$G(x) = \frac{1}{p}\,[pH(x) - x\,H'(x)]$$

en tout point de continuité de G.

3) Un raisonnement analogue s'applique si

$F(x) = 1 - x^{-q}$ $(0 < q < +\infty)$ pour $x \geqslant 1$ et 0 pour $x < 1$; on a

$$G(x) = \frac{1}{q}\,[qH(x) + x\,H'(x)]\,.$$

4) Il en est de même si

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ ax^p & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ a + b(1 - x^{-q}) & \text{pour } x > 1, \end{cases}$$

les constantes a, b, p, q étant liées par les relations $a + b = 1$, $ap = bq$ et $p(p - 1) = q(q + 1)$; on a

$$G(x) = \frac{p(p-1)\,H(x) - x^2\,H''(x)}{ap^2 + bq^2}\,.$$

On est donc conduit à formuler le

THEOREME 6.4.

<u>Si $F_n \xrightarrow{c} F$ où F est l'une des f.r. définies par 1) - 4), et si $H_n = F_n \circ G_n \xrightarrow{c} H$, on a $G_n \xrightarrow{c} G$ et $H = F \circ G$.</u>

Dans le cas 2), ce résultat généralise le théorème 1' (p. 43) de H. Loeffel.

6.4 - CONTINUITE DE $F \diamond G$ -

THEOREME 6.5.

Si $F_n \xrightarrow{c} F = I_a$ $(a > 0)$ et si $H_n = F_n \diamond G_n \xrightarrow{c} H$ telle que H soit continue en $x = 0$, on a $G_n \xrightarrow{c} G$ et $H = F \diamond G$ où $G(x) = I_0(x) + H(0) - H\left(\frac{a}{x} + 0\right)$ pour $x \neq 0$.

Démonstration.

Nous allons ramener cette proposition au cas 1) du théorème précédent. D'après le corollaire du théorème 2.8., on a

$$H_n = F_n \circ \bar{G}_n$$

où

$$\bar{G}_n(x) = I_0(x) + G_n(0) - G_n\left(\frac{1}{x} + 0\right) \qquad (x \neq 0),$$

et d'après le théorème 6.4.

$$\bar{G}_n(x) \xrightarrow{c} H(ax).$$

Il en résulte que

$$G_n(x) = I_0(x) + \bar{G}_n(0) - \bar{G}_n\left(\frac{1}{x} + 0\right)$$

$$\longrightarrow I_0(x) + H(0) - H\left(\frac{a}{x}\right)$$

pour toute valeur $x \neq 0$ telle que $\frac{a}{x}$ soit un point de continuité de H, donc, comme on vérifie aisément, si x est un point de continuité de G, d'où

$$G_n \xrightarrow{c} G \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Signalons que tous les résultats de ce chapitre pourraient s'appliquer à des suites de v.a. comme nous l'avons fait dans 5.2. Nous nous contenterons ici d'énoncer la conséquence suivante du théorème 6.4.

Corollaire.

Soient X_n et Y_n ($n = 1, 2, \ldots$) deux v.a. indépendantes et soit G_n la f.r. de Y_n. Si $X_n \longrightarrow a$ ($a \neq 0$) en probabilité et si la f.r. du produit $X_n Y_n$ tend vers une f.r. H, on a $G_n(x) \xrightarrow{c} H(ax)$ ou $1 - H(ax + 0)$ selon que $a > 0$ ou $a < 0$.

6.5 - UNE CONSEQUENCE DU THEOREME 5.3.a.

Le lemme suivant sera utilisé dans le prochain chapitre.

Lemme 6.3.

La condition (6a) est vérifiée si $f_n(t, v)$ remplit les hypothèses du théorème 5.3.a. et si $\mathcal{R}\beta(t)$ est une fonction discontinue à l'origine.

Démonstration.

Nous supposons que $f_n(t, v) \longrightarrow f(t, v)$, $h_n(t) \longrightarrow h(t)$ et $G_n(v) \xrightarrow{f} G(v)$ où G_n et la p.f.r. G ont leurs supports dans $[0, +\infty)$. D'après le théorème 5.3.a.,

$$h(t) = \int_0^{+\infty} f(t, v)\, dG(v) + \beta(t)\,[1 - G(+\infty)]$$

où $\int_0^{+\infty} f(t, v)\, dG(v)$ est une p.f.r. dont la valeur à l'origine est $G(+\infty)$. Donc

$$\liminf_{t \to 0} \mathcal{R}h(t) = 1 = G(+\infty) + b\,[1 - G(+\infty)]$$

où

$$b = \liminf_{t \to 0} \mathcal{R}\beta(t) \leqslant \mathcal{R}\beta(0) = 1,$$

ce qui entraîne que

$$G(+\infty) = \operatorname{Var} G = 1. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Leer - Vide - Empty

CHAPITRE VII

TRANSFORMATION D'UNE CLASSE DE LOIS INDÉFINIMENT DIVISIBLES

7.1 - LA CLASSE T(J)

Appelons (J) la classe des f.c. indéfiniment divisibles et (P) celle des f.r. ayant leur support dans $[0, +\infty)$. Si $f(t) = e^{\varphi(t)} \in (J)$, nous désignons par T(f) la classe des f.c. pondérées de la forme

$$h(t) = \int_0^{+\infty} e^{\varphi(t)v}\, dG(v)$$

où $G \in (P)$, et par T(J) la réunion

$$T(J) = \bigcup_{f \in (J)} T(f).$$

L'étude de ces classes fait l'objet du présent chapitre.

Remarquons d'abord qu'une fonction de T(J) n'est généralement pas indéfiniment divisible ; on trouvera en effet aisément des exemples qui s'annulent, ce qui est impossible pour une fonction appartenant à (J).

On a la propriété de fermeture suivante :

THEOREME 7.1.

Toute classe T(f) est fermée par rapport à la multiplication, et la f.r. G du produit est la convolution des f.r. G_1 et G_2 des deux facteurs.

Démonstration.

Nous posons

$$h_k(t) = \int_0^{\infty} e^{\varphi(t)v}\, dG_k(v) \qquad (k = 1, 2)$$

et

$$G = G_1 * G_2 .$$

En appliquant le théorème de Fubini, on trouve

$$\int_0^\infty e^{\varphi(t)u} \, dG(u) = \int_0^\infty \int_0^u e^{\varphi(t)u} \, d_u G_1(u - v) \, dG_2(v),$$

donc, après une transformation de variables,

$$\int_0^\infty e^{\varphi(t)u} \, dG(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\varphi(t)(x+y)} \, dG_1(x) \, dG_2(y) = h_1(t) \, h_2(t)$$

c. q. f. d.

Exemples de f. c. appartenant à la classe T(J) :

1) Lois stables symétriques pondérées :

$$h(t) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}|t|^\gamma v} \, dG(v) \qquad (0 < \gamma \leqslant 2),$$

donc en particulier les lois normales et les lois de Cauchy pondérées.

2) Lois de de Finetti pondérées :

$$h(t) = \int_0^\infty e^{(f_1(t) - 1)v} \, dG(v)$$

où f_1 est une f. c. quelconque ; donc en particulier les lois de Poisson pondérées.

Ces lois jouent un rôle essentiel dans la théorie des limites des v. a. liées (voir [11], p. 378).

7. 2 - UNICITE DE LA REPRESENTATION -

THEOREME 7. 2.

La condition (6b) du lemme 6. 1. est réalisée si $f(t, v) = e^{\varphi(t)v}$ où $e^{\varphi(t)} \in (J)$, $\varphi \neq 0$ et $v \geqslant 0$.

Démonstration.

Posons

$$h(t) = \int_0^\infty e^{\varphi(t)v} \, dG_k(v) \qquad (k = 1, 2).$$

Puisque le support de G_k est borné à gauche, la f. c. g_k est analytique au moins dans le demi-plan supérieur, donc les expressions

$$g_k(-i\varphi(t)) = h(t) \qquad (k = 1,\ 2)$$

existent et sont finies, $\mathcal{R}\varphi(t)$ étant non positive pour tout t réel. Comme $\varphi \neq 0$, les deux f.c. g_1 et g_2 coïncident sur un segment de courbe situé soit à l'intérieur soit sur la frontière du demi-plan supérieur, donc partout en vertu du théorème d'identité pour les fonctions analytiques. c.q.f.d.

Corollaire.

Pour que $h \in T(f)$ soit une f.c. non pondérée du type f, il est nécessaire et suffisant que $G = I_a$ $(a \geqslant 0)$.

Remarques.

1) Un élément $h \in T(J)$ $(h \neq 1)$ peut être f.c. pondérée de deux types f_1 et f_2 différentes. Soit en effet

$$f_k(t) = e^{-\frac{1}{2}|t|^{\gamma_k}} \quad (k = 1,\ 2\ ;\ \gamma_1 \neq \gamma_2)$$

et posons $h = f_1 \circ f_2$, c'est-à-dire

$$h(t) = \int e^{-\frac{1}{2}|tv|^{\gamma_1}}\, dF_2(v) = \int e^{-\frac{1}{2}|tv|^{\gamma_2}}\, dF_1(v).$$

Une simple transformation de variables nous montre alors que $h \in T(f_k)$ pour $k = 1,\ 2$.

2) On pourrait se demander si $h = 1$ est le seul élément commun de deux classes différentes $T(f_1)$ et $T(f_2)$. Or la réponse est négative. En vertu de 2), il suffit de démontrer que $T(f_1) \neq T(f_2)$ si

$$f_1(t) = e^{-\frac{1}{2}|t|} \qquad \text{(loi de Cauchy)}$$

et

$$f_2(t) = e^{-\frac{1}{2}|t|^2} \qquad \text{(loi normale).}$$

En appliquant le théorème 2.2.a., on vérifie aisément que $h = 1$ est le seul élément de $T(f_1)$ dont le moment absolu d'ordre 1 reste fini tandis que $T(f_2)$ contient un nombre infini de tels éléments.

7.3 - THEOREMES DE CONVERGENCE -

En appliquant le théorème 5.1. avec $N = (-\infty,\ 0)$ aux fonctions $f_m(t,\ v) = e^{\varphi_m(t)v}$, on établit le

THEOREME 7.3.

Si $f_m(t) = e^{\varphi_m(t)} \longrightarrow f(t) = e^{\varphi(t)}$ et si $G_n \xrightarrow{c} G$, alors $h_{m,n}(t) = \int_0^\infty e^{\varphi_m(t)v}\, dG_n(v) \longrightarrow h(t) = \int_0^\infty e^{\varphi(t)v}\, dG(v)$.

La réciproque suivante est aussi valable :

THEOREME 7.4.

Si $f_n(t) = e^{\varphi_n(t)} \longrightarrow f(t) = e^{\varphi(t)}$ où $|f| \neq 1$ et si $h_n(t) = \int_0^\infty e^{\varphi_n(t)v}$ $dG_n(v) \longrightarrow h(t)$, alors $G_n \xrightarrow{c} G$ et $h(t) = \int_0^\infty e^{\varphi(t)v}\, dG(v)$.

Démonstration.

Puisque $|f(t)| = e^{\mathcal{R}\varphi(t)} \not\equiv 1$, il existe une suite $t_n \longrightarrow 0$ telle que $\mathcal{R}\varphi(t_n) < 0$ (voir [6], p. 56) ; on a donc

$$\beta(t_n) = \lim_{v \to \infty} e^{\varphi(t_n)v} = 0,$$

tandis que $\beta(0) = 1$, c'est-à-dire $\mathcal{R}\beta(t)$ est discontinue à l'origine, et le lemme 6.3. s'applique, affirmant que la condition (6a) est réalisée. Il en est de même de (6b) en vertu du théorème 7.2..

c.q.f.d.

Corollaire.

Si une suite de f.c. pondérées du type f ($|f| \neq 1$) tend vers une fonction continue à l'origine, la fonction limite est une f.c. pondérée du même type.

Ce résultat généralise l'énoncé b. ([11], p. 380) de M. Loève.

7.4 - DECOMPOSITION DES F.C. PONDEREES -

D'après le théorème de Lévy-Cramer, la classe des lois normales est fermée par rapport à la décomposition ; d'après celui de Raikov, il en est de même pour les lois de Poisson ([11], p. 271). Nous montrons maintenant qu'une telle affirmation n'est plus valable si l'on considère les classes des lois de Poisson et des lois normales pondérées.

THEOREME 7.5.

La classe des f.c. normales (ou de Poisson) pondérées n'est pas fermée par rapport à la décomposition.

Démonstration.

Soit en effet

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2 v}{2}} e^{-\frac{v}{2}} \frac{dv}{\sqrt{v}}$$

une f.c. du type normal pondéré ; un changement de variables et l'application de la formule

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

nous donnent

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} = h_1(t) \quad h_2(t)$$

où

$$h_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - it}}, \quad h_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + it}} .$$

Puisque $H_1(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$ et $H_2(x) = 1$ pour $x > 0$ (voir [11], p. 215) et en vertu du théorème 2.7., h_1 et h_2 ne peuvent être des f.c. normales pondérées.

Soient maintenant

$$h_1(t) = a_1 \, e^{-(e^{it}-1)} + b_1 \, e^{3(e^{it}-1)}$$

$$h_2(t) = a_2 \, e^{3(e^{it}-1)} + b_2 \, e^{5(e^{it}-1)}$$

où

$$a_k, \; b_k > 0 \quad \text{et} \quad a_k + b_k = 1 \quad (k = 1, 2).$$

Alors h_2 et le produit $h_1 h_2$ sont des f.c. pondérées du type poissonien, tandis que h_1 correspond à une distribution de masses, d'abord de signe quelconque,

$$q_k = \frac{(-1)^k a_1 e + b_1 3^k e^{-3}}{k!}$$

dans les points $k = 0, 1, 2, \dots$.

Choisissons maintenant a_1, b_1 tels que $a_1 e^4 = 3b_1$, d'où $q_1 = 0$ et $q_k > 0$ pour $k = 0, 2, 3, \ldots$, donc h_1, bien que f.c., ne peut être une fonction pondérée du type de Poisson.

c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - J.H. CURTISS - "On the distribution of the quotient of two chance variables", Ann. Math. Stat., 12 (1941), p. 409 - 421.

[2] - D. DUGUE - "Sur le produit de variables aléatoires", C.R. Acad. Sci., 233 (1951), p. 1421-22.

[3] - D. DUGUE - Traité de statistique théorique et appliquée, t. 1, Paris 1958.

[4] - D. DUGUE et M. GIRAULT - "Fonctions convexes de Pólya" Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, 4 (1955), p. 3 - 10.

[5] - M. GIRAULT - "Les fonctions caractéristiques et leurs transformations", Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, 4 (1955), p. 221-299.

[6] - B.V. GNEDENKO et A.N. KOLMOGOROFF - Limit distributions for sums of independent random variables, Cambridge 1954.

[7] - P.R. HALMOS - Measure theory, Princeton 1950.

[8] - N.L. JOHNSON et C.A., ROGERS - "The moment problem for unimodales distributions", Ann. Math. Stat., 22 (1951), p. 433-39.

[9] - P. LEVY - "Esquisse d'une théorie de la multiplication des variables aléatoires", Ann. Ec. Norm. Sup., 73 (1959), p. 59-82.

[10] - H. LOEFFEL - "Beiträge zur Theorie der charakteristischen Funktionen stochastischer Verteilungen", Mitt. Ver. schweiz. Vers.-math., 56 (1956), p. 1-49.

[11] - M. LOEVE - Probability theory, New York 1955.

[12] - E. LUKACS - "Les fonctions caractéristiques analytiques", Ann. Inst. H. Poincaré, 15 (1957), p. 217-251.

[13] - G. POLYA - "Remarks on characteristic functions", Proc. Berkeley Symposium, (1949), p. 115-123.

[14] - H. ROBBINS - "Mixture of distributions", Ann. Math. Stat., 19 (1948), p. 360-370.

[15] - A. RUEGG - "Intégration d'un ensemble de fonctions caractéristiques", C.R. Acad. Sci., 249 (1959), p. 494 - 495.

[16] - A. RUEGG - "Sur la continuité d'une transformation intégrale des fonctions caractéristiques", C.R. Acad. Sci., 249 (1959), p. 2000 - 2002.

[17] - R. SCHULZ-ARENSTORFF et J.C. MORELOCK - "The probability distribution of the product of n random variables", Amer. Math. Monthly, 66 (1959), p. 95 - 99.

[18] - K. TAKANO - "On some limite theorems of probability distributions", Ann. Inst. Stat. Math. Japon., 6 (1954), p. 37 - 115.

[19] - D.V. WIDDER - The Laplace transform, Princeton 1941.

Leer - Vide - Empty

TABLE DES MATIÈRES

CURRICULUM VITAE

Né le 27 avril 1932 à Bâle, je fréquentai le Lycée scientifique de Zurich qui me décerna en automne 1951 le certificat de maturité (type C). J'entrai alors à l'Ecole polytechnique fédérale, dans la section de mathématiques, et j'obtins en automne 1956 le diplôme de mathématicien. Dès cette date, je fus assistant de M. le professeur Specker jusqu'en automne 1958. Une bourse du Gouvernement Français me permit de poursuivre mes études à l'Institut Henri-Poincaré à Paris. C'est là que je terminai le présent travail dont le thème me fut suggéré par M. le professeur Saxer. Au printemps 1960, je fus nommé maître de mathématiques au Gymnase de St-Gall.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à M. le professeur Saxer ; je lui dois des suggestions et des conseils précieux. Je suis également très reconnaissant à M. le professeur Specker et à M. le professeur Dugué (Faculté des Sciences de Paris) pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes recherches.