Prom.-Nr. 2643

Beiträge zur Theorie der charakteristischen Funktionen stochastischer Verteilungen

Von der

Eidgenössischen Technischen Hochschule
in Zürich

zur Erlangung der Würde eines Doktors
der Mathematik

genehmigte

Promotionsarbeit

vorgelegt von

Hans Loeffel
von Olten und Busswil BE

Referent: Herr Prof. Dr. W. Saxer
Korreferent: Herr Prof. Dr. E. Specker

Bern – Druck Stämpfli & Cie. – 1956

Beiträge zur Theorie der charakteristischen Funktionen stochastischer Verteilungen

Von *H. Loeffel*, Zürich

Einleitung

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Verteilung einer stochastischen Variablen durch die zugehörige Verteilungsfunktion gegeben. Die Fourier-Stieltjessche Transformierte dieser Funktion, die sogenannte charakteristische Funktion ist durch A. Cauchy [1][1]) im Jahre 1853 eingeführt worden. In etwas abgeänderter Form erscheint sie bereits früher als erzeugende Funktion von P. S. Laplace [2]. 1920 hat dann P. Lévy [3] durch zwei fundamentale Sätze die Theorie der charakteristischen Funktionen verankert. Es sind dies die sogenannte Lévysche Umkehrformel und der Kontinuitätssatz. Dieser ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung verschiedener Konvergenzfragen, insbesondere des klassischen zentralen Grenzwertsatzes.

Die ursprüngliche Fassung des Kontinuitätssatzes wurde von H. Cramér, V. Glivenko und D. Dugué dahin abgeändert, dass sie über die Art der Konvergenz der Folge der charakteristischen Funktionen keinerlei Voraussetzungen machten, hingegen über das Verhalten der Grenzfunktion. So hat D. Dugué im Jahre 1955 bewiesen, dass es genügt, den Realteil der Grenzfunktion als stetig im Nullpunkt vorauszusetzen.

Auch in der sogenannten Arithmetik der Wahrscheinlichkeitsgesetze hat sich die Theorie der charakteristischen Funktionen als fruchtbar erwiesen. Hier handelt es sich darum, abzuklären, ob sich eine gegebene charakteristische Funktion als endliches oder unendliches Produkt von charakteristischen Funktionen darstellen lässt. A. Khintchine hat zur allgemeinen Theorie einen wesentlichen Beitrag geleistet.

---

[1]) Siehe Literaturverzeichnis auf Seite 48.

Von P. Lévy stammt die geschlossene Darstellung einer charakteristischen Funktion, die zur Klasse der unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsgesetze gehört. Die klassischen Verteilungen von Gauss und Poisson wurden insbesondere von D. A. Raikov, H. Cramér und D. Dugué untersucht.

Es ist nun von grossem Interesse, zu wissen, wann eine vorgelegte Funktion eine charakteristische Funktion ist. S. Bochner hat bereits 1932 gezeigt, dass jede positiv-definitive Funktion, die im Nullpunkt den Wert 1 annimmt, eine charakteristische Funktion ist. Khintchine und Cramér stellten notwendige und hinreichende Bedingungen auf, die aber in der Praxis schwer anzuwenden sind. Zugänglichere Kriterien für spezielle Funktionsklassen stammen von J. Marcinkiewicz, A. Wintner und D. Dugué für analytische charakteristische Funktionen. E. Lukacs und O. Szàsz haben sich in letzter Zeit um die Diskussion einiger rationaler charakteristischer Funktionen verdient gemacht. Endlich soll noch die einfache hinreichende Bedingung von G. Pólya erwähnt werden, wonach gewisse reelle, konvexe Funktionen (sogenannte Pólyafunktionen) charakteristische Funktionen sind.

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir eine Integraltransformation, die einer Gesamtheit von charakteristischen Funktionen eine neue charakteristische Funktion zuordnet. Diese wird von M. Loève als «gewichtete» charakteristische Funktion bezeichnet und spielt im Zusammenhang mit gewissen Konvergenzsätzen abhängiger stochastischer Variablen eine Rolle.

In einem ersten Teil wird die allgemeine Theorie begründet und dann für die spezielle Gesamtheit der zu einer festen charakteristischen Funktion im engern Sinne ähnlichen charakteristischen Funktionen angewandt. Die von M. Girault in einem ganz andern Zusammenhange hergeleitete Integraltransformation einer charakteristischen Funktion erfährt eine eingehende Behandlung. Im folgenden wird die Giraultsche Transformation verallgemeinert. Dabei gelingt es, eine einparametrige Schar (Scharparameter: $0 < p < \infty$) von neuen Verteilungsfunktionen (die sogenannten p-Verteilungsfunktionen) herzuleiten. Diese erweisen sich für $0 < p \leqq 1$ als unimodal mit Vertex Null. Die sinngemässe Erweiterung der p-Verteilungen auf negative Werte des Parameters liefert uns eine einfache Integraltransformation, die eine bestimmte Klasse von reellen Funktionen in Pólyafunktionen überführt. Abschliessend wird gezeigt, dass schwache, bzw. vollständige Konvergenz einer Folge von Verteilungsfunktionen äquivalent ist mit schwacher bzw. vollständiger Konvergenz der zugehörigen p-Verteilungsfunktionen. Ein Teil genannter Konvergenzaussage lässt sich alsdann wesentlich verallgemeinern.

Ein Teil der Resultate der vorliegenden Arbeit wurde bereits in zwei Comptes-rendus-Noten der Akademie von Paris veröffentlicht [12].

Es bleibt mir noch die angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Saxer, für die wertvollen Ratschläge während der Ausführung der Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Ebensolchen Dank schulde ich auch den Herren Prof. Dr. E. Specker (ETH), Prof. Dr. D. Dugué (Sorbonne) und Prof. Dr. M. Loève (University of California) für ihre Anregungen und ihr Interesse, das sie an meiner Arbeit bekundeten.

§ 1. Folgen von charakteristischen Funktionen

Bevor wir zum Thema dieses Paragraphen übergehen, seien noch einige wichtige Definitionen vorausgeschickt.

Definition I.

Unter einer allgemeinen Verteilungsfunktion $F(x)$ verstehen wir eine nicht abnehmende, linksstetige Funktion, wobei $0 \leqq F(x) \leqq 1$ in $-\infty \leqq x \leqq +\infty$.

Aus obiger Definition folgt die Existenz der folgenden Grenzwerte:

$$F(x+0) = \lim_{x_n \downarrow x} F(x_n)\,, \qquad F(x-0) = \lim_{x_n \uparrow x} F(x_n)\,,$$
$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x)\,, \qquad F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x)\,;$$

x heisst ein Stetigkeitspunkt bzw. Unstetigkeitspunkt von $F(x)$, je nachdem $F(x+0) - F(x-0) = 0$ oder > 0.

Für die Anwendungen besonders wichtig ist der Fall

$$F(-\infty) = 0\,, \quad F(+\infty) = 1\,. \tag{1.1}$$

Wir nennen dann $F(x)$ schlechthin Verteilungsfunktion.