Ein hybrides Verfahren zur Lösung von nichtlinearen Komplementaritätsproblemen und seine Konvergenzeigenschaften

Author(s):
Reiser, Peter Michael

Publication Date:
1978

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000125481 →

Diss ETH 6097

EIN HYBRIDES VERFAHREN ZUR LOESUNG VON NICHTLINEAREN KOMPLEMENTARITAETSPROBLEMEN UND SEINE KONVERGENZEIGENSCHAFTEN

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines
Doktors der Mathematik

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

Reiser, Peter Michael
Dipl. Math. ETH

geboren am 29. November 1950

von Winterthur und Fischenthal (ZH)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. F. Weinberg, Referent
Prof. Dr. M. Rössler, Korreferent

1978

Zusammenfassung

Unter einem Komplementaritätsproblem versteht man das Problem, zu einer gegebenen Abbildung $f:R^n \to R^n$ einen Punkt $x \in R^n$ mit

$$x \geqq 0 \,, \qquad f(x) \geqq 0 \,, \qquad x'f(x) = 0 \tag{1}$$

zu bestimmen. Als Komplementaritätsprobleme lassen sich u.a. Optimierungsaufgaben, Gleichgewichts- und Fixpunktprobleme formulieren.

Falls f affin ist, nennt man (1) ein lineares, sonst ein nichtlineares Komplementaritätsproblem. Nichtlineare Komplementaritätsprobleme werden im allgemeinen mittels simplizialer Approximation gelöst: Der Raum R^n wird trianguliert (simplizial zerlegt), und mittels einer Markierung wird eine Folge benachbarter Simplexe ausgezeichnet. Falls diese Folge endlich ist, so bestimmt ihr Endsimplex - ein "komplementäres" Simplex - eine Näherungslösung zu (1).

Zur Lösung von (1) empfiehlt sich ein iteratives Vorgehen: Man berechnet eine erste Näherungslösung, um dann mit feinerer Triangulierung eine nächste, bessere Näherungslösung zu bestimmen etc. Voraussetzung dafür sind Algorithmen, die eine beliebige Wahl des Startpunktes erlauben. Bei den bisher bekannten Verfahren wird dies mit Hilfe einer zusätzlichen Dimension sowie einer "künstlichen" Markierung ermöglicht (Sandwich-Methode). Ein solches Verfahren, der Lüthi-Algorithmus, wird im ersten Kapitel dargestellt.

Im zweiten Kapitel werden zwei Komplementaritätsalgorithmen mit ganzzahliger Markierung beschrieben, welche die Wahl eines beliebigen Startpunktes erlauben, ohne eine künstliche Markierung oder eine zusätzliche Dimension zu benötigen. Damit sind diese Verfahren den bisherigen in bezug auf den Rechenaufwand überlegen. Zudem gewinnt man aus dem ersten Verfahren eine neue Interpretation der Sandwich-Methode, während der zweite Algorithmus die Eigenschaft besitzt, dass seine Endlichkeit bei beliebiger

Startpunktwahl gewährleistet ist, falls f monoton ist und falls ein $x \geqq 0$ mit $f(x) > 0$ existiert.

Das dritte Kapitel behandelt Konvergenzeigenschaften von Folgen von Näherungslösungen, wie sie bei der iterativen Lösung von (1) berechnet werden. Für den Fall streng monotoner, stetig differenzierbarer Abbildungen f wird gezeigt, dass die Näherungslösungen linear gegen die exakte Lösung konvergieren. Durch Kombination mit Newton-Schritten erhält man ein hybrides Verfahren, welches quadratisch konvergente Folgen von Näherungslösungen liefert, wenn f streng monoton ist und eine Lipschitz-stetige Ableitung besitzt. Für den Fall konvexer Optimierungsprobleme werden Bedingungen für lineare Konvergenz angegeben.

Ein Vergleich verschiedener Komplementaritätsalgorithmen anhand der Testbeispiele im vierten Kapitel deutet auf eine Ueberlegenheit des hybriden Algorithmus. Mit ihm sind Beispiele mit Dimension bis n=80 erfolgreich gelöst worden.

Abstract

Given a map $f:R^n \to R^n$, the complementarity problem is to find a vector $x \in R^n$ such that

$$x \geqq 0 , \qquad f(x) \geqq 0 , \qquad x'f(x) = 0 .$$

It is a unifying mathematical form of many problems, e.g. optimization, equilibrium or fixed point problems.

We especially focus on the nonlinear complementarity problem (NLCP). In general, an NLCP is solved by algorithms using the principle of simplicial approximation, i.e. R^n is triangulated and a sequence of adjacent simplices is generated by means of a labeling procedure until a "complementary" simplex is found for which every point corresponds to an approximate solution of the NLCP.

Usually a solution to an NLCP is calculated iteratively, i.e. once an approximate solution is found, one tries to improve the approximation using a triangulation with finer mesh-size. To avoid unnecessary computations we need an algorithm that allows the choice of an arbitrary starting point. Previous approaches employ an extra dimension and an artificial labeling to make this possible (sandwich-method).

We present an algorithm with integer labels that allows the choice of an arbitrary starting point without using an extra dimension or an artificial labeling. Furthermore it is shown that finite termination is guaranteed if f is monotone and if there exists an $x \geqq 0$ such that $f(x) \geqq 0$.

A sequence of approximate solutions can be shown to converge linearly, if f is strongly monotone and continuously differentiable. A combination with Newton-steps yields a hybrid algorithm that guarantees quadratic convergence, if f is strongly monotone and its derivative is Lipschitz-continuous. Linear convergence can be attained in the case of the convex optimization problem.

Finally, some numerical results are presented. Various complementarity algorithms are tested against the hybrid algorithm which seems to perform better in most instances. In addition, problems with up to eighty variables have been successfully solved with the hybrid algorithm.