Doctoral Thesis

Untersuchungen zu algebraischen und analytischen Aspekten der Störungstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen

Author(s):
Spirig, Franz

Publication Date:
1978

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000134817

Diss. ETH 6147

UNTERSUCHUNGEN ZU ALGEBRAISCHEN UND ANALYTISCHEN ASPEKTEN DER STOERUNGSTHEORIE FUER GEWOEHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ABHANDLUNG

zur Erlangung

des Titels eines Doktors der Mathematik der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN

HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

FRANZ SPIRIG

Dipl. Math. ETH

geboren am 21. Mai 1951

von Widnau

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. E. Stiefel, Referent

Dr. U. Kirchgraber, Korreferent

1978

ABSTRACT

Modern perturbation theories use as a basic mathematical instrument the Lie algebra $\mathfrak{F}$ which is produced by the non-associative algebra of vector fields. We introduce an isomorphism between $\mathfrak{F}$ and a Lie algebra $\mathfrak{R}$ of linear operators. Working in $\mathfrak{R}$ facilitates theoretical considerations and permits transfer to $\mathfrak{F}$. The following applications are offered: discussion of the Hausdorff-Campbell formula, a new approach to Hori's perturbation equations, relation of Hori's and Deprit's methods and elimination of singularities produced by the use of elements in perturbation problems. Algorithms for higher order perturbation procedures are established.

Chapter 2 is independent of the foregoing contents of Chapter 1. The topological equivalence of perturbed differential equations, in particular of a class of oscillators with autonomous perturbations is studied.

Finally, Chapter 3 contains some theorems concerning invariant manifolds of dissipative systems, and a generalization of Hopf's bifurcation problem is presented.

ZUSAMMENFASSUNG

In Kapitel 1 untersuchen wir die formale Struktur der Störungstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Dazu arbeiten wir nicht in der nicht-assoziativen Algebra der Vektorfelder, sondern in der assoziativen Algebra der linearen Operatoren. Mit Hilfe eines Lie-Algebra-Isomorphismus' übersetzen wir dann Lie-Elemente der Operatorenalgebra zurück in solche der Algebra der Vektorfelder.

Insbesondere geben wir eine einfache Herleitung der Hausdorff-Campbell-Formel. Die Zusammensetzung zweier Lieschen Transformationen ist (wenigstens formal) wieder eine Liesche Transformation. Wir zeigen, dass der Zusammenhang zwischen dem erzeugenden Vektorfeld der Zusammensetzung und den erzeugenden Vektorfeldern der beiden Transformationen ebenfalls durch die H-C-Formel gegeben wird. Ein entsprechendes Resultat gilt für die erzeugenden Funktionen von kanonischen Transformationen.

Bei Störungsrechnungen können durch die Elementtransformation sog. geometrische (virtuelle) Singularitäten eingeschleppt werden. Unter gewissen Voraussetzungen kann man diese jedoch beheben, wie in [7] , [8], [9] gezeigt wird. In der Praxis wird man dazu den sog. Vertauschungssatz für Lie-Reihen anwenden. Die H-C-Formel hat auch in diesem Zusammenhang, nämlich für die Regularisierung bei unwesentlich ausgearteten Systemen eine gewisse Bedeutung.

Weiter stellen wir einen neuen Zugang her zu den Hori'schen Störungsgleichungen und untersuchen den Zusammenhang zwischen den Methoden von Hori und Deprit.

Schliesslich diskutieren und vergleichen wir Algorithmen für Störungsrechnungen hoher Ordnung. Wir schlagen eine rekursive Variante zur klassischen Störungsrechnung vor, welche algorithmisch einfacher und ökonomischer ist, indem weniger Kommutatoren auszuwerten sind.

In Kapitel 2 befassen wir uns mit der Aequivalenz von gestörten Differentialgleichungen. Wir zitieren hier nur das folgende anschauliche Resultat: Es gibt eine fast-identische topologische Abbildung, die das Phasenportrait eines Oszillators mit autonomer Störung überführt in das mit Hilfe der Mittelwertmethode konstruierte (approximative) Phasenportrait.

In Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit invarianten Mannigfaltigkeiten bei dissipativen Systemen. Insbesondere wird der Satz bewiesen, dass Lösungen gegen Lösungen auf der Mannigfaltigkeit streben. Ein entsprechender Satz für die Poincaré-Abbildung wurde von Kirchgraber in [9] gezeigt.

Zum Schluss studieren wir als Anwendung der Störungsrechnung und der Theorie der invarianten Mannigfaltigkeiten eine Verallgemeinerung des Hopf'schen Bifurkationsproblems.

Ich danke den Herren Prof. Dr. E. Stiefel und Dr. U. Kirchgraber für ihre Anregungen und ihre Unterstützung für diese Arbeit.