Doctoral Thesis

Die Algebra der Sätze der monadischen Theorie schwach zweiter Stufe der linearen Ordnung ist atomar

Author(s):
Trippel, Johann Rudolf

Publication Date:
1978

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000143688

Diss. ETH Nr. 6208

DIE ALGEBRA DER SAETZE DER MONADISCHEN THEORIE SCHWACH ZWEITER STUFE DER LINEAREN ORDNUNG IST ATOMAR

ABHANDLUNG
zur Erlangung des Titels eines
Doktors der Mathematik

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

JOHANN RUDOLF TRIPPEL
dipl. math. ETH
geboren am 4. Januar 1946
von Chur GR

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. H. Läuchli, Referent
Prof. Dr. E. Specker, Korreferent

1978

ZUSAMMENFASSUNG

L sei die monadische Sprache schwach zweiter Stufe der linearen Ordnung zusammen mit abzählbar vielen einstelligen Prädikatszeichen. Der Ausdruck "schwach zweite Stufe" bedeute dabei, dass die Mengenvariablen nur mit endlichen Mengen von Elementen aus dem Grundbereich interpretiert werden. Die Axiome seien die Axiome der linearen Ordnung und der gegenseitigen Ausschliessung der einstelligen Prädikate.
Die einstelligen Prädikatszeichen und Prädikate werden deshalb anschliessend "Farben" genannt, und die Modelle unserer Axiome gefärbte geordnete Mengen. Sodann wird eine Klasse M von "vollständig" gefärbten Modellen der linearen Ordnung eingeführt, welche eine spezielle Struktur besitzen.

Im ersten Teil wird nach Läuchli [4, 5] gezeigt, dass jeder in der schwach zweiten Stufe erfüllbare L-Satz auch ein Modell in M besitzt.

Im zweiten Teil wird mit Hilfe einer Integration genannten Operation auf den gefärbten geordneten Mengen eine Folge von aufsteigenden Teilklassen M_ℓ von M definiert, deren Vereinigung M ist. Darauf wird auf jeder gefärbten geordneten Menge A eine Aequivalenzrelation definiert, deren Aequivalenzklassen im wesentlichen den direkten Komponenten bei der Ordnungsrelation entsprechen. Wenn die Aequivalenzklassen von A genügend "regelmässig" sind, wird A differenzierbar genannt. Die Differentiation ist nachher der Uebergang zu der (gefärbten) geordneten Menge der Aequivalenzklassen. Als Hauptergebnis wird im zweiten Teil gezeigt, dass mit A auch die Ableitung A' in M enthalten ist, und, dass die Differentiation von einer Teilklasse $M_{\ell+1}$ von M in die Teilklasse M_ℓ von M führt.

Im dritten Teil wird zunächst gezeigt, dass auf einer gefärbten geordneten Menge $A \varepsilon M$ die durch die direkten Komponenten bei der Ordnungsrelation gegebene Aequivalenzrelation in L ausdrückbar ist. Da man nach dem Hauptergebnis des zweiten

Teils bei $A \varepsilon M$ durch Differentiation, d.h. durch Uebergang zur gefärbten geordneten Menge der Aequivalenzklassen, innerhalb M bleibt und in endlich vielen Schritten zu einer einpunktigen gefärbten Ordnung kommt, ist deshalb $A \varepsilon M$ bis auf Isomorphie durch einen L-Satz charakterisierbar. Die Farben auf den Ableitungen von A dienen bei diesem Prozess als Kodierung der Struktur von A. Nebst einem Satz über M und die Klasse der gefärbten geordneten Mengen, deren L-Theorien $\aleph_0$-kategorisch sind, und einem weiteren Satz, folgt daraus, dass die Lindenbaum-Tarski-Algebra der Theorie schwach zweiter Stufe der gefärbten geordneten Mengen atomar ist. Durch Beschränkung auf eine bestimmte Farbe folgt daraus sofort, dass die Lindenbaum-Tarski-Algebra der Theorie schwach zweiter Stufe der linearen Ordnung atomar ist.

ABSTRACT

Let L be the monadic weak second order language of linear order together with denumerably many unary predicates. Let the axioms be the axioms of linear order and those of mutual exclusion of the unary predicates. M will be a special class of models with a sufficiently simple structure.

In the first section we show that every sentence of L which has a model has a model in M.

In the second section we define an ascending sequence of subclasses M_ℓ of M, whose union is M, using an operation on the models of L called integration. On each model A of L we define an equivalence relation, whose equivalence classes are the direct components of A in reference to the linear ordering relation. If the equivalence classes of A are sufficiently "regular", we call A differentiable. By "differentiation" we mean the transition to the ordered set of the equivalence classes. The main results of the second section are: If A is contained in M, its derivative A' is also contained in M, and the differentiation leads from a subclass $M_{\ell+1}$ of M into the subclass M_ℓ of M.

In the third section we prove that for an ordered set A in M the equivalence relation defined in section 2 is definable in L. Because of the main results of section 2 the ordered set A is therefore characterizable by an L-sentence (up to isomorphism). The unary predicates on the derivatives of A serve as a coding for the structure of A. In addition to a theorem on M and the class of models of L whose L-theory is $\aleph_0$-categorical and in addition to another theorem, it follows that the Lindenbaum Tarski algebra of the monadic weak second order theory of linear order is atomic.