Ω-Sätze für zwei arithmetische Funktionen

Abhandlung
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Mathematik
der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

HENRI JORIS
dipl. Math. ETH
geboren am 25.3.1942
von Orsières, Kanton Wallis

Angenommen auf Antrag von
Prof. K. CHANDRASEKHARAN, Referent
Prof. A. PFLUGER, Korreferent

Basel
Birkhäuser Verlag
1972

Es sei p eine Primzahl, m und k natürliche Zahlen, welche folgenden Bedingungen genügen: $1 \leqslant k < m$, $(k, p) = 1$. Ferner sei $f(x) = x^3 - mpx + kp$. Wegen $f(1) < 0$, $f(-1) > 0$ hat $f(x)$ drei reelle Nullstellen. Nach dem Kriterium von Eisenstein ist ausserdem $f(x)$ irreduzibel über $\mathbf{Q}$ (s. [21], § 27); falls ξ eine Nullstelle von $f(x)$ ist, so ist $\mathbf{Q}(\xi)$ kubisch und total-reell.

7. Eine Ungleichung für $\sum_{m \leqslant x} |\tau(m)|$

Der Beweis von Satz 2 verläuft nach den gleichen Prinzipien wie jener von Satz 1. Man kennt aber kein Lemma 6 entsprechendes Ergebnis. Als Ersatz dient Formel (8) in Satz 3:

$$\sum_{m \leqslant x} |\tau(m)| > c x^{25/4} \quad \text{für} \quad x \geqslant 1, \tag{79}$$

mit einem $c > 0$. Andererseits weiss man ([11], S.173), dass

$$\sum_{m \leqslant x} |\tau(m)| = O(x^{13/2}) \quad \text{für} \quad x \geqslant 1. \tag{80}$$

Der Beweis von Satz 3 ergibt sich aus folgendem

LEMMA 9. *Es gibt zwei positive Zahlen c_1, c_2 derart, dass zu jedem $y \geqslant 1$ zwei reelle Zahlen y_1, y_2 existieren mit folgenden Eigenschaften:*

$$y \leqslant y_j \leqslant y + c_1 y^{1/2}, \quad j = 1, 2;$$

$$S(y_1) = \sum_{m \leqslant y_1} \tau(m) \geqslant c_2 y_1^{23/4},$$

$$S(y_2) = \sum_{m \leqslant y_2} \tau(m) \leqslant - c_2 y_2^{23/4}.$$

Daraus ergibt sich nun (79) folgendermassen: Es seien c_1 und c_2 die beiden Konstanten aus Lemma 9. Wir setzen

$$c_3 = \max\left(1, \frac{c_1^2}{4}\right),$$

$$y(k) = c_3 k^2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Es ist

$$y(k) \geqslant 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

ferner

$$y(k+1) - y(k) = 2c_3 k + c_3 > 2c_3^{1/2} y(k)^{1/2} \geqslant c_1 y(k)^{1/2}.$$

Dann folgt aus Lemma 9

$$\sum_{y(k)<m\leqslant y(k+1)} |\tau(m)| \geqslant 2c_2 y(k)^{23/4}$$

$$\sum_{m\leqslant x} |\tau(m)| \geqslant \sum_{y(k+1)\leqslant x} \; \sum_{y(k)<m\leqslant y(k+1)} |\tau(m)|$$

$$\geqslant \sum_{c_3(k+1)^2\leqslant x} 2c_2 c_3^{23/4} k^{23/2}$$

$$\geqslant c_4 \sum_{k\leqslant c_5 x^{1/2}} k^{23/2} \geqslant c_6 x^{25/4}, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Beweis von Lemma 9 (vgl. [18]): Es sei für $\varrho \geqslant 0$, $x>0$:

$$S_\varrho(x) = \sum_{m\leqslant x} \tau(m)\,(x-m)^\varrho \frac{1}{\Gamma(\varrho+1)}.$$

Dann gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$S_{\varrho+1}(x) = \int_0^x S_\varrho(t)\,dt. \tag{81}$$

Ferner ist für $\varrho>0$:

$$S_\varrho(x) = (2\pi)^{-\varrho} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x}{m}\right)^{6+\varrho/2} \tau(m)\, J_{12+\varrho}\{4\pi(mx)^{1/2}\}, \tag{82}$$

wo J_ν die Besselsche Funktion erster Art ν-ter Ordnung ist, s.[7], (55). Nach [9], Bd. II, S.85, ist für $z\geqslant 1$:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} z^{-\frac{1}{2}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-3/4}). \tag{83}$$

Aus (80) folgt:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\tau(m)|}{m^7} = c_3 < \infty, \tag{84}$$

und daraus weiter

$$\sum_{m=2}^{\infty} |\tau(m)|\, m^{-25/4-\varrho/2} \leqslant c_3\, 2^{3/4-\varrho/2} \leqslant \frac{2^{1/2}}{8}, \tag{85}$$

falls $\varrho \geqslant \varrho_0$, wo ϱ_0 eine genügend grosse natürliche Zahl ist. Nun ist für $\varrho \geqslant 1$ wegen (82), (83) und (84):

$$\left.\begin{aligned} S_\varrho(x) &= c_\varrho x^{23/4+\varrho/2} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^{25/4+\varrho/2}} \cos\left(4\pi (mx)^{1/2} - \tfrac{5}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\pi\varrho\right) \right. \\ &\quad \left. + O\left(x^{-1/2} \sum_{m=1} \frac{|\tau(m)|}{m^{27/4+\varrho/2}} \right) \right\} \\ &= c_\varrho x^{23/4+\varrho/2} \left\{ U_\varrho(x) + R_\varrho(x) \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

wo die c_ϱ positive, von ϱ abhängige Konstanten sind, und

$$R_\varrho(x) = O(x^{-1/2}). \tag{87}$$

Daraus ergeben sich die Ungleichungen

$$|R_\varrho(x)| \leqslant \frac{2^{1/2}}{8} \quad \text{für} \quad x \geqslant x_0; \qquad \varrho = \varrho_0, \varrho_0 + 1, \varrho_0 + 2, \varrho_0 + 3; \tag{88}$$

für ein bestimmtes $x_0 \geqslant 1$. Nun seien k_1, k_2 derart gewählt, dass für $x \geqslant x_0$ gelte

$$S(y) \leqslant k_2 y^{23/4} \quad \text{für} \quad x \leqslant y \leqslant x + k_1 x^{1/2} = x + h. \tag{89}$$

Ich zeige, dass für ein gewisses grosses k_1 eine positive, von x nicht abhängige Konstante c_4 existiert, derart dass $k_2 \geqslant c_4 > 0$.

Unter den vier Zahlen $\varrho = \varrho_0, \varrho_0 + 1, \varrho_0 + 2, \varrho_0 + 3$ erfüllt bei gegebnem x sicher eine die Bedingung

$$\cos\left(4\pi (x+h)^{1/2} - \tfrac{5}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\pi\varrho\right) \geqslant \frac{2^{1/2}}{2}.$$

Dann ist wegen (85), (86) und (88), und weil $\tau(1) = 1$:

$$\left.\begin{aligned} S_\varrho(x+h) &= c_\varrho (x+h)^{23/4+\varrho/2} \left\{ \cos\left(4\pi (x+h)^{1/2} - \tfrac{5}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\pi\varrho\right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^{25/4+\varrho/2}} \cos\left(4\pi (m(x+h))^{1/2} - \tfrac{5}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\pi\varrho\right) + R_\varrho(x) \right\} \\ &\geqslant c_\varrho (x+h)^{23/4+\varrho/2} \left(\tfrac{1}{2} 2^{1/2} - \frac{2^{1/2}}{8} - \frac{2^{1/2}}{8} \right) \\ &= \frac{2^{1/2}}{4} c_\varrho (x+h)^{23/4+\varrho/2}. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Aus (89) folgt

$$S(y) \leqslant k_2 (x+h)^{23/4} \quad \text{für} \quad x \leqslant y \leqslant x+h.$$

Diese Ungleichung wird integriert:

$$\left.\begin{aligned} A = \int\limits_{x}^{x+h} dy \int\limits_{x+h-(x+h-y)/\varrho}^{x+h} dy_1 \times \\ \times \int\limits_{y_1-(x+h-y)/\varrho}^{y_1} dy_2 \ldots \int\limits_{y_{\varrho-1}-(x+h-y)/\varrho}^{y_{\varrho-1}} S(y_\varrho)\, dy_\varrho \\ \leqslant B = k_2 (x+h)^{23/4} \int\limits_{x}^{x+h} dy \ldots \int\limits_{y_{\varrho-1}-(x+h-y)/\varrho}^{y_{\varrho-1}} dy_\varrho , \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

denn

$$x+h \geqslant y_\varrho \geqslant y_{\varrho-1} - \frac{x+h-y}{\varrho} \geqslant y_{\varrho-2} - 2\frac{x+h-y}{\varrho} \ldots \geqslant y_1 - (\varrho-1)\frac{x+h-y}{\varrho}$$

$$\geqslant x+h-\varrho\frac{x+h-y}{\varrho} = y \geqslant x.$$

Für das Integral B gilt:

$$B = k_2 (x+h)^{23/4} \int\limits_{x}^{x+h} \left(\frac{x+h-y}{\varrho}\right)^{\varrho} dy = k_2 (x+h)^{23/4} \left(\frac{h}{\varrho}\right)^{\varrho} \frac{h}{1+\varrho}. \tag{92}$$

Für das Integral A gilt, wegen (81):

$$\int\limits_{y_{\varrho-1}-(x+h-y)/\varrho}^{y_{\varrho-1}} S(y_\varrho)\, dy_\varrho = S_1(y_{\varrho-1}) - S_1\left(y_{\varrho-1} - \frac{x+h-y}{\varrho}\right),$$

$$\int\limits_{y_{\varrho-2}-(x+h-y)/\varrho}^{y_{\varrho-2}} dy_{\varrho-1} \int\limits_{y_{\varrho-1}-(x+h-y)/\varrho}^{y_{\varrho-1}} S(y_\varrho)\, dy_\varrho$$

$$= S_2(y_{\varrho-2}) - 2S_2\left(y_{\varrho-2} - \frac{x+h-y}{\varrho}\right) + S_2\left(y_{\varrho-2} - 2\frac{x+h-y}{\varrho}\right)$$

und so fort, bis

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_x^{x+h} \sum_{m=0}^{\varrho} \binom{\varrho}{m} (-1)^m S_\varrho\left(x+h-m\,\frac{x+h-y}{\varrho}\right) dy \\ &= hS_\varrho(x+h) + \sum_{m=1}^{\varrho} \binom{\varrho}{m} (-1)^m \frac{\varrho}{m} \\ &\qquad\qquad \times \left(S_{\varrho+1}(x+h) - S_{\varrho+1}\left(x+\left(1-\frac{m}{\varrho}\right)h\right)\right) \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Nun folgt aus (82), (83) und (84):

$$|S_{\varrho+1}(y)| \leqslant c_5 y^{25/4+\varrho/2}, \; y \geqslant 1 \tag{94}$$

mit einem $c_5 > 0$. Da ferner

$$\sum_{m=1}^{\varrho} \left|\binom{\varrho}{m} (-1)^m \frac{\varrho}{m}\right| \leqslant \varrho 2^\varrho,$$

erhalten wir aus (91) bis (94):

$$B = \frac{k_2 \varrho^{-\varrho}}{\varrho+1} h^{\varrho+1} (x+h)^{23/4} \geqslant hS_\varrho(x+h) - c_5 \varrho 2^{\varrho+1} (x+h)^{25/4+\varrho/2},$$

und, wenn man $h = k_1 x^{1/2}$ sowie (90) einsetzt:

$$\begin{aligned} &\frac{k_2 \varrho^{-\varrho}}{\varrho+1} k_1^{\varrho+1} x^{(\varrho+1)/2} (x + k_1 x^{1/2})^{23/4} \\ &\qquad\qquad \geqslant k_1 x^{1/2} \frac{2^{1/2}}{4} c_\varrho (x + k_1 x^{1/2})^{23/4+\varrho/2} - c_5 \varrho 2^{\varrho+1} (x + k_1 x^{1/2})^{25/4+\varrho/2} \\ &\frac{k_2 k_1^{1+\varrho}}{\varrho^\varrho (1+\varrho)} \geqslant (1 + k_1 x^{-1/2})^{\varrho/2} \left(\frac{2^{1/2}}{4} c_\varrho k_1 - c_5 \varrho 2^{\varrho+1} (1 + k_1 x^{-1/2})\right) \\ &\qquad\qquad \geqslant \left(k_1 \left(\frac{2^{1/2}}{4} c_\varrho - c_5 \varrho 2^{\varrho+1} x^{-1/2}\right) - c_5 \varrho 2^{\varrho+1}\right). \end{aligned}$$

Falls man nun x_0 und damit x gross genug wählt, ergibt sich

$$\frac{k_2 k_1^{1+\varrho}}{\varrho^\varrho (1+\varrho)} \geqslant \left(\tfrac{1}{4} k_1 c_\varrho - c_5 \varrho 2^{\varrho+1}\right),$$

und weiter für genügend grosses k_1:

$$k_2 k_1^{1+\varrho} \geqslant \varrho^{\varrho}(\varrho+1).$$

Für jedes $x \geqslant x_0$ muss nun eine solche Ungleichung erfüllt sein, wobei ϱ eine der vier Zahlen $\varrho_0, \varrho_0+1, \varrho_0+2, \varrho_0+3$ sein muss. Also

$$k_2 \geqslant \min_{0 \leqslant j \leqslant 3} \frac{(\varrho_0+j)^{\varrho_0+1+j}}{k_1^{\varrho_0+1+j}} = c_4 > 0.$$

Somit ist die erste Ungleichung in Lemma 9 für $y \geqslant x_0$ mit $c_1 = k_1$, $c_2 = \frac{1}{2}c_4$ bewiesen. Wählt man nun c_1 noch einmal etwas grösser, so stimmt die Behauptung für alle $y \geqslant 1$. Die zweite Ungleichung wird gleich bewiesen.

KOROLLAR ZU SATZ 3.

$$\sum_{m \leqslant x} \frac{|\tau(m)|}{m^{25/4}} \geqslant c' \log x. \tag{95}$$

Beweis.

$$\sum_{m \leqslant x} \frac{|\tau(m)|}{m^{25/4}} = \frac{\sum_{m \leqslant x} |\tau(m)|}{x^{25/4}} + \frac{25}{4} \int_1^x \sum_{m \leqslant t} |\tau(m)|\, t^{-29/4}\, dt$$

$$\geqslant c + \frac{25}{4} c \int_1^x \frac{dt}{t} \geqslant c' \log x.$$

8. Der Beweis von Satz 2

Der Beweis von Satz 2 lässt sich nun wie der von Satz 1 durchführen. Es ist für $\operatorname{Re} s > 0$ (s. [19], Lemma 1, oder [7], (56)):

$$g_1(s) = \frac{1}{s} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m)\, e^{-sm^{1/2}} = B \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{(s^2 + 16\pi^2 m)^{25/2}}, \tag{96}$$

$$B = \Gamma(25/2)\, 2^{36} \pi^{23/2}.$$

Für $g_1(s)$ gelten zu Lemma 4 und 5 analoge Aussagen. Es sei $B_0 = B(8\pi)^{-25/2}$. Dann gilt:

$$\sigma^{25/2} g(\sigma \pm 4\pi m^{1/2} i) = B_0 e^{\pm i\pi/4} \frac{\tau(m)}{m^{25/4}} + O(\sigma y^{13/2})$$

$$\text{für} \quad 0 < \sigma < 1, \qquad 1 \leqslant m \leqslant Y.$$

Ferner

$$g(s) = O(\omega^{-25/2} k^{23/2}) \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} s > 0, |s| < k, k \geqslant 1,$$

$$|s \pm 4\pi m^{1/2} i| > \omega, \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Für $p_1, p_2, \ldots$ wählt man jetzt die Folge aller Primzahlen. Wie im vorigen Beweise definiert man anhand dieser Folge die Funktionen $\tilde{\eta}(x)$, $Q(x)$ und σ_x, ferner

$$\theta_x = \frac{23}{2} + \frac{1}{Q(x)}$$

und für reelles u

$$T_x(u) = \sum_{j=1}^{h} V(4\pi q_j^{1/2} u + \alpha_{q_j}),$$

mit

$$\alpha_q = -\frac{\pi}{4} \quad \text{für} \quad \tau(q) \geqslant 0$$

$$\alpha_q = +\tfrac{3}{4}\pi \quad \text{für} \quad \tau(q) < 0.$$

Mit

$$\gamma_x = \sup_{u>0} \frac{S(u^2)}{u^{\theta_x}}$$

erhält man dann nach gleicher Rechnung wie in Abschnitt 6:

$$\gamma_x \geqslant c \sum_{j=1}^{h} \frac{|\tau(q_j)|}{q_j^{25/4}},$$

$$S(u_x^2)\, u_x^{-\theta_x} \geqslant c_1 \sum_{j=1}^{h} \frac{|\tau(q_j)|}{q_j^{25/4}} = \prod_{p \leqslant x} \left(1 + \frac{|\tau(p)|}{p^{25/4}}\right)$$

$$\geqslant c_2 \sum_{m \leqslant x} \frac{|\tau(m)|}{m^{25/4}}.$$

wegen $\tau(mn)=\tau(m)\ \tau(n)$ für $(m,n)=1$ (s.[11], S.161). Für die letzte Ungleichung siehe den Beweis von Lemma 2 in [19].

Aus (95) folgt dann, mit $u_x\to\infty$ für $x\to\infty$:

$$S(u_x^2\ )\, u_x^{-23/2} \geqslant c_4 u_x^{1/Q(x)} \log x .$$

Falls nun $\log\log\log u_x \geqslant u_x^{1/Q(x)}$, gilt

$$\log u_x \leqslant Q(x) \log\log\log\log u_x = \exp\left(c_5 \frac{x}{\log x}\right) \log\log\log\log u_x$$

$$\log\log u_x \leqslant c_6 \frac{x}{\log x}$$

$$\log\log\log u_x \leqslant \log x \quad \text{für} \quad x > x_0 .$$

Also ist jedenfalls

$$\frac{S(u_x^2)}{u_x^{23/2}} \geqslant c_7 \log\log\log u_x ,$$

womit, wegen $u_x\to\infty$, Satz 2 für den Ω_+-Fall bewiesen ist. Dasselbe Verfahren führt zur Ω_--Behauptung.

REFERENZEN

[1] Berndt, B. C., *A note on the number of integral ideals of bounded norm in a quadratic number field*, Bull. Amer. Math. Soc. *75* (1969), 1283–85.

[2] Besicovitch, A. S., *On the linear independence of fractional powers of integers*, J. London Math. Soc. *15* (1940), 3–6.

[3] Bieberbach, L., *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, (Springer, Berlin, 1965).

[4] Chandrasekharan, K., *Introduction to Analytic Number Theory*, (Springer, Berlin, 1968).

[5] Chandrasekharan, K. and Raghavan Narasimhan, *Functional equations with multiple Gamma factors and the average order of arithmetical functions*. Ann. of Math. *76* (1962), 93–136.

[6] ——, *The approximate functional Equation for a class of zeta functions*. Math. Annalen *152* (1963), 30–64.

[7] ——, *Hecke's functional equation and arithmetical identities*, Ann. of Math. *74* (1961), 1–23.

[8] Corradi, K. und Katai, J., *Egy megieyzés K. S. Gangadharan "Two classical lattice point problems" cimü dolgozatahoz*, MTA III Osztaly Közleményei *17* (1967), 89–97.

[9] Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, (McGraw-Hill, New York, 1953).

[10] Gangadharan, K. S., *Two classical lattice point problems*, Proc. of the Cambr. Phil. Soc., *57* (1961), 699–721.

[11] Hardy, G. H., *Ramanujan*, (Cambridge, 1940).

[12] Hecke, E., *Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper*, Mathematische Werke, Göttingen, Vanderhoeck, 1959, 159–171.

[13] ——, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen* (Leipzig 1923).

[14] Holzer, L., *Zahlentheorie* (Teubner, Leipzig, 1958).