



Doctoral Thesis

{ Ω }-Sätze für zwei arithmetische Funktionen

Author(s):

Joris, Henri

Publication Date:

1972

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000153768> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Ω -Sätze für zwei arithmetische Funktionen

Abhandlung
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Mathematik
der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

HENRI JORIS

dipl. Math. ETH

geboren am 25.3.1942

von Orsières, Kanton Wallis

Angenommen auf Antrag von
Prof. K. CHANDRASEKHARAN, Referent
Prof. A. PFLUGER, Korreferent

Basel
Birkhäuser Verlag
1972

Es sei p eine Primzahl, m und k natürliche Zahlen, welche folgenden Bedingungen genügen: $1 \leq k < m$, $(k, p) = 1$. Ferner sei $f(x) = x^3 - mp x + kp$. Wegen $f(1) < 0$, $f(-1) > 0$ hat $f(x)$ drei reelle Nullstellen. Nach dem Kriterium von Eisenstein ist ausserdem $f(x)$ irreduzibel über \mathbf{Q} (s. [21], § 27); falls ξ eine Nullstelle von $f(x)$ ist, so ist $\mathbf{Q}(\xi)$ kubisch und total-reell.

7. Eine Ungleichung für $\sum_{m \leq x} |\tau(m)|$

Der Beweis von Satz 2 verläuft nach den gleichen Prinzipien wie jener von Satz 1. Man kennt aber kein Lemma 6 entsprechendes Ergebnis. Als Ersatz dient Formel (8) in Satz 3:

$$\sum_{m \leq x} |\tau(m)| > cx^{25/4} \quad \text{für } x \geq 1, \quad (79)$$

mit einem $c > 0$. Andererseits weiss man ([11], S.173), dass

$$\sum_{m \leq x} |\tau(m)| = O(x^{13/2}) \quad \text{für } x \geq 1. \quad (80)$$

Der Beweis von Satz 3 ergibt sich aus folgendem

LEMMA 9. *Es gibt zwei positive Zahlen c_1, c_2 derart, dass zu jedem $y \geq 1$ zwei reelle Zahlen y_1, y_2 existieren mit folgenden Eigenschaften:*

$$y \leq y_j \leq y + c_1 y^{1/2}, \quad j = 1, 2;$$

$$S(y_1) = \sum_{m \leq y_1} \tau(m) \geq c_2 y_1^{23/4},$$

$$S(y_2) = \sum_{m \leq y_2} \tau(m) \leq -c_2 y_2^{23/4}.$$

Daraus ergibt sich nun (79) folgendermassen: Es seien c_1 und c_2 die beiden Konstanten aus Lemma 9. Wir setzen

$$c_3 = \max\left(1, \frac{c_1^2}{4}\right),$$

$$y(k) = c_3 k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Es ist

$$y(k) \geq 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

ferner

$$y(k+1) - y(k) = 2c_3k + c_3 > 2c_3^{1/2}y(k)^{1/2} \geq c_1y(k)^{1/2}.$$

Dann folgt aus Lemma 9

$$\begin{aligned} \sum_{y(k) < m \leq y(k+1)} |\tau(m)| &\geq 2c_2y(k)^{23/4} \\ \sum_{m \leq x} |\tau(m)| &\geq \sum_{y(k+1) \leq x} \sum_{y(k) < m \leq y(k+1)} |\tau(m)| \\ &\geq \sum_{c_3(k+1)^2 \leq x} 2c_2c_3^{23/4}k^{23/2} \\ &\geq c_4 \sum_{k \leq c_5x^{1/2}} k^{23/2} \geq c_6x^{25/4}, \quad \text{w.z.b.w.} \end{aligned}$$

Beweis von Lemma 9 (vgl. [18]): Es sei für $\varrho \geq 0, x > 0$:

$$S_\varrho(x) = \sum_{m \leq x} \tau(m) (x - m)^\varrho \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)}.$$

Dann gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$S_{\varrho+1}(x) = \int_0^x S_\varrho(t) dt. \tag{81}$$

Ferner ist für $\varrho > 0$:

$$S_\varrho(x) = (2\pi)^{-\varrho} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{x}{m}\right)^{6+\varrho/2} \tau(m) J_{12+\varrho} \{4\pi(mx)^{1/2}\}, \tag{82}$$

wo J_ν die Besselsche Funktion erster Art ν -ter Ordnung ist, s.[7], (55). Nach [9], Bd. II, S.85, ist für $z \geq 1$:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} z^{-\frac{1}{2}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-3/4}). \tag{83}$$

Aus (80) folgt:

$$\sum_{m=1}^\infty \frac{|\tau(m)|}{m^7} = c_3 < \infty, \tag{84}$$

und daraus weiter

$$\sum_{m=2}^\infty |\tau(m)| m^{-25/4-\varrho/2} \leq c_3 2^{3/4-\varrho/2} \leq \frac{2^{1/2}}{8}, \tag{85}$$

falls $\varrho \geq \varrho_0$, wo ϱ_0 eine genügend grosse natürliche Zahl ist. Nun ist für $\varrho \geq 1$ wegen (82), (83) und (84):

$$\begin{aligned}
 S_\varrho(x) &= c_\varrho x^{23/4+\varrho/2} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^{25/4+\varrho/2}} \cos(4\pi(mx)^{1/2} - \frac{5}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\varrho) \right. \\
 &\quad \left. + O\left(x^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\tau(m)|}{m^{27/4+\varrho/2}}\right) \right\} \\
 &= c_\varrho x^{23/4+\varrho/2} \{U_\varrho(x) + R_\varrho(x)\},
 \end{aligned} \tag{86}$$

wo die c_ϱ positive, von ϱ abhängige Konstanten sind, und

$$R_\varrho(x) = O(x^{-1/2}). \tag{87}$$

Daraus ergeben sich die Ungleichungen

$$|R_\varrho(x)| \leq \frac{2^{1/2}}{8} \quad \text{für } x \geq x_0; \quad \varrho = \varrho_0, \varrho_0 + 1, \varrho_0 + 2, \varrho_0 + 3; \tag{88}$$

für ein bestimmtes $x_0 \geq 1$. Nun seien k_1, k_2 derart gewählt, dass für $x \geq x_0$ gelte

$$S(y) \leq k_2 y^{23/4} \quad \text{für } x \leq y \leq x + k_1 x^{1/2} = x + h. \tag{89}$$

Ich zeige, dass für ein gewisses grosses k_1 eine positive, von x nicht abhängige Konstante c_4 existiert, derart dass $k_2 \geq c_4 > 0$.

Unter den vier Zahlen $\varrho = \varrho_0, \varrho_0 + 1, \varrho_0 + 2, \varrho_0 + 3$ erfüllt bei gegebenem x sicher eine die Bedingung

$$\cos(4\pi(x+h)^{1/2} - \frac{5}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\varrho) \geq \frac{2^{1/2}}{2}.$$

Dann ist wegen (85), (86) und (88), und weil $\tau(1) = 1$:

$$\begin{aligned}
 S_\varrho(x+h) &= c_\varrho (x+h)^{23/4+\varrho/2} \left\{ \cos(4\pi(x+h)^{1/2} - \frac{5}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\varrho) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^{25/4+\varrho/2}} \cos(4\pi(m(x+h))^{1/2} - \frac{5}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\varrho) + R_\varrho(x) \right\} \\
 &\geq c_\varrho (x+h)^{23/4+\varrho/2} \left(\frac{1}{2} 2^{1/2} - \frac{2^{1/2}}{8} - \frac{2^{1/2}}{8} \right) \\
 &= \frac{2^{1/2}}{4} c_\varrho (x+h)^{23/4+\varrho/2}.
 \end{aligned} \tag{90}$$

Aus (89) folgt

$$S(y) \leq k_2(x+h)^{23/4} \quad \text{für } x \leq y \leq x+h.$$

Diese Ungleichung wird integriert:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_x^{x+h} dy \int_{x+h-(x+h-y)/e}^{x+h} dy_1 \times \\ &\times \int_{y_1-(x+h-y)/e}^{y_1} dy_2 \dots \int_{y_{e-1}-(x+h-y)/e}^{y_{e-1}} S(y_e) dy_e \\ &\leq B = k_2(x+h)^{23/4} \int_x^{x+h} dy \dots \int_{y_{e-1}-(x+h-y)/e}^{y_{e-1}} dy_e, \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

denn

$$\begin{aligned} x+h &\geq y_e \geq y_{e-1} - \frac{x+h-y}{e} \geq y_{e-2} - 2\frac{x+h-y}{e} \dots \geq y_1 - (e-1)\frac{x+h-y}{e} \\ &\geq x+h - e\frac{x+h-y}{e} = y \geq x. \end{aligned}$$

Für das Integral B gilt:

$$B = k_2(x+h)^{23/4} \int_x^{x+h} \left(\frac{x+h-y}{e}\right)^e dy = k_2(x+h)^{23/4} \left(\frac{h}{e}\right)^e \frac{h}{1+e}. \quad (92)$$

Für das Integral A gilt, wegen (81):

$$\begin{aligned} &\int_{y_{e-1}-(x+h-y)/e}^{y_{e-1}} S(y_e) dy_e = S_1(y_{e-1}) - S_1\left(y_{e-1} - \frac{x+h-y}{e}\right), \\ &\int_{y_{e-2}-(x+h-y)/e}^{y_{e-2}} dy_{e-1} \int_{y_{e-1}-(x+h-y)/e}^{y_{e-1}} S(y_e) dy_e \\ &= S_2(y_{e-2}) - 2S_2\left(y_{e-2} - \frac{x+h-y}{e}\right) + S_2\left(y_{e-2} - 2\frac{x+h-y}{e}\right) \end{aligned}$$

und so fort, bis

$$\begin{aligned}
 A &= \int_x^{x+h} \sum_{m=0}^e \binom{\varrho}{m} (-1)^m S_e \left(x + h - m \frac{x+h-y}{\varrho} \right) dy \\
 &= h S_e(x+h) + \sum_{m=1}^e \binom{\varrho}{m} (-1)^m \frac{\varrho}{m} \\
 &\quad \times \left(S_{e+1}(x+h) - S_{e+1} \left(x + \left(1 - \frac{m}{\varrho} \right) h \right) \right)
 \end{aligned} \tag{93}$$

Nun folgt aus (82), (83) und (84):

$$|S_{e+1}(y)| \leq c_5 y^{25/4+e/2}, \quad y \geq 1 \tag{94}$$

mit einem $c_5 > 0$. Da ferner

$$\sum_{m=1}^e \left| \binom{\varrho}{m} (-1)^m \frac{\varrho}{m} \right| \leq \varrho 2^e,$$

erhalten wir aus (91) bis (94):

$$B = \frac{k_2 \varrho^{-e}}{\varrho + 1} h^{e+1} (x+h)^{23/4} \geq h S_e(x+h) - c_5 \varrho 2^{e+1} (x+h)^{25/4+e/2},$$

und, wenn man $h = k_1 x^{1/2}$ sowie (90) einsetzt:

$$\begin{aligned}
 &\frac{k_2 \varrho^{-e}}{\varrho + 1} k_1^{e+1} x^{(e+1)/2} (x + k_1 x^{1/2})^{23/4} \\
 &\quad \geq k_1 x^{1/2} \frac{2^{1/2}}{4} c_e (x + k_1 x^{1/2})^{23/4+e/2} - c_5 \varrho 2^{e+1} (x + k_1 x^{1/2})^{25/4+e/2} \\
 &\frac{k_2 k_1^{1+e}}{\varrho^e (1 + \varrho)} \geq (1 + k_1 x^{-1/2})^{e/2} \left(\frac{2^{1/2}}{4} c_e k_1 - c_5 \varrho 2^{e+1} (1 + k_1 x^{-1/2}) \right) \\
 &\quad \geq \left(k_1 \left(\frac{2^{1/2}}{4} c_e - c_5 \varrho 2^{e+1} x^{-1/2} \right) - c_5 \varrho 2^{e+1} \right).
 \end{aligned}$$

Falls man nun x_0 und damit x gross genug wahlt, ergibt sich

$$\frac{k_2 k_1^{1+e}}{\varrho^e (1 + \varrho)} \geq (\frac{1}{4} k_1 c_e - c_5 \varrho 2^{e+1}),$$

und weiter für genügend grosses k_1 :

$$k_2 k_1^{1+q} \geq q^e (q + 1).$$

Für jedes $x \geq x_0$ muss nun eine solche Ungleichung erfüllt sein, wobei q eine der vier Zahlen $q_0, q_0 + 1, q_0 + 2, q_0 + 3$ sein muss. Also

$$k_2 \geq \min_{0 \leq j \leq 3} \frac{(q_0 + j)^{q_0 + 1 + j}}{k_1^{q_0 + 1 + j}} = c_4 > 0.$$

Somit ist die erste Ungleichung in Lemma 9 für $y \geq x_0$ mit $c_1 = k_1, c_2 = \frac{1}{2}c_4$ bewiesen. Wählt man nun c_1 noch einmal etwas grösser, so stimmt die Behauptung für alle $y \geq 1$. Die zweite Ungleichung wird gleich bewiesen.

KOROLLAR ZU SATZ 3.

$$\sum_{m \leq x} \frac{|\tau(m)|}{m^{25/4}} \geq c' \log x. \tag{95}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq x} \frac{|\tau(m)|}{m^{25/4}} &= \frac{\sum_{m \leq x} |\tau(m)|}{x^{25/4}} + \frac{25}{4} \int_1^x \sum_{m \leq t} |\tau(m)| t^{-29/4} dt \\ &\geq c + \frac{25}{4} c \int_1^x \frac{dt}{t} \geq c' \log x. \end{aligned}$$

8. Der Beweis von Satz 2

Der Beweis von Satz 2 lässt sich nun wie der von Satz 1 durchführen. Es ist für $\text{Re } s > 0$ (s.[19], Lemma 1, oder [7], (56)):

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \frac{1}{s} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) e^{-sm^{1/2}} = B \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{(s^2 + 16\pi^2 m)^{25/2}}, \tag{96} \\ B &= \Gamma(25/2) 2^{36} \pi^{23/2}. \end{aligned}$$

Für $g_1(s)$ gelten zu Lemma 4 und 5 analoge Aussagen. Es sei $B_0 = B(8\pi)^{-25/2}$. Dann

gilt:

$$\sigma^{25/2} g(\sigma \pm 4\pi m^{1/2} i) = B_0 e^{\pm i\pi/4} \frac{\tau(m)}{m^{25/4}} + O(\sigma y^{13/2})$$

$$\text{für } 0 < \sigma < 1, \quad 1 \leq m \leq Y.$$

Ferner

$$g(s) = O(\omega^{-25/2} k^{23/2}) \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 0, |s| < k, k \geq 1,$$

$$|s \pm 4\pi m^{1/2} i| > \omega, \quad m = 1, 2, \dots$$

Für p_1, p_2, \dots wählt man jetzt die Folge aller Primzahlen. Wie im vorigen Beweise definiert man anhand dieser Folge die Funktionen $\tilde{\eta}(x)$, $Q(x)$ und σ_x , ferner

$$\theta_x = \frac{23}{2} + \frac{1}{Q(x)}$$

und für reelles u

$$T_x(u) = \sum_{j=1}^h V(4\pi q_j^{1/2} u + \alpha_{q_j}),$$

mit

$$\alpha_q = -\frac{\pi}{4} \quad \text{für } \tau(q) \geq 0$$

$$\alpha_q = +\frac{3}{4}\pi \quad \text{für } \tau(q) < 0.$$

Mit

$$\gamma_x = \sup_{u > 0} \frac{S(u^2)}{u^{\theta_x}}$$

erhält man dann nach gleicher Rechnung wie in Abschnitt 6:

$$\begin{aligned} \gamma_x &\geq c \sum_{j=1}^h \frac{|\tau(q_j)|}{q_j^{25/4}}, \\ S(u_x^2) u_x^{-\theta_x} &\geq c_1 \sum_{j=1}^h \frac{|\tau(q_j)|}{q_j^{25/4}} = \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{|\tau(p)|}{p^{25/4}} \right) \\ &\geq c_2 \sum_{m \leq x} \frac{|\tau(m)|}{m^{25/4}}. \end{aligned}$$

wegen $\tau(mn) = \tau(m) \tau(n)$ für $(m, n) = 1$ (s. [11], S.161). Für die letzte Ungleichung siehe den Beweis von Lemma 2 in [19].

Aus (95) folgt dann, mit $u_x \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$:

$$S(u_x^2) u_x^{-23/2} \geq c_4 u_x^{1/Q(x)} \log x.$$

Falls nun $\log \log \log u_x \geq u_x^{1/Q(x)}$, gilt

$$\log u_x \leq Q(x) \log \log \log \log u_x = \exp\left(c_5 \frac{x}{\log x}\right) \log \log \log \log u_x$$

$$\log \log u_x \leq c_6 \frac{x}{\log x}$$

$$\log \log \log u_x \leq \log x \quad \text{für } x > x_0.$$

Also ist jedenfalls

$$\frac{S(u_x^2)}{u_x^{23/2}} \geq c_7 \log \log \log u_x,$$

womit, wegen $u_x \rightarrow \infty$, Satz 2 für den Ω_+ -Fall bewiesen ist. Dasselbe Verfahren führt zur Ω_- -Behauptung.

REFERENZEN

- [1] BERNDT, B. C., *A note on the number of integral ideals of bounded norm in a quadratic number field*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 1283–85.
- [2] BESICOVITCH, A. S., *On the linear independence of fractional powers of integers*, J. London Math. Soc. 15 (1940), 3–6.
- [3] BIEBERBACH, L., *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, (Springer, Berlin, 1965).
- [4] CHANDRASEKHARAN, K., *Introduction to Analytic Number Theory*, (Springer, Berlin, 1968).
- [5] CHANDRASEKHARAN, K. and RAGHAVAN NARASIMHAN, *Functional equations with multiple Gamma factors and the average order of arithmetical functions*. Ann. of Math. 76 (1962), 93–136.
- [6] ———, *The approximate functional Equation for a class of zeta functions*. Math. Annalen 152 (1963), 30–64.
- [7] ———, *Hecke's functional equation and arithmetical identities*, Ann. of Math. 74 (1961), 1–23.
- [8] CORRADI, K. und KATAI, J., *Egy megjeyzés K. S. Gangadharan "Two classical lattice point problems" című dolgozatahoz*, MTA III Osztály Közleményei 17 (1967), 89–97.
- [9] ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI, *Higher Transcendental Functions*, (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [10] GANGADHARAN, K. S., *Two classical lattice point problems*, Proc. of the Cambr. Phil. Soc., 57 (1961), 699–721.
- [11] HARDY, G. H., *Ramanujan*, (Cambridge, 1940).
- [12] HECKE, E., *Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper*, Mathematische Werke, Göttingen, Vanderhoeck, 1959, 159–171.
- [13] ———, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen* (Leipzig 1923).
- [14] HOLZER, L., *Zahlentheorie* (Teubner, Leipzig, 1958).