Diss. ETH 6216

Robuste Kovarianz

ABHANDLUNG

zur Erlangung
des Titels eines Doktors der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

HANSPETER SCHÖNHOLZER
Dipl. Math. ETH
geboren am 14. März 1937
von Istighofen (TG)

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. P.J. Huber, Referent
Prof. Dr. F.R. Hampel, Korreferent

1979

Kurzfassung

Es seien $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ Stichproben einer p-dimensionalen Verteilung P. Ziel dieser Arbeit ist, aus den Stichproben (noch zu definierende) Orts- und Formparameter der Verteilung P zu schätzen. Diese Parameter sind ein p-dimensionaler Vektor $\underline{t}$ und eine symmetrische pxp-Matrix C. Sie sind Verallgemeinerungen des klassischen Erwartungswertvektors und der Kovarianzmatrix. Die Schätzung $(\hat{\underline{t}}, \hat{C})$ von $(\underline{t}, C)$ ist affin invariant; sie ist definiert als Lösung $(\hat{\underline{t}}, \hat{C})$ des Gleichungssystems

(1) $\quad \mathrm{ave}[w(|\underline{y}|)\underline{y}] = \underline{0},$

(2) $\quad \mathrm{ave}[(u(|\underline{y}|)/|\underline{y}|^2)\underline{y}\underline{y}^T - v(|\underline{y}|)I] = O,$

mit $\underline{y} = V(\underline{x}-\underline{t})$ und $C = (V^TV)^{-1}$. I ist die Einheits-, O die Nullmatrix; w, u und v sind gegebene reellwertige Funktionen. ave[...] bedeutet das arithmetische Mittel über die Beobachtungen. Führt man die entsprechende Mittelung über die wahre Verteilung P aus (ave[...] steht dann für den Erwartungswert E[...]), dann definiert die Lösung von (1)-(2) den durch $(\hat{\underline{t}}, \hat{C})$ geschätzten Parameter $(\underline{t}, C)$.

Es werden Bedingungen für P, w, u und v gegeben, unter denen

(i) die Gleichung (2) für festes $\underline{t}$ eine eindeutige Lösung hat,

(ii) das System (1)-(2) eine eindeutige Lösung hat,

(iii) die aus (1)-(2) gewonnenen Schätzungen konsistent und asymptotisch normal sind.

Die vorliegende Arbeit erweitert die Resultate von R.Maronna (1976) einerseits auf eine breitere Klasse von Funktionen w, u und v und anderseits auf Verteilungen, die in einer Prokhorov-

Umgebung einer radialen Verteilung liegen. Die Verallgemeinerung ist von Interesse, nicht zuletzt deshalb, weil P.Huber (1977) in der Familie der ϵ-contaminierten, p-dimensionalen Normalverteilungen ungünstigste Verteilungen für $\underline{t}$ und für C bestimmt hat. Die dazugehörige Maximum- Likelihood-Schätzung für C (bei konstantem $\underline{t}$) erscheint dann als Lösung von (2) mit $v \equiv 1$ und einer Funktion u, welche unsere Bedingungen, nicht aber diejenigen Maronna's, erfüllt.

Abstract

This paper deals with the estimation of location- and shape parameter (both still to be defined), from a sample $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ of a p-variate distribution P. These parameters are a p-variate Vector $\underline{t}$ and a symmetric pxp-Matrix C and are generalizations of the classical mean vector and of the covariance matrix. Our estimate $(\hat{\underline{t}}, \hat{C})$ of $(\underline{t}, C)$ is affinely invariant and is defined trough the solution $(\hat{\underline{t}}, \hat{C})$ of a system of equations of the form

(1) $\mathrm{ave}[w(|\underline{y}|)\underline{y}] = \underline{0},$

(2) $\mathrm{ave}[(u(|\underline{y}|)/|\underline{y}|^2)\underline{y}\underline{y}^T - v(|\underline{y}|)I] = O,$

where $\underline{y} = V(\underline{x}-\underline{t})$ and $C = (V^T V)^{-1}$. I denotes the identity matrix, O the null matrix, and w, u, and v are real valued functions. ave[...] denotes the arithmetic mean taken over the $\underline{x}$-sample. If the average is taken with respect to the true distribution P - ave[...] denoting the expectation operator E[...] - then the solution of (1)-(2) defines the parameter $(\underline{t}, C)$ estimated by $(\hat{\underline{t}}, \hat{C})$.

Conditions concerning the distribution P, and the functions w, u, and v are stated, for which will be shown that

(i) equation (2) has a unique solution for a fixed $\underline{t}$,

(ii) system (1)-(2) has a unique solution, and

(iii) the estimators resultig from (1)-(2) are consistent and asymptotically normal.

These results generalize R.Maronna's (1976) paper in two respects: firstly, for a larger class of functions w, u, and v, and secondly, for distributions contained in a Prokhorov-neigh-

borhood of a radial measure. The generalization is of interest, particulary with respect to the least informative distribution of C determined by P.Huber (1977) for the family of ϵ-contaminated p-variate normal distributions. The associated maximum likelihood estimator of C for given $\underline{t}$ is obtained as solution of (2) for $v \equiv 1$ and a function u, fulfilling our conditions but not those of R.Maronna.

References

Huber,P.J.(1977): Robust Covariances. Statistical decision theory and related topics,II, Academic Press, New York.

Maronna,R.A.(1976): Robust M-Estimators of Multivariate Location and Scatter. Ann. Statist., Vol.4,No.1,51-67.