Prom. Nr. 3105

Regularitätseigenschaften der Streuamplitude im Fall der Potentialstreuung

Von der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften
genehmigte

PROMOTIONSARBEIT

vorgelegt von

WALTER HUNZIKER
dipl. Phys. ETH
von Gontenschwil und Aarau

Referent: Herr Prof. Dr. R. Jost
Korreferent: Herr Prof. Dr. M. Fierz

Basel
Buchdruckerei Birkhäuser AG.
1961

Sonderabdruck aus Helvetica Physica Acta, 34. Jahrgang, Nr. 6/7 (1961)

Regularitätseigenschaften der Streuamplitude im Fall der Potentialstreuung

Einleitung

Im Zusammenhang mit den Dispersionsrelationen und den Mandelstamschen Darstellungen haben verschiedene Autoren am Beispiel der Potentialstreuung die Frage untersucht, wie weit sich die Streuamplitude zu komplexen Werten der Streuparameter analytisch fortsetzen lasse. In einer grossen Zahl von Arbeiten zu diesem Thema wurden die analytischen Eigenschaften der Partialwellen diskutiert[11]), aber aus den Ergebnissen kann man nicht leicht Schlüsse ziehen über das Verhalten der ganzen Streuamplitude. Zur Untersuchung dieser Grösse ist es zweckmässiger, wenn man die Wellengleichung nicht separiert. Die Integralgleichung (Streugleichung), die sich in diesem Fall ergibt, wurde von JOST und PAIS[12]) mit Hilfe der Fredholmschen Formeln gelöst. Auf Grund dieser Lösung haben einige Autoren Regularitätseigenschaften der Streuamplitude hergeleitet[13–18]).

In der vorliegenden Arbeit gehen wir einen andern Weg. Wir fassen die Streugleichung auf als Funktionalgleichung im Raum der stetigen und beschränkten Funktionen. Der Integraloperator GV, der in der Streugleichung auftritt, erweist sich dann als vollstetig und als analytische Funktion der Energie. Indem wir diese Eigenschaften ausnützen, erhalten wir alle Informationen über die Wellenfunktion, die wir zur Diskussion der Streuamplitude brauchen. Es wird gezeigt, dass die Streuamplitude regulär ist in den Variablen Energie und Impulsübertrag in einem Gebiet, das die bisher bekannten Regularitätsgebiete als Spezialfälle enthält. Wir beschränken die Untersuchung auf die Schrödingergleichung. Die Methoden sind aber auch anwendbar im Fall der Dirac- oder der Klein-Gordon-Gleichung, was wir gelegentlich andeuten.

Ich danke meinem Lehrer, Herrn Professor R. JOST, für die Anregung zu dieser Arbeit und für die freundliche Unterstützung, die er mir während der Ausführung gewährte.

1. Die Schrödingergleichung

Die Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m in einem Potentialfeld lautet:

$$(\Delta + k^2)\,\psi = V\,\psi\,. \tag{1}$$

k^2 und V stehen für die mit $2\,m/\hbar^2$ multiplizierte totale resp. potentielle Energie und haben die Dimension (Länge)$^{-2}$. Im Fall des 2-Teilchenproblems gilt (1) im Schwerpunktssystem, wenn man für m die reduzierte Masse setzt.

Wir suchen die Lösung von (1) im Raum C der stetigen und beschränkten Funktionen $\psi(\mathbf{x})$. Als Norm von ψ definieren wir:

$$\|\psi\| = \sup_{\boldsymbol{x}} |\psi(\boldsymbol{x})|\,. \tag{2}$$

Eine wichtige Eigenschaft von C ist die Vollständigkeit, das heisst die Gültigkeit des Cauchyschen Konvergenzkriteriums:

> ψ_n sei eine Folge in C. Falls $\|\psi_n - \psi_m\|$ gegen Null strebt, wenn n und m simultan gegen Unendlich wachsen, so gibt es ein $\psi \in C$ derart, dass
>
> $$\lim_{n\to\infty} \|\psi - \psi_n\| = 0\,. \tag{3}$$

Diese Konvergenz im Sinne der Norm bedeutet in unserem Fall gleichmässige Konvergenz; wir bezeichnen sie im folgenden mit einem Pfeil. Vollständige Normierte Vektorräume pflegt man als Banachsche Räume zu bezeichnen[1]).

Der Δ-Operator sei zunächst nur auf dem Teilraum D_2 derjenigen Funktionen $\varphi(\mathbf{x})$ definiert, die zweimal stetig differenzierbar sind und für welche

$$\Delta\varphi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{dy^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi$$

beschränkt ist.

Diesen Operator setzen wir fort durch Abschliessung: Falls $\varphi_n \to \psi$, $\varphi_n \in D_2$ und $\Delta\varphi_n \to \mu$, so definieren wir

$$\Delta\psi \equiv \mu\,. \tag{4}$$

Den so erweiterten Definitionsbereich von Δ nennen wir D. Die Elemente von D sind stetig differenzierbare Funktionen, und ihre Ableitungen gehören zu C (siehe Appendix I).

Die Schrödingergleichung fassen wir auf als Funktionalgleichung in C: ψ soll zu D gehören, und es soll (1) gelten. Über das Potential setzen wir vorläufig voraus, dass

$$V(\boldsymbol{x}) \in C \qquad (x = |\boldsymbol{x}|) \tag{5}$$
$$\lim_{x \to \infty} V(\boldsymbol{x}) = 0 .$$

Allgemeinere Fälle betrachten wir später. Multiplikation mit V ist eine Operation, die C in C abbildet.

Die Schrödingergleichung ist ein Eigenwertproblem für den Parameter $E = k^2$, der in der ganzen komplexen Ebene variieren soll. k selber beschränken wir auf die Halbebene Im $k \geqslant 0$. Für reelle $k > 0$ soll die Lösung von (1) ein Streuexperiment beschreiben. Wir stellen daher die zusätzliche Forderung, dass sich diese Lösung in grosser Entfernung vom Streuzentrum verhält wie eine ebene Welle plus eine auslaufende Kugelwelle:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} + \varphi(\boldsymbol{x}) ,$$
$$\lim_{x \to \infty} \varphi(\boldsymbol{x}) = 0 ,$$
$$\lim_{x \to \infty} x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\, k\, \varphi\right) = 0 .$$

Wie sich zeigen wird, machen diese Bedingungen die Lösung eindeutig.

2. Die Streugleichung

Über $V(\boldsymbol{x})$ setzen wir weiter folgendes voraus:

$$|V(\boldsymbol{x})| < F(x) ,$$
$$\int_0^\infty x\, F(x)\, dx < \infty . \tag{6}$$

Mit Hilfe der Greenschen Funktion

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$$

können wir dann das Problem als Integralgleichung stellen. Das geschieht in der üblichen Weise, indem man um den Punkt $\boldsymbol{x}$ zwei Kugeln K_r, K_R mit Radien r, R ($r < R$) legt und auf das Zwischengebiet V den Greenschen Satz anwendet (siehe Appendix I):

$$\int_{\partial V} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n}\right) dO = \int_V (G\, \Delta u - u\, \Delta G)\, d^3y = \int_V G V\, \psi\, d^3y ,$$
$$(\partial V = \text{Rand von } V)$$

mit $u = \psi$, falls Im $k > 0$ und $u = \varphi$ für relle k. Das Volumenintegral konvergiert absolut, wenn man es über den ganzen Raum erstreckt:

$$\int |GV\psi|\, d^3y < \|\psi\| \int_0^\infty dy\, y^2\, F(y)\, \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\Omega}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,.$$

Allgemein gilt:

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega\, f(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) = \frac{1}{2\,x\,y} \int_{|x-y|}^{x+y} r\, f(r)\, dr\,, \quad \text{also:} \tag{7}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega\, \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} = \text{Min}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \leq \frac{1}{y} \quad \text{und} \tag{8}$$

$$\int |GV\psi|\, d^3y < \|\psi\| \int_0^\infty dy\, y\, F(y) < \infty\,. \tag{9}$$

Die Grenzübergänge $R \to \infty$, $r \to 0$ lassen sich nach dem unter (4) Bemerkten auch für die Oberflächenintegrale leicht ausführen. Man findet als Resultat:

$$\text{Im } k > 0: \quad \psi(\boldsymbol{x}) = \qquad - \frac{1}{4\pi} \int d^3y\, \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, V(\boldsymbol{y})\, \psi(\boldsymbol{y})\,, \tag{10}$$

$$\text{Im } k = 0: \quad \psi(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} - \frac{1}{4\pi} \int d^3y\, \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, V(\boldsymbol{y})\, \psi(\boldsymbol{y})\,. \tag{11}$$

Als Funktionalgleichungen in C schreiben wir diese Gleichungen kurz

$$\psi = GV\,\psi\,, \tag{12}$$

$$\psi = \psi_0 + GV\,\psi\,, \tag{13}$$

wobei $GV(k)$ ein Integraloperator ist, der von der Variablen k abhängt. Wir nennen (10) die homogene, (11) die inhomogene Streugleichung.

Im relativistischen Fall ist $k^2 = E^2 - m^2$, und die Gleichungen (10) und (11) gelten unverändert, wenn man $V(\boldsymbol{x})$ durch einen Ausdruck $U(\boldsymbol{x})$ ersetzt:

$$U = 2\,EV - V^2 \qquad \text{(Klein-Gordon-Gleichung)}\,,$$

$$U = 2\,EV - V^2 - i\,\alpha_k\, \frac{\partial V}{\partial x_k} \qquad \text{(Dirac-Gleichung)}\,.$$

Im zweiten Fall ist U eine 4×4-Matrix, die α_k sind die Diracschen Matrizen[15]). Das Folgende gilt im wesentlichen unverändert auch im relativistischen Fall, wenn man nur $U(\boldsymbol{x})$ den Bedingungen unterwirft, die wir für $V(\boldsymbol{x})$ stellen.

3. Diskussion der Streugleichung

Für die Zwecke dieses Abschnittes genügen die folgenden Voraussetzungen:

$V(\mathbf{x})$ soll messbar sein und majorisiert durch eine Funktion $F(\mathbf{x})$, für welche $xF(x)$ im Intervall $0 < x < \infty$ summierbar ist. (14)

Für alle $\psi \in C$ und alle k in $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ gilt dann die Ungleichung (9), oder, in der Schreibweise (12):

$$\| GV\psi \| < \|\psi\| \int_0^\infty x\, F(x)\, dx\,.$$

Das bedeutet, dass der Operator GV beschränkt ist: er besitzt eine endliche Norm im Sinne von

$$|GV| = \sup_{\|\psi\|=1} \| GV\psi \|\,, \tag{15}$$

und es gilt

$$|GV(k)| < \int_0^\infty x\, F(x)\, dx \tag{16}$$

für alle k in $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Wenn die (dimensionslose) rechte Seite von (16) kleiner ist als 1, so ist die inhomogene Gleichung (11) für alle $\psi_0 \in C$ durch Iteration lösbar, während die homogene Gleichung (10) nur die triviale Lösung besitzen kann. In der Sprache der Wellenmechanik heisst das, dass die Bornsche Reihe für alle Energien konvergiert und dass es keine gebundenen Zustände gibt.

Der Operator GV ist aber nicht nur beschränkt, sondern sogar vollstetig[2]) für alle k in $\operatorname{Im} k \geqslant 0$. Das bedeutet, dass GV jede beschränkte Menge von C in eine kompakte Menge abbildet. Wir verschieben den Beweis auf später und ziehen zuerst einige Folgerungen:

Für jede Funktionalgleichung der Art (13) in einem Normierten Vektorraum gilt, falls der Operator GV vollstetig ist, die Fredholmsche Alternative[3]):

– Entweder existiert die Resolvente
$R = (1 - GV)^{-1}, \quad |R| < \infty,$ (17)
– oder die homogene Gleichung (12) besitzt eine nichttriviale Lösung.

Entsprechend zerfällt die Halbebene $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ in zwei komplementäre Teile: in die Resolventenmenge, welche diejenigen k-Werte umfasst, für die die erste Alternative zutrifft, und in das Spektrum, das aus den k-Eigenwerten des Operators GV besteht. Die Fredholmsche Alternative weist einen Weg, auf dem man Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (13) beweisen kann: Man hat nur zu zeigen, dass das Spektrum keine reellen Punkte enthält.

Den Beweis der Vollstetigkeit führen wir zuerst für die folgenden speziellen Potentiale:

$$|V(\mathbf{x})| < M ,$$
$$V(x) \equiv 0 \quad \text{für} \quad x > R . \tag{18}$$

Wir haben zu zeigen, dass die Menge

$$E = \{\varphi \mid \varphi = GV\,\psi, \|\psi\| < 1\}$$

kompakt ist. Hinreichend dafür sind die folgenden Bedingungen[4]): Alle $\varphi(\mathbf{x}) \in E$ sollen (a) gleich beschränkt, (b) gleichgradig stetig und (c) gleich majorisiert sein durch eine Funktion $f(x)$, für welche

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 .$$

(a) ist trivialerweise erfüllt, da GV beschränkt ist. (c) ergibt sich, wenn man in (8) Min (x^{-1}, y^{-1}) durch x^{-1} abschätzt, es folgt dann:

$$|\varphi(\mathbf{x})| < \frac{M\,R^3}{3\,x} \equiv f(x) .$$

Zum Beweis von (b) benützen wir den Hilfssatz (20a). Danach sind alle $\varphi\,(\mathbf{x}) \in E$ stetig differenzierbar, und ihre Ableitungen dürfen durch Differentiation unter dem Integral gebildet werden. So findet man, dass für alle $\varphi \in E$ und alle $\mathbf{x}$ eine Ungleichung der folgenden Art gilt:

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| < (1 + |k|)\,N .$$

N ist eine Konstante, die nur von M und R abhängt. Das ist aber weit mehr als nur gleichgradige Stetigkeit. Für Potentiale der Art (18) ist damit die Vollstetigkeit von GV bewiesen.

Nun benützen wir die Tatsache, dass der Grenzwert einer (bezüglich der Norm) konvergenten Folge vollstetiger Operatoren wieder vollstetig ist. Zu einem gegebenen Potential, V, das den am Anfang dieses Abschnitts gestellten Voraussetzungen genügt, bilden wir die Folge V_n gemäss Appendix II. Nach dem eben bewiesenen ist GV_n vollstetig. Das gleiche gilt daher für GV, da ja

$$\lim_{n\to\infty} |GV - GV_n| = 0 . \tag{19}$$

4. Streugleichung – Schrödingergleichung

Wir wollen beweisen, dass die Lösungen der Streugleichung auch die Schrödingergleichung lösen. Es gilt der folgende Hilfssatz:

$V(\boldsymbol{x})$ sei eine summierbare Funktion mit den Eigenschaften: $|V(\boldsymbol{x})| < M$ und $V(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ für $x > R$. Dann ist für jedes $\psi \in C$ (20a)

$$\varphi = GV\,\psi$$

eine stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitungen durch Differentiation unter dem Integral gebildet werden dürfen.

Falls $V(\boldsymbol{x})$ und $\psi(\boldsymbol{x})$ ausserdem noch stetig differenzierbar sind, so ist $\varphi(\boldsymbol{x})$ zweimal stetig differenzierbar, und es gilt überall: (20b)

$$(\Delta + k^2)\,\varphi = V\,\psi\,.$$

Wir verzichten auf einen Beweis dieses Satzes, da er völlig gleich verläuft wie derjenige eines analogen Satzes der Potentialtheorie[5]).

Falls $V(\boldsymbol{x})$ lediglich den Voraussetzungen (5) und (6) genügt, so können wir die in (19) auftretende Folge V_n derart wählen, dass die Funktionen $V_n(\boldsymbol{x})$ alle Bedingungen des Hilfssatzes (20) erfüllen und überdies gleichmässig gegen $V(\boldsymbol{x})$ konvergieren (siehe Appendix II). Es sei nun ψ eine Lösung der homogenen oder inhomogenen Streugleichung: $\psi = \psi_0 + GV\psi$, $\psi_0 = 0$ oder $\psi_0 = \exp(i\,\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{x})$. Wir definieren:

$$\psi_n = \psi_0 + GV_n\,\psi\,,$$

$$\phi_n = \psi_0 + GV_n\,\psi_n\,.$$

Aus (20a) folgt, dass ψ_n stetig differenzierbar ist. Somit ist nach (20b) ϕ_n sogar zweimal stetig differenzierbar, und es gilt überall:

$$(\Delta + k^2)\,\phi_n = V_n\,\psi_n\,.$$

Die Folge ϕ_n hat daher die folgenden Eigenschaften:

$$\phi_n \to \psi,\ \ \phi_n \in D_2 \quad \text{und}$$

$$\Delta\phi_n \to V\psi - k^2\,\psi\,.$$

Nach der Definition (4) gehört also ψ zu D und es gilt

$$(\Delta + k^2)\,\psi = V\,\psi\,.$$

5. Das Verhalten der Lösungen in grosser Entfernung vom Streuzentrum

Soweit nichts anderes bemerkt ist, machen wir über $V(\boldsymbol{x})$ nur die Voraussetzung (14). Zuerst betrachten wir wieder ein abbrechendes Potential:

$$V(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \quad \text{für} \quad x > R\,. \tag{21}$$

ψ sei ein Element von C. Wir definieren:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3y\,\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,V(\boldsymbol{y})\,\psi(\boldsymbol{y})\,, \tag{22}$$

$$\varphi^{\infty}(\boldsymbol{x}) = \frac{e^{ikx}}{x}\,\frac{-1}{4\pi}\int d^3y\,e^{-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{y}}\,V(\boldsymbol{y})\,\psi(\boldsymbol{y})$$

$$\equiv \frac{e^{ikx}}{x}\,f(\vartheta,\varphi)\,, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{k}' = k\,\frac{\boldsymbol{x}}{x}\,,\quad (\vartheta,\varphi) = \text{Polarwinkel von } \boldsymbol{x}\,.$$

Wir wollen die Differenz $(\varphi - \varphi^{\infty})$ abschätzen im Gebiet $x > R$. Zu diesem Zweck entwickeln wir $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ im Nenner von (22) bis zu Gliedern zweiter, im Exponenten bis zu Gliedern dritter Ordnung in $\boldsymbol{y}$. So ergibt sich:

$$A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} - \frac{e^{ikx}}{x}\,e^{-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{y}}\,,$$

$$= \frac{e^{ikx-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\left[e^{\frac{ik}{2\xi}\left(y^2-\frac{(\boldsymbol{y}\boldsymbol{\xi})^2}{\xi^2}\right)} - 1 + \frac{\boldsymbol{y}\boldsymbol{\eta}}{x\,\eta}\right].$$

Dabei bedeuten $\boldsymbol{\xi}$ und $\boldsymbol{\eta}$ Mittelwerte von $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ aus dem Bereich $y \leqslant R$. Es ist

$$0 \leq y^2 - \frac{(\boldsymbol{y}\boldsymbol{\xi})^2}{\xi^2} \leq y^2 \leq R^2\,,$$

$$|e^z - 1| \leq |z| \quad \text{für} \quad Re\,z \leq 0\,.$$

Somit gilt für $\alpha \equiv \operatorname{Im} k \geqslant 0$:

$$|A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leq \frac{e^{-\alpha(x-R)}}{x-R}\left(\frac{|k|\,R^2}{2\,(x-R)} + \frac{R}{x}\right),$$

$$\leq \frac{e^{-\alpha(x-R)}}{2\,(x-R)^2}\,(|k|\,R^2 + 2\,R)\,.$$

Für die Differenz $(\varphi - \varphi^{\infty})$ findet man damit die folgende Ungleichung:

$$|\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi^{\infty}(\boldsymbol{x})| \leq \frac{e^{-\alpha(x-R)}}{2(x-R)^2} (|k| R^2 + 2R) \frac{1}{4\pi} \int d^3y\, F(y)\, |\psi(\boldsymbol{y})| . \tag{24}$$

(für alle $x > R$ und $\alpha \equiv \operatorname{Im} k \geqslant 0$)

Eine zweite Ungleichung betrifft die erste radiale Ableitung von $\varphi(\boldsymbol{x})$. Für $x > R$ darf man φ unter dem Integral differenzieren, und es ergibt sich in gleicher Weise:

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i k \varphi \right| \leq \frac{e^{-\alpha(x-R)}}{(x-R)^2} (2|k| R + 1) \frac{1}{4\pi} \int d^3y\, F(y)\, |\psi(\boldsymbol{y})| . \tag{25}$$

(für alle $x > R$ und $\alpha \equiv \operatorname{Im} k \geqslant 0$)

Wir lassen nun die Voraussetzung (21) fallen und untersuchen zuerst das asymptotische Verhalten der Lösungen der inhomogenen Streugleichung für reelle k. Zusätzlich zu (14) verlangen wir:

$$\int_0^{\infty} x^2 F(x)\, dx < \infty . \tag{26}$$

Dann existiert $\varphi^{\infty}(\boldsymbol{x})$. Wir führen ein R ein, das in einer später präzisierten Weise so von x abhängen soll, dass stets $R(x) < x$. $V(\boldsymbol{y})$ zerlegen wir in ein abbrechendes Potential $V_R(\boldsymbol{y})$ und einen Rest $\tilde{V}(\boldsymbol{y})$:

$$V_R(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} V(\boldsymbol{y}) & \text{für} \quad y < R \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases},$$

$$\tilde{V}(\boldsymbol{y}) = V(\boldsymbol{y}) - V_R(\boldsymbol{y}) . \tag{27}$$

Wenn man diese Zerlegung in (22) und (23) einsetzt, so zerfallen auch φ und φ^{∞} in zwei Terme:

$$\varphi = \varphi_R + \tilde{\varphi} ,$$

$$\varphi^{\infty} = \varphi_R^{\infty} + \tilde{\varphi}^{\infty} .$$

Es gilt:

$$|\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x})| < \frac{\|\psi\|}{x} \int_{R(x)}^{\infty} y^2 F(y)\, dy \qquad (\text{s. } 8) , \tag{28}$$

$$|\tilde{\varphi}^{\infty}(\boldsymbol{x})| < \frac{\|\psi\|}{x} \int_{R(x)}^{\infty} y^2 F(y)\, dy \qquad (\text{s. } 23) , \tag{29}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\,|\varphi - \varphi^\infty| \leq \lim_{x\to\infty} x\,|\varphi_R - \varphi_R^\infty|\,,$$
$$+ \lim_{x\to\infty} x\,|\tilde{\varphi}|\,,$$
$$+ \lim_{x\to\infty} x\,|\tilde{\varphi}^\infty|\,.$$

Für den ersten Term gilt die Ungleichung (24), das darin auftretende Integral ist für alle R kleiner als

$$\|\psi\| \int_0^\infty y^2\, F(y)\, dy\,.$$

Aus (24), (28) und (29) folgt daher, dass

$$\lim_{x\to\infty} x\,|\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi^\infty(\boldsymbol{x})| = 0\,, \tag{30}$$

falls man $R(x)$ so wählen kann, dass

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \infty\,,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\, R^2(x)}{(x-R)^2} = 0\,.$$

Das ist aber möglich, wie das Beispiel $R(x) = x^{1/3}$ zeigt.

Auf gleiche Weise kann man verfahren mit der radialen Ableitung von $\varphi(\mathbf{x})$. Unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$\lim_{y\to\infty} y^2\, F(y) = 0 \tag{31}$$

findet man:

$$\lim_{x\to\infty} x \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\,k\,\varphi^\infty \right| = 0\,. \tag{32}$$

Wir wollen schliesslich noch das Verhalten der Lösungen der homogenen Streugleichung untersuchen für alle k in $\mathrm{Im}\,k \geqslant 0$. Vorläufig setzen wir dabei über $V(\mathbf{x})$ nur (14) voraus. Zuerst beweisen wir einen Hilfssatz:

Alle $\psi \in C$, die eine Abschätzung der Art (33a)

$$|\psi(\boldsymbol{x})| < A\,\frac{e^{-\alpha x}}{x} \qquad (\alpha = \mathrm{Im}\,k)$$

erlauben, bilden einen linearen Teilraum T von C, der durch GV in sich abgebildet wird.

Alle Lösungen der homogenen Streugleichung liegen in T. (33b)

Beweis: Es sei $\varphi = GV\psi$, $\psi \in T$. Unter Benutzung von (8) folgt:

$$|\varphi(\boldsymbol{x})| < \frac{A}{4\pi}\int d^3y\,\frac{e^{-\alpha|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,F(y)\,\frac{e^{-\alpha y}}{y}\,,$$

$$< e^{-\alpha x} A \int_0^\infty dy\, y\, F(y)\,\frac{1}{4\pi}\int \frac{d\Omega}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,,$$

$$< \frac{e^{-\alpha x}}{x} A \int_0^\infty y\,F(y)\,dy\,.$$

Damit ist (33a) bewiesen.

Zum Beweis von (33b) betrachten wir eine Lösung der homogenen Gleichung $\psi = GV\psi$. $V(\boldsymbol{y})$ zerlegen wir gemäss (27), dann ist

$$\psi = GV_R\,\psi + G\tilde{V}\,\psi \equiv \psi_0 + G\tilde{V}\,\psi\,. \tag{34}$$

R wählen wir fest und so gross, dass $|G\tilde{V}| < 1$. Aus (23) und (24) folgt, dass ψ_0 zu T gehört, deshalb kann man (34) als Funktionalgleichung sowohl in C als auch in T auffassen. In beiden Fällen trifft wegen $|G\tilde{V}| < 1$ die erste der Alternativen (17) zu, das heisst (34) hat sowohl in C wie in T genau eine Lösung, die wegen $C \in T$ zusammenfallen. Da ψ eine Lösung ist, folgt $\psi \in T$.

Das asymptotische Verhalten von $\psi(\boldsymbol{x})$ findet man in derselben Weise wie früher, nur kommt man jetzt dank der Ungleichung (33a) mit schwächeren Voraussetzungen über $V(\boldsymbol{x})$ aus. Falls nur (14) gilt, so existiert $\varphi^\infty(\boldsymbol{x})$, und es ist

$$\lim_{x\to\infty} x\,e^{\alpha x}\,|\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi^\infty(\boldsymbol{x})| = 0\,. \tag{35}$$

Wenn ausserdem noch

$$\lim_{y\to\infty} y\,F(y) = 0 \tag{36}$$

ist, so gilt auch:

$$\lim_{x\to\infty} x\,e^{\alpha x}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\,k\,\varphi^\infty\right| = 0\,. \tag{37}$$

6. Diskussion des Spektrums

Zuerst untersuchen wir denjenigen Teil des Spektrums, der in Im $k > 0$ liegt. Unter den Voraussetzungen (5), (6) und (36) gilt dann:

Die Eigenwerte liegen in einem endlichen Intervall der imaginären k-Achse, das nach unten durch den Nullpunkt begrenzt ist. Sie können sich in diesem Intervall nirgends häufen ausser vielleicht bei $k = 0$. (38a)

Zu jedem Eigenwert gibt es nur endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen. (38b)

Die Eigenfunktionen sind quadratintegrierbar und können daher als gebundene Zustände interpretiert werden. (38c)

Es sei φ eine Eigenfunktion zum Eigenwert k_0, Im $k_0 > 0$, und ψ eine beliebige Lösung der homogenen oder inhomogenen Streugleichung für ein $k \neq k_0$. Dann gilt die Orthogonalitätsrelation: (38d)

$$\int d^3x \, \varphi^*(\boldsymbol{x}) \, \psi(\boldsymbol{x}) = 0$$

(b) ist eine direkte Folge der Vollstetigkeit von GV [6]) und gilt deshalb auch für reelle k schon unter der Voraussetzung (14) allein. Im Fall Im $k > 0$ sind die Eigenfunktionen Lösungen der Schrödingergleichung, die im Unendlichen samt ihren radialen Ableitungen exponentiell verschwinden. Eine unmittelbare Folge davon ist (c). In bekannter Weise kann man damit auch die Orthogonalitätsrelation (d) beweisen sowie die Tatsache, dass die E-Eigenwerte reell, die k-Eigenwerte also rein imaginär sind. Es ist leicht zu zeigen – zum Beispiel mit Hilfe der Approximation (19), dass

$$\lim_{\mathrm{Im}\, k \to +\infty} | GV(k) | = 0 \, .$$

Sobald aber $| GV(k) | < 1$ ist, kann k nicht mehr Eigenwert sein, daher sind die Imaginärteile der Eigenwerte beschränkt. Dass sich die Eigenwerte in Im $k > 0$ nirgends häufen können, ergibt sich aus folgender Überlegung:

Es sei k_n eine Folge von Eigenwerten, die gegen k strebt, Im $k > 0$, und φ_n eine Folge zugehöriger Eigenfunktionen, die wir auf $\| \varphi_n \| = 1$ normieren. $GV(k)$ ist – wie wir in Appendix III beweisen – eine stetige Funktion von k, somit ist

$$\lim_{n \to \infty} \| (GV(k_n) - GV(k)) \, \varphi_n \|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \| \varphi_n - GV(k) \, \varphi_n \| = 0 \, . \qquad (39)$$

Da $GV(k)$ vollstetig ist, kann man aus den φ_n eine Teilfolge ψ_m derart auswählen, dass $GV(k)\ \psi_m$ gegen eine Funktion ψ konvergiert. Nach (39) gilt dann:

$$\lim_{m\to\infty} \|\psi_m - \psi\| = 0 \tag{40}$$

und folglich:

$$\psi = GV(k)\ \psi\,, \qquad \|\psi\| = 1\,,$$

das heisst k ist ebenfalls Eigenwert. Da $\operatorname{Im} k > 0$ ist, gilt wegen der Orthogonalitätsrelation (38d):

$$\begin{aligned}\int \psi^*\ \psi\ d^3x &= \int d^3x\ \psi^*\ (\psi - \psi_m)\\ &\leq \|\psi - \psi_m\| \int d^3x\ |\psi|\,,\end{aligned}$$

$$\|\psi - \psi_m\| \geq \frac{\int |\psi|^2\ d^3x}{\int |\psi|\ d^3x} > 0\,,$$

im Widerspruch zu (40). (Es sei darauf hingewiesen, dass das letzte Argument im Fall $k = 0$ versagt!) Die Eigenwerte können sich somit in $\operatorname{Im} k > 0$ nirgends häufen, und bei Null auch höchstens dann, wenn Null selber Eigenwert ist.

Für den Fall des Zentralpotentials hat BARGMANN[7]) bewiesen, dass es unter den Voraussetzungen (14) nur endlich viele Eigenwerte gibt. Wir vermuten, dass dasselbe in unserem Fall zutrifft – der obige Beweis lässt aber diese Frage offen.

Wir wenden uns jetzt dem reellen Teil des Spektrums zu. Das Ziel dabei ist natürlich der Beweis, dass ein reelles $k \neq 0$ nicht Eigenwert sein kann (für $k = 0$ kann man das nicht erwarten, da es einfache Gegenbeispiele gibt), denn ein solcher Beweis würde die eindeutige Lösbarkeit der inhomogenen Streugleichung sichern. Leider können wir den Beweis nur in zwei speziellen Fällen führen: für abbrechende Potentiale und für Zentralpotentiale[19]).

Es sei $\psi = GV\ \psi$, k reell, und V genüge den Voraussetzungen (14) und (36). Für jede Kugel K_R mit Radius R um 0 gilt einerseits:

$$\int_{\partial K_R} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n}\right) dO = \int_{K_R} (\psi^*\ \Delta\psi - \psi\ \Delta\psi^*)\ dV = 0$$

und andererseits nach (23), (35) und (37):

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial K_R} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n}\right) dO = 2\,i\,k \int d\Omega\ |f(\vartheta, \varphi)|^2\,.$$

Da $f(\vartheta, \varphi)$ stetig ist, folgt, falls $k \neq 0$:

$$f(\vartheta, \varphi) \equiv 0 . \tag{41}$$

Wenn V ein abbrechendes Potential ist, so ist $\psi(\boldsymbol{x})$ für $x > R$ eine Ausstrahlungslösung der kräftefreien Wellengleichung, welche wegen (35) und (41) rascher abnimmt als $1/x$. Eine solche Lösung verschwindet aber nach einem allgemeinen Satz[8]) für $x > R$ identisch. Für jede Kugel K_r mit $r > R$ wäre dann k eine Lösung des Eigenwertproblems

$$(\Delta + k^2)\,\psi = V\,\psi$$

mit der Randbedingung $\psi = 0$. Das ist aber ein Widerspruch, denn man weiss, dass die Eigenwerte dieses Problems mit wachsendem r monoton abnehmen[9]).

Den andern Spezialfall, das Zentralpotential, behandeln wir in Abschnitt[8]).

7. Allgemeinere Potentiale

Wir lassen alle Annahmen über $V(\boldsymbol{x})$ fallen ausser den Voraussetzungen (14), die wir für die Diskussion der Streugleichung allein verwendet haben.

Für so allgemeine Potentiale können wir natürlich (1) nicht mehr als Funktionalgleichung in C auffassen, und der in den Abschnitten (2) und (4) hergestellte Zusammenhang zwischen Streugleichung und Schrödingergleichung geht verloren. Auf diesen Zusammenhang haben wir uns aber gestützt beim Beweis der Orthogonalitätsrelation (38d) und beim Beweis, dass die komplexen k-Eigenwerte rein imaginär aind. Wir wollen jetzt zeigen, dass diese Resultate – und damit alle Ergebnisse des letzten Abschnitts – auch unter den viel allgemeineren Voraussetzungen (14) bestehen bleiben.

Es sei $\psi = GV\,\psi$ eine Lösung der homogenen Streugleichung, Im $k \equiv \alpha > 0$. Mit der in Appendix II definierten Folge $U_n(\boldsymbol{x})$ bilden wir

$$\psi_n = G\,U_n\,\psi\,,$$

$$\phi_n = G\,U_n\,\psi_n\,.$$

ψ gehört zu T siehe (33), es folgt daher wie im Beweis von (33a), dass alle Funktionen $\psi_n(\boldsymbol{x})$ und $\phi_n(\boldsymbol{x})$ gleich majorisiert werden durch eine Funktion

$$A\,\frac{e^{-\alpha x}}{x}\,. \tag{42}$$

Wie in Abschnitt (4) zeigt sich, dass $\phi_n(\mathbf{x})$ zweimal stetig differenzierbar ist, und dass überall gilt:

$$(\Delta + k^2)\,\phi_n = U_n\,\psi_n\,.$$

Daraus folgt:

$$\phi_n^*\,\Delta\phi_n - \phi_n\,\Delta\phi_n^* = (E^* - E)\,\phi_n^*\,\phi_n + U_n\,(\psi_n\,\phi_n^* - \psi_n^*\,\phi_n)\,.$$

Wenn man beide Seiten dieser Gleichung über den ganzen Raum integriert, so ergibt die linke Seite keinen Beitrag, wie man durch Anwendung des Greenschen Satzes erkennt (dies ist erlaubt, da U_n alle Voraussetzungen des Abschnitts (5) erfüllt und für ϕ_n und seine radiale Ableitung demzufolge die asymptotischen Formeln (35) und (37) gelten). Es ist also

$$0 = (E^* - E)\int d^3x\,\phi_n^*\,\phi_n + \int d^3x\,U_n\,(\psi_n\,\phi_n^* - \psi_n^*\,\phi_n)\,.$$

Aus $\psi_n \to \psi$, $\phi_n \to \psi$ und (42) folgt nun leicht, dass diese Gleichung im Grenzfall $n \to \infty$ übergeht in

$$0 = (E^* - E)\int d^3x\,\psi^*\,\psi\,,$$

woraus sich ergibt, dass E reell, k also rein imaginär ist. Auf genau dieselbe Weise beweist man die Orthogonalitätsrelation (38d).

Es lässt sich noch eine weitere Verallgemeinerung angeben, für welche unsere Resultate gültig bleiben: $V(\boldsymbol{x})$ kann eine endliche Summe von Potentialen der Art (14) sein. Die Zentralpotentiale, durch welche die einzelnen Summanden majorisiert werden, dürfen dabei verschiedene Zentren besitzen. Der wesentliche Grund dafür ist der, dass eine endliche Summe vollstetiger Operatoren wieder vollstetig ist.

8. Das Zentralpotential

Eine zusammenfassende Darstellung zahlreicher Arbeiten über das Zentralpotential findet man bei [11]). Wir wollen nur so weit darauf eingehen, als es für unsere Zwecke notwendig ist, und auch das nur in Stichworten.

Es sei k ein Eigenwert der Streugleichung, Im $k \geqslant 0$. Alle zugehörigen Eigenfunktionen bilden einen endlichdimensionalen Unterraum U von C. Mit $\psi(\boldsymbol{x})$ ist auch $\psi(D\,\boldsymbol{x})$ ein Element von U, wenn D irgendeine Drehung bedeutet. Auf diese Weise wird in U eine endlichdimensionale Darstellung der Drehgruppe erzeugt. Daraus folgt, dass es in U eine Basis der folgenden Art gibt:

$$\psi_{nem}(\boldsymbol{x}) = \frac{u_{ne}(x)}{x} \, Y_e^m(\boldsymbol{x}) \, . \tag{43}$$

Die Y_e^m stehen für eine orthonormierte Basis der Kugelfunktionen. Man kann auch die Greensche Funktion in eine Reihe nach Kugelfunktionen mit dem Argument $\boldsymbol{y}$ entwickeln, die bezüglich der Winkel für $y \neq x$ gleichmässig konvergiert[11]). Wenn man diese Entwicklung und (43) in die Gleichung $\psi_{nem} = GV \, \psi_{nem}$ einsetzt, so darf man deshalb die Integration über die Winkel gliedweise ausführen. Man findet als Resultat:

$$u_{ne}(x) = h_e(k\,x)\,\frac{1}{i\,k}\int_0^x dy\; i_e(k\,y)\; V(y)\; u_{ne}(y) + \tag{44}$$

$$+\, i_e(k\,x)\,\frac{1}{i\,k}\int_x^\infty dy\; h_e(k\,y)\; V(y)\; u_{ne}(y)\,.$$

$j_e(z)$ und $h_e(z)$ sind die mit $(\pi\,z/2)^{1/2}$ multiplizierten Besselschen resp. zweiten Hankelfunktionen zum Index $e + 1/2$. Es ist wohlbekannt, dass die Gleichung (44) für reelle $k \neq 0$ unter der Voraussetzung (14) nur die triviale Lösung besitzt[11]). In der Tat bedeutet (41) in diesem Fall:

$$\int_0^\infty dy\; i_e(k\,y)\; V(y)\; u_{ne}(y) = 0\,.$$

Man kann damit das erste Integral in (44) umschreiben in ein Integral über das Intervall $x < y < \infty$. (44) wird dann zu einer homogenen Integralgleichung vom Volterraschen Typ; eine solche Gleichung kann aber nur die triviale Lösung besitzen.

KAPITEL II

Regularitätseigenschaften der Streuamplitude

Für ein Zentralpotential, das der Voraussetzung

$$\int_0^\infty x\,|V(x)|\,dx < \infty$$

genügt, besitzt die inhomogene Streugleichung für jedes reelle $k \neq 0$ genau eine stetige und beschränkte Lösung ψ, die sich unter der weiteren Bedingung

$$\int_0^\infty x^2\,|V(x)|\,dx < \infty$$

für grosse x asymptotisch verhält wie eine ebene Welle plus eine auslaufende Kugelwelle:

$$\psi(\boldsymbol{x}) \sim e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} + \frac{e^{ikx}}{x} f(E, \cos\vartheta) ,$$

$$f(E, \cos\vartheta) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3y\, e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{y}}\, V(y)\, \psi(\boldsymbol{y}) ,$$

$$\boldsymbol{k}' = k\,\frac{\boldsymbol{x}}{x} ; \qquad \vartheta = \sphericalangle(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}) ; \qquad E = k^2 .$$

Wir wollen das analytische Verhalten der Streuamplitude $f(E, \cos\vartheta)$ als Funktion von E und $\cos\vartheta$ oder anderer geeigneter Streuparameter diskutieren. Zu diesem Zweck werden wir im folgenden Abschnitt zuerst das Verhalten von $\psi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})$ als Funktion von $\boldsymbol{k}$ untersuchen.

1. Die Regularitätseigenschaften der Resolvente

Wir setzen vorläufig nur voraus, dass die Bedingung (14) erfüllt ist. Es gilt:

$$\psi(\boldsymbol{k}) = R(k)\, \psi_0(\boldsymbol{k}) . \tag{45}$$

Wenn wir wüssten, dass $R(k)$ und $\psi_0(\boldsymbol{k})$ analytische Funktionen von $\boldsymbol{k}$ wären, so könnten wir vielleicht schliessen, dass das gleiche für $\psi(\boldsymbol{k})$ zutrifft, denn die rechte Seite von (45) ist eine Art Produkt. Was aber der Begriff «analytisch» hier bedeuten soll, müssen wir zuerst definieren, denn R, ψ_0 und ψ sind ja nicht komplexe Zahlen, sondern Elemente eines Banachschen Raumes*).

Zu diesem Zweck betrachten wir Funktionen einer komplexen Variablen mit Werten in einem (komplexen) Banachraum. Da wir für die Funktionswerte einen Konvergenzbegriff haben – nämlich die Konvergenz bezüglich der Norm – können wir einen grossen Teil der gewöhnlichen Analysis auf solche Funktionen übertragen. Die Übertragung der Begriffe geschieht einfach dadurch, dass man an Stelle des Absolutbetrages von Funktionswerten deren Norm setzt. So nennen wir zum Beispiel $f'(z_0)$ die Ableitung von $f(z)$ an der Stelle z_0, falls

$$\lim_{z\to z_0} \left\| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right\| = 0 .$$

Wie zu erwarten ist, bleiben dann viele Sätze der Analysis unverändert gültig. Einige davon übertragen sich in völlig trivialer Weise – wie zum Beispiel die Aussage, wonach jede in einem abgeschlossenen Intervall

*) Alle beschränkten Operatoren auf einem Banachraum bilden wieder einen Banachraum.

stetige Funktion dort auch gleichmässig stetig ist. In anderen Fällen spielt die Vollständigkeit des Banachraums eine fundamentale Rolle. Als Beispiel betrachten wir den Satz, nach dem jede stetige Funktion integrierbar ist:

Man bildet wie üblich eine Folge T_n von Einteilungen des Integrationsintervalles, deren Feinheit gegen Null strebt. Da $f(z)$ gleichmässig stetig ist, erfüllen die Summen

$$S_n = \sum_{T_n} f(\xi_k)\ (z_k - z_{k-1})$$

das Cauchysche Konvergenzkriterium. Dank der Vollständigkeit des Banachraumes existiert daher der Grenzwert, und er ist auch unabhängig von der speziellen Wahl der T_n und der ξ_k.

Weiter soll eine Funktion regulär heissen in einem Gebiet G, falls sie überall in G eine Ableitung besitzt. Für solche Funktionen gelten die meisten Sätze der Funktionentheorie: der Cauchysche Integralsatz und seine Umkehrung (Satz von Morera), die Cauchysche Integralformel, die Sätze über die Entwicklung regulärer Funktionen in Potenzreihen, der Satz vom Maximum und der Identitätssatz. Die Analogie hat zum Beispiel dann ein Ende, wenn in den entsprechenden klassischen Sätzen oder Begriffen die Division durch Funktionswerte wesentlich verwendet wird.

Wir beweisen in Appendix III, dass in diesem nun klar definierten Sinn $GV(k)$ stetig ist in k in der Halbebene Im $k \geqslant 0$ und regulär in k für Im $k > 0$. Es folgt dann, dass die Resolvente $R(k)$ regulär ist in einer Umgebung jedes Punktes (in Im $k > 0$), in dem sie existiert (siehe Appendix VI). Da wir aber über die Existenz der Resolvente bereits Bescheid wissen, können wir das Ergebnis wie folgt zusammenfassen:

> $R(k)$ ist regulär in der Halbebene Im $k > 0$ bis auf endlich viele Singularitäten auf der imaginären Achse, die den gebundenen Zuständen entsprechen.

$GV(k)$ ist stetig für Im $k \geqslant 0$, und $R(k)$ existiert auch für reelle $k \neq 0$. Daher ist $R(k)$ stetig für Im $k \geqslant 0$ bis auf die oben genannten Singularitäten, zu denen unter Umständen noch der Punkt $k = 0$ hinzukommt. Das garantiert uns, dass die später diskutierten analytischen Funktionen wirklich Fortsetzungen der Streuamplitude sind.

Für komplexe $\boldsymbol{k}$ ist $e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}$ nicht mehr beschränkt, und der Raum C wird für die Behandlung der inhomogenen Streugleichung zu eng. Wir betrachten deshalb den Raum C' aller stetigen Funktionen $\psi'(\boldsymbol{x})$, für welche die folgende Norm endlich ist:

$$\|\psi'\| = \sup_{\boldsymbol{x}} e^{-\alpha x}\ |\psi'(\boldsymbol{x})|\ .$$

α ist eine feste, positive Zahl, über die wir später verfügen. Die Zuordnung

$$\psi(\boldsymbol{x}) = e^{-\alpha x}\,\psi'(\boldsymbol{x}) \tag{46}$$

vermittelt eine isometrische Abbildung von C auf C' und umgekehrt. Wir fassen nun die Streugleichung auf als Funktionalgleichung in C' und bilden mit (46) die entsprechende Gleichung in C:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}-\alpha x} - \frac{e^{-\alpha x}}{4\pi}\int d^3y\,\frac{e^{ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,V(y)\,e^{\alpha y}\,\psi(\boldsymbol{y})\,. \tag{47}$$

Alles Bisherige gilt offenbar auch für diese neue Gleichung, falls wir nur $V'(y) = V(y)\,e^{\alpha y}$ derselben Bedingung unterwerfen wie früher $V(y)$, falls also

$$\int_0^\infty y\,e^{\alpha y}\,|V(y)|\,dy < \infty\,.$$

Das ist nun unsere Voraussetzung über $V(y)$ und α. Die Resolvente $R(k)$ von (47) in C hat wieder die bereits bekannten Regularitäts- und Stetigkeitseigenschaften, und dasselbe gilt dann wegen der Isometrie von (46) für die Resolvente $R'(k)$ der Streugleichung in C'.

$$\psi_0'(\boldsymbol{k}) = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}$$

ist eine reguläre Funktion von k mit Werten in C' im Gebiet $|\operatorname{Im}\boldsymbol{k}| < \alpha$. Daher ist auch

$$\psi'(\boldsymbol{k}) = R(k)\,\psi_0'(\boldsymbol{k}) \tag{48}$$

regulär im Gebiet

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Im}\boldsymbol{k}| < \alpha\,,\\ &\operatorname{Im} k > 0\,,\\ &k \neq \text{Eigenwert}, \end{aligned} \tag{49}$$

denn die Ableitung der rechten Seite von (48) etwa nach k_1 darf man nach Produkt- und Kettenregel bilden. Wir setzen:

$$\psi' = \psi_0' + \psi_1'\,. \tag{50}$$

Das Ergebnis unserer Untersuchung können wir dann wie folgt zusammenfassen:

$\psi_1'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k})$ ist bei festem $\boldsymbol{x}$ regulär in $\boldsymbol{k}$ im Gebiet (49) und für jedes feste $\boldsymbol{k}$ aus diesem Gebiet als Funktion von $\boldsymbol{x}$ stetig und beschränkt. (51)

Die erste Aussage ergibt sich aus der Tatsache, dass die Konvergenz bezüglich C'-Norm punktweise Konvergenz nach sich zieht. Wenn also $f(z)$ als Funktion mit Werten in C' eine Ableitung besitzt, so besitzt $f(\boldsymbol{x}, z)$ für jedes $\boldsymbol{x}$ eine Ableitung nach z.

Die zweite Aussage lässt sich aus (47) ablesen. Dort ist $\psi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k})$ das Produkt einer beschränkten Funktion mit $e^{-\alpha x}$, also ist auch $\psi_1'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k})$ noch beschränkt.

2. Diskussion der Streuamplitude

An Stelle von $\cos\vartheta$ führen wir den (halben) Impulsübertrag Δ als Parameter ein:

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}' + \boldsymbol{k}) = P\,\boldsymbol{e} \qquad \boldsymbol{e}\,\boldsymbol{e}' = 0\,,$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}) = \Delta\,\boldsymbol{e}' \qquad P^2 = E - \Delta^2\,.$$

Entsprechend zu (50) zerlegen wir die Streuamplitude in die erste Bornsche Näherung und einen Rest:

$$f(E, \Delta) = f_0(\Delta) + f_1(E, \Delta)\,,$$

$$f_0(\Delta) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x\, e^{-2i\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{x}}\, V(x)\,.$$

Die erste Bornsche Näherung ist die Fouriertransformierte des Potentials. Sie ist eine gerade Funktion von Δ allein, regulär im Streifen

$$|\operatorname{Im}\Delta| < \frac{\alpha}{2}\,.$$

Um $f_1(E, \Delta)$ zu diskutieren, üben wir auf die Streugleichung eine Transformation aus, die noch von einem reellen Parameter λ abhängt (mit dem Zweck, den exponentiellen Abfall der Greenschen Funktion möglichst vollständig auszunützen):

$$\psi^\lambda(x) \equiv \psi(\boldsymbol{x})\, e^{i\lambda k \boldsymbol{e}\boldsymbol{x}}\,.$$

Die transformierte Streugleichung lautet:

$$\psi^\lambda = \psi_0^\lambda + G^\lambda V\,\psi^\lambda\,,$$

$$\psi_0^\lambda(\boldsymbol{x}) = e^{-i\Delta\boldsymbol{e}'\boldsymbol{x} + i(p + \lambda k)\boldsymbol{e}\boldsymbol{x}}\,,$$

$$G^\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, e^{ik[|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| + \lambda\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})]}\,.$$

Alles bisherige überträgt sich unverändert auf diese neue Streugleichung, falls der Realteil des Exponenten in $G^\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ nicht positiv ist, falls also

$$-1 \leq \lambda \leq +1 \, .$$

$\psi_0^\lambda(E, \Delta, x)$ ist ein Element des Raumes C', falls

$$(\mathrm{Im}\, \Delta)^2 + [\mathrm{Im}\, (p + \lambda\, k)]^2 < \alpha^2 \, , \tag{52}$$

und nach bekannter, schon bei (51) angewandter Schlussweise folgt dann:

> $\psi_1^\lambda(E, \Delta, \boldsymbol{x})$ ist für jedes feste $\boldsymbol{x}$ eine analytische Funktion von E und Δ im Gebiet (52), abgesehen von einem Verzweigungspunkt bei $E = \Delta^2$, einem Schnitt längs der positiv-reellen E-Achse und bis auf endlich viele negativ-reelle Singularitäten in E, die den gebundenen Zuständen entsprechen. Für jedes Paar (E, Δ) aus diesem Gebiet ist $\psi_1^\lambda(E, \Delta, \boldsymbol{x})$ als Funktion von $\boldsymbol{x}$ stetig und beschränkt.

Für $f_1(E, \Delta)$ ergibt sich die folgende Darstellung:

$$f_1(E, \Delta) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x \, e^{-i\,\Delta \boldsymbol{e}' \boldsymbol{x} - i\,(p + \lambda\, k)\, \boldsymbol{e} \boldsymbol{x}} \, V(x)\, \psi_1^\lambda\, (E, \Delta, \boldsymbol{x}) \, .$$

Auf Grund des Vorangegangenen ist ersichtlich, dass (52) auch gerade die Bedingung ist dafür, dass dieses Integral existiert. Der Verzweigungspunkt des Integranden bei $E = \Delta^2$ überträgt sich nicht auf das Integral, da ein Vorzeichenwechsel von $(E - \Delta^2)^{1/2}$ durch eine einfache Transformation der Integrationsvariablen wettgemacht werden kann.

Bis auf die schon oft erwähnten Singularitäten, die von der Resolventen $R(E)$ herrühren, ist also $f_1(E, \Delta)$ regulär in der folgenden Schar von Gebieten:

$$(\mathrm{Im}\, \Delta)^2 + [\mathrm{Im}\, (\sqrt{E - \Delta^2} + \lambda \sqrt{E})]^2 < \alpha^2 \, , \tag{53}$$

$$-1 \leq \lambda \leq +1 \, .$$

Danach muss sicher einmal $|\, \mathrm{Im}\, \Delta \,| < \alpha$ sein. Es gehören dann alle Paare (E, Δ) zu einem Gebiet dieser Schar, für die ausserdem

$$|\, \mathrm{Im} \sqrt{E - \Delta^2} \,| \leq |\, \mathrm{Im} \sqrt{E} \,|$$

ist, denn dann lässt sich λ im erlaubten Intervall so wählen, dass der zweite Summand in (53) verschwindet. Falls umgekehrt

$$|\, \mathrm{Im} \sqrt{E - \Delta^2} \,| > |\, \mathrm{Im} \sqrt{E} \,|$$

ist, so nimmt dieser Summand ein Minimum an für $\lambda = +1$ oder $\lambda = -1$, und dieses Minimum beträgt

$$(|\operatorname{Im}\sqrt{E-\Delta^2}| - |\operatorname{Im}\sqrt{E}|)^2 .$$

Das Ergebnis lässt sich also auch so formulieren:

$f_1(E, \Delta)$ ist regulär in E und Δ im Gebiet

$$|\operatorname{Im}\Delta| < \alpha \tag{54}$$

$$|\operatorname{Im}\sqrt{E-\Delta^2}| - |\operatorname{Im}\sqrt{E}| < \sqrt{\alpha^2 - (\operatorname{Im}\Delta)^2}$$

bis auf einen Schnitt längs der positiv-reellen E-Achse und bis auf endlich viele negativ reelle Singularitäten in E, die den gebundenen Zuständen entsprechen.

Wir wollen zeigen, dass in diesem Gebiet die bisher bekannten Regularitätsgebiete enthalten sind.

a) *Regularität in* $\cos\vartheta$ *bei festem reellem* $E > 0$

Wir führen wieder den Streuwinkel ϑ ein:

$$\Delta^2 = \frac{E}{2}(1 - \cos\vartheta) . \tag{55}$$

$f_1(E, \Delta)$ ist eine gerade Funktion von Δ, und deshalb ist $f_1(E, \cos\vartheta)$ regulär in E und $\cos\vartheta$ in einem (54) entsprechenden Gebiet, das für relle $E > 0$ wie folgt charakterisiert ist:

$$(\operatorname{Im}\Delta)^2 + (\operatorname{Im}\sqrt{E-\Delta^2})^2 < \alpha^2 ,$$

oder, nach (55):

$$\left(\operatorname{Im}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\vartheta)}\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\vartheta)}\right)^2 < \frac{\alpha^2}{E} ,$$

$$\left(\operatorname{Im}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2 < \frac{\alpha^2}{E} . \tag{56}$$

Setzt man $\vartheta = \varphi + \psi$, so wird

$$\cos\vartheta = \operatorname{Cos}\psi\cos\varphi - i\operatorname{Sin}\psi\sin\varphi .$$

Die Bedingung (56) ist dann nur eine Einschränkung für ψ, sie lautet:

$$\operatorname{Sin}^2\frac{\psi}{2} < \frac{\alpha^2}{E} .$$

Für festes ψ beschreibt $\cos\vartheta$ als Funktion von φ eine Ellipse mit Brennpunkten ± 1. Die Grenzellipse, die das Regularitätsgebiet umschliesst, erhält man für

$$\mathrm{Sin}^2 \frac{\psi}{2} = \frac{\alpha^2}{E} .$$

Ihre grosse Halbachse beträgt:

$$\mathrm{Cos}\, \psi = 1 + 2\, \mathrm{Sin}^2 \frac{\psi}{2} = 1 + \frac{2\,\alpha^2}{E} .$$

(LEHMANN-Ellipse)

b) *Das Regularitätsgebiet der Dispersionsrelation*

Für welche Δ darf E in der ganzen E-Ebene variieren, ohne (54) zu verletzen? Sicher ist notwendig, dass (54) für $E = 0$ erfüllt ist, und das bedeutet:

$$|\Delta| < \alpha .$$

Wir wollen zeigen, dass das auch hinreichend ist. Dazu setzen wir $\Delta = r e^{i\varphi}$ und beweisen, dass für alle E

$$|\mathrm{Im} \sqrt{E - \Delta^2}| - |\mathrm{Im} \sqrt{E}| \leq \sqrt{r^2 - (\mathrm{Im}\, \Delta)^2}.$$

Wir führen einen komplexen Parameter χ ein:

$$\sqrt{E - \Delta^2} = i\, \Delta\, \mathrm{Cos}\, \chi , \qquad \chi = \alpha + i\, \beta ,$$

$$\sqrt{E} = i\, \Delta\, \mathrm{Sin}\, \chi ,$$

$$\mathrm{Im} \sqrt{E - \Delta^2} = r\, (\mathrm{Cos}\, \alpha \cos\beta \cos\varphi - \mathrm{Sin}\, \alpha \sin\beta \sin\varphi) ,$$

$$\mathrm{Im} \sqrt{E} = r\, (\mathrm{Sin}\, \alpha \cos\beta \cos\varphi - \mathrm{Cos}\, \alpha \sin\beta \sin\varphi) .$$

Es bleibt zu verifizieren, dass für alle α, β die folgende Ungleichung gilt:

$$|\mathrm{Cos}\, \alpha \cos\beta \cos\varphi - \mathrm{Sin}\, \alpha \sin\beta \sin\varphi| \leq$$

$$\leq |\cos\varphi| + |\mathrm{Sin}\, \alpha \cos\beta \cos\varphi - \mathrm{Cos}\, \alpha \sin\beta \sin\varphi| .$$

Oder, nach Quadrieren beider Seiten:

$$\cos^2\beta \cos^2\varphi - \sin^2\beta \sin^2\varphi \leq \cos^2\varphi + 2\, |\cdots| .$$

Diese Ungleichung ist offenbar richtig.

$f_1(E, \Delta)$ ist also regulär in E und Δ im direkten Produkt des Kreises $|\Delta| < \alpha$ mit der ganzen E-Ebene, abgesehen von einem Schnitt längs der positiv-reellen E-Achse und bis auf endlich viele negativ-reelle Singularitäten in E, die von den gebundenen Zuständen herrühren.

Appendix I: Der Δ-Operator

Die in (4) verwendeten φ_n genügen dem inhomogenen Mittelwertsatz der Potentialtheorie: Für jede Kugel K_R (Mittelpunkt P, Radius R) gilt[10])

$$\varphi_n(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\partial K_R} \varphi_n \, d0 + \int\limits_{K_R} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \Delta\varphi_n \, dV \qquad \text{(I,1)}$$

(∂K_R = Rand von K_R, r = Abstand des Integrationspunktes von P). Aus $\varphi_n \to \psi$ und $\Delta\varphi_n \to \Delta\psi$ folgt, dass diese Gleichung auch für ψ und $\Delta\psi$ gilt.

Die Eindeutigkeit der Definition (4) ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass aus

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_n \to 0 \\ \varphi_n \in D_2 \\ \Delta\varphi_n \to \mu \end{array}\right\} \text{folgt} \quad \mu \equiv 0 .$$

Für μ gilt jedenfalls nach (I, 1):

$$\int\limits_{K_R} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \mu \, dV = 0 \qquad \text{(I,2)}$$

für jede Kugel K_R. Wäre $\mu \not\equiv 0$, so gäbe es aber eine Kugel K_R in der μ definit wäre, im Widerspruch zu (I, 2).

Es sei ψ ein Element von D, G eine Kugel vom Radius 1 um irgendeinen Punkt, den wir als Nullpunkt wählen. Wir definieren:

$$\mu(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \Delta\psi(\boldsymbol{x}) & \text{für} \quad x < 1 \\ 0 \text{ const.} & \end{cases}$$

Da für ψ der Mittelwertsatz (I,1) gilt, ist $\psi(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x}$ mit $x < 1/2$ darstellbar durch[10]):

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, \psi(\boldsymbol{y}) \, d^3y + \int H\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, \mu(\boldsymbol{y}) \, d^3y + \int \frac{\mu(\boldsymbol{y}) \, d^3y}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} .$$

$K(\mathbf{x})$ und $H(\mathbf{x})$ sind bis zu einer beliebig wählbaren Ordnung stetig differenzierbare Funktionen, die nicht von ψ abhängen, ferner ist $K(\mathbf{x}) \equiv 0$ für $x > 1/2$. Daraus folgt:

Alle $\psi \in D$ sind stetig differenzierbar und es gibt Konstanten A und B unabhängig von ψ derart, dass

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right| \leq A \,\|\psi\| + B \,\|\Delta\psi\| \,.$$

Folglich approximieren alle zur Definition von $\Delta\psi$ verwendbaren Folgen φ_n auch die ersten Ableitungen von ψ gleichmässig. Eine unmittelbare Folge davon ist die, dass der Greensche Satz, der ja für die Funktionen aus D_2 gilt, auch noch gültig ist für die Funktionen aus D.

Appendix II: Die approximierenden Potentiale

$V(\mathbf{x})$ soll den Voraussetzungen (14) genügen. Wir definieren:

$$V_n(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} V(\boldsymbol{x}) \text{ falls } x < R_n \quad \text{und} \quad |V(\boldsymbol{x})| < M_n \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$|GV - GV_n| \leq \int_{R_n}^{\infty} x\, F(x)\, dx + \int_{E_n} x\, F(x)\, dx$$

wobei E_n aus denjenigen Punkten x besteht, für die $x < R_n$ und $F(x) > M_n$. Wir können aber nacheinander R_n und M_n so gross wählen, dass beide Integrale kleiner sind als $1/n$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} |GV - GV_n| = 0\,.$$

$V_n(\mathbf{x})$ ist quadratintegrierbar und kann daher mit beliebiger Genauigkeit δ_n im quadratischen Mittel approximiert werden durch eine stetig differenzierbare Funktion $U_n(\mathbf{x})$, die ebenfalls durch M_n beschränkt ist und für $x > R_n$ identisch verschwindet. Es ist dann

$$|GV_n - G\,U_n| \leq \sup_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3y}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, |V_n(\boldsymbol{y}) - U_n(\boldsymbol{y})| \leq (R_n\, \delta_n)^{1/2}\,,$$

wie man durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung erkennt. Es gilt daher wieder

$$\lim_{n\to\infty} |G\,U_n - GV| = 0$$

falls man nur δ_n so wählt, dass $R_n \delta_n \to 0$. Falls $V(\mathbf{x})$ die Bedingungen (5) erfüllt, so kann man die $U_n(\mathbf{x})$ so wählen, dass sie gleichmässig gegen $V(\mathbf{x})$ konvergieren. Zum Beweis kann man sich etwa auf den Weierstrasseschen Approximationssatz stützen.

Appendix III: Regularität von GV(k)

Für Im $k \geqslant 0$, Im $k' \geqslant 0$ ist

$$|e^{ikr} - e^{ik'r}| \leq |k - k'| \, r ,$$

also

$$|GV(k) - GV(k')| \leq |k - k'| \int_0^\infty x^2 \, |V(x)| \, dx .$$

Zumindest für Potentiale der Art (18) ist daher $GV(k)$ stetig in Im $k \geqslant 0$. Da aber die Approximation (19) gleichmässig ist in k, Im $k \geqslant 0$, folgt die Stetigkeit von GV(k) für alle Potentiale, welche die Voraussetzung (14) erfüllen. Es existiert daher

$$A = \oint GV(k) \, dk$$

für jeden geschlossenen Weg in Im $k \geqslant 0$. Wir beweisen, dass A für jeden solchen Weg verschwindet: Für beliebiges $\psi \in C$ gilt:

$$\varphi \equiv A \, \psi = \left(\oint GV(k) \, dk\right) \psi = \oint GV(k) \, \psi \, dk ,$$

also

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi} \oint dk \int d^3y \, \frac{e^{ik(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \, V(y) \, \psi(\boldsymbol{y}) .$$

Da das zweite Integral absolut und gleichmässig konvergiert für alle k, darf man die Integrationen vertauschen. Deshalb ist $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 0$ und, da ψ beliebig war, auch $A = 0$. Nach dem Satz von Morera ist daher $GV(k)$ regulär in Im $k > 0$.

Appendix VI: Regularität der Resolvente

Wenn k_0 kein Eigenwert der Streugleichung ist, so existiert die Resolvente $R(k_0)$, und wegen der Stetigkeit von $GV(k)$ gibt es um k_0 eine Umgebung U derart, dass

$$|GV(k) - GV(k_0)| \leq \frac{1}{2\,|R(k_0)|} \text{ für alle } k \in U .$$

Es sei

$$S = R(k_0)\left(1 - GV(k)\right),$$

$$= 1 - R(k_0)\left[GV(k) - GV(k_0)\right]$$

$$= 1 - K.$$

Für $k \in U$ ist $|K| \leqslant 1/2$, und S^{-1} lässt sich daher durch die Neumannsche Reihe darstellen:

$$S^{-1} = 1 + K + K^2 + K^3 + \cdots .$$

Da diese Reihe für alle $k \in U$ absolut und gleichmässig konvergiert, ist

$$R(k) = S^{-1}(k)\, R(k_0)$$

regulär in k im Innern von U.

Literaturverzeichnis

[1]) F. Riesz und B. Sz. Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1956), Nr. 87.

[2]) Siehe [1]), Nr. 76.

[3]) Siehe [1]), Nr. 89.

[4]) R. Courant und D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, Springer, Berlin (1931), Bd. I, Kap. II, § 2.

[5]) Siehe [4]), Bd. II, Kap. IV, § 1.

[6]) Siehe [1]), Nr. 77 und 89.

[7]) V. Bargmann, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. *38*, 961 (1952).

[8]) A. Sommerfeld, Lehrbuch der theoretischen Physik, Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden (1947), Bd. 6, § 24.

[9]) Siehe [4]), Bd. I, Kap. VI, § 3.

[10]) Siehe [4]), Bd. II, Kap. IV, § 3.

[11]) Eine zusammenfassende Darstellung mit vielen Literaturhinweisen findet man bei R. G. Newton, Journal of Mathematical Physics *1*, 319 (1960).

[12]) R. Jost und A. Pais, Phys. Rev. *82*, 840 (1951).

[13]) N. N. Khuri, Phys. Rev. *107*, 1148 (1957).

[14]) R. Jost, Vorlesung über spezielle Probleme der Quantenmechanik, Zürich (1958), unveröffentlicht.

[15]) N. N. Khuri und S. B. Treimann, Phys. Rev. *109*, 198 (1958).

[16]) R. Blankenbecler, M. L. Goldberger, N. N. Khuri und S. B. Treimann, Annals of Physics *10*, 62 (1960).

Andere Methoden verwenden:

[17]) S. Gasiorowicz und H. P. Noyes, Nuovo Cim. *10*, 1078 (1958).

[18]) A. Klein, Annals of Physics *7*, 440 (1959).

Nachtrag:

[19]) T. IKEBE, Arch. for Rat. Mech. and Anal. *5*, 1 (1960).

In [19]) findet man eine umfassende Diskussion des wellenmechanischen Streuproblems und ein Verzeichnis der einschlägigen mathematischen Literatur. Unter anderem beweist IKEBE auch die Nichtexistenz positiv-reeller E-Eigenwerte, allerdings unter Voraussetzungen über das Potential, die von den unsrigen verschieden sind. Ich danke Herrn Prof. J. JAUCH für den Hinweis auf diese Arbeit.

Lebenslauf

Ich wurde am 9. November 1935 in Aarau geboren. Dort wuchs ich auf und erlangte mit neunzehn Jahren das Maturitätszeugnis Typus C an der Kantonsschule. Ich begann darauf das Studium an der Abteilung für Mathematik und Physik der Eidgenössischen Technischen Hochschule, das ich im Frühling 1959 mit dem Diplom als Physiker abschloss. Seither bin ich Assistent für theoretische Physik bei Professor R. Jost, unter dessen Leitung ich auch die vorliegende Promotionsarbeit ausführte.