

Dissertation Nr. 4781

# **BERECHNUNG VON PLATTEN UND RIPPENPLATTEN NACH DER METHODE DER ENDLICHEN ELEMENTE**

---

Abhandlung  
zur Erlangung  
der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften  
der

**EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH**

vorgelegt von  
**GIORGIO F. ALBERTI**  
dipl. Bauingenieur ETH  
geboren am 4. Januar 1940  
von Davesco TI

Angenommen auf Antrag von  
Prof. Dr. B. Thürlimann, Referent  
PD. Dr. E. Anderheggen, Korreferent

R. Langer, Offset- und Buchdruck  
Zürich  
1971

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Methode der endlichen Elemente wird für die Berechnung von dünnen, elastischen, isotropen oder orthotropen Platten und Rippenplatten beliebiger Form, Auflagerung und Belastung nach der Theorie 1. Ordnung verwendet. Ein entsprechendes Programm (FEAPS: "Finite Element Analysis of Plate Systems") wird für eine CDC-6500 Rechenanlage entwickelt.

Das Programm verwendet eine problemorientierte Eingabe, um seine praktische Benützung zu vereinfachen. Die benützten dreieckigen und viereckigen Platten- und Scheibenelemente, sowie die Balkenelemente sind kinematisch kompatibel. Für rippenlose Plattenberechnung ohne Scheibenwirkung verwendet FEAPS nur Plattenelemente. Die Rippenplatten werden durch Schalenelemente erfasst, die aus der Zusammensetzung eines Platten- und eines Scheibenelementes, sowie aus zur Plattenmittelebene exzentrischen Rippen, entstanden sind. Die eingesetzten Plattenelemente (DRPL18, VKPL24) sind Verschiebungselemente, deren Verschiebungsansatz ein Polynom fünften Grades ist. Für die Scheibenelemente (DRSC18, VKSC24) werden für die Verschiebungen in x- und y-Richtung Polynomansätze dritten Grades verwendet. Die exzentrischen Balkenelemente entstehen aus einem Verschiebungsansatz fünften Grades für die Verschiebung senkrecht zur Platte und dritten Grades für die Verschiebung in Längsrichtung.

Die Plattenelemente und die Scheibenelemente haben sechs Verformungsparameter pro Knoten. Die Plattenelemente eine Verschiebung, zwei Verdrehungen und drei Krümmungen, und die Scheibenelemente zwei Verschiebungen, zwei Dehnungen, eine Schiebung in der Ebene der Scheibe und eine Rotation um eine Senkrechte zur Scheibe.

Die viereckigen Elemente entstehen aus der "Kondensation" von vier Dreiecken. Besondere, elastisch gestützte Vierecke für die Behandlung von Stützen und Fundamentplatten sind im Programm eingebaut.

Es wird eine elementorientierte Eingabe und eine kolonnenweise festgelegte Elementanordnung und Knotennummerierung gewählt. Dies vereinfacht die Eingabe und reduziert die Gesamtrechenzeit, da schmale, bandförmige, symmetrische Gleichungssysteme erzeugt werden. Das lineare Gleichungssystem wird mit zwei speziell programmierten Algorithmen wahlweise gelöst (Gauss'sches Eliminationsverfahren oder Choleskyverfahren). Bei der Cholesky-Zerlegung wird bei der Speicherung der Koeffizientenmatrix die variable Bandbreite berücksichtigt. Die kompakte Speicherungsart dieses Algorithmus erlaubt wesentliche Rechenzeiterparnisse.

Verschiedene analytisch und mit der Methode der endlichen Elemente berechnete, aus der Literatur bekannte Platten und Rippenplatten werden überprüft. Dabei wird festgestellt, dass schon mit einer groben Unterteilung recht beachtliche Resultate erzielt werden.

SUMMARY

The finite element method using a displacement model is employed to analyse the elastic bending of plates and eccentrically stiffened plates. For the stiffened plates both the stiffnesses due to in-plane and to plate-bending action for the plate and beam elements are taken into account. A general FORTRAN IV program for the CDC-6500-Computer was developed.

The finite element used are the following:

1. Fully compatible triangular and "condensed" quadrilateral plate bending element with 18 and 24 degrees of freedom (DRPL18, VKPL24).
2. Fully compatible triangular and "condensed" quadrilateral plane stress element with 18 and 24 degrees of freedom (DRSC18, VKSC24).
3. Eccentric fully compatible beam elements with 24 degrees of freedom (BAL24).

The plate bending element ensures displacement and slope compatibility along the edges of adjacent elements.

Six parameter are introduced at each corner: the deflection, two rotations and three curvatures. This element assumes as a displacement field a complete polynomial of fifth degree in  $x$  and  $y$ .

The plane stress element is based on a complete third degree polynomial in  $x$  and  $y$  for the displacements  $u$  and  $v$  in  $x$ - and  $y$ -direction. Six parameters are introduced at each corner: two displacements, three strains and a rotation.

Quadrilateral elements are assembled by four triangular elements. The internal degrees of freedom are eliminated by static condensation. Special quadrilateral elements for the treatment of columns and elastic foundations are also available.

An element-oriented input combined with columnwise disposition of the elements characterises the program. The geometry is specified only for element types, assuming that the whole structure is built up by a reduced number of element types.

The direct stiffness method is used to assemble the global stiffness and loading matrices.

The system of linear equations is solved by specially programmed algorithms based on the Gauss-Elimination or Cholesky-Method. The variable bandwidth of the global stiffness matrix was taken into account by the programmed Cholesky algorithm.

Several numerical solutions are given showing good correspondence with known analytical or experimental results.

RESUME

On présente le calcul par la méthode des éléments finis des plaques avec ou sans nervures de forme et de conditions d'appui quelconques. Pour l'idéalisation de la plaque nervurée, on utilise d'une part des éléments de plaque et de membrane superposés et d'autre part des éléments de barre.

On a développé pour l'ordinateur CDC 6500 un programme en FORTRAN IV.

Différents types d'éléments sont utilisés :

1. Eléments de plaque complètement compatibles, triangulaires et quadrilatéraux avec respectivement 18 et 24 degrés de liberté (DRPL18, VKPL24).
2. Eléments de membrane complètement compatibles, triangulaires et quadrilatéraux avec respectivement 18 et 24 degrés de liberté (DRSC18, VKSC24).
3. Eléments de barre purement compatibles à 24 degrés de liberté (BAL24).

L'élément de plaque fléchie assure la continuité des déplacements et des pentes entre les éléments.

On a introduit à chaque angle 6 paramètres: la flèche, deux rotations et trois courbures.

Pour l'élément de plaque on a adopté un polynome de 5<sup>e</sup> degré complet en  $x$  et  $y$ .

Pour l'élément de membrane on a adopté un polynome de 3<sup>e</sup> degré complet en x et y pour les déplacements u et v en direction des axes x et y.

On a introduit à chaque angle les 6 paramètres suivants: 2 déplacement, 3 dilatations et une rotation.

Les éléments quadrilatéraux sont formés par 4 éléments triangulaires, avec élimination par "condensation" des degrés de liberté internes.

On dispose encore d'éléments quadrilatéraux pour le traitement de colonnes et de fondation élastiques.

Les données du programme se basent sur la géométrie et la topologie des éléments qui sont groupés en colonnes.

Pour assembler les matrices globales de rigidité et des charges, on utilise la méthode des déformations en additionnant directement les rigidités des éléments.

Le système d'équations linéaire est résolu par un algorithme basé sur l'élimination de Gauss ou par la méthode de Cholesky. Pour cette dernière, on a tenu compte de la largeur variable de la bande de la matrice de rigidité.

Pour contrôler la bonne convergence des résultats, on a calculé certains systèmes, dont on trouve les solutions dans la littérature.