

# Semianalytische Lösung der Neutronentransportgleichung in Abschirmungen mittels Hermite-Integration

**Author(s):**
Brandt, Daniel

**Publication Date:**
1980

**Permanent Link:**
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000207973

Diss. ETH Nr. 6574

# Semianalytische Lösung der Neutronentransportgleichung in Abschirmungen mittels Hermite-Integration

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines
Doktors der Technischen Wissenschaften
der
EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

BRANDT DANIEL
Dipl. Masch. Ing. ETH
geboren am 21. Januar 1950
von Begnins (Kt. Waadt)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. W. Hälg, Referent
Prof. Dr. J. Marti, Korreferent

1980

## ABSTRACT

The present work discusses a solution of the stationary multizone multigroup neutron transport equation with anisotropic scattering in shields of plane geometry. In contrast to the well-known $S_N$-theory, where both the directions of neutron flight and the spatial dependence are discretized (fully numerical procedure), $S_\infty$-theory treats the angle variable analytically. This semianalytic approach corresponds to an infinitely fine discretization of the angular variable ($N \to \infty$) in $S_N$-theory. Although the $S_\infty$-method, introduced in 1968, has been able to improve significantly some of the known shortcomings of $S_N$-theory (large memory requirement, long computing times) its convergence remained relatively slow since both methods approximate the angular distribution linearly in the space variable (trapezoidal rule). In addition, unphysical flux oscillations appeared occasionally and required special procedures for their elimination.

In order to overcome these two important limitations another approach, called the $H_k$-$S_\infty$-method, is developed, employing a higher order spatial integration (more rapid convergence) and still exhibiting the requisite stability. Spatial integration is carried out with the aid of a formalism originally suggested by Ch. Hermite. Its order of convergence, 2k+2, may be chosen arbitrarily and leads to 2-point recursion relations for all k. In addition, the coefficients of the resulting linear system of equations may be represented in terms of an asymptotic expression. Application of the Hermite approximation with k=1 to the transport equation leads in a first step to the direct $H_1$-$S_\infty$-method and results in a system of equations comprising (L+1) moments of the integrated neutron flux $\phi$ (L = degree of scattering anisotropy) an their first derivatives. With the aid of a relation valid for Legendre polynomials these derivatives are subsequently eliminated through the introduction of an additional (L+2)nd moment (modified $H_1$-$S_\infty$-method). A consequence of this procedure is that problems with linearly anisotropic scattering cross-sections ($P_1$-scattering) will require the same amount

of computing time as isotropic problems. Finally, the $H_3$-$S_\infty$-method is mentioned briefly and the possibility of its implementation as well as its improved convergence are demonstrated by a simple test case.

In order to examine the usefulness of the $H_1$-$S_\infty$-method for numerical purposes two physically important aspects of the problem were given special emphasis: single group calculations with arbitrary $P_\ell$-scattering on the one hand, and on the other multigroup multiregion calculations with variable step size and weak scattering anisotropy. Numerous comparisons with the well-known fully numerical $S_N$-code ANISN and with the shielding program SHIELD ($S_\infty$-DPR-method) clearly show the significant advantage of $H_1$-$S_\infty$-theory. In each of the cases considered the $H_1$-formalism required considerably less computing time for a given relative accuracy, and in addition was capable of handling problems that could not be treated by the other two methods due to lack of storage capacity.

## KURZFASSUNG

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Lösung der stationären Multigruppen-Mehrzonen-Neutronentransportgleichung mit anisotroper Streuung in ebenen Abschirmungen. Im Gegensatz zu der oft verwendeten $S_N$-Theorie, bei welcher sowohl die Neutronenflugrichtungen als auch die Ortsabhängigkeiten diskretisiert werden (vollnumerisches Verfahren), wird bei der $S_\infty$-Theorie die Winkelvariable analytisch behandelt. Infolgedessen entspricht dieses semianalytische Vorgehen einer unendlichfeinen Winkeldiskretisierung ($N \to \infty$) beim $S_N$-Verfahren. Obwohl die Einführung der $S_\infty$-Methode einige der bekannten Nachteile der $S_N$-Theorie (Speicherplatzbedarf, grosse Rechenzeiten) wesentlich verbessern konnte, blieb die Konvergenz relativ langsam, da beide Methoden den Winkelfluss in der Ortskoordinate linear approximierten (Trapezregel). Zudem konnten unphysikalische Oszillationen des Neutronenflusses auftreten, die erst durch spezielle Vorkehrungen vermieden wurden.

Mit dem Ziel, diesen zwei wichtigen Einschränkungen entgegenzuwirken, wird eine Methode entwickelt - die asymptotische $H_K$-$S_\infty$-Methode - welche einerseits eine höhere Ordnung bei der Ortsintegration verwendet (schnellere Konvergenz), andererseits aber auch die notwendige Stabilität aufweist. Die Ortsintegration erfolgt hierbei unter Verwendung eines von Ch. Hermite vorgeschlagenen Formalismus, dessen Fehlerordnung prinzipiell frei wählbar ist und welcher für beliebige Ordnung k immer auf eine 2 Punkt-Rekursion führt. Ferner lassen sich die Koeffizienten des dadurch entstehenden linearen Gleichungssystems durch einen asymptotischen Ausdruck darstellen. Die Anwendung der Hermite-Approximation für den Fall k = 1 auf die Transportgleichung führt in einem ersten Schritt auf die direkte $H_1$-$S_\infty$-Methode, welche ein Gleichungssystem, bestehend aus den (L+1)-Momenten des integrierten Neutronenflusses $\phi$ (L = Grad der Anisotropie der Streuung) sowie aus deren ersten Ableitungen, bildet. Mit Hilfe einer für Legendre-Polynome gültigen Beziehung können anschliessend diese Ableitungen durch die Einführung eines zusätzlichen (L+2)-ten Momentes vollständig eliminiert werden (modifizierte

$H_1$-$S_\infty$-Methode). Eine genaue Betrachtung dieser beiden Formulierungen ermöglicht eine wichtige Anwendung, indem Probleme mit linearer Anisotropie des Streuquerschnittes ($P_1$-Streuung) sich mit dem genau gleichen Aufwand an Rechenzeit wie ein isotropes behandeln lassen. Schliesslich ist noch die $H_3$-$S_\infty$-Methode kurz erwähnt, deren prinzipielle Durchführbarkeit sowie bessere Konvergenz anhand eines einfachen Testbeispiels bestätigt wird.

Um die numerische Brauchbarkeit der $H_1$-$S_\infty$-Methode zu überprüfen, wurde besonderes Gewicht auf zwei physikalisch wichtige Teilprobleme gelegt, nämlich einerseits Eingruppenrechnungen mit beliebiger $P_L$-Streuung, andererseits Mehrgruppen-Mehrzonenrechnungen mit nicht konstanter Schrittweite bei schwacher Ansotropie des Streuquerschnittes. In umfangreichen Vergleichsbeispielen mit dem bekannten vollnumerischen $S_N$-Code ANISN sowie mit dem Abschirmungsprogramm SHIELD ($S_\infty$-DPR-Methode) kommen die erheblichen Vorteile der $H_1$-$S_\infty$-Methode deutlich zum Vorschein. Bei jedem der betrachteten Fälle erfordert der $H_1$-Formalismus zur Erzielung einer bestimmten relativen Genauigkeit eine wesentlich kleinere Rechenzeit und gestattet dazu auch die Lösung von Problemen, welche sich mit den zwei anderen Verfahren mangels Speicherkapazität gar nicht durchführen lassen.