Doctoral Thesis

Grunsky-Ungleichungen vom Garabedian-Schiffer'schen Typus für Paare von schlichten Funktionen

Author(s):
Seiler, Andreas

Publication Date:
1979

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000213286

Diss. ETH 6386

Grunsky-Ungleichungen vom Garabedian-Schiffer'schen Typus für Paare von schlichten Funktionen

ABHANDLUNG
zur Erlangung
des Titels eines Doktors der Mathematik der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von
ANDREAS SEILER
Dipl. Math. ETH
geboren am 21. Januar 1947
von Frauenfeld (Kt. Thurgau)

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. A. Pfluger, Referent
Prof. Dr. A. Huber, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1979

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Klasse SP aller Paare von Funktionen (f,g) betrachtet, welche die folgenden Bedingungen erfüllen :

a) $f(z) = a(z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots.)$ ist eine in $D = \{|z| < 1\}$ definierte schlichte Funktion.

b) $g(z) = b(z + b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots.)$ ist eine in $\Delta = \{|z| > 1\}$ definierte schlichte Funktion.

c) Die Bildgebiete $f(D)$ und $g(\Delta)$ sind disjunkt.

Für diese Funktionenklasse werden Ungleichungen hergeleitet, die zu jenen von P.R. Garabedian und M. Schiffer (Arch. Rational Mech. Anal. 26 (1967)) für die in D schlichten Funktionen $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots.$ analog sind. Diese Ungleichungen sind ihrerseits eine Verallgemeinerung der Grunsky-Ungleichungen, welche bereits durch J.A. Hummel (J. Anal. math. 25 (1972)) auf eine zu SP verwandte Funktionenklasse übertragen wurden.

Für zwei verschiedene Punkte u, v aus $\mathbb{C}-\{0\}$ seien $\tilde{f}(z) = \sqrt{(f(z)-u)/(f(z)-v)}$ und $\tilde{g}(z) = \sqrt{(g(z)-u)/(g(z)-v)}$. Jedem Funktionenpaar (f,g) aus SP werden durch die folgenden Potenzreihenentwicklungen die Koeffizientenmatrizen (a_{kl}), (b_{kl}), (c_{kl}) zugeordnet :

$$\log \frac{(z-z')(\tilde{f}(z)+\tilde{f}(z'))}{\tilde{f}(z)-\tilde{f}(z')} = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}\, z^k\, z'^l ,$$

$$\log \frac{(z-z')(\tilde{g}(z)+\tilde{g}(z'))}{zz'(\tilde{g}(z)-\tilde{g}(z'))} = \sum_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}\, z^{-k}\, z'^{-l} ,$$

$$\log \frac{\tilde{g}(z)+\tilde{f}(z')}{\tilde{g}(z)-\tilde{f}(z')} = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{kl}\, z'^k\, z^{-l} .$$

Diese Koeffizienten a_{kl}, b_{kl}, c_{kl} lassen sich leicht aus den Koeffizienten der Potenzreihenentwicklungen von f und g berechnen.

<u>Satz</u> : Es seien μ_0, ν_0 reelle Parameter und $\mu_1,\dots,\mu_N,\nu_1,\dots,\nu_N$ komplexe Parameter. Für alle Paare (f,g) aus SP und alle Punkte $u,v \in \mathbb{C} - (f(D)\cup g(\Delta))$, $u \neq v$, gilt

$$\mathrm{Re}\left\{ \sum_{k,l=0}^{N} a_{kl}\,\mu_k\,\mu_l + b_{kl}\,\nu_k\,\nu_l + 2c_{kl}\,\mu_k\,\nu_l \right\} + \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k}\left(|\mu_k|^2 + |\nu_k|^2\right) \geqq 0.$$

Zum Beweis wird die Methode der "Konturintegration" verwendet (vgl. die Arbeit von Chr. Pommerenke, Arch. Rational Mech. Anal. 35 (1969)). Man berechnet den Flächeninhalt des"Zwischengebietes" $\mathbb{C} - (f(D)\cup g(\Delta))$ unter Verwendung einer Flächenmetrik, welche durch ein quadratisches Differential der Form $(w-u)^{-1}(w-v)^{-1}R(w)^2\,dw^2$ mit rationaler Funktion R bestimmt ist und addiert dazu die mit geeigneten Hilfsmetriken gemessenen Flächeninhalte von D und von Δ. Diese Flächenintegrale können mit Hilfe der Green'schen Formel in Umlaufintegrale verwandelt werden und wegen der speziellen Wahl der Hilfsmetriken mit dem Residuensatz ausgewertet werden. Bei passender Wahl von R ist die Summe dieser Flächeninhalte gleich der linken Seite der behaupteten Ungleichung.

Der obige Satz bleibt auch dann richtig, wenn man beliebige, voneinander verschiedene Punkte u,v aus $\mathbb{C} - \{0\}$ zulässt. Es sind dann aber Einschränkungen für die Parameter μ_k, ν_k notwendig. Der Beweis verläuft im wesentlichen gleich wie oben. Es entsteht aber die neue Schwierigkeit, dass die in D und Δ verwendeten Hilfsmetriken nicht mehr eindeutig sind, sodass die Gebiete D und Δ in passender Weise aufgeschlitzt werden müssen. Damit bei der Verwandlung in Randintegrale keine Zusatzterme auftreten, bildet man diese Schlitze aus Trajektorien des quadratischen Differentials $(w-u)^{-1}(w-v)^{-1}R(w)^2\,dw^2$ und aus Trajektorien eines andern quadratischen Differentials, das mit den Hilfsmetriken zusammenhängt. Zur Konstruktion solcher Schlitze sind die Zusatzbedingungen für die Parameter erforderlich.

Als Anwendung dieses Satzes und seiner Erweiterung erhält man für $N = 0$ Ungleichungen für a und b, unter anderem das Analogon zum Koebe'schen Viertelssatz für die Klasse SP. Für $N = 1$ ergeben sich Schranken für die Koeffizienten b_0, b_1, a_2, $a_3-a_2^2$. Hauptproblem bei den Anwendungen bildet die geeignete Wahl der Parameter μ_k, ν_k.

Abstract

We consider the class of all pairs of univalent functions which map the unit disk $|z| < 1$ and its exterior $|z| > 1$ onto disjoint domains of the extended complex plane leaving the origin and the point at infinity fixed. For this class of functions we first prove inequalities of Garabedian-Schiffer type depending on a large set of parameters and on two omitted values u, v of the mapping functions. In a second step the result is extended to the case where u and v are arbitrary values of the punctured plane, suitable restrictions for the parameters being necessary. For the proof the method of contour integration is used. A quadratic differential of the form $(w-u)^{-1}(w-v)^{-1}R(w)^2\,dw^2$ with a rational function R plays a decisive role. As applications we get bounds for the coefficients of the power series expansions of the mapping functions and an analogue of Koebe's one-quarter theorem.