Lie-Algebren mit homologischer Dualität

Author(s):
Plesko-Meier, Hanna

Publication Date:
1980

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000217862

DISS. ETH Nr. 6656

LIE-ALGEBREN MIT HOMOLOGISCHER DUALITAET

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines

Doktors der Mathematik

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

HANNA PLESKO - MEIER

Dipl. Math. ETH

geboren am 9. Mai 1952

von Regensdorf

Angenommen auf Antrag von

Prof.Dr.B.Eckmann, Referent

Prof.Dr.U.Stammbach, Korreferent

1980

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird der für Gruppen bekannte Dualitätsbegriff auf die Homologietheorie der Lie-Algebren übertragen; dabei sind immer Lie-Algebren über einem kommutativen Ring K gemeint, welche als K-Moduln frei sind.

Im ersten Teil wird gezeigt, dass jede Lie-Algebra von endlichem Rang n über K eine Poincaré-Dualitäts-Lie-Algebra der Dimension n ist. Ferner wird gezeigt, dass allgemein Dualitäts-Lie-Algebren g der Dimension n ganz analoge Eigenschaften aufweisen wie Dualitäts-Gruppen der Dimension n: (i) $H^k(g;A)$, $k \neq n$, ist 0 für induzierte g-Moduln A; insbesondere ist $H^k(g;Ug) = 0$ für $k \neq n$. (ii) Der dualisierende Modul C ist isomorph zu $H^n(g;Ug)$; er ist K-flach. (iii) g ist vom Typ (FP).

Im zweiten Teil wird gezeigt, dass gewisse der genannten Bedingungen dafür hinreichend sind, dass eine Lie-Algebra eine Dualitäts-Lie-Algebra der Dimension n ist. Als Anwendung wird bewiesen, dass jede endlich erzeugte freie Lie-Algebra eine Dualitäts-Lie-Algebra der Dimension 1 ist; jedoch handelt es sich nicht um Poincaré-Dualität.

Im dritten Teil wird ein Erweiterungssatz für Dualitäts-Lie-Algebren bewiesen und seine Umkehrung diskutiert. Mit Hilfe dieses Satzes erhält man Beispiele von Dualitäts-Lie-Algebren, die weder von endlichem Rang über K noch endlich erzeugt frei sind. Eine Konsequenz des Erweiterungssatzes in niederen Dimensionen besagt: Wenn eine Lie-Algebra g über einem Körper K einen freien g-Modul F besitzt mit $H^1(g;F) \neq 0$, dann enthält g keine endlich erzeugten, echten Ideale.

Abstract

In the present work the concept of homological duality well-known for groups is extended to the homology theory of Lie algebras (over a commutative ring K, assumed free as K-modules).

In Section 1 it is shown that all Lie algebras of finite rank n over K are examples of "Poincaré duality Lie algebras" of dimension n. Further it is shown that general "duality Lie algebras" g have properties analogous to those of duality groups of dimension n : (i) The cohomology groups $H^k(g;A)$, $k \neq n$, are 0 for all induced modules A; in particular, $H^k(g;Ug) = 0$, $k \neq n$. (ii) The dualizing module C is isomorphic to $H^n(g;Ug)$, and is K-flat. (iii) g is of type (FP); i.e., there exists a finite and finitely generated resolution of K over Ug.

In Section 2 it is shown that certain of these properties are sufficient for duality. As an application one proves that all finitely generated free Lie algebras are duality Lie algebras of dimension 1; however they do not have Poincaré duality.

In Section 3 an extension theorem for duality Lie algebras is established, and its converse is discussed. Using this proposition, examples of duality Lie algebras are obtained which are neither of finite rank over K nor finitely generated free. A consequence of the extension theorem in low dimensions implies: If a Lie algebra g over a field K admits a free g-module F with $H^1(g;F) \neq 0$, then g does not contain any finitely generated proper ideal.