



Doctoral Thesis

## Nicht-lokale Untersuchung des Bifurkationsverhaltens der Fitzhugh-Gleichung

**Author(s):**

Hein, Werner

**Publication Date:**

1980

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000227396> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH Nr. 6650

NICHT-LOKALE UNTERSUCHUNG DES  
BIFURKATIONSVERHALTENS DER FITZHUGH-GLEICHUNG

Abhandlung

zur Erlangung des Titels eines  
Doktors der Mathematik  
der  
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE  
ZÜRICH

vorgelegt von

WERNER HEIN  
Dipl. Math. ETH  
geboren am 6. August 1952  
von Nussdorf (BL)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. J. T. Marti, Referent  
Dr. U. Kirchgraber, Korreferent

1980

## ABSTRACT

The Hopf Bifurcation deals with the creation of a family of periodic solutions for a system of ordinary differential equations that depends on a parameter  $\mu$ . The Hopf Bifurcation Theorem is local in nature as far as only a small range of the parameter  $\mu$  is concerned.

The present study is dedicated to the Fitzhugh Nerve Model and concerns the non-local behaviour of bifurcating periodic solutions. The Fitzhugh Model admits the application of the Hopf Bifurcation Theorem for two different parameter-values  $\mu_1$  and  $\mu_2$ .  $\mu_1$  and  $\mu_2$  themselves depend on additional parameters  $b, \kappa$  and happen to be close for a certain region  $b, \kappa$ . This very problem is studied due to the fact, that it can be treated by perturbation methods in spite of its global nature. Since the perturbation problem is not quite standard, it is necessary to extend the Method of Averaging to perturbed integrable one-degree of freedom systems, the integrable part being a nonlinear oscillator. We are able to express the averaged equation for the amplitude in terms of a certain class of standard functions, which are extensively discussed. The application to the Fitzhugh Model provides a non-local bifurcation diagram.

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Hopf-Bifurkation behandelt das Abzweigen von periodischen Lösungen aus einer kritischen Gleichgewichtslage eines von einem Parameter abhängigen autonomen Differentialgleichungssystems. Dabei wird nur eine sehr kleine Umgebung sowohl des Parameters wie auch der Gleichgewichtslage untersucht. Über den weiteren Verlauf der periodischen Lösung in Abhängigkeit des Parameters wird keine Aussage gemacht.

Bei der Fitzhugh-Gleichung gibt es zwei Parameterwerte, wo kritische Gleichgewichtslagen auftreten und periodische Lösungen abzweigen. Die Vermutung liegt nahe, dass wegen der Instabilität der Gleichgewichtslage zwischen diesen beiden kritischen Parameterwerten die Äste der periodischen Lösungen sich nicht-lokal in diesen grösseren Bereich hinein fortsetzen.

Falls die Differenz der erwähnten kritischen Parameterwerte klein ist, kann das globale Bifurkationsdiagramm ermittelt werden. Der Nachweis gelingt mit der im ersten Teil entwickelten Störungsrechnung für gestörte Hamilton'sche Systeme im  $\mathbb{R}^2$ , wobei speziell ein harmonischer Oszillator mit einer polynomialen Potentialfunktion und ebensolcher Störfunktion behandelt wird. Gegenüber der analytischen Störungsrechnung, wo vorausgesetzt wird, dass die quasiperiodischen Lösungen des ungestörten Problems explizit bekannt sind, wird der kanonische Charakter des ungestörten Differentialgleichungssystems ausgenützt und die gemittelte Amplitudengleichung als Linearkombination von speziellen Standardfunktionen angegeben. Für die Auswertung dieser Funktionen wird ein geeignetes numerisches Verfahren vorgestellt.

Ich danke Herrn Prof. J.T. Marti für die bereitwillige Übernahme des Referats nach dem Hinschied von Prof. E. Stiefel, unter dessen Leitung diese Arbeit begonnen wurde. Sodann danke ich Herrn Dr. U. Kirchgraber für seine Betreuung und die Übernahme des Korreferats. Weiter haben Hinweise zu nu-

merischen Aspekten der Arbeit von Dr. J. Waldvogel sowie Diskussionen mit den Kollegen am Institut zum Gelingen beigetragen.